

SERWAY · JEWETT

FÍSICA

para ciencias e ingeniería

Volumen 1

Séptima edición

FÍSICA
para ciencias e ingeniería

Volumen 1

Séptima edición

Raymond A. Serway
Emérito, James Madison University

John W. Jewett, Jr.
California State Polytechnic University, Pomona

Traducción
Víctor Campos Olguín
Traductor profesional

Revisión Técnica
Misael Flores Rosas
Profr. de Termodinámica
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Física para ciencias e ingeniería
Volumen 1. Séptima edición.
Raymond A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Héctor Enrique Galindo Iturribarría

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Editora de producción:
Abril Vega Orozco

Ilustrador:
Rolin Graphics, Progressive Information Technologies, Lachina Publishing Services

Diseño de portada:
Patrick Devine Design

Imagen de portada:
Portada: © 2005 Tony Dunn;
Contraportada: © 2005 Kurt Hoffman, Abra Marketing

Composición tipográfica:
EDITEC S.A. de C.V.

Traducido del libro *Physics for Scientists and Engineers*
Volume 1, Seventh Edition
Publicado en inglés por Brooks/Cole ©2008
ISBN: 0-495-11243-7
Datos para catalogación bibliográfica:
Raymond A. Serway y John W. Jewett, Jr.
Física para ciencias e ingeniería. Volumen 1.
Séptima edición.
ISBN-13: 978-607-481-357-9
ISBN-10: 607-481-357-4

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Dedicamos este libro a nuestras esposas
Elizabeth y Lisa, y a todos nuestros hijos
y nietos por su amorosa comprensión
cuando pasamos tiempo escribiendo
en lugar de estar con ellos.



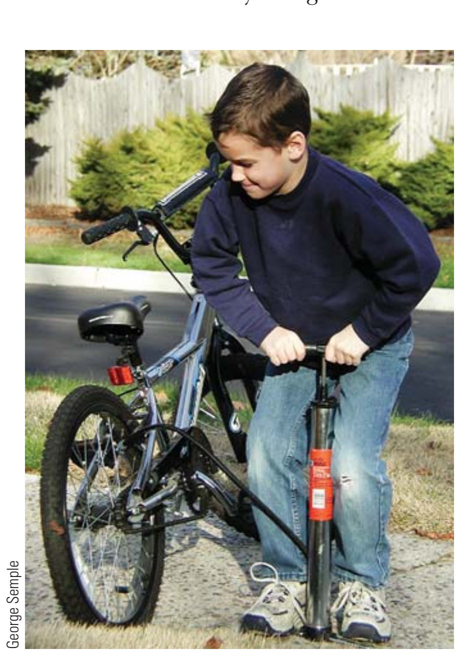
John W. Jewett, Jr.

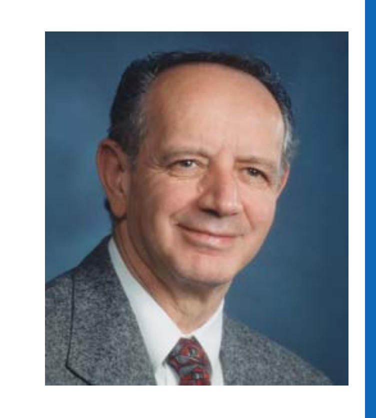


Cortesía de NASA

Contenido

NASA


George Semple



Raymond A. Serway recibió su doctorado en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la James Madison University. En 1990 recibió el Madison Scholar Award en la James Madison University, donde enseñó durante 17 años. El doctor Serway comenzó su carrera docente en la Clarkson University, donde dirigió investigación y enseñó de 1967 a 1980. En 1977 recibió el Distinguished Teaching Award en la Clarkson University y el Alumni Achievement Award del Utica College en 1985. Como científico invitado en el IBM Research Laboratory en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Müller, ganador del premio Nobel 1987. El doctor Serway también fue científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo, Sam Marshall. Además de las primeras ediciones de este libro, el doctor Serway es coautor de *Principles of Physics*, cuarta edición; *College Physics*, séptima edición; *Essentials of College Physics*; y *Modern Physics*, tercera edición. También es coautor del libro de bachillerato *Physics*, publicado por Holt, Rinehart y Winston. Además, el doctor Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación en el campo de física de materia condensada y ha impartido más de 70 conferencias en reuniones profesionales. El doctor Serway y su esposa, Elizabeth, disfrutan viajar, jugar al golf, cantar en un coro de iglesia y pasar tiempo de calidad con sus cuatro hijos y ocho nietos.



John W. Jewett, Jr., obtuvo su doctorado en la Ohio State University, con especialidad en las propiedades ópticas y magnéticas de la materia condensada. El doctor Jewett comenzó su carrera académica en el Richard Stockton College de Nueva Jersey, donde enseñó de 1974 a 1984. En la actualidad es profesor de física en la California State Polytechnic University, Pomona. A lo largo de su carrera docente, el doctor Jewett ha sido un activo promotor de la educación en ciencias. Además de recibir cuatro becas National Science Foundation, ayudó a fundar y dirigir el Southern California Area Modern Physics Institute. También dirigió el Science IMPACT (Institute of Modern Pedagogy and Creative Teaching), que trabaja con profesores y escuelas para desarrollar currícula efectiva en ciencia. Los premios del doctor Jewett incluyen el Stockton Merit Award en el Richard Stockton College en 1980, el Outstanding Professor Award en la California State Polythecnic University para 1991-1992, y el Excellence in Undergraduate Physics Teaching Award de la American Association of Physics Teachers en 1998. Ha impartido más de 80 conferencias en reuniones profesionales, incluidas conferencias en eventos internacionales en China y Japón. Además de su trabajo en este libro, es coautor de *Principles of Physics*, cuarta edición, con el doctor Serway, y autor de *The World of Physics... Mysteries, Magic and Myth*. Al doctor Jewett le gusta tocar piano con su banda de físicos, viajar y coleccionar antigüedades que se puedan usar como aparatos de demostración en clases de física. Lo más importante, le gusta pasar el tiempo con su esposa, Lisa, y sus hijos y nietos.

Al escribir esta séptima edición de *Física para ciencias e ingeniería*, continuamos nuestros es-fuerzos actuales por mejorar la claridad de la presentación e incluir nuevas características pedagógicas que ayudan a apoyar los procesos de aprendizaje y enseñanza. Al retroalimentar las sugerencias de los usuarios de la sexta edición, así como de los revisores, hemos clarificado el texto para satisfacer mejor las necesidades de los estudiantes y profesores.

Este libro está pensado para un curso introductorio de física para estudiantes que se especializan en ciencia o ingeniería. Todo el contenido del libro en su versión amplia podría cubrirse en un curso de tres semestres, pero es posible usar el material en secuencias más breves con la omisión de capítulos y subtemas seleccionados. Los antecedentes matemáticos ideales de los estudiantes que tomen este curso deben incluir un semestre de cálculo. Si esto no es posible, el estudiante debe inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

Objetivos

Este libro de introducción a la física tiene dos objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos básicos y principios de la física y fortalecer la comprensión de los conceptos y principios a través de un amplio intervalo de aplicaciones interesantes al mundo real. Para satisfacer estos objetivos, hemos enfatizado en argumentos físicos sólidos y metodología para resolver problemas. Al mismo tiempo hemos intentado motivar al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, incluidas ingeniería, química y medicina.

Cambios en la séptima edición

Para preparar la séptima edición de este texto se hicieron varios cambios y mejoras. Algunas de las nuevas características se basan en nuestras experiencias y en tendencias actuales en educación en ciencia. Otros cambios se incorporaron en respuesta a comentarios y sugerencias ofrecidos por los usuarios de la sexta edición y por revisores del manuscrito. Las características que se mencionan aquí representan los principales cambios en la séptima edición.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS Se hizo una revisión sustancial de las preguntas y problemas de fin de capítulo con la finalidad de mejorar su variedad, interés y valor pedagógico, mientras conservaban su claridad y calidad. Cerca de 23% de las preguntas y problemas son nuevos o cambiaron sustancialmente. Muchas de las preguntas para cada capítulo están en formato objetivo. Numerosos problemas en cada capítulo piden explícitamente razonamiento cualitativo en algunas partes, así como respuestas cuantitativas en otras:

> **19.** ● Considere una porción de aire en un tubo recto que se mueve con una aceleración constante de -4.00 m/s^2 y tiene una velocidad de 13.0 m/s a las 10:05:00 a.m., en cierta fecha. a) ¿Cuál es su velocidad a las 10:05:01 a.m.? b) ¿A las 10:05:02 a.m.? c) ¿A las 10:05:02.5 a.m.? d) ¿A las 10:05:04 a.m.? e) ¿A las 10:04:59 a.m.? f) Describa la forma de una gráfica de velocidad en función del tiempo para esta porción de aire. g) Argumente a favor o en contra del enunciado “conocer un solo valor de la aceleración constante de un objeto es como conocer toda una lista de valores para su velocidad”.


©Charles D. Winters

EJEMPLOS Todos los ejemplos en el texto se remodelaron y ahora se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos físicos. La columna izquierda muestra información textual que describe las etapas para resolver el problema. La columna derecha muestra las operaciones matemáticas y los resultados de seguir dichos pasos. Esta presentación facilita la concordancia del concepto con su ejecución matemática y ayuda a los estudiantes a organizar su trabajo. Dichos ejemplos reconstituidos siguen de cerca una Estrategia General para Resolver Problemas que se introduce en el capítulo 2 para reforzar hábitos efectivos para resolver problemas.

Cada solución se reorganizó para seguir más de cerca la Estrategia General para Resolver Problemas que se resalta en el capítulo 2, para reforzar buenos hábitos en la solución de problemas.

EJEMPLO 3.2 **Un viaje de vacaciones**

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

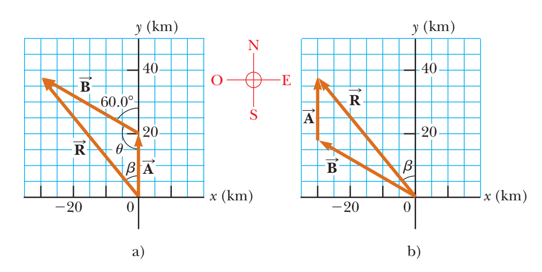


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. b) Sumar los vectores en orden inverso $(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}})$ da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ dibujados en la figura 3.11a ayudan a formar conceptos del problema.

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ es la resultante cuando se suman los dos desplazamientos individuales $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Incluso se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos.

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con el álgebra. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo (véase el apéndice B.4).

Cada paso de la solución se detalla en un formato de dos columnas. La columna izquierda proporciona una explicación para cada paso matemático de la columna derecha, para reforzar mejor los conceptos físicos.

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y advierta que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$
$$= 48.2\text{ km}$$

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen} 120° = 0.629$$

$$\beta = 38.9°$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

Finalizar ¿El ángulo β, que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo real medido del diagrama con el uso del método gráfico? ¿Es razonable que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ sea mayor que la de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? ¿Las unidades de $\vec{\mathbf{R}}$ son correctas?

Aunque el método gráfico de sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, un triángulo sólo resulta si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿Qué pasaría si? Considere que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

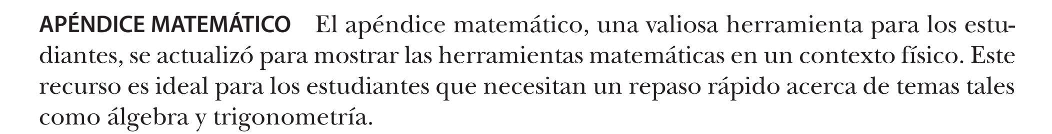
Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores sumados en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

Los enunciados **¿Qué pasaría si?** aparecen casi en 1/3 de los ejemplos trabajados y ofrecen una variación de la situación planteada en el texto del ejemplo. Por ejemplo, esta característica puede explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar qué sucede cuando una cantidad se lleva a un valor límite particular o preguntar si se puede determinar información adicional acerca de la situación del problema. Esta característica alienta a los estudiantes a pensar acerca de los resultados del ejemplo y auxiliarlos en la interpretación conceptual de los principios.

TAREAS EN LÍNEA Ahora es más fácil asignar tarea en línea con Serway y Jewett y Enhanced WebAssign. Todos los ejemplos trabajados, problemas de fin de capítulo, figuras, preguntas rápidas y la mayoría de las preguntas están disponibles en WebAssign. La mayoría de los problemas incluyen sugerencias y retroalimentación para proporcionar reforzamiento instantáneo o instrucciones para dicho problema. Además del contenido del texto, hemos agregado herramientas de corrección matemática para ayudar a los estudiantes a adquirir rapidez en álgebra, trigonometría y cálculo.

RESÚMENES Cada capítulo contiene un resumen que revisa los conceptos y ecuaciones importantes explicados en dicho capítulo. Una nota marginal junto a cada resumen de capítulo dirige a los estudiantes a preguntas adicionales, animaciones y ejercicios interactivos para dicho capítulo en el sitio Web. El formato del resumen de fin de capítulo se revisó por completo para esta edición. El resumen se divide en tres secciones: *Definiciones*, *Conceptos y Principios*, y *Modelos de análisis para resolver problemas*. En cada sección, recuadros tipo ficha de estudio se enfocan en cada definición, concepto, principio o modelo de análisis separado.


Thomson Learning/Charles D. Winters



APÉNDICE MATEMÁTICO El apéndice matemático, una valiosa herramienta para los estudiantes, se actualizó para mostrar las herramientas matemáticas en un contexto físico. Este recurso es ideal para los estudiantes que necesitan un repaso rápido acerca de temas tales como álgebra y trigonometría.

CAMBIO EN EL CONTENIDO El contenido y organización del libro son esencialmente los mismos que en la sexta edición. Muchas secciones de varios capítulos se afinaron, borraron o combinaron con otras secciones para permitir una presentación más balanceada. Los vectores ahora se denotan en negritas con una flecha sobre ellos (por ejemplo, $\vec{\mathbf{v}}$), así son más fáciles de reconocer. Los capítulos 7 y 8 se reorganizaron por completo con la idea de preparar a los estudiantes para aplicar un planteamiento unificado de la energía a lo largo del texto. Una nueva sección en el capítulo 9 enseña a los estudiantes cómo analizar sistemas deformables con la ecuación de conservación de la energía y el teorema impulso–cantidad de movimiento. En el sitio Web de la compañía puede encontrar una lista más detallada de los cambios de contenido.

Contenido

El material en este libro cubre temas fundamentales de física clásica y proporciona una introducción a la física moderna. El libro se divide en seis partes. La Parte 1 (capítulos 1 a 14) se relaciona con los fundamentos de la mecánica newtoniana y la física de fluidos; la Parte 2 (capítulos 15 a 18) cubre oscilaciones, ondas mecánicas y sonido; la Parte 3 (capítulos 19 a 22) aborda el calor y la termodinámica.

Características del texto

La mayoría de los instructores cree que el libro seleccionado para un curso debe ser la principal guía del estudiante para entender y aprender la materia de estudio. Además, el libro debe tener un estilo accesible y estar escrito para facilitar la instrucción y el aprendizaje. Con estos puntos en mente, hemos incluido muchas características pedagógicas, que se mencionan a continuación, y tienen la intención de mejorar su utilidad tanto a estudiantes como a instructores.

Resolución de problemas y comprensión conceptual

ESTRATEGIA GENERAL PARA RESOLVER PROBLEMAS Al final del capítulo 2 se perfila una estrategia general a seguir por los estudiantes y les proporciona un proceso estructurado para resolver problemas. En los capítulos restantes la estrategia se emplea explícitamente en cada ejemplo, de modo que los estudiantes aprenden cómo se aplica.

MODELADO Aunque los estudiantes se enfrentan con cientos de problemas durante sus cursos de física, los instructores se dan cuenta de que un número relativamente pequeño de situaciones físicas forma la base de estos problemas. Al enfrentar un problema nuevo, un físico forma un *modelo* del problema para resolverlo de manera simple al identificar la situación física común que se presenta en el problema. Por ejemplo, muchos problemas involucran partículas bajo aceleración constante, sistemas aislados u ondas bajo refracción. Ya que los físicos han estudiado estas situaciones ampliamente y comprenden el comportamiento asociado, pueden aplicar este conocimiento como un modelo para un nuevo problema. En ciertos capítulos esta séptima edición identifica modelos de análisis, que son situaciones físicas (como la partícula bajo aceleración constante, el sistema aislado o la onda bajo refracción) que se presenta de manera frecuente, que se pueden usar como un modelo para resolver un problema no familiar. Estos modelos se explican en el texto del capítulo y el estudiante los recuerda en el resumen de fin de capítulo bajo el encabezado Modelos de análisis para resolver problemas.


George Semple

PROBLEMAS Un extenso conjunto de problemas se incluye al final de cada capítulo; en total, el texto contiene aproximadamente tres mil problemas. Las respuestas a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro. Para conveniencia, tanto del estudiante como del instructor, casi dos tercios de los problemas tienen claves referentes a secciones específicas del capítulo. Los problemas restantes, etiquetados como *Problemas adicionales*, no tienen claves a secciones específicas. La numeración para problemas directos se imprimen en negro, para problemas de nivel intermedio en azul y para problemas desafiantes en magenta.

- **Problemas "no sólo un número"** Cada capítulo incluye varios problemas marcados que requieren que los estudiantes piensen cualitativamente en algunas partes y cuantitativamente en otras. Los instructores pueden asignar tales problemas para guiar a los estudiantes hacia una comprensión más profunda, practicar buenas técnicas de resolución de problemas y prepararse para los exámenes.
- **Problemas para desarrollar razonamiento simbólico** Cada capítulo contiene problemas que piden soluciones en forma simbólica, así como muchos problemas piden respuestas numéricas. Para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades en el razonamiento simbólico, cada capítulo contiene un par de problemas de otra manera idénticos, uno que pide una solución numérica y uno que pide una deducción simbólica. En esta edición, además cada capítulo tiene un problema que da un valor numérico por cada dato menos uno, de modo que la respuesta muestra cómo la incógnita depende del dato representado simbólicamente. Por lo tanto la respuesta tiene la forma de la función de una variable, familiar al estudiante a partir de las matemáticas. Razonar acerca del comportamiento de esta función pone énfasis en la etapa *Finalizar* de la Estrategia General para Resolver Problemas. Todos los problemas que desarrollan razonamiento simbólico se identifican mediante una pantalla de color beige:

> **53.** ● Un resorte ligero tiene una longitud no estirada de 15.5 cm. Se describe mediante la ley de Hooke con constante de resorte 4.30 N/m. Un extremo del resorte horizontal se mantiene sobre un eje vertical fijo, y el otro extremo se une a un disco de masa m que se puede mover sin fricción sobre una superficie horizontal. El disco se pone en movimiento en un círculo con un periodo de 1.30 s. a) Encuentre la extensión del resorte x conforme depende de m. Evalúe x para b) $m = 0.070\,0$ kg, c) $m = 0.140$ kg, d) $m = 0.180$ kg y e) $m = 0.190$ kg. f) Describa el patrón de variación de x como dependiente de m.

- **Problemas de repaso** Muchos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren que el estudiante combine conceptos cubiertos en el capítulo con los que se explicaron en capítulos anteriores. Estos problemas reflejan la naturaleza cohesiva de los principios en el texto y verifican que la física no es un conjunto de ideas dispersas. Cuando se mira hacia temas del mundo real como el calentamiento global o las armas nucleares, puede ser necesario invocar ideas físicas de varias partes de un libro como éste.
- **"Problemas Fermi"** Como en ediciones anteriores, al menos un problema en cada capítulo pide al estudiante razonar en términos de orden de magnitud.

- **Problemas de diseño** Varios capítulos contienen problemas que le solicitan al estudiante determinar parámetros de diseño para un dispositivo práctico, de modo que pueda funcionar como se requiere.
- **Problemas "*Jeopardy!*"** Muchos capítulos dan a los estudiantes práctica para cambiar entre diferentes representaciones, al establecer ecuaciones y pedir una descripción de una situación a la que aplicar, así como una respuesta numérica.
- **Problemas en términos del cálculo** Todos los capítulos contienen al menos un problema que aplica ideas y métodos del cálculo diferencial y un problema que usa cálculo integral.

El website del instructor, proporciona listas de problemas que usan cálculo, problemas que alientan o requieren uso de computadora, problemas con partes **"¿Qué pasaría si?"**, problemas a los que se hace referencia en el texto del capítulo, problemas en función de la información experimental, problemas de orden de magnitud, problemas acerca de aplicaciones biológicas, problemas de diseño, problemas *Jeopardy!*, problemas de repaso, problemas que reflejan razonamiento histórico acerca de ideas confusas, problemas que desarrollan habilidad de razonamiento simbólico, problemas con partes cualitativas, preguntas de clasificación y otras preguntas complementarias.

PREGUNTAS La sección de preguntas al final de cada capítulo se revisó por completo. Se agregaron preguntas de opción múltiple, de clasificación y verdadero-falso. El instructor puede seleccionar entre ellas para asignar como tarea o usar en el salón de clase, posiblemente con métodos de "instrucción de pares" y acaso con sistemas de "compaginador". En esta edición se incluyen más de ochocientas preguntas. Las respuestas a preguntas seleccionadas se incluyen en el paquete de recursos que acompañan al libro (http://latinoamerica.cengage.com/serway), y las respuestas a todas las preguntas se encuentran en el *Manual de soluciones del instructor*.

19. O i) Clasifique las aceleraciones gravitacionales que mediría para a) un objeto de 2 kg a 5 cm arriba del suelo, b) un objeto de 2 kg a 120 cm sobre el suelo, c) un objeto de 3 kg a 120 cm sobre el suelo y d) un objeto de 3 kg a 80 cm sobre el suelo. Mencione primero el que tiene aceleración con mayor magnitud. Si dos son iguales, muestre su igualdad en la lista. **ii)** Clasifique las fuerzas gravitacionales sobre los mismos cuatro objetos, primero la mayor magnitud. **iii)** Clasifique las energías potenciales gravitacionales (del sistema objeto–Tierra) para los mismos cuatro objetos, primero la mayor, y considere $y = 0$ en el suelo.

23. O A un cubo de hielo se le da un empujón y se desliza sin fricción sobre una mesa a nivel. ¿Qué es correcto? a) Está en equilibrio estable. b) Está en equilibrio inestable. c) Está en equilibrio neutro. d) No está en equilibrio.

EJEMPLOS Para auxiliar la comprensión del estudiante se presentan dos tipos de ejemplos. Todos los ejemplos en el texto se pueden asignar para tarea en WebAssign.

El primer tipo de ejemplo presenta un problema y respuesta numérica. Como se señaló anteriormente, las soluciones a estos ejemplos se alteraron en esta edición para presentar una plantilla de dos columnas para explicar los conceptos físicos y las etapas matemáticas lado a lado. Todo ejemplo sigue las etapas explícitas de la Estrategia general para resolver problemas que se resalta en el capítulo 2.

El segundo tipo de ejemplo es conceptual en naturaleza. Para dar énfasis a la comprensión de los conceptos físicos, los muchos ejemplos conceptuales se etiquetan como tales, se ponen en recuadros y están diseñados para enfocar a los estudiantes en la situación física del problema.

¿QUÉ PASARÍA SI? Aproximadamente un tercio de los ejemplos del texto contienen una condicional **¿Qué pasaría si?** Al completar la solución del ejemplo, una pregunta **¿Qué pasaría si?** ofrece una variación en la situación planteada en el texto del ejemplo. Por ejemplo, esta característica puede explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar lo que ocurre cuando una cantidad se lleva a un valor límite

particular, o preguntar si es posible determinar información adicional acerca de la situación. Esta característica alienta a los estudiantes a pensar acerca de los resultados del ejemplo; también ayuda en la interpretación conceptual de los principios. Las preguntas **¿Qué pasaría si?** también preparan a los estudiantes para encontrar problemas novedosos que se presenten en los exámenes. Algunos de los problemas de fin de capítulo también incluyen esta característica.

PREGUNTAS RÁPIDAS Las preguntas rápidas proporcionan a los estudiantes una oportunidad para poner a prueba su comprensión de los conceptos físicos presentados. Las preguntas piden a los estudiantes tomar decisiones de acuerdo a un razonamiento firme, y algunas de las preguntas se escribieron para ayudar a los estudiantes a superar interpretaciones equívocas comunes. Las preguntas rápidas se presentan en un formato objetivo, que incluyen opción múltiple, verdadero–falso y de clasificación. Las respuestas a todas las preguntas rápidas se encuentran al final de cada capítulo. En el website están disponibles preguntas rápidas adicionales que se pueden usar en la enseñanza en el salón de clase. Muchos instructores prefieren usar tales preguntas en un estilo de enseñanza de "instrucción por búsqueda" o con el uso de sistema de respuesta personal "compaginadores", pero también se pueden usar en formato de pregunta estándar.

Pregunta rápida 7.5 Se carga un dardo en una pistola de juguete, accionada por resorte, al empujar el resorte hacia adentro una distancia x. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido deja la pistola el segundo dardo, en comparación con el primero? a) cuatro veces más rápido, b) dos veces más rápido, c) la misma, d) la mitad de rápido, e) un cuarto de rápido.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.2
Dos tipos de rapidez/velocidad

No confunda v, la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y, la velocidad transversal de un punto sobre la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

PREVENCIONES DE RIESGOS OCULTOS Más de doscientas *Prevenciones de riesgos ocultos* se proporcionan para ayudar a los estudiantes a evitar errores y malas interpretaciones comunes. Estas características, que se colocan en los márgenes del texto, abordan tanto malas interpretaciones estudiantiles comunes como situaciones en que los estudiantes con frecuencia siguen rutas improductivas.

Características útiles

ESTILO Para facilitar la rápida comprensión, hemos escrito el libro en un estilo claro, lógico y atractivo. Elegimos un estilo de escribir que es un poco informal y relajado de modo que los estudiantes encontrarán el texto atractivo y agradable para leer. Los nuevos términos se definen cuidadosamente y hemos evitado el uso de vocabulario especial.

ENUNCIADOS Y ECUACIONES IMPORTANTES Los enunciados y definiciones más importantes se ponen en negritas o se resaltan con una pantalla para agregar énfasis y facilitar la revisión. De igual modo, las ecuaciones importantes se resaltan con una pantalla para facilitar su ubicación.

NOTAS MARGINALES Los comentarios y notas que aparecen en el margen con un icono ▶ se pueden usar para ubicar enunciados, ecuaciones y conceptos importantes en el texto.

USO PEDAGÓGICO DEL COLOR Los lectores deben consultar el cuadro pedagógico de color (al final del libro) para una lista de los símbolos en color que se usan en los diagramas del texto. Este sistema se usa consistentemente en todas las partes del texto.

NIVEL MATEMÁTICO Introducimos el cálculo de manera gradual, teniendo en mente que los estudiantes con frecuencia toman cursos introductorios de cálculo y física simultáneamente. La mayoría de las etapas se muestra cuando se desarrollan ecuaciones básicas, y con frecuencia se hace referencia a los apéndices matemáticos cerca del final del texto. Los productos vectoriales se introducen más adelante en el texto, donde se necesitan en aplicaciones físicas. El producto punto se introduce en el capítulo 7, que aborda la energía de un sistema; el producto cruz se introduce en el capítulo 11, que se relaciona con cantidad de movimiento angular.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS Las cifras significativas tanto en los ejemplos trabajados como en los problemas de fin de capítulo se manejaron con cuidado. La mayoría de los ejemplos numéricos se trabaja a dos o a tres cifras significativas, depende de la precisión de los datos proporcionados. Los problemas de fin de capítulo por lo regular establecen datos y respuestas a tres dígitos de precisión.

UNIDADES A lo largo del texto se usa el sistema internacional de unidades (SI). El sistema estadounidense de unidades usuales sólo se usa en una medida limitada en los capítulos acerca de mecánica y termodinámica.

APÉNDICES Casi al final del texto se proporcionan varios apéndices. La mayoría del material de los apéndices representa un repaso de conceptos y técnicas matemáticas aplicadas en el texto, incluidos notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. En todas las partes del texto se hace referencia a estos apéndices. La mayor parte de las secciones de repaso matemático en los apéndices incluyen ejemplos y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión y las unidades del SI de cantidades físicas, así como una tabla periódica de los elementos. Otra información útil (constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medición) aparecen al final del libro.

Material de apoyo para el profesor

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio a clientes en las siguientes direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Cengage Learning Paraninfo	clientes.paraninfo@cengage.com
Cengage Learning Pacto Andino	clientes.pactoandino@cengage.com

Los recursos disponibles se encuentran en el sitio web del libro:

http://latinoamerica.cengage.com.serway

Las direcciones de los sitios web referidas en el texto no son administradas por Cengage Learning Latinoamérica, por lo que ésta no es responsable de los cambios o actualizaciones de las mismas.

Opciones de enseñanza

Los temas en este libro se presentan en la siguiente secuencia: mecánica clásica, oscilaciones y ondas mecánicas, y calor y termodinámica. Esta presentación es una secuencia tradicional, donde el tema de las ondas mecánicas se aborda antes que la electricidad y el magnetismo.

Para los instructores que enseñan una secuencia de dos semestres, algunas secciones y capítulos se podrían eliminar sin pérdida de continuidad. Las siguientes secciones se pueden considerar opcionales para este propósito:

2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo
4.6 Velocidad y aceleración relativas
6.3 Movimiento en marcos acelerados
6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas
7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema
9.8 Propulsión de cohetes
11.5 El movimiento de giroscopios y trompos
14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos
15.6 Oscilaciones amortiguadas

15.7 Oscilaciones forzadas
17.5 Grabación de sonido digital
17.6 Sonido cinematográfico
18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas
18.8 Patrones de onda no sinusoidales
22.8 Entropía a escala microscópica
25.7 El experimento de la gota de aceite de Millikan
25.8 Aplicaciones de la electrostática
26.7 Una descripción atómica de los dieléctricos
27.5 Superconductores
28.5 Medidores eléctricos
28.6 Cableado doméstico y seguridad eléctrica
29.3 Aplicaciones que involucran partículas con carga que se mueven en un campo magnético
29.6 El efecto Hall
30.6 Magnetismo en la materia
30.7 El campo magnético de la Tierra
31.6 Corrientes de Eddy
33.9 Rectificadores y filtros
34.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena
36.5 Aberraciones de lentes
36.6 La cámara
36.7 El ojo
36.8 El amplificador simple
36.9 El microscopio compuesto
36.10 El telescopio
38.5 Difracción de rayos X por cristales
39.10 La teoría de la relatividad general

Reconocimientos

Esta séptima edición de *Física para ciencias e ingeniería* se preparó con la guía y asistencia de muchos profesores que revisaron selecciones del manuscrito, la revisión previa del texto o ambos. Queremos agradecer a los siguientes académicos y expresar nuestro sincero aprecio por sus sugerencias, críticas y aliento:

David P. Balogh, Fresno City College
Leonard X. Finegold, Drexel University
Raymond Hall, California State University, Fresno
Bob Jacobsen, University of California, Berkeley
Robin Jordan, Florida Atlantic University
Rafael Lopez-Mobilia, University of Texas at San Antonio
Diana Lininger Markham, City College of San Francisco
Steven Morris, Los Angeles Harbor City College
Taha Mzoughi, Kennesaw State University
Nobel Sanjay Rebello, Kansas State University
John Rosendahl, University of California, Irvine
Mikolaj Sawicki, John A. Logan College
Glenn B. Stracher, East Georgia College
Som Tyagi, Drexel University
Robert Weidman, Michigan Technological University
Edward A. Whittaker, Stevens Institute of Technology

Este título lo comprobaron cuidadosamente para su exactitud Zinoviy Akkerman, City College of New York; Grant Hart, Brigham Young University; Michael Kotlarchyk, Rochester Institute of Technology; Andres LaRosa, Portland State University; Bruce Mason, University of Oklahoma at Norman; Peter Moeck, Portland State University; Brian A. Raue, Florida International University; James E. Rutledge, University of California at Irvine; Bjoern Sei-

pel, Portland State University; Z. M. Stadnick, University of Ottowa; y Harry W. K. Tom, University of California at Riverside. Queremos agradecerles sus diligentes esfuerzos bajo presión de agenda.

Estamos agradecidos con Ralph McGrew por organizar los problemas de fin de capítulo, escribir muchos nuevos problemas y sugerir mejoras en el contenido del texto. Los problemas y preguntas nuevos en esta edición fueron escritos por Duane Deardorff, Thomas Grace, Francisco Izaguirre, John Jewett, Robert Forsythe, Randall Jones, Ralph McGrew, Kurt Vandervoort y Jerzy Wrobel. Las siguientes personas nos dieron amablemente su ayuda: Dwight Neuenschwander, Michael Kinney, Amy Smith, Will Mackin y el Sewer Department of Grand Forks, North Dakota. Daniel Kim, Jennifer Hoffman, Ed Oberhofer, Richard Webb, Wesley Smith, Kevin Kilty, Zinoviy Akkerman, Michael Rudmin, Paul Cox, Robert LaMontagne, Ken Menningen y Chris Church hicieron correcciones a los problemas tomados de ediciones anteriores. Queremos agradecer a los autores John R. Gordon y Ralph McGrew por preparar el *Manual de soluciones/Guía de estudio del estudiante*. El autor Ralph McGrew preparó un excelente *Manual de soluciones del instructor*. Edward Adelson editó y mejoró cuidadosamente el banco de pruebas. Kurt Vandervoort preparó preguntas rápidas adicionales para el sitio Web de la compañía para el instructor.

Gracias y reconocimiento especial para el personal profesional en Brooks/Cole Publishing Company, en particular a Ed Dodd, Brandi Kirksey (quien gestionó el programa auxiliar y mucho más), Shawn Vasquez, Sam Subity, Teri Hyde, Michelle Julet, David Harris y Chris Hall, por su fino trabajo durante el desarrollo y producción de este libro. Mark Santee es nuestro gerente de marketing estacional, y Bryan Vann coordina nuestras comunicaciones de marketing. Reconocemos el profesional servicio de producción y excelente trabajo artístico proporcionados por el personal en Lachina Publishing Services, y los dedicados esfuerzos de investigación fotográfica de Jane Sanders Miller.

Para finalizar, estamos profundamente en deuda con nuestras esposas, hijos y nietos por su amor, apoyo y sacrificios de largo plazo.

Raymond A. Serway
St. Petersburg, Florida

John W. Jewett, Jr.
Pomona, California

Es adecuado ofrecer algunas palabras de consejo que deben ser de beneficio para el estudiante. Antes de hacerlo, suponemos que ha leído el Prefacio, que describe las diferentes características del texto y materiales de apoyo que le ayudarán a lo largo del curso.

Cómo estudiar

Con frecuencia preguntan a los instructores: "¿cómo debo estudiar física y prepararme para los exámenes?". No hay una respuesta simple a esta pregunta, pero podemos ofrecer algunas sugerencias de acuerdo con nuestra experiencia en el aprendizaje y enseñanza a través de los años.

Ante todo, mantenga una actitud positiva hacia el tema de estudio, teniendo en mente que la física es la más esencial de todas las ciencias naturales. Otros cursos de ciencia que siguen usarán los mismos principios físicos, de modo que es importante que entienda y sea capaz de aplicar los diversos conceptos y teorías explicadas en el texto.

Conceptos y principios

Es esencial que entienda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver los problemas asignados. Esta meta la puede lograr al leer con cuidado el texto antes de asistir a su clase acerca del material cubierto. Cuando lea el texto, debe anotar aquellos puntos que no sean claros. También haga un intento diligente por responder las Preguntas rápidas, conforme las encuentra en su lectura. Hemos trabajado duro para preparar preguntas que le ayuden a juzgar por sí mismo qué tan bien entiende el material. Estudie cuidadosamente las preguntas **¿Qué pasaría si?** que aparecen en muchos de los ejemplos trabajados. Ellas le ayudarán a extender su comprensión más allá del simple acto de llegar a un resultado numérico. Las *Prevenciones de riesgos ocultos* también le ayudarán a alejarse de las malas interpretaciones comunes con respecto a la física. Durante la clase, tome notas y pregunte acerca de aquellas ideas que no le sean claras. Tenga en mente que pocas personas son capaces de absorber todo el significado del material científico después de sólo una lectura; pueden ser necesarias muchas lecturas del texto y sus notas. Sus clases y trabajo de laboratorio complementan la lectura del libro y deben clarificar algo del material más difícil. Debe minimizar su memorización del material. La memorización exitosa de pasajes del texto, ecuaciones y derivaciones no necesariamente indican que comprende el material. Su comprensión del material mejorará mediante la combinación de hábitos eficientes de estudio, discusiones con otros estudiantes y con instructores, y su habilidad para resolver los problemas que se presentan en el libro. Pregunte siempre que crea que es necesario aclarar un concepto.



Agenda de estudio

Es importante que configure una agenda de estudio regular, de preferencia que sea diaria. Verifique que lee el programa de estudio del curso y que éste coincide con el calendario establecido por el instructor. Las clases tendrán mucho más sentido si lee el texto correspondiente *antes* de asistir a ellas. Como regla general, debe dedicar aproximadamente dos horas de tiempo de estudio por cada hora que esté en clase. Si tiene problemas con el curso, busque el consejo del instructor u otros estudiantes que hayan tomado el curso. Puede ser necesario buscar más instrucción de estudiantes experimentados. Con mucha frecuencia, los instructores ofrecen sesiones de repaso, además de los periodos de clase regulares. Evite la práctica de demorar el estudio hasta un día o dos antes de un examen. Por lo general, este enfoque tiene resultados desastrosos. En lugar de emprender una sesión de estudio de toda la noche antes del examen, repase brevemente los conceptos y ecuaciones básicos, y luego tenga una buena noche de descanso.

Use las características

Debes usar por completo las diferentes características del texto explicadas en el Prefacio. Por ejemplo, las notas marginales son útiles para localizar y describir ecuaciones y conceptos importantes, y las negritas indican enunciados y definiciones importantes. En los apéndices hay muchas tablas útiles, pero la mayoría se incorpora al texto, donde su referencia es útil. El apéndice B es un repaso conveniente de técnicas matemáticas.

Las respuestas a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro, las respuestas a las preguntas rápidas se ubican al final de cada capítulo, y las soluciones a preguntas y problemas de fin de capítulo seleccionados se proporcionan en el paquete de recursos que acompañan al libro. La tabla de contenido proporciona un panorama de todo el texto, y el índice le permite ubicar rápidamente material específico. En ocasiones se usan notas a pie de página para complementar el texto o citar otras referencias acerca del tema explicado.

Después de leer un capítulo, debe ser capaz de definir cualquier cantidad nueva introducida en dicho capítulo y explicar los principios y suposiciones que se usaron para llegar a ciertas relaciones clave. Los resúmenes de capítulo y las secciones de repaso le ayudan a este respecto. En algunos casos, puede encontrar necesario remitirse al índice del libro para ubicar ciertos temas. Debe ser capaz de asociar a cada cantidad física el símbolo correcto para representar dicha cantidad y la unidad en que se especifica la cantidad. Además, debe ser capaz de expresar cada ecuación importante en prosa concisa y exacta.

Resolución de problemas

R. P. Feynman, laureado Nobel en física, dijo una vez: "No sabes nada hasta que lo has practicado". Para estar de acuerdo con este enunciado, le recomendamos encarecidamente que desarrolle las habilidades necesarias para resolver una serie amplia de problemas. Su habilidad para resolver problemas será una de las principales pruebas de su conocimiento en física; por lo tanto, debe intentar resolver tantos problemas como sea posible. Es esencial que comprenda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver problemas. Es buena práctica intentar encontrar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, puede resolver problemas en mecánica usando las leyes de Newton, pero con mucha frecuencia un método alternativo que se apoye en consideraciones energéticas es más directo. No debe engañarse y creer que entiende un problema simplemente porque ha visto cómo se resolvió en clase. Debe ser capaz de resolver el problema y problemas similares por cuenta propia.

El enfoque para resolver problemas se debe planear cuidadosamente. Un plan sistemático es especialmente importante cuando un problema involucra muchos conceptos. Primero, lea el problema muchas veces hasta que esté seguro de que entiende qué se pide. Busque palabras clave que le ayuden a interpretar el problema y tal vez le posibiliten la formulación de ciertas suposiciones. Su habilidad para interpretar adecuadamente una pregunta es una parte integral de la resolución del problema. Segundo, debe adquirir el hábito de escribir la información conocida en un problema y aquellas cantidades que necesite encontrar; por ejemplo, puede construir una tabla que mencione tanto las cantidades conocidas como las cantidades a encontrar. Este procedimiento se usa a veces en los ejemplos trabajados del libro. Por último, después de decidir el método que considere apropiado para un problema determinado, proceda con su solución. La Estrategia General para Resolver Problemas le guiará a través de problemas complejos. Si sigue las etapas de este procedimiento (*Conceptualizar, Categorizar, Analizar, Finalizar*), le será más fácil llegar a una solución y ganará más por sus esfuerzos. Dicha estrategia, ubicada al final del capítulo 2, se usa en todos los ejemplos en los capítulos restantes, de modo que puede aprender cómo aplicarla. En el texto se incluyen estrategias específicas para resolución de problemas para ciertos tipos de situaciones y aparecen con un encabezado azul. Dichas estrategias específicas siguen el esbozo de la **Estrategia General para Resolver Problemas**.

Con frecuencia, los estudiantes fracasan en el reconocimiento de las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación particular. Es muy importante que entienda y recuerde las suposiciones que subyacen a una teoría o formalismo particular. Por ejemplo, ciertas ecuaciones en cinemática sólo se aplican a una partícula en movimiento con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir el movimiento

cuya aceleración no sea constante, como el movimiento de un objeto conectado a un resorte o el movimiento de un objeto a través de un fluido. Estudie cuidadosamente los **Modelos de análisis para resolver problemas** en los resúmenes de capítulo, de modo que sepa cómo se aplica cada modelo a una situación específica.


©Thomson Learnimg/Charles D. Winters

Experimentos

La física es una ciencia que se apoya en observaciones experimentales. Por lo tanto, recomendamos que intente complementar el texto, realizando varios tipos de experimentos "prácticos", en casa o en el laboratorio. Estos experimentos se pueden usar para poner a prueba ideas y modelos explicados en clase o en el libro. Por ejemplo, el juguete común Slinky es excelente para estudiar ondas progresivas, una bola que se balancea en el extremo de una cuerda larga se puede usar para investigar el movimiento pendular, diferentes masas unidas al extremo de un resorte o banda de goma vertical se pueden usar para determinar su naturaleza elástica, un viejo par de lentes de sol y algunos lentes de desecho y una lupa son los componentes de diferentes experimentos en óptica, y una medida aproximada de la aceleración en caída libre se puede determinar simplemente al medir con un cronómetro el tiempo que una bola tarda en caer desde una altura conocida. La lista de tales experimentos es interminable. Cuando no estén disponibles modelos físicos, sea imaginativo e intente desarrollar modelos por cuenta propia.

Nuevos medios

Le recomendamos enormemente usar el sistema de aprendizaje basado en el paquete de recursos que acompaña a este libro. Es mucho más fácil comprender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán volverte parte de dicha acción. Los medios descritos en el Prefacio, presentan un proceso de aprendizaje en tres pasos, que consisten en evaluación preliminar, plan de aprendizaje personalizado y una evaluación posterior.

Es nuestro sincero deseo que encuentre la física como una experiencia excitante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia sin importar la profesión que elija.

El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir la vida.

—Henri Poincaré

Mecánica

La física, fundamental entre las ciencias físicas, se ocupa de los principios esenciales del Universo. Es el cimiento sobre el que se erigen las otras ciencias: astronomía, biología, química y geología. La belleza de la física consiste en la simplicidad de sus principios cardinales y en la forma en que sólo un pequeño número de conceptos y modelos modifica y expande nuestra visión del mundo circundante.

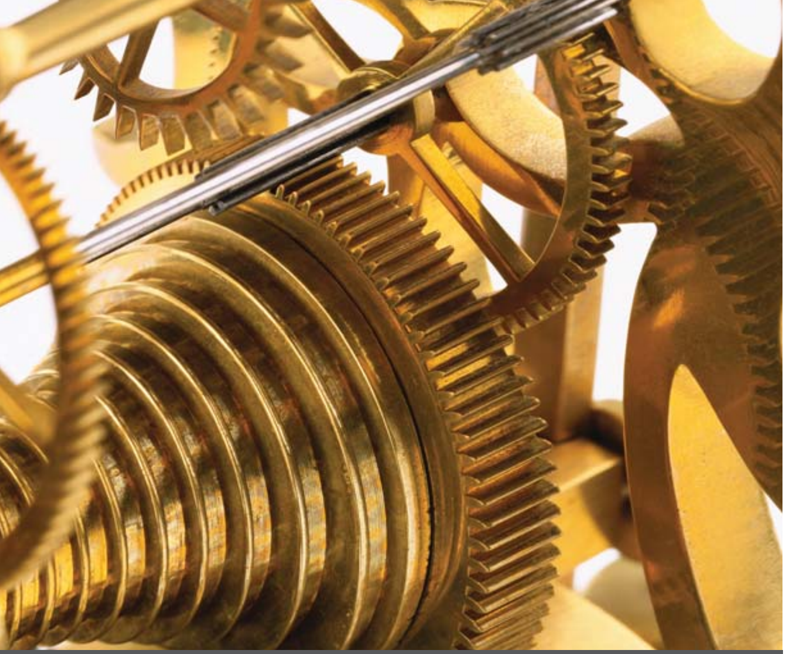
El estudio de la física se divide en seis áreas primordiales:

1. *mecánica clásica*, estudia el movimiento de los objetos que son grandes en relación con los átomos y se mueven con una rapidez mucho más lenta que la de la luz;
2. *relatividad*, teoría que describe los objetos que se mueven con cualquier rapidez, incluso los que se aproximan a la rapidez de la luz;
3. *termodinámica*, trata del calor, el trabajo, la temperatura y el comportamiento estadístico de los sistemas con gran número de partículas;
4. *electromagnetismo*, le competen la electricidad, el magnetismo y los campos electromagnéticos;
5. *óptica*, estudia el comportamiento de la luz y su interacción con los materiales;
6. *mecánica cuántica*, un conjunto de teorías que conectan el comportamiento de la materia al nivel submicroscópico con las observaciones macroscópicas.

Las disciplinas de la mecánica y el electromagnetismo son primordiales para todas las otras ramas de la física clásica (desarrollada antes de 1900) y la física moderna (c. 1900–presente). La primera parte de este libro estudia a la mecánica clásica, conocida como *mecánica newtoniana* o simplemente *mecánica*. Muchos principios y modelos que se aplican para comprender los sistemas mecánicos conservan su importancia en las teorías de otras áreas de la física y sirven para describir muchos fenómenos naturales. Debido a eso, la mecánica clásica es trascendente para los estudiantes de todas las disciplinas.



Coche eléctrico en display en la ciudad de San Francisco. Los automóviles eléctricos, así como los vehículos impulsados por gasolina y los vehículos híbridos usan muchos de los conceptos y principios de la mecánica que se estudiarán en esta primera parte del libro. Las cantidades que se usan para describir el manejo de los vehículos incluyen posición, velocidad, aceleración, fuerza, energía y cantidad de movimiento. (© Eric Broder Van Dyke/Shutterstock)



Acercamiento a los engranes de un reloj mecánico. Durante siglos el hombre ha construido complicadas máquinas con la finalidad de hacer una medición precisa del tiempo. El tiempo es una de las cantidades básicas que se usan al estudiar el movimiento de los objetos. (© Photographer's Choice/Getty Images)

1 Física y medición

Como todas las otras ciencias, la física se sustenta en observaciones experimentales y me-diciones cuantitativas. Los objetivos principales de la física son identificar un número limitado de leyes fundamentales que rigen los fenómenos naturales y usarlas para desarrollar teorías capaces de anticipar los resultados experimentales. Las leyes fundamentales que se usan para elaborar teorías se expresan en el lenguaje de las matemáticas, la herramienta que proporciona un puente entre teoría y experimento.

Cuando hay discrepancia entre el pronóstico de una teoría y un resultado experimental, es necesario formular teorías nuevas o modificadas para resolver la discrepancia. Muchas veces una teoría es satisfactoria sólo bajo condiciones limitadas; a veces una teoría general es satisfactoria sin ciertas limitaciones. Por ejemplo, las leyes del movimiento descubiertas por Isaac Newton (1642–1727) describen con precisión el movimiento de los objetos que se mueven con rapideces normales pero no se aplica a objetos que se mueven con rapideces comparables con la velocidad de la luz. En contraste, la teoría especial de la relatividad, desarrollada más tarde por Albert Einstein (1879–1955), da los mismos resultados que las leyes de Newton a bajas rapideces pero también hace una descripción correcta del movimiento de los objetos con rapideces que se aproximan a la rapidez de la luz. Por lo tanto, la teoría especial de la relatividad de Einstein es una teoría de movimiento más general que la formada por las leyes de Newton.

La *física clásica* incluye los principios de la mecánica clásica, la termodinámica, la óptica y el electromagnetismo desarrollados antes de 1900. Newton realizó importantes contribuciones a la física clásica y también fue uno de los creadores del cálculo como herramienta matemática. Durante el siglo XVIII continuaron los grandes adelantos en la mecánica, pero los campos de la termodinámica y el electromagnetismo no se desplegaron hasta la parte final del siglo XIX, principalmente porque antes de esa época los aparatos para experimentos controlados en estas disciplinas eran o muy burdos o no estaban a disposición.

Una gran revolución en la física, conocida como *física moderna*, comenzó hacia el final del siglo XIX. La física moderna nació primordialmente porque la física clásica no era capaz de explicar muchos fenómenos físicos. En esta era moderna hubo dos hitos, las teorías de la relatividad y de la mecánica cuántica. La teoría especial de la relatividad de Einstein no sólo describe en forma correcta el movimiento de los objetos que se mueven con rapideces comparables con la rapidez de la luz; también modifica por completo los conceptos tradicionales de espacio, tiempo y energía. Además, la teoría muestra que la rapidez de la luz es el límite superior de la rapidez de un objeto y que la masa y la energía están relacionadas. La mecánica cuántica la formularon algunos científicos distinguidos para proporcionar descripciones de los fenómenos físicos a nivel atómico. Con los principios de la mecánica cuántica se han construido muchos dispositivos prácticos.

Los científicos hacen un trabajo constante por el mejoramiento en la comprensión de las leyes fundamentales. En tiempos recientes numerosos avances tecnológicos han resultado de los esfuerzos de muchos científicos, ingenieros y técnicos, tales como exploraciones planetarias no tripuladas y alunizajes tripulados, los microcircuitos y las computadoras de alta velocidad, las complejas técnicas de visualización que se usan en la investigación científica y la medicina, y muchos resultados notables en ingeniería genética. Los impactos de dichos desarrollos y descubrimientos en la sociedad han sido colosales, y es muy probable que los futuros descubrimientos y desarrollos serán excitantes, desafiantes y de gran beneficio para la humanidad.

1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

Para describir los fenómenos naturales, es necesario hacer mediciones de varios aspectos de la naturaleza. Cada medición se asocia con una cantidad física, tal como la longitud de un objeto.

Si tuviese que reportar los resultados de una medición a alguien que desea reproducir esa medición, tendría que definir un *estándar*. Sería absurdo que un visitante de otro planeta le hablara de una longitud de 8 "glitches", si no conoce el significado de la unidad glitch. Por otra parte, si alguien familiarizado con el sistema de medición reporta que una pared tiene 2 metros de alto y la unidad de longitud se define como 1 metro, se sabe que la altura de la pared es el doble de la unidad de longitud básica. Cualquier unidad que se elija como estándar debe ser accesible y poseer alguna propiedad que se pueda medir confiablemente. Los estándares de medición que diferentes personas de lugares distintos aplican en el Universo, deben producir el mismo resultado. Además, los estándares que se usan para mediciones no deben cambiar con el tiempo.

En 1960 un comité internacional estableció un conjunto de estándares para las cantidades fundamentales de la ciencia. Se llama **SI** (Sistema Internacional) y sus unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo son *metro*, *kilogramo* y *segundo*, respectivamente. Otros estándares para las unidades fundamentales SI establecidas por el comité son las de temperatura (el *kelvin*), corriente eléctrica (el *ampere*), la intensidad luminosa (la *candela*) y la cantidad de sustancia (el *mol*).

Las leyes de la física se expresan como relaciones matemáticas entre cantidades físicas que se presentarán y discutirán en todas las partes del libro. En mecánica, las tres canti-

dades fundamentales son longitud, masa y tiempo. Todas las cantidades en mecánica se expresan en términos de estas tres.

Longitud

La distancia entre dos puntos en el espacio se identifica como **longitud**. En 1120 el rey de Inglaterra decretó que el estándar de longitud en su país se llamaría *yarda* y sería precisamente igual a la distancia desde la punta de su nariz hasta el final de su brazo extendido. De igual modo, el estándar original para el pie adoptado por los franceses era la longitud del pie real del rey Luis XIV. Ninguno de dichos estándares es constante en el tiempo; cuando un nuevo rey subía al trono, ¡cambiaban las longitudes! El estándar francés prevaleció hasta 1799, cuando el estándar legal de longitud en Francia se volvió el **metro** (m), definido como una diezmillonésima de la distancia del ecuador al Polo Norte a lo largo de una línea longitudinal particular que pasa por París. Observe que este valor es un estándar razonado en la Tierra, que no satisface el requerimiento de que se puede usar a través del Universo.

Tan recientemente como 1960, la longitud del metro se definió como la distancia entre dos líneas en una específica barra de platino–iridio que se almacena bajo condiciones controladas en Francia. Sin embargo, los requerimientos actuales de la ciencia y la tecnología necesitan más precisión que la dada por la separación entre las líneas en la barra. En las décadas de los sesenta y setenta del milenio pasado, el metro se definió como 1 650 763.73 longitudes de onda[1] de la luz naranja–rojo emitida de una lámpara de criptón 86. No obstante, en octubre de 1983, el metro se redefinió como **la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos**. En efecto, esta última definición establece que la rapidez de la luz en el vacío es precisamente 299 792 458 metros por segundo. Esta definición del metro es válida a través del Universo respecto a la suposición de que la luz es la misma en todas partes.

La tabla 1.1 menciona valores aproximados de algunas longitudes observadas. Debe estudiar esta tabla, así como las siguientes dos tablas y comenzar a desarrollar una intuición de lo que significa, por ejemplo, una longitud de 20 centímetros, una masa de 100 kilogramos o un intervalo de tiempo de 3.2×10^7 segundos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.1
Valores razonables

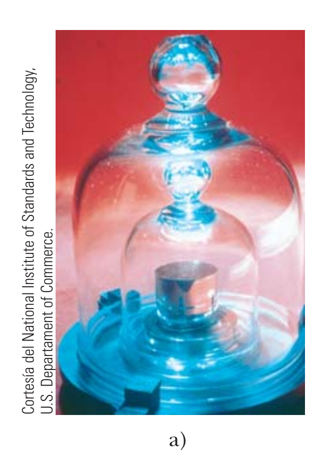
Es importante desarrollar la intuición acerca de valores típicos de cantidades cuando se resuelven problemas, porque debe pensar acerca de su resultado final y determinar si parece razonable. Si calcula la masa de una mosca y llega a un valor de 100 kg, esta respuesta es *irracional* y hay un error en alguna parte.

TABLA 1.1

Valores aproximados de algunas longitudes medidas

	Longitud (m)
Distancia de la Tierra al quasar conocido más remoto	1.4×10^{26}
Distancia de la Tierra a las galaxias normales más remotas	9×10^{25}
Distancia de la Tierra a la galaxia grande más cercana (Andrómeda)	2×10^{22}
Distancia del Sol a la estrella más cercana (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio orbital medio de la Tierra en torno al Sol	1.50×10^{11}
Distancia media de la Tierra a la Luna	3.84×10^{8}
Distancia del ecuador al Polo Norte	1.00×10^{7}
Radio medio de la Tierra	6.37×10^{6}
Altitud típica (sobre la superficie) de un satélite que orbita la Tierra	2×10^{5}
Longitud de un campo de futbol	9.1×10^{1}
Longitud de una mosca	5×10^{-3}
Tamaño de las partículas de polvo más pequeñas	$\sim 10^{-4}$
Tamaño de las células de la mayoría de los organismos vivientes	$\sim 10^{-5}$
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$\sim 10^{-10}$
Diámetro de un núcleo atómico	$\sim 10^{-14}$
Diámetro de un protón	$\sim 10^{-15}$

[1] Se usará la notación internacional estándar para números con más de tres dígitos, en éstos los grupos de tres dígitos se separan por espacios en lugar de comas. Por lo tanto, 10 000 es lo mismo que la notación estadounidense común de 10,000. De igual modo, π = 3.14159265 se escribe como 3.141 592 65.


a)

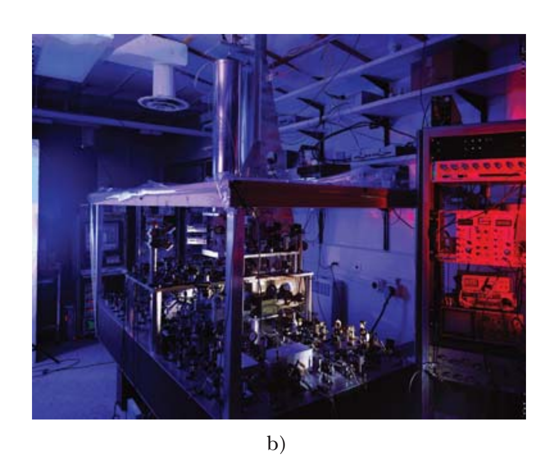

b)

Figura 1.1 a) El Kilogramo Estándar Nacional núm. 20, una copia exacta del Kilogramo Estándar Internacional que se conserva en Sèvres, Francia, se alberga bajo una doble campana en una bóveda en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST). b) El estándar de tiempo primario en Estados Unidos es un reloj atómico con fuente de cesio desarrollado en los laboratorios del NIST en Boulder, Colorado. El reloj nunca ganará ni perderá un segundo en 20 millones de años.

Masa

La unidad fundamental del SI de **masa**, el **kilogramo** (kg), es definido como **la masa de un cilindro de aleación platino–iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia**. Esta masa estándar fue establecida en 1887 y no ha cambiado desde esa época porque el platino–iridio es una aleación inusualmente estable. Un duplicado del cilindro de Sèvres se conserva en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST, por sus siglas en inglés), en Gaithersburg, Maryland (figura 1.1a). La tabla 1.2 menciona valores aproximados de las masas de varios objetos.

TABLA 1.2

Masas aproximadas de varios objetos

	Masa (kg)
Universo observable	$\sim 10^{52}$
Galaxia Vía Láctea	$\sim 10^{42}$
Sol	1.9×10^{30}
Tierra	5.98×10^{24}
Luna	7.36×10^{22}
Tiburón	$\sim 10^{3}$
Humano	$\sim 10^{2}$
Rana	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim 10^{-5}$
Bacteria	$\sim 1 \times 10^{-15}$
Átomo de hidrógeno	1.67×10^{-27}
Electrón	9.11×10^{-31}

Tiempo

Antes de 1960 el estándar de **tiempo** fue definido en términos del *día solar medio* hacia el año 1900. (Un día solar es el intervalo de tiempo entre apariciones sucesivas del Sol en el punto más alto que alcanza en el cielo cada día.) La unidad fundamental de un **segundo** (s) fue definida como $(\frac{1}{60})(\frac{1}{60})(\frac{1}{24})$ de un día solar medio. Ahora se sabe que la rotación de la Tierra varía ligeramente con el tiempo. Debido a eso, este movimiento no proporciona un tiempo estándar que sea constante.

En 1967 el segundo fue redefinido para sacar ventaja de la enorme precisión que se logra con un dispositivo conocido como *reloj atómico* (figura 1.1b), que mide vibraciones de átomos de cesio. Ahora un segundo se define como **9 192 631 770 veces el periodo de vibración de la radiación del átomo de cesio 133.**[2] En la tabla 1.3 se presentan valores aproximados de intervalos de tiempo.

TABLA 1.3

Valores aproximados de algunos intervalos de tiempo

	Intervalo de tiempo (s)
Edad del Universo	5×10^{17}
Edad de la Tierra	1.3×10^{17}
Edad promedio de un estudiante universitario	6.3×10^{8}
Un año	3.2×10^{7}
Un día	8.6×10^{4}
Un periodo de clase	3.0×10^{3}
Intervalo de tiempo entre latidos normales	8×10^{-1}
Periodo de ondas sonoras audibles	$\sim 10^{-3}$
Periodo de ondas de radio típicas	$\sim 10^{-6}$
Periodo de vibración de un átomo en un sólido	$\sim 10^{-13}$
Periodo de ondas de luz visible	$\sim 10^{-15}$
Duración de una colisión nuclear	$\sim 10^{-22}$
Intervalo de tiempo para que la luz cruce un protón	$\sim 10^{-24}$

[2] El *periodo* se define como el intervalo de tiempo necesario para una vibración completa.

TABLA 1.4

Prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{3}	kilo	k
10^{-21}	zepto	z	10^{6}	mega	M
10^{-18}	atto	a	10^{9}	giga	G
10^{-15}	femto	f	10^{12}	tera	T
10^{-12}	pico	p	10^{15}	peta	P
10^{-9}	nano	n	10^{18}	exa	E
10^{-6}	micro	μ	10^{21}	zetta	Z
10^{-3}	mili	m	10^{24}	yotta	Y
10^{-2}	centi	c			
10^{-1}	deci	d			

Además del SI, otro sistema de unidades, el *sistema usual estadounidense*, todavía se utiliza en Estados Unidos a pesar de la aceptación del SI en el resto del mundo. En este sistema las unidades de longitud, masa y tiempo son pie (ft), slug y segundo, respectivamente. En este libro se usarán las unidades del SI porque tienen aceptación mundial en la ciencia y en la industria. En el estudio de la mecánica clásica se hará un uso limitado de las unidades estadounidenses usuales.

Además de las unidades del SI fundamentales de metro, kilogramo y segundo, también se usan otras unidades, como milímetros y nanosegundos, donde los prefijos *mili* y *nano* denotan multiplicadores de las unidades básicas establecidas en varias potencias de diez. En la tabla 1.4 se citan los prefijos para las diversas potencias de diez y sus prefijos. Por ejemplo, 10^{-3} m es equivalente a 1 milímetro (mm), y 10^{3} m corresponde a 1 kilómetro (km). Del mismo modo, 1 kilogramo (kg) es 10^{3} gramos (g), y 1 megavolt (MV) es 10^{6} volts (V).

Las variables longitud, tiempo y masa son ejemplos de *cantidades fundamentales*. La mayoría de las otras variables son *cantidades deducidas*, aquellas expresadas como una combinación matemática de cantidades fundamentales. Ejemplos comunes son *área* (un producto de dos longitudes) y *rapidez* (una relación de una longitud a un intervalo de tiempo).

Al final del libro aparece una tabla con las letras del alfabeto griego ►

Otro ejemplo de una cantidad deducida es la **densidad**. La densidad ρ (letra griega ro) de cualquier sustancia se define como su *masa por unidad de volumen*:

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \qquad \textbf{(1.1)}$$

En términos de cantidades fundamentales, la densidad es una proporción de una masa a un producto de tres longitudes. Por ejemplo, el aluminio tiene una densidad de 2.70×10^{3} kg/m^{3}, y el hierro tiene una densidad de 7.86×10^{3} kg/m^{3}. Es factible pensar en una diferencia extrema en densidad al imaginar que sostiene un cubo de 10 centímetros (cm) de espuma de estireno en una mano y un cubo de 10 cm de plomo en la otra. Vea la tabla 14.1 del capítulo 14 para densidades de diferentes materiales.

Pregunta rápida 1.1 En un taller mecánico se producen dos levas, una de aluminio y la otra de hierro. Ambas levas tienen la misma masa. ¿Cuál leva es más larga? a) La leva de aluminio es más larga. b) La leva de hierro es más larga. c) Ambas levas tienen el mismo tamaño.

1.2 Materia y construcción de modelos

Si los físicos no pueden interactuar directamente con algunos fenómenos, con frecuencia imaginan un **modelo** para un sistema físico que se relaciona con el fenómeno. Por ejemplo, no existe la capacidad para interactuar con los átomos, porque son demasiado pequeños. Por lo tanto, se construye un modelo mental de un átomo respecto a un siste-

ma de un núcleo y uno o más electrones alrededor del núcleo. Una vez identificados los componentes físicos del modelo, se hacen pronósticos acerca de su comportamiento en función de las interacciones entre los componentes del sistema o la interacción entre el sistema y el ambiente externo al sistema.

Como ejemplo, considere el comportamiento de la *materia*. Un cubo de 1 kg de oro sólido, como el que aparece en la parte superior de la figura 1.2, tiene una longitud de 3.73 cm por lado. ¿Este cubo no es más que oro de pared a pared, sin espacio vacío? Si el cubo se corta por la mitad, las dos piezas todavía conservan su identidad química como oro sólido. ¿Y si las piezas se cortan de nuevo, una y otra vez, de manera indefinida? ¿Las partes más pequeñas siempre serán oro? Tales preguntas se pueden rastrear hasta los antiguos filósofos griegos. Dos de ellos, Leucipo y su discípulo Demócrito, no podían aceptar la idea de que tales cortes continuaran por siempre. Elaboraron un modelo para la materia al especular que el proceso a final de cuentas debe terminar cuando produzca una partícula que ya no se pueda cortar. En griego, *atomos* significa "sin corte". De este término griego proviene la palabra *átomo*.

El modelo griego de la estructura de la materia fue que toda la materia ordinaria consiste de átomos, como se sugiere en la mitad de la figura 1.2. Más allá de esto, ninguna estructura adicional se especificó en el modelo; los átomos eran pequeñas partículas que interactuaban unas con otras, pero la estructura interna del átomo no era parte del modelo.

En 1897, J. J. Thomson identificó al electrón como una partícula cargada que es constituyente del átomo. Esto condujo al primer modelo atómico que contenía estructura interna. Este modelo se discutirá en el capítulo 42.

Después del descubrimiento del núcleo en 1911, se elaboró un modelo atómico en el que cada átomo estaba constituido de electrones que rodean un núcleo central. En la figura 1.2 se muestra un núcleo de oro. Sin embargo, este modelo condujo a una nueva pregunta: ¿el núcleo tiene estructura? Esto es: ¿el núcleo es una sola partícula o una colección de partículas? A partir de 1930 evolucionó un modelo que describía dos entidades básicas en el núcleo: protones y neutrones. El protón porta una carga eléctrica positiva; y un elemento químico se identifica por el número de protones en su núcleo. Esta cantidad se llamó **número atómico** del elemento. Por ejemplo, el núcleo de un átomo de hidrógeno contiene un protón (de modo que el número atómico del hidrógeno es 1), el núcleo de un átomo de helio contiene dos protones (número atómico 2) y el núcleo de un átomo de uranio contiene 92 protones (número atómico 92). Además del número atómico, una segunda cantidad, el **número de masa**, que se define como el número de protones más neutrones en un núcleo, caracteriza a los átomos. El número atómico de un elemento específico nunca varía (es decir, el número de protones no cambia) pero el número de masa sí varía (es decir, el número de neutrones cambia).

Sin embargo, ¿ahí se detiene el proceso de división? Ahora se sabe que protones, neutrones y un cúmulo de otras partículas exóticas están compuestas de seis diferentes variedades de partículas llamadas **quarks**, a las que se les ha dado los nombres de *arriba, abajo, extraño, encanto, fondo* y *cima*. Los quarks arriba, encanto y cima tienen cargas eléctricas de $+\frac{2}{3}$ del protón, mientras que los quarks abajo, extraño y fondo tienen cargas eléctricas de $-\frac{1}{3}$ del protón. El protón consiste de dos quarks arriba y un quark abajo, como se muestra en la parte inferior de la figura 1.2 y etiquetados u y d. Esta estructura predice la carga correcta para el protón. Del mismo modo, el neutrón consiste de dos quarks abajo y un quark arriba, lo que da una carga neta de cero.

Conforme estudie física, debe desarrollar un proceso de construcción de modelos. En este estudio se le retará con muchos problemas matemáticos. Una de las más importantes técnicas para la resolución de problemas es construir un modelo para el problema: identifique un sistema de componentes físicos para el problema y haga predicciones del comportamiento del sistema con base en las interacciones entre sus componentes o la interacción entre el sistema y su ambiente circundante.

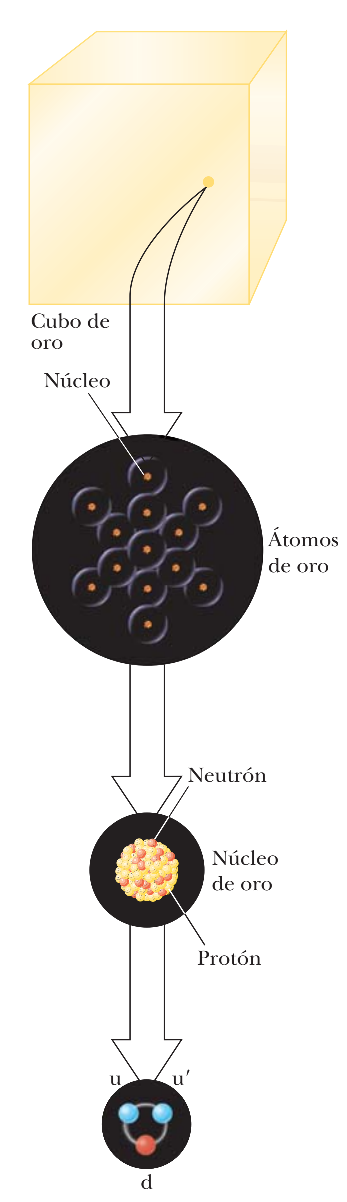


Figura 1.2 Niveles de organización en la materia. La materia ordinaria consiste de átomos y en el centro de cada átomo hay un núcleo compacto que consiste de protones y neutrones. Los protones y los neutrones están compuestos de quarks. Se muestra la composición de un quark de un protón.

1.3 Análisis dimensional

La palabra *dimensión* tiene un significado especial en física. Denota la naturaleza física de una cantidad. Ya sea que una distancia se mida en unidades de pies, metros o brazas, todavía es una distancia; se dice que su dimensión es la *longitud*.

TABLA 1.5

Dimensiones y unidades de cuatro cantidades deducidas

Cantidad	Área	Volumen	Rapidez	Aceleración
Dimensiones	L^2	L^3	L/T	L/T^2
Unidades del SI	m^2	m^3	m/s	m/s^2
Sistema usual estadounidense	ft^2	ft^3	ft/s	ft/s^2

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.2

Símbolos para cantidades

Algunas cantidades tienen un pequeño número de símbolos que las representan. Por ejemplo, el símbolo para tiempo casi siempre es *t*. Otras cantidades tienen varios símbolos que se aplican según el uso. La longitud se describe con símbolos tales como *x*, *y* y *z* (para posición); *r* (para radio); *a*, *b* y *c* (para los lados de un triángulo recto); ℓ (para la longitud de un objeto); *d* (para una distancia); *h* (para una altura); y así por el estilo.

Los símbolos que se usan en este libro para especificar las dimensiones de longitud, masa y tiempo son L, M y T, respectivamente.[3] Con frecuencia se usarán los corchetes [] para denotar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, el símbolo que se usa en este libro para rapidez es v, y en esta notación, las dimensiones de rapidez se escriben $[v] = L/T$. Como otro ejemplo, las dimensiones del área A son $[A] = L^2$. En la tabla 1.5 se mencionan las dimensiones y unidades de área, volumen, rapidez y aceleración. Las dimensiones de otras cantidades, como fuerza y energía, se describirán conforme se introduzcan en el texto.

En muchas situaciones es posible que deba verificar una ecuación específica, para ver si satisface sus expectativas. Un procedimiento útil y poderoso llamado **análisis dimensional** ayuda para esta comprobación porque **las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas**. Por ejemplo, las cantidades se suman o restan sólo si tienen las mismas dimensiones. Además, los términos en ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Al seguir estas simples reglas le será posible usar el análisis dimensional para determinar si una expresión tiene la forma correcta. Cualquier correspondencia es correcta sólo si las dimensiones en ambos lados de la ecuación son las mismas.

Para ilustrar este procedimiento, suponga que está interesado en una ecuación para la posición x de un automóvil en un tiempo t si el automóvil parte del reposo en $x = 0$ y se mueve con aceleración constante a. La expresión correcta para esta situación es $x = \frac{1}{2}at^2$. Aplique el análisis dimensional para cotejar la validez de esta expresión. La cantidad x en el lado izquierdo tiene la dimensión de longitud. Para que la ecuación sea correcta en términos dimensionales, la cantidad en el lado derecho también debe tener la dimensión de longitud. Es posible realizar una verificación dimensional al sustituir las dimensiones para aceleración, L/T^2 (tabla 1.5), y tiempo, T, en la ecuación. Esto es, la forma dimensional de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$ es

$$L = \frac{L}{\cancel{T^2}} \cdot \cancel{T^2} = L$$

Las dimensiones de tiempo se cancelan, como se muestra, lo que deja a la dimensión de longitud en el lado derecho para igualar con la de la izquierda.

Un procedimiento más general de análisis dimensional es establecer una expresión de la forma

$$x \propto a^n t^m$$

donde n y m son exponentes que se deben determinar y el símbolo $\propto$ indica una proporcionalidad. Esta correspondencia es correcta sólo si las dimensiones de ambos lados son las mismas. Puesto que la dimensión del lado izquierdo es longitud, la dimensión del lado derecho también debe ser longitud. Esto es,

$$[a^n t^m] = L = L^1T^0$$

Puesto que las dimensiones de la aceleración son L/T^2 y la dimensión de tiempo es T:

$$(L/T^2)^n T^m = L^1T^0 \quad \rightarrow \quad (L^n T^{m-2n}) = L^1T^0$$

[3] Las *dimensiones* de una cantidad se simbolizarán mediante letras mayúsculas no cursivas, como L o T. El *símbolo algebraico* para la cantidad en sí será en cursiva, como L para la longitud de un objeto o t para tiempo.

Los exponentes de L y T deben ser los mismos en ambos lados de la ecuación. A partir de los exponentes de L, se ve de inmediato que $n = 1$. De los exponentes de T, $m - 2n = 0$, lo que, una vez que se sustituye para n, produce $m = 2$. Al regresar a la expresión original $x \propto a^n t^m$, se concluye que $x \propto at^2$.

Pregunta rápida 1.2 Verdadero o falso: El análisis dimensional le proporciona el valor numérico de las constantes de proporcionalidad que aparecen en una expresión algebraica.

EJEMPLO 1.1 Análisis de una ecuación

Muestre que la expresión $v = at$ es dimensionalmente correcta, donde v representa rapidez, a aceleración y t un instante de tiempo.

SOLUCIÓN

Identifique las dimensiones de v en la tabla 1.5:

$$[v] = \frac{L}{T}$$

Encuentre las dimensiones de a en la tabla 1.5 y multiplique por las dimensiones de t:

$$[at] = \frac{L}{T^{\not 2}}\not T = \frac{L}{T}$$

Por lo tanto, $v = at$ es dimensionalmente correcta porque se tienen las mismas dimensiones en ambos lados. (Si la expresión se hubiese dado como $v = at^2$, sería dimensionalmente *incorrecta*. ¡Inténtelo y verá!)

EJEMPLO 1.2 Análisis de una ley de potencia

Suponga que la aceleración a de una partícula que se mueve con rapidez uniforme v en un círculo de radio r es proporcional a alguna potencia de r, por decir r^n, y alguna potencia de v, por decir v^m. Determine los valores de n y m y escriba la forma más simple de una ecuación para la aceleración.

SOLUCIÓN

Escriba una expresión para a con una constante adimensional de proporcionalidad k:

$$a = kr^n v^m$$

Sustituya las dimensiones de a, r y v:

$$\frac{L}{T^2} = L^n \left(\frac{L}{T}\right)^m = \frac{L^{n+m}}{T^m}$$

Iguale los exponentes de L y T de modo que la ecuación dimensional se balancee:

$$n + m = 1 \quad \text{y} \quad m = 2$$

Resuelva las dos ecuaciones para n:

$$n = -1$$

Escriba la expresión de aceleración:

$$a = kr^{-1}\, v^2 = k\frac{v^2}{r}$$

En la sección 4.4 acerca del movimiento circular uniforme, se muestra que $k = 1$ si se usa un conjunto consistente de unidades. La constante k no sería igual a 1 si, por ejemplo, v estuviese en km/h y usted quisiera a en m/s^2.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.3
Siempre incluya unidades

Cuando realice cálculos, incluya las unidades para toda cantidad y lleve las unidades a través de todo el cálculo. Evite la tentación de quitar pronto las unidades y luego poner las unidades esperadas una vez que tiene una respuesta. Al incluir las unidades en cada paso, detecte errores si las unidades para la respuesta evidencian ser incorrectas.

1.4 Conversión de unidades

A veces debe convertir unidades de un sistema de medición a otro o convertir dentro de un sistema (por ejemplo, de kilómetros a metros). Las igualdades entre unidades de longitud del SI y las usuales estadounidenses son las siguientes:

$$1 \text{ mil} = 1\,609 \text{ m} = 1.609 \text{ km} \qquad 1 \text{ ft} = 0.304\,8 \text{ m} = 30.48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m} = 39.37 \text{ pulg} = 3.281 \text{ ft} \qquad 1 \text{ pulg} = 0.025\,4 \text{ m} = 2.54 \text{ cm (exactamente)}$$

En el apéndice A se encuentra una lista más completa de factores de conversión.

Como las dimensiones, las unidades se manipulan como cantidades algebraicas que se cancelan mutuamente. Por ejemplo, suponga que desea convertir 15.0 in a centímetros. Puesto que 1 in se define como exactamente 2.54 cm, encuentre que

$$15.0 \text{ pulg} = (15.0 \cancel{\text{pulg}})\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{pulg}}}\right) = 38.1 \text{ cm}$$

donde la relación entre paréntesis es igual a 1. Se debe colocar la unidad "pulgada" en el denominador de modo que se cancele con la unidad en la cantidad original. La unidad restante es el centímetro, el resultado deseado.

Pregunta rápida 1.3 La distancia entre dos ciudades es de 100 mi. ¿Cuál es el número de kilómetros entre las dos ciudades? a) menor que 100, b) mayor que 100, c) igual a 100.

EJEMPLO 1.3 **¿Está acelerando?**

En una autopista interestatal en una región rural de Wyoming, un automóvil viaja con una rapidez de 38.0 m/s. ¿El conductor rebasó el límite de velocidad de 75.0 mi/h?

SOLUCIÓN

De la rapidez en m/s convierta metros en millas:

$$(38.0 \cancel{\text{m}}/\text{s})\left(\frac{1 \text{ mi}}{1\,609 \cancel{\text{m}}}\right) = 2.36 \times 10^{-2} \text{ mi/s}$$

Convierta segundos a horas:

$$(2.36 \times 10^{-2} \text{ mi}/\cancel{\text{s}})\left(\frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{min}}}\right)\left(\frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \text{ h}}\right) = 85.0 \text{ mi/h}$$

En efecto, el conductor rebasó el límite de velocidad y debe reducirla.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el conductor viniese de fuera de Estados Unidos y estuviese familiarizado con magnitudes de velocidad medidas en km/h? ¿Cuál es la rapidez del automóvil en km/h?

Respuesta Se puede convertir la respuesta final a las unidades adecuadas:

$$(85.0 \cancel{\text{mi}}/\text{h})\left(\frac{1.609 \text{ km}}{1 \cancel{\text{mi}}}\right) = 137 \text{ km/h}$$

La figura 1.3 muestra un indicador de velocidad de un automóvil que muestra magnitudes de velocidad tanto en mi/h como en km/h. ¿Le es posible verificar la conversión que acaba de realizar con esta fotografía?



Phil Boorman/Getty Images

Figura 1.3 Indicador de velocidad de un vehículo que muestra magnitudes de velocidad tanto en millas por hora como en kilómetros por hora.

1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

Suponga que alguien le pregunta el número de bits de datos en un disco compacto musical común. Su respuesta que por lo general no se espera que proporcione el número exacto, sino más bien una estimación, se debe expresar como notación científica. El *orden de magnitud* de un número se determina del modo siguiente:

1. Exprese el número en notación científica, con el multiplicador de la potencia de diez entre 1 y 10 y una unidad.
2. Si el multiplicador es menor que 3.162 (la raíz cuadrada de diez), el orden de magnitud del número es la potencia de diez en la notación científica. Si el multiplicador es mayor que 3.162, el orden de magnitud es uno más grande que la potencia de diez en la notación científica.

Se usa el símbolo ~ para "es del orden de". Use el procedimiento anterior para verificar los órdenes de magnitud para las siguientes longitudes:

$$0.008\,6 \text{ m} \sim 10^{-2} \text{ m} \qquad 0.002\,1 \text{ m} \sim 10^{-3} \text{ m} \qquad 720 \text{ m} \sim 10^{3} \text{ m}$$

Por lo general, cuando se hace una estimación del orden de magnitud, los resultados son confiables hasta dentro de un factor aproximado de 10. Si una cantidad aumenta en valor por tres órdenes de magnitud, su valor aumenta por un factor de aproximadamente $10^3 = 1\,000$.

Las imprecisiones provocadas por suponer muy poco para un número, con frecuencia se cancelan por otras suposiciones que son muy altas. Encontrará que, con práctica, sus estimaciones se vuelven cada vez mejores. Los problemas de estimación pueden ser divertidos de trabajar porque usted escoge con libertad los dígitos, aventura aproximaciones razonables para números desconocidos, hace suposiciones simplificadoras y convierte la pregunta en algo factible de responder, en su cabeza o con una mínima manipulación matemática en el papel. Debido a la simplicidad de este tipo de cálculos, se realizan en un *pequeño* trozo de papel y con frecuencia se llaman "cálculos de servilleta".

EJEMPLO 1.4 Respiraciones en una vida

Estime el número de respiraciones realizadas durante una vida humana promedio.

SOLUCIÓN

Comience por estimar que la vida humana promedio es de alrededor de 70 años. Piense acerca del número promedio de respiraciones que una persona realiza en 1 min. Este número varía dependiendo de si la persona se ejercita, duerme, está enojada, serena y cosas por el estilo. Al orden de magnitud más cercano, debe elegir 10 respiraciones por minuto como estimación. (Es cierto que dicha estimación está más cerca al valor promedio verdadero que 1 respiración por minuto o 100 respiraciones por minuto.)

Encuentre el número aproximado de minutos en un año:

$$1 \cancel{\text{año}} \left(\frac{400 \cancel{\text{días}}}{1 \cancel{\text{año}}}\right)\left(\frac{25 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}}\right)\left(\frac{60 \text{ min}}{1 \cancel{\text{h}}}\right) = 6 \times 10^5 \text{ min}$$

Halle el número aproximado de minutos en una vida de 70 años:

$$\text{número de minutos} = (70 \text{ años})(6 \times 10^5 \text{ min/años}) = 4 \times 10^7 \text{ min}$$

Encuentre el número aproximado de respiraciones en una vida:

$$\text{número de respiraciones} = (10 \text{ respiraciones/min})(4 \times 10^7 \text{ min}) = 4 \times 10^8 \text{ respiraciones}$$

Por lo tanto, una persona toma en el orden de 10^9 respiraciones en una vida. Advierta cuánto más simple fue, en el primer cálculo, multiplicar 400×25 que trabajar con el más preciso 365×24.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la vida promedio se estimase como 80 años en lugar de 70? ¿Esto cambiaría la estimación final?

Respuesta Se podría afirmar que $(80 \text{ años})(6 \times 10^5 \text{ min/año}) = 5 \times 10^7$ min, de modo que la estimación final debería ser 5×10^8 respiraciones. Esta respuesta todavía está en el orden de 10^9 respiraciones, de modo que una estimación del orden de magnitud no cambiaría.

1.6 Cifras significativas

Cuando se miden ciertas cantidades, los valores medidos se conocen sólo dentro de los límites de la incertidumbre experimental. El valor de esta incertidumbre depende de varios factores, como la calidad del aparato, la habilidad del experimentador y el número de mediciones realizadas. El número de **cifras significativas** en una medición sirve para expresar algo acerca de la incertidumbre.

Como ejemplo de cifras significativas, suponga que se le pide medir el área de un disco compacto usando una regleta como instrumento de medición. Suponga que la precisión a la que puede medir el radio del disco es ± 0.1 cm. Debido a la incertidumbre de ± 0.1 cm, si el radio mide 6.0 cm, sólo es posible afirmar que su radio se encuentra en algún lugar entre 5.9 y 6.1 cm. En este caso, el valor medido de 6.0 cm tiene dos cifras significativas. Note que **las cifras significativas incluyen el primer dígito estimado**. Por lo tanto, el radio se podría escribir como (6.0 ± 0.1) cm.

Ahora encuentre el área del disco usando la ecuación para el área de un círculo. Si afirma que el área es $A = \pi r^2 = \pi(6.0 \text{ cm})^2 = 113 \text{ cm}^2$, la respuesta sería injustificable porque contiene tres cifras significativas, que es mayor que el número de cifras significativas en el radio. Una buena regla empírica para la determinación del número de cifras significativas que se pueden afirmar en una multiplicación o división es la siguiente:

> Cuando se multiplican muchas cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla aplica para la división.

Al aplicar esta regla al área del disco compacto se ve que la respuesta para el área sólo tiene dos cifras significativas, porque el radio observado sólo tiene dos cifras significativas. En consecuencia, todo lo que es posible afirmar es que el área es de $1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$.

Los ceros pueden o no ser cifras significativas. Los que se usan para la posición del punto decimal en números como 0.03 y 0.007 5 no son significativos. Debido a eso, existen una y dos cifras significativas, respectivamente, en estos dos valores. Sin embargo, cuando los ceros vienen después de otros dígitos, existe la posibilidad de malas interpretaciones. Por ejemplo, suponga que la masa de un objeto está dada como 1 500 g. Este valor es ambiguo porque no se sabe si los últimos dos ceros se usan para ubicar el punto decimal o si representan cifras significativas en la medición. Para eliminar dicha ambigüedad, es común usar notación científica para indicar el número de cifras significativas. En este caso, la masa se expresaría como 1.5×10^3 g si hubiese dos cifras significativas en el valor observado, 1.50×10^3 g si hubiese tres cifras significativas y 1.500×10^3 g si hubiese cuatro. La misma regla se sostiene para números menores que 1, de modo que 2.3×10^{-4} tiene dos cifras significativas (y por lo tanto se podría escribir 0.000 23) y 2.30×10^{-4} tiene tres cifras significativas (también se escribe 0.000 230).

Para suma y resta debe considerar el número de lugares decimales cuando determine cuántas cifras significativas ha de reportar:

> Cuando los números se sumen o resten, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma.

Por ejemplo, si desea calcular $123 + 5.35$, la respuesta es 128 y no 128.35. Si se calcula la suma $1.000\,1 + 0.000\,3 = 1.000\,4$, el resultado tiene cinco cifras significativas aun cuando uno de los términos en la suma, 0.000 3, sólo tenga una cifra significativa. Del mismo modo, si se realiza la resta $1.002 - 0.998 = 0.004$, el resultado sólo tiene una cifra significativa, aun cuando un término tenga cuatro cifras significativas y el otro tenga tres.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.4

Lea con cuidado

Observe que la regla para suma y resta es diferente de la regla de multiplicación y división. Para suma y resta, la consideración relevante es el número de *lugares decimales*, no el número de *cifras significativas*.

En este libro la mayoría de los ejemplos numéricos y problemas de fin de capítulo producirán respuestas que tienen tres cifras significativas. Cuando se realicen cálculos del orden de magnitud, por lo general se trabajará con una sola cifra significativa.

Si se debe reducir el número de cifras significativas en el resultado de una suma o resta, hay una regla general para redondear números: el último dígito retenido se aumenta en 1 si el último dígito eliminado es mayor que 5. Si el último dígito eliminado es menor que 5, el último dígito permanece como está. Si el último dígito eliminado es igual a 5, el dígito restante debe redondearse al número par más cercano. (Esta regla ayuda a evitar acumulación de errores en procesos aritméticos largos.)

Una técnica para evitar la acumulación de error es demorar el redondeo de números en un cálculo largo hasta que tenga el resultado final. Espere a estar listo para copiar la respuesta final de su calculadora antes de redondear al número correcto de cifras significativas.

EJEMPLO 1.5 Instalación de una alfombra

En una habitación de 12.71 m de longitud y 3.46 m de ancho se instalará una alfombra. Encuentre el área de la habitación.

SOLUCIÓN

Si multiplica 12.71 m por 3.46 m en su calculadora, verá una respuesta de 43.976 6 m^2. ¿Cuántos de estos números debe reportar? La regla empírica para multiplicación dice que reporte en su respuesta sólo el número de cifras significativas que estén presentes en la cantidad medida que tenga el número más bajo de cifras significativas. En este ejemplo, el número más bajo de cifras significativas es tres en 3.46 m, así que debe expresar la respuesta final como 44.0 m^2.

Resumen

DEFINICIONES

Las tres cantidades físicas fundamentales de la mecánica son **longitud**, **masa** y **tiempo**, que en el SI tienen las unidades **metro** (m), **kilogramo** (kg) y **segundo** (s). Estas cantidades fundamentales no es posible definirlas en términos de cantidades más básicas.

La **densidad** de una sustancia se define como su *masa por cada unidad de volumen:*

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \qquad \textbf{(1.1)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El método de **análisis dimensional** es muy valioso para resolver problemas de física. Las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas. Al realizar estimaciones y cálculos de orden de magnitud, debe ser capaz de aproximar la respuesta a un problema cuando no haya suficiente información disponible para especificar completamente una solución exacta.

Cuando calcule un resultado a partir de varios números medidos, donde cada uno tiene cierta precisión, debe dar el resultado con el número correcto de **cifras significativas**. Cuando multiplique varias cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla se aplica a la división. Cuando se suman o restan números, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Suponga que los tres estándares fundamentales del sistema métrico fuesen longitud, *densidad* y tiempo en lugar de longitud, *masa* y tiempo. El estándar de densidad en este sistema se debe definir como el propio del agua. ¿Qué consideraciones acerca del agua necesitaría abordar para asegurar que el estándar de densidad es tan preciso como sea posible?

2. Exprese las siguientes cantidades usando los prefijos dados en la tabla 1.4: a) 3×10^{-4} m, b) 5×10^{-5} s, c) 72×10^{2} g.

3. **O** Ordene las siguientes cinco cantidades de la más grande a la más pequeña: a) 0.032 kg, b) 15 g, c) 2.7×10^{5} mg, d) 4.1×10^{-8} Gg, e) 2.7×10^{8} μg. Si dos de las masas son iguales, déles igual lugar en su lista.

4. **O** Si una ecuación es dimensionalmente correcta, ¿esto significa que la ecuación debe ser verdadera? Si una ecuación no es dimensionalmente correcta, ¿esto significa que la ecuación no puede ser verdadera?

5. **O** Responda cada pregunta con sí o no. Dos cantidades deben tener las mismas dimensiones a) ¿si las suma?, b) ¿si las multiplica?, c) ¿si las resta?, d) ¿si las divide?, e) ¿si usa una cantidad como exponente al elevar la otra a una potencia?, f) ¿si las iguala?

6. **O** El precio de la gasolina en una estación es de 1.3 euros por litro. Una estudiante usa 41 euros para comprar gasolina. Si sabe que 4 cuartos hacen un galón y que 1 litro es casi 1 cuarto, de inmediato razona que puede comprar (elija una) a) menos de 1 galón de gasolina, b) aproximadamente 5 galones de gasolina, c) cerca de 8 galones de gasolina, d) más de 10 galones de gasolina.

7. **O** Un estudiante usa una regleta para medir el grosor de un libro de texto y encuentra que es de 4.3 cm ± 0.1 cm. Otros estudiantes miden el grosor con calibradores vernier y obtienen a) 4.32 cm ± 0.01 cm, b) 4.31 cm ± 0.01 cm, c) 4.24 cm ± 0.01 cm y d) 4.43 cm ± 0.01 cm. ¿Cuál de estas cuatro mediciones, si hay alguna, concuerda con la obtenida por el primer estudiante?

8. **O** Una calculadora despliega un resultado como $1.365\,248\,0 \times 10^{7}$ kg. La incertidumbre estimada en el resultado es ±2%. ¿Cuántos dígitos debe incluir como significativos cuando escriba el resultado? Elija una: a) cero, b) uno, c) dos, d) tres, e) cuatro, f) cinco, g) no se puede determinar el número.

Problemas

Sección 1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

Nota: Consulte al final del libro, apéndices y tablas en el texto siempre que sea necesario para resolver problemas. En este capítulo la tabla 14.1 y el apéndice B.3 son de mucha utilidad. Las respuestas a los problemas con número impar aparecen al final del libro.

1. ● Use la información que aparece al final de este libro para calcular la densidad promedio de la Tierra. ¿Dónde encaja el valor entre los que se mencionan en la tabla 14.1? Busque la densidad de una roca superficial típica, como el granito, en otra fuente y compare la densidad de la Tierra con ella.
2. El kilogramo estándar es un cilindro de platino–iridio de 39.0 mm de alto y 39.0 mm de diámetro. ¿Cuál es la densidad del material?
3. Una importante compañía automotriz muestra un molde de su primer automóvil, hecho de 9.35 kg de hierro. Para celebrar sus 100 años en el negocio, un trabajador fundirá el molde en oro a partir del original. ¿Qué masa de oro se necesita para hacer el nuevo modelo?
4. ● Un protón, que es el núcleo de un átomo de hidrógeno, se representa como una esfera con un diámetro de 2.4 fm y una masa de 1.67×10^{-27} kg. Determine la densidad del protón y establezca cómo se compara con la densidad del plomo, que está dada en la tabla 14.1.
5. De cierta roca uniforme son cortadas dos esferas. Una tiene 4.50 cm de radio. La masa de la segunda esfera es cinco veces mayor. Encuentre el radio de la segunda esfera.

Sección 1.2 Materia y construcción de modelos

6. Un sólido cristalino consiste de átomos apilados en una estructura reticular repetitiva. Considere un cristal como el que se muestra en la figura P1.6a. Los átomos residen en las esquinas de cubos de lado $L = 0.200$ nm. Una pieza de evidencia para el ordenamiento regular de átomos proviene de las superficies

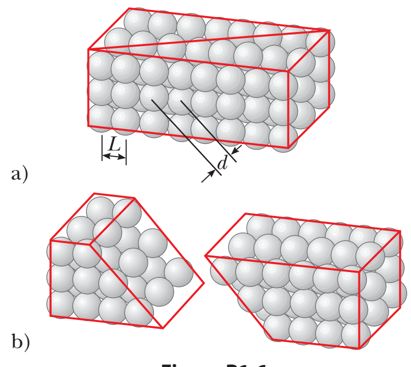


Figura P1.6

planas a lo largo de las cuales se separa un cristal, o fractura, cuando se rompe. Suponga que este cristal se fractura a lo largo de una cara diagonal, como se muestra en la figura P1.6b. Calcule el espaciamiento d entre dos planos atómicos adyacentes que se separan cuando el cristal se fractura.

Sección 1.3 Análisis dimensional

7. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas? a) $v_f = v_i + ax$, b) $y = (2\text{ m})\cos(kx)$, donde $k = 2\text{ m}^{-1}$.

8. La figura P1.8 muestra el *tronco de un cono*. De las siguientes expresiones de medición (geométrica), ¿cuál describe **i)** la circunferencia total de las caras circulares planas, **ii)** el volumen y **iii)** el área de la superficie curva? a) $\pi(r_1 + r_2)\,[h^2 + (r_2 - r_1)^2]^{1/2}$, b) $2\pi(r_1 + r_2)$, c) $\pi h(r_1{}^2 + r_1 r_2 + r_2{}^2)/3$.

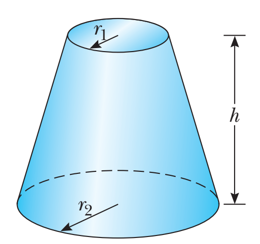


Figura P1.8

9. La ley de gravitación universal de Newton se representa por

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Aquí F es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un objeto pequeño sobre otro, M y m son las masas de los objetos y r es una distancia. La fuerza tiene las unidades del SI $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$. ¿Cuáles son las unidades del SI de la constante de proporcionalidad G?

Sección 1.4 Conversión de unidades

10. Suponga que su cabello crece a una proporción de 1/32 pulgada por cada día. Encuentre la proporción a la que crece en nanómetros por segundo. Dado que la distancia entre átomos en una molécula es del orden de 0.1 nm, su respuesta sugiere cuán rápidamente se ensamblan las capas de átomos en esta síntesis de proteínas.

11. Un lote rectangular mide 100 ft por 150 ft. Determine el área de este lote en metros cuadrados.

12. Un auditorio mide 40.0 m × 20.0 m × 12.0 m. La densidad del aire es 1.20 kg/m^3. ¿Cuáles son a) el volumen de la habitación en pies cúbicos y b) el peso en libras del aire en la habitación?

13. ● Una habitación mide 3.8 m por 3.6 m y su techo está a 2.5 m de altura. ¿Es posible empapelar por completo las paredes de esta habitación con las páginas de este libro? Explique su respuesta.

14. Suponga que llenar un tanque de gasolina de 30.0 galones tarda 7.00 min. a) Calcule la rapidez a la cual el tanque se llena en galones por segundo. b) Calcule la rapidez a la cual el tanque se llena en metros cúbicos por segundo. c) Determine el intervalo, en horas, que se requiere para llenar un volumen de 1.00 m^3 a la misma rapidez (1 galón = 231 pulg^3).

15. Una pieza sólida de plomo tiene una masa de 23.94 g y un volumen de 2.10 cm^3. A partir de estos datos, calcule la densidad del plomo en unidades del SI (kg/m^3).

16. Un cargador de mineral mueve 1 200 tons/h de una mina a la superficie. Convierta esta relación a libras por segundo, 1 ton = 2 000 lb.

17. Cuando se imprimió este libro, la deuda nacional estadounidense era de aproximadamente \$8 billones. a) Si se hicieran pagos con una rapidez de \$1 000 por segundo, ¿cuántos años tardaría en ser pagada la deuda, si supone que no se cargan intereses? b) Un billete de dólar mide aproximadamente 15.5 cm de largo. Si ocho billones de billetes de dólar se pusiesen extremo con extremo alrededor del ecuador de la Tierra, ¿cuántas veces darían la vuelta al planeta? Considere que el radio de la Tierra en el ecuador es de 6 378 km. *Nota:* Antes de hacer algún cálculo, intente adivinar las respuestas. Se sorprenderá.

18. Una pirámide tiene una altura de 481 ft y su base cubre una área de 13.0 acres (figura P1.18). El volumen de una pirámide está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura. Encuentre el volumen de esta pirámide en metros cúbicos. (1 acre = 43 560 ft^2)



Sylvain Grandadam/Photo Researchers, Inc.

Figura P1.18 Problemas 18 y 19.

19. La pirámide descrita en el problema 18 contiene aproximadamente 2 millones de bloques de piedra que en promedio pesan 2.50 toneladas cada uno. Encuentre el peso de esta pirámide en libras.

20. Un átomo de hidrógeno tiene un diámetro de 1.06×10^{-10} m según se deduce del diámetro de la nube esférica de electrones que rodea al núcleo. El núcleo de hidrógeno tiene un diámetro de aproximadamente 2.40×10^{-15} m. a) Para un modelo a escala, represente el diámetro del átomo de hidrógeno por la longitud de un campo de futbol americano (100 yardas = 300 ft) y determine el diámetro del núcleo en milímetros. b) ¿Cuántas veces el átomo es más grande en volumen que su núcleo?

21. Un galón de pintura (volumen = $3.78 \times 10^{-3}\text{ m}^3$) cubre un área de 25.0 m^2. ¿Cuál es el grosor de la pintura fresca sobre la pared?

22. El radio medio de la Tierra es de 6.37×10^6 m y el de la Luna es de 1.74×10^8 cm. A partir de estos datos calcule a) la razón del área superficial de la Tierra con la de la Luna y b) la relación del volumen de la Tierra con la de la Luna. Recuerde que el área superficial de una esfera es $4\pi r^2$ y el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

23. Un metro cúbico (1.00 m^3) de aluminio tiene una masa de 2.70×10^3 kg, y el mismo volumen de hierro tiene una masa de 7.86×10^3 kg. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólida que equilibraría una esfera de hierro sólida de 2.00 cm de radio sobre una balanza de brazos iguales.

24. Sea ρ_{Al} la representación de la densidad del aluminio y ρ_{Fe} la del hierro. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólida que equilibra una esfera de hierro sólida de radio r_{Fe} en una balanza de brazos iguales.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

Sección 1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

25. Encuentre el orden de magnitud del número de pelotas de tenis de mesa que entrarían en una habitación de tamaño típico (sin estrujarse). En su solución, establezca las cantidades que midió o estimó y los valores que tomó para ellas.

26. La llanta de un automóvil dura 50 000 millas. En un orden de magnitud, ¿a través de cuántas revoluciones girará? En su solución, establezca las cantidades que midió o estimó y los valores que tomó para ellas.

27. Calcule el orden de magnitud de la masa de una bañera medio llena de agua. Calcule el orden de magnitud de la masa de una bañera medio llena de monedas. En su solución, mencione las cantidades que tomó como datos y los valores que midió o estimó para cada una.

28. ● Suponga que Bill Gates le ofrece $1 000 millones si es capaz de terminar de contarlos usando sólo billetes de un dólar. ¿Debe aceptar su oferta? Explique su respuesta. Suponga que cuenta un billete cada segundo y advierta que necesita al menos 8 horas al día para dormir y comer.

29. En un orden de magnitud, ¿cuántos afinadores de piano hay en la ciudad de Nueva York? El físico Enrico Fermi fue famoso por plantear preguntas como ésta en los exámenes orales para calificar candidatos a doctorado. La facilidad que él tenía para realizar cálculos del orden de magnitud se ejemplifica en el problema 48 del capítulo 45.

Sección 1.6 Cifras significativas

Nota: El apéndice B.8, acerca de la propagación de incertidumbre, es útil para resolver los problemas de esta sección.

30. Una placa rectangular tiene una longitud de (21.3 ± 0.2) cm y un ancho de (9.8 ± 0.1) cm. Calcule el área de la placa, incluida su incertidumbre.

31. ¿Cuántas cifras significativas hay en los siguientes números: a) 78.9 ± 0.2 b) 3.788×10^9 c) 2.46×10^{-6} d) 0.005 3?

32. El radio de una esfera sólida uniforme mide (6.50 ± 0.20) cm y su masa es de (1.85 ± 0.02) kg. Determine la densidad de la esfera en kilogramos por metro cúbico y la incertidumbre en la densidad.

33. Realice las siguientes operaciones aritméticas: a) la suma de los valores medidos 756, 37.2, 0.83 y 2, b) el producto de $0.003\,2 \times 356.3$, c) el producto $5.620 \times \pi$.

34. El *año tropical*, el intervalo desde un equinoccio de primavera hasta el siguiente equinoccio de primavera, es la base para el calendario. Contiene 365.242 199 días. Encuentre el número de segundos en un año tropical.

Nota: Los siguientes 11 problemas requieren habilidades matemáticas que serán útiles a lo largo del curso.

35. Problema de repaso. Una niña se sorprende de que debe pagar $1.36 por un juguete marcado con $1.25 debido a los impuestos. ¿Cuál es la tasa de impuesto efectiva sobre esta compra, expresada como porcentaje?

36. ● **Problema de repaso.** A un estudiante se le proporcionan una pila de papel para copiadora, regla, compás, tijeras y una báscula de precisión. El estudiante corta varias formas de varios tamaños, calcula sus áreas, mide sus masas y prepara la gráfica de la figura P1.36. Considere el cuarto punto experimental desde la parte superior. ¿Qué tan lejos está de la recta de mejor ajuste? a) Exprese su respuesta como una diferencia en la coordenada del eje vertical. b) Formule su respuesta como una diferencia en la coordenada del eje horizontal. c) Exprese las respuestas de los incisos a) y b) como un porcentaje. d) Calcule la pendiente de la línea. e) Establezca lo que demuestra la gráfica, en referencia con la pendiente de la gráfica y los resultados de los incisos c) y d). f) Describa si este resultado debe anticiparse teóricamente. Describa el significado físico de la pendiente.

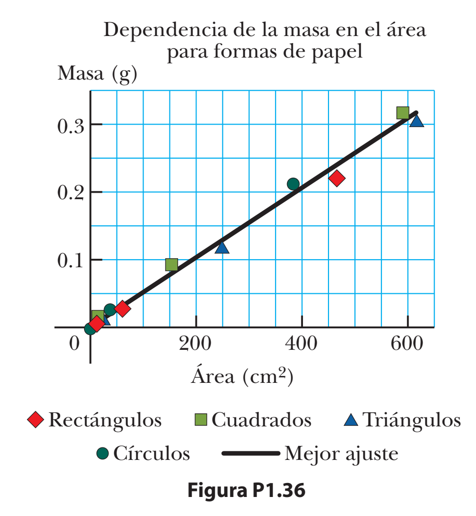


Figura P1.36

37. Problema de repaso. Un joven inmigrante trabaja tiempo extra y gana dinero para comprar reproductores MP3 portátiles que envía a su casa como regalos a la familia. Por cada turno extra que trabaja, él calcula que comprará un reproductor y dos tercios de otro. Un correo electrónico de su madre le informa que los reproductores son tan populares que cada uno de los 15 jóvenes amigos del vecindario quiere uno. ¿Cuántos turnos más tendrá que trabajar?

38. Problema de repaso. En un estacionamiento universitario, el número de automóviles ordinarios es mayor que el de vehículos deportivos por 94.7%. La diferencia entre el número de automóviles y el número de vehículos deportivos es 18. Encuentre el número de vehículos deportivos en el estacionamiento.

39. Problema de repaso. La relación del número de pericos que visita un comedero de aves al número de aves más interesantes es de 2.25. Una mañana, cuando 91 aves visitan el comedero, ¿cuál es el número de pericos?

40. Problema de repaso. Pruebe que una solución de la ecuación

$$2.00x^4 - 3.00x^3 + 5.00x = 70.0$$

es $x = -2.22$.

41. Problema de repaso. Encuentre todo ángulo θ entre 0 y 360° para el cual la relación de sen θ a cos θ sea -3.00.

42. Problema de repaso. Una curva en la autopista forma una sección de círculo. Un automóvil entra a la curva. La brújula de su tablero muestra que el automóvil al inicio se dirige hacia el este. Después de recorrer 840 m, se dirige 35.0° al sureste. Encuentre el radio de curvatura de su trayectoria. *Sugerencia:* Encontrará útil aprender un teorema geométrico citado en el apéndice B.3.

43. Problema de repaso. Durante cierto periodo, mientras crece un cocodrilo, su masa es proporcional al cubo de su longitud. Cuando la longitud del cocodrilo cambia en 15.8%, su masa aumenta 17.3 kg. Encuentre su masa al final de este proceso.

44. **Problema de repaso.** A partir del conjunto de ecuaciones

$$p = 3q$$

$$pr = qs$$

$$\tfrac{1}{2}pr^2 + \tfrac{1}{2}qs^2 = \tfrac{1}{2}qt^2$$

que involucran las incógnitas p, q, r, s y t, encuentre el valor de la relación de t a r.

45. ● **Problema de repaso.** En un conjunto particular de ensayos experimentales, los estudiantes examinan un sistema descrito por la ecuación

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{k\pi\, d^2\,(T_h - T_c)}{4L}$$

En el capítulo 20 se verá esta ecuación y las diversas cantidades en ella. Para control experimental, en estos ensayos todas las cantidades, excepto d y Δt, son constantes. a) Si d se hace tres veces más grande, ¿la ecuación predice que Δt se hará más grande o más pequeña? ¿En qué factor? b) ¿Qué patrón de proporcionalidad de Δt a d predice la ecuación? c) Para mostrar esta proporcionalidad como una línea recta en una gráfica, ¿qué cantidades debe graficar en los ejes horizontal y vertical? d) ¿Qué expresión representa la pendiente teórica de esta gráfica?

Problemas adicionales

46. En una situación en que los datos se conocen a tres cifras significativas, se escribe 6.379 m = 6.38 m y 6.374 m = 6.37 m. Cuando un número termina en 5, arbitrariamente se elige escribir 6.375 m = 6.38 m. Igual se podría escribir 6.375 m = 6.37 m, "redondeando hacia abajo" en lugar de "redondear hacia arriba", porque el número 6.375 se cambiaría por iguales incrementos en ambos casos. Ahora considere una estimación del orden de magnitud en la cual los factores de cambio, más que los incrementos, son importantes. Se escribe 500 m $\sim 10^3$ m porque 500 difiere de 100 por un factor de 5, mientras difiere de 1 000 sólo por un factor de 2. Escriba 437 m $\sim 10^3$ m y 305 m $\sim 10^2$ m. ¿Qué distancia difiere de 100 m y de 1 000 m por iguales factores de modo que lo mismo se podría escoger representar su orden de magnitud como $\sim 10^2$ m o como $\sim 10^3$ m?

47. ● Un cascarón esférico tiene un radio externo de 2.60 cm y uno interno de a. La pared del cascarón tiene grosor uniforme y está hecho de un material con densidad de 4.70 g/cm^3. El espacio interior del cascarón está lleno con un líquido que tiene una densidad de 1.23 g/cm^3. a) Encuentre la masa m de la esfera, incluidos sus contenidos, como función de a. b) En la respuesta a la parte a), si a se considera variable, ¿para qué valor de a tiene m su máximo valor posible? c) ¿Cuál es esta masa máxima? d) ¿El valor de la parte b) concuerda con el resultado de un cálculo directo de la masa de una esfera de densidad uniforme? e) ¿Para qué valor de a la respuesta al inciso a) tiene su valor mínimo posible? f) ¿Cuál es esta masa mínima? g) ¿El valor del inciso f) concuerda con el resultado de un cálculo directo de la masa de una esfera uniforme? h) ¿Qué valor de m está a la mitad entre los valores máximo y mínimo posibles? i) ¿Esta masa concuerda con el resultado del inciso a) evaluada para a = 2.60 cm/2 = 1.30 cm? j) Explique si debe esperar concordancia en cada uno de los incisos d), g) e i). k) **¿Qué pasaría si?** En el inciso a), ¿la respuesta cambiaría si la pared interior del cascarón no fuese concéntrica con la pared exterior?

48. Una barra que se extiende entre $x = 0$ y $x = 14.0$ cm tiene área de sección transversal uniforme $A = 9.00$ cm^2. Se fabrica de una aleación de metales que cambia continuamente de modo que, a lo largo de su longitud, su densidad cambia de manera uniforme de 2.70 g/cm^3 a 19.3 g/cm^3. a) Identifique las constantes B y C requeridas en la expresión $\rho = B + Cx$ para describir la densidad variable. b) La masa de la barra se conoce mediante

$$m = \int_{\text{todo el material}} \rho\, dV = \int_{\text{toda } x} \rho A\, dx = \int_0^{14\text{ cm}} (B + Cx)\ (9.00\text{ cm}^2)\ dx$$

Realice la integración para encontrar la masa de la barra.

49. El diámetro de la galaxia con forma de disco, la Vía Láctea, es de aproximadamente 1.0×10^5 años luz (a–l). La distancia a Andrómeda, que es la galaxia espiral más cercana a la Vía Láctea, es de alrededor de 2.0 millones de a–l. Si un modelo a escala representa las galaxias Vía Láctea y Andrómeda como platos soperos de 25 cm de diámetro, determine la distancia entre los centros de los dos platos.

50. ● Se sopla aire hacia dentro de un globo esférico de modo que, cuando su radio es de 6.50 cm, éste aumenta en una proporción de 0.900 cm/s. a) Encuentre la rapidez a la que aumenta el volumen del globo. b) Si dicha relación de flujo volumétrico de aire que entra al globo es constante, ¿en qué proporción aumentará el radio cuando el radio es de 13.0 cm? c) Explique físicamente por qué la respuesta del inciso b) es mayor o menor que 0.9 cm/s, si es diferente.

51. El consumo de gas natural por una compañía satisface la ecuación empírica $V = 1.50t + 0.008\,00t^2$, donde V es el volumen en millones de pies cúbicos y t es el tiempo en meses. Exprese esta ecuación en unidades de pies cúbicos y segundos. Asigne las unidades adecuadas a los coeficientes. Suponga un mes de 30.0 días.

52. En física es importante usar aproximaciones matemáticas. Demuestre que, para ángulos pequeños ($< 20°$),

$$\tan \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha \approx \alpha = \frac{\pi\alpha'}{180°}$$

donde α está en radianes y α' en grados. Use una calculadora para encontrar el ángulo más grande para el que $\tan \alpha$ se pueda aproximar a α con un error menor de 10.0 por ciento.

53. Un chorro de agua elevado se ubica en el centro de una fuente, como se muestra en la figura P1.53. Un estudiante camina alrededor de la fuente, evitando mojar sus pies, y mide su circunferencia en 15.0 m. A continuación, el estudiante se para en el borde de la fuente y usa un transportador para medir el ángulo de elevación de la fuente que es de 55.0°. ¿Cuál es la altura del chorro?



Figura P1.53

54. ● Las monedas de colección a veces se recubren con oro para mejorar su belleza y valor. Considere un cuarto de dólar conmemorativo que se anuncia a la venta en $4.98. Tiene un diá-

metro de 24.1 mm y un grosor de 1.78 mm, y está cubierto por completo con una capa de oro puro de 0.180 μm de grueso. El volumen del recubrimiento es igual al grosor de la capa por el área a la que se aplica. Los patrones en las caras de la moneda y los surcos en sus bordes tienen un efecto despreciable sobre su área. Suponga que el precio del oro es de $10.0 por cada gramo. Encuentre el costo del oro agregado a la moneda. ¿El costo del oro aumenta significativamente el valor de la moneda? Explique su respuesta.

55. Un año es casi $\pi \times 10^7$ s. Encuentre el error porcentual en esta aproximación, donde "error porcentual" se define como

$$\text{Error porcentual} = \frac{|\text{valor supuesto} - \text{valor verdadero}|}{\text{valor verdadero}} \times 100\%$$

56. ● Una criatura se mueve con una rapidez de 5.00 furlongs por dos semanas (una unidad de rapidez no muy común). Dado que 1 furlong = 220 yardas, y 2 semanas = 14 días, determine la rapidez de la criatura en metros por segundo. Explique qué tipo de criatura cree que podría ser.

57. Un niño adora ver cómo llena una botella de plástico transparente con champú. Las secciones transversales horizontales de la botella son círculos con diámetros variables porque la botella es mucho más ancha en algunos lugares que en otros. Usted vierte champú verde brillante con una relación de flujo volumétrico constante de 16.5 cm^3/s. ¿En qué cantidad el nivel de la botella se eleva a) a un punto donde el diámetro de la botella es de 6.30 cm y b) a un punto donde el diámetro es de 1.35 cm?

58. ● En la siguiente tabla la información representa observaciones de las masas y dimensiones de cilindros sólidos de aluminio, cobre, latón, estaño y hierro. Use tales datos para calcular las densidades de dichas sustancias. Establezca cómo sus resultados para aluminio, cobre y hierro se comparan con los conocidos en la tabla 14.1.

Sustancia	**Masa (g)**	**Diámetro (cm)**	**Longitud (cm)**
Aluminio	51.5	2.52	3.75
Cobre	56.3	1.23	5.06
Latón	94.4	1.54	5.69
Estaño	69.1	1.75	3.74
Hierro	216.1	1.89	9.77

59. Suponga que hay 100 millones de automóviles de pasajeros en Estados Unidos y que el consumo promedio de combustible es de 20 mi/gal de gasolina. Si la distancia promedio que recorre cada automóvil es de 10 000 mi/año, ¿cuánta gasolina se ahorraría al año si el consumo promedio de combustible pudiera aumentar a 25 mi/gal?

60. La distancia del Sol a la estrella más cercana es casi de 4×10^{16} m. La galaxia Vía Láctea es en términos aproximados un disco de $\sim 10^{21}$ m de diámetro y $\sim 10^{19}$ m de grosor. Encuentre el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea. Considere representativa la distancia entre el Sol y el vecino más cercano.

Respuestas a preguntas rápidas

1.1 a). Ya que la densidad del aluminio es más pequeña que la del hierro, es necesario un mayor volumen de aluminio que de hierro para una determinada masa.

1.2 Falso. El análisis dimensional aporta las unidades de la constante de proporcionalidad pero no da información acerca de su valor numérico. Para determinar su valor numérico, se requiere información experimental o razonamiento geométrico. Por ejemplo, en la generación de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$, puesto que el factor $\frac{1}{2}$ es adimensional, no hay forma de determinarlo usando análisis dimensional.

1.3 b). Puesto que hay 1.609 km en 1 mi, se requiere un mayor número de kilómetros que de millas para una cierta distancia.



En las carreras de dragsters un conductor quiere una aceleración tan grande como sea posible. En una distancia de un cuarto de milla, un vehículo alcanza rapideces de más de 320 mi/h y cubre la distancia entera en menos de 5 s. (George Lepp/Stone/Getty)

2 Movimiento en una dimensión

Como una primera etapa en el estudio de la mecánica clásica, se describe el movimiento de un objeto mientras se ignoran las interacciones con agentes externos que pueden causar o modificar dicho movimiento. Esta parte de la mecánica clásica se llama *cinemática.* (La palabra *cinemática* tiene la misma raíz que *cinema.* ¿Entiende por qué?) En este capítulo, se considera sólo el movimiento en una dimensión, esto es: el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta.

A partir de la experiencia cotidiana es claro que el movimiento de un objeto representa un cambio continuo en la posición de un objeto. En física se clasifica por categorías el movimiento en tres tipos: traslacional, rotacional y vibratorio. Un automóvil que viaja en una autopista es un ejemplo de movimiento traslacional, el giro de la Tierra sobre su eje es un ejemplo de movimiento rotacional, y el movimiento de ida y vuelta de un péndulo es un ejemplo de movimiento vibratorio. En éste y los siguientes capítulos, se tratará sólo con el movimiento traslacional. (Más tarde, en el libro, se discutirán los movimientos rotacional y vibratorio.)

En el estudio del movimiento traslacional se usa el **modelo de partícula** y el objeto en movimiento se describe como una *partícula* sin importar su tamaño. En general, **una partícula es un objeto parecido a un punto, es decir: un objeto que tiene masa pero es de tamaño infinitesimal**. Por ejemplo, si quiere describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, puede considerar a la Tierra como partícula y obtener datos razonablemente precisos acerca de su órbita. Esta aproximación se justifica porque el radio de la órbita

de la Tierra es grande en comparación con las dimensiones de la Tierra y del Sol. Como ejemplo en una escala mucho más pequeña, es posible explicar la presión que ejerce un gas sobre las paredes de un contenedor al tratar las moléculas de gas como partículas, sin importar su estructura interna.

2.1 Posición, velocidad y rapidez

Posición ▶

El movimiento de una partícula se conoce por completo si la posición de la partícula en el espacio se conoce en todo momento. La **posición** de una partícula es la ubicación de la partícula respecto a un punto de referencia elegido que se considera el origen de un sistema coordenado.

Considere un automóvil que se mueve hacia adelante y en reversa a lo largo del eje x como en la figura 2.1a. Cuando comience a recopilar datos de posición, el automóvil está a 30 m a la derecha de una señal del camino, que usará para identificar la posición de referencia $x = 0$. Aplique el modelo de partícula para identificar algún punto en el automóvil, acaso la manija de la puerta delantera, como una partícula que representa a todo el automóvil.

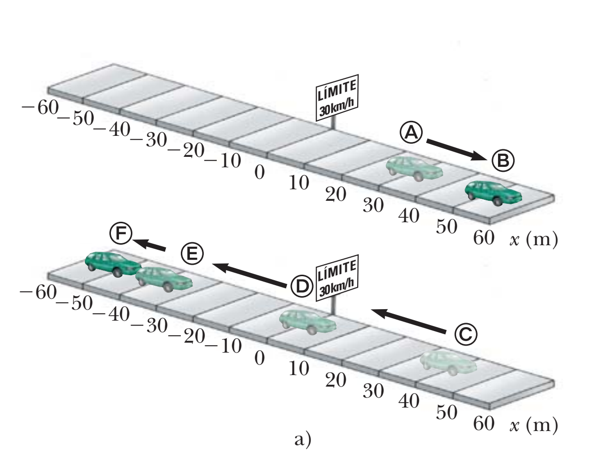
Active el cronómetro y una vez cada 10 s anote la posición del automóvil en relación con la señal en $x = 0$. Como aparece en la tabla 2.1, el automóvil se mueve hacia la derecha (que se definió como la dirección positiva) durante los primeros 10 s de movimiento, desde la posición Ⓐ hasta la posición Ⓑ. Después de Ⓑ, los valores de posición comienzan a disminuir, lo que indica que el automóvil regresa desde la posición Ⓑ hasta la posición Ⓕ. De hecho, en Ⓓ, 30 s después de comenzar a medir, el automóvil está junto a la señal del camino usada para marcar el origen de coordenadas (vea la figura 2.1a). Continúa moviéndose hacia la izquierda y está a más de 50 m a la izquierda de la señal cuando se deja de registrar información después del sexto punto de datos. En la figura 2.1b se presenta una representación gráfica de esta información. A tal gráfica se le llama *gráfica posición-tiempo*.

TABLA 2.1

Posición del automóvil en varios tiempos

Posición	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

Advierta ahora las *representaciones alternativas* de información que se usaron para el movimiento del automóvil. La figura 2.1a es una *representación pictórica*, mientras que la figura 2.1b es una *representación gráfica*. La tabla 2.1 es una *representación tabular* de la misma información. Usar representaciones alternativas es una excelente estrategia para comprender la situación en un problema dado. En todo caso, la meta en muchos problemas es lograr una *representación matemática*, la cual se analiza para resolver algún fragmento de información solicitada.



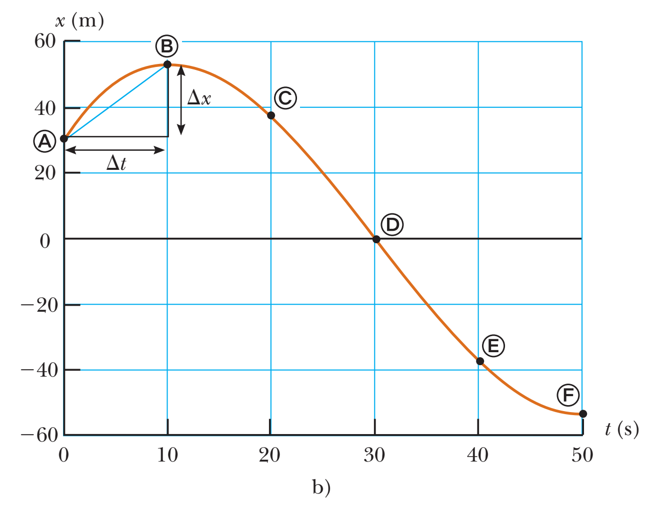


Figura 2.1 Un automóvil va hacia adelante y en reversa a lo largo de una línea recta. Ya que se tiene interés sólo en el movimiento traslacional del automóvil, se le representa como una partícula. Aquí se han usado tres exhibiciones para la información del movimiento del automóvil. La tabla 2.1 es una exposición tabular de la información. a) Representación pictórica del movimiento del automóvil. b) Representación gráfica (gráfica posición-tiempo) del movimiento del automóvil.

A partir de los datos de la tabla 2.1, se determina fácilmente el cambio en posición del automóvil para varios intervalos de tiempo. El **desplazamiento** de una partícula se define como su cambio en posición en algún intervalo de tiempo. Conforme la partícula se mueve desde una posición inicial x_i a una posición final x_f, su desplazamiento se conoce por

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \quad (2.1)$$

◀ Desplazamiento

Se usa la letra griega mayúscula delta (Δ) para denotar el *cambio* en una cantidad. A partir de esta definición se ve que Δx es positiva si x_f es mayor que x_i y negativo si x_f es menor que x_i.

Es muy importante reconocer la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. **Distancia** es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula. Considere, por ejemplo, a los jugadores de basquetbol de la figura 2.2. Si un jugador corre desde la canasta de su propio equipo a lo largo de la cancha hasta la canasta del otro equipo y luego regresa a su propia canasta, el *desplazamiento* del jugador durante este intervalo de tiempo es cero porque terminó en el mismo punto del que partió: $x_f = x_i$, de modo que $\Delta x = 0$. Sin embargo, durante este intervalo, se movió a lo largo de una *distancia* del doble de la longitud de la cancha de basquetbol. La distancia siempre se representa como un número positivo, mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo.



© Richard Paul Kane/Shutterstock

Figura 2.2 En esta cancha de basquetbol, los jugadores corren de ida y vuelta durante todo el juego. La distancia que corren los jugadores durante el tiempo de juego es distinta de cero. El desplazamiento de los jugadores durante el tiempo de juego es aproximadamente cero porque deben regresar al mismo punto una y otra vez.

El desplazamiento es un ejemplo de una cantidad vectorial. Muchas otras cantidades físicas, incluida posición, velocidad y aceleración, también son vectores. En general, **una cantidad vectorial requiere la especificación tanto de dirección como de magnitud**. En contraste, **una cantidad escalar tiene un valor numérico y no dirección**. En este capítulo, se usan los signos positivo (+) y negativo (−) para indicar la dirección del vector. Por ejemplo, para movimiento horizontal especifique a su arbitrio a la derecha como la dirección positiva. Después, cualquier objeto que siempre se mueva a la derecha experimenta un desplazamiento positivo $\Delta x > 0$, y cualquier objeto que se mueva hacia la izquierda experimenta un desplazamiento negativo de modo que $\Delta x < 0$. En el capítulo 3 se tratarán las cantidades vectoriales con más detalle.

Todavía no se menciona un punto muy importante. Note que los datos de la tabla 2.1 resultan en los seis puntos de datos de la gráfica de la figura 2.1b. La curva uniforme que se dibuja a través de los seis puntos de la gráfica sólo es una *posibilidad* del movimiento real del automóvil. Únicamente se tiene información acerca de seis instantes de tiempo; no se tiene idea de lo que ocurrió entre los puntos de datos. La curva uniforme es una *suposición* de lo que ocurrió, pero tenga en mente que *sólo* es una suposición.

Si la curva uniforme representa el movimiento real del automóvil, la gráfica contiene información acerca de todo el intervalo de 50 s durante los que se observó el movimiento del automóvil. Es mucho más fácil ver los cambios en la posición a partir de la gráfica que de una descripción verbal o incluso de una tabla de números. Por ejemplo, es claro que el automóvil cubre más terreno durante la mitad del intervalo de 50 s que al final. Entre las posiciones Ⓒ y Ⓓ, el automóvil viaja casi 40 m, pero durante los últimos 10 s, entre las posiciones Ⓔ y Ⓕ, se mueve a menos de la mitad de esa distancia. Una forma común de comparar estos movimientos diferentes es dividir el desplazamiento Δx que se presenta entre dos lecturas de cronómetro entre el valor de dicho intervalo de tiempo particular Δt. El resultado evidencia ser una relación muy útil, una que se usará muchas veces. A esta relación se le ha dado un nombre especial: *velocidad promedio*. **La velocidad promedio $v_{x,\text{ prom}}$ de una partícula se define como el desplazamiento Δx de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho desplazamiento**:

$$v_{x,\text{ prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

◀ Velocidad promedio

donde el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x. A partir de esta definición es claro que la velocidad promedio tiene dimensiones de longitud divididas entre el tiempo (L/T), o metros por segundo en unidades del SI.

La velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es positiva o negativa, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo de tiempo Δt siempre es positivo.) Si la coordenada de la partícula aumenta en el tiempo (esto es, si $x_f > x_i$), Δx es positiva y $v_{x,\text{ prom}} = \Delta x/\Delta t$ es positiva. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x positiva, esto es, hacia valores más grandes de x. Si la coordenada

disminuye en el tiempo (esto es, si $x_f < x_i$), Δx es negativa y por lo tanto $v_{x,\,\text{prom}}$ es negativa. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x negativa.

La velocidad promedio se interpreta geométricamente al dibujar una línea recta entre dos puntos en la gráfica posición-tiempo en la figura 2.1b. Esta línea forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura Δx y base Δt. La pendiente de esta línea es la proporción $\Delta x/\Delta t$, que se definió como velocidad promedio en la ecuación 2.2. Por ejemplo, la línea entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ en la figura 2.1b tiene una pendiente igual a la velocidad promedio del automóvil entre dichos dos tiempos $(52\text{ m} - 30\text{ m})/(10\text{ s} - 0) = 2.2\text{ m/s}$.

En el uso cotidiano, la *rapidez* y la *velocidad* promedio son intercambiables. De cualquier modo, en física, hay una clara distinción entre estas dos cantidades. Considere una competidora de maratón que corre una distancia d de más de 40 km y aún así termina en su punto de partida. Su desplazamiento total es cero, ¡así que su velocidad promedio es cero! No obstante, es necesario cuantificar cuán rápido corre. Una relación ligeramente diferente logra esto. La **rapidez promedio** v_{prom} de una partícula, una cantidad escalar, se define como la **distancia total recorrida dividida entre el intervalo de tiempo total requerido para recorrer dicha distancia:**

Rapidez promedio ►

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.3)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.1

Rapidez promedio y velocidad promedio

La magnitud de la velocidad promedio *no* es la rapidez promedio. Por ejemplo, considere a la corredora de maratón que se analizó en la ecuación 2.3. La magnitud de su velocidad promedio es cero, pero su rapidez promedio claramente es distinta de cero.

La unidad del SI de la rapidez promedio es la misma que la unidad de velocidad promedio: metros por segundo. Sin embargo, a diferencia de la velocidad promedio, la rapidez promedio no tiene dirección y siempre se expresa como un número positivo. Advierta la clara distinción entre las definiciones de velocidad promedio y rapidez promedio: la velocidad promedio (ec. 2.2) es el *desplazamiento* dividido entre el intervalo de tiempo, mientras que la rapidez promedio (ec. 2.3) es la *distancia* dividida entre el intervalo de tiempo.

El conocimiento de la velocidad promedio o la rapidez promedio de una partícula no proporciona información acerca de los detalles del viaje. Por ejemplo, suponga que le toma 45.0 s andar 100 m por un largo corredor recto hacia su puerta de salida en el aeropuerto. En la marca de 100 m, se da cuenta de que pasó los baños y regresa 25.0 m a lo largo del mismo corredor, y faltan 10.0 s para el viaje de regreso. La magnitud de su *velocidad* promedio es $+75.0\text{ m}/55.0\text{ s} = +1.36\text{ m/s}$. La *rapidez* promedio para su viaje es $125\text{ m}/55.0\text{ s} = 2.27\text{ m/s}$. Es posible que haya viajado a varias rapideces durante la caminata. Ninguna velocidad promedio ni rapidez promedio proporciona información acerca de estos detalles.

Pregunta rápida 2.1 ¿Bajo cuáles de las siguientes condiciones la magnitud de la velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es más pequeña que la rapidez promedio durante algún intervalo de tiempo? a) una partícula se mueve en la dirección $+x$ sin regresar, b) una partícula se mueve en la dirección $-x$ sin regresar, c) una partícula se mueve en la dirección $+x$ y luego invierte la dirección de su movimiento, d) no existen condiciones para que esto sea cierto.

EJEMPLO 2.1 Cálculo de velocidad y rapidez promedio

Encuentre el desplazamiento, velocidad promedio y rapidez promedio del automóvil de la figura 2.1a entre las posiciones Ⓐ y Ⓕ.

SOLUCIÓN

Consulte la figura 2.1 para formar una imagen mental del automóvil y su movimiento. Represente el automóvil como una partícula. A partir de la gráfica posición-tiempo dada en la figura 2.1b, note que $x_{Ⓐ} = 30\text{ m}$ en $t_{Ⓐ} = 0\text{ s}$ y que $x_{Ⓕ} = -53\text{ m}$ en $t_{Ⓕ} = 50\text{ s}$.

Use la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento del automóvil: $\Delta x = x_{Ⓕ} - x_{Ⓐ} = -53\text{ m} - 30\text{ m} = -83\text{ m}$

Este resultado significa que el automóvil termina 83 m en la dirección negativa (a la izquierda, en este caso) desde donde partió. Este número tiene las unidades correctas y es del mismo orden de magnitud que los datos proporcionados. Un vistazo rápido a la figura 2.1a indica que es la respuesta correcta.

Aplique la ecuación 2.2 para encontrar la velocidad promedio:
$$v_{x,\,\text{prom}} = \frac{x_{Ⓕ} - x_{Ⓐ}}{t_{Ⓕ} - t_{Ⓐ}}$$
$$= \frac{-53\text{ m} - 30\text{ m}}{50\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{-83\text{ m}}{50\text{ s}} = \boxed{-1.7\text{ m/s}}$$

No es posible encontrar sin ambigüedad la rapidez promedio del automóvil a partir de los datos de la tabla 2.1, porque no se tiene información acerca de las posiciones del automóvil entre los puntos de datos. Si se adopta la suposición de que los detalles de la posición del automóvil se describen mediante la curva de la figura 2.1b, la distancia recorrida es 22 m (desde Ⓐ a Ⓑ) más 105 m (de Ⓑ a Ⓕ), para un total de 127 m.

Aplique la ecuación 2.3 para encontrar la rapidez promedio del automóvil:
$$v_{\text{prom}} = \frac{127\text{ m}}{50\text{ s}} = \boxed{2.5\text{ m/s}}$$

Note que la rapidez promedio es positiva, como debe ser. Considere que la curva café de la figura 2.1b fuese diferente de modo que entre 0 s y 10 s viaja desde Ⓐ a 100 m y luego regresa a Ⓑ. La rapidez promedio del automóvil cambiaría porque la distancia es diferente, pero la velocidad promedio no cambiaría.

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

Con frecuencia es necesario conocer la velocidad de una partícula en un instante específico en el tiempo en lugar de la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo finito. En otras palabras, nos gustaría poder especificar su velocidad de manera tan precisa como detalla su posición al notar lo que ocurre en una lectura particular de reloj; esto es, en algún instante específico. ¿Qué significa hablar acerca de qué tan rápido se mueve algo si se “congela el tiempo” y sólo hablar acerca de un instante individual? A finales del siglo XII, con la invención del cálculo, los científicos empezaron a razonar las formas de describir el movimiento de un objeto en cualquier momento del tiempo.

Para ver cómo se hace esto, considere la figura 2.3a, que es una reproducción de la gráfica de la figura 2.1b. Ya se discutió la velocidad promedio para el intervalo durante el cual el automóvil se mueve desde la posición Ⓐ hasta la posición Ⓑ (dada por la pendiente de la línea azul) y para el intervalo durante el cual se mueve de Ⓐ a Ⓕ (representado por la pendiente de la línea azul más larga y que se calculó en el ejemplo 2.1). El automóvil comienza a moverse hacia la derecha, que se define como la dirección positiva. Debido a esto, al ser positivo, el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de Ⓐ a Ⓑ es más representativo de la velocidad inicial que el valor de la velocidad promedio durante el

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.2
Pendientes de gráficas

En cualquier gráfica de datos físicos, la *pendiente* es la relación del cambio en la cantidad representada en el eje vertical al cambio en la cantidad representada en el eje horizontal. Recuerde que *una pendiente tiene unidades* (a menos que ambos ejes tengan las mismas unidades). Las unidades de la pendiente de la figura 2.1b y la figura 2.3 son metros por segundo, las unidades de velocidad.

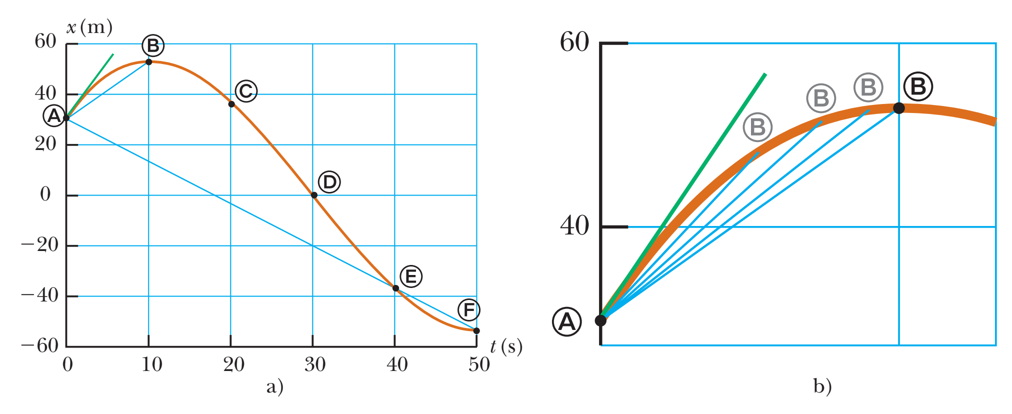


Figura 2.3 a) Gráfica que representa el movimiento del automóvil de la figura 2.1. b) Una ampliación de la esquina superior izquierda de la gráfica muestra cómo la línea azul entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ tiende a la línea tangente verde conforme el punto Ⓑ se mueve más cerca del punto Ⓐ.

intervalo de Ⓐ a Ⓕ, que se determinó era negativa en el ejemplo 2.1. Ahora enfóquese en la línea azul corta y deslice el punto Ⓑ hacia la izquierda a lo largo de la curva, hacia el punto Ⓐ, como en la figura 2.3b. La línea entre los puntos se vuelve cada vez más inclinada, y conforme los dos puntos se vuelven en extremo próximos, la línea se convierte en una línea tangente a la curva, indicada por la línea verde en la figura 2.3b. La pendiente de esta línea tangente representa la velocidad del automóvil en el punto Ⓐ. Lo que se hizo fue determinar la *velocidad instantánea* en dicho momento. En otras palabras, **la velocidad instantánea v_x es igual al valor límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:**[1]

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

En notación de cálculo, este límite se llama *derivada* de x respecto a t, que se escribe dx/dt:

Velocidad instantánea ▶

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.3

Rapidez instantánea y velocidad instantánea

En la *Prevención de riesgos ocultos* 2.1 se argumentó que la magnitud de la velocidad promedio no es la rapidez promedio. Sin embargo, la magnitud de la velocidad instantánea *es* la rapidez instantánea. En un intervalo de tiempo infinitesimal, la magnitud del desplazamiento es igual a la distancia recorrida por la partícula.

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero. Cuando la pendiente de la gráfica posición-tiempo es positiva, como en cualquier momento durante los primeros 10 s en la figura 2.3, v_x es positiva y el automóvil se mueve hacia valores más grandes de x. Después del punto Ⓑ, v_x es negativa porque la pendiente es negativa y el automóvil se mueve hacia valores más pequeños de x. En el punto Ⓑ, la pendiente y la velocidad instantánea son cero y el automóvil está momentáneamente en reposo.

De aquí en adelante, se usa la palabra *velocidad* para designar velocidad instantánea. Cuando se esté interesado en *velocidad promedio*, siempre se usará el adjetivo *promedio*.

La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea. Como con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada con ella. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de +25 m/s a lo largo de una línea dada y otra partícula tiene una velocidad instantánea de −25 m/s a lo largo de la misma línea, ambas tienen una rapidez[2] de 25 m/s.

Pregunta rápida 2.2 ¿Los integrantes de la patrulla de caminos están más interesados en a) la rapidez promedio o b) la rapidez instantánea mientras usted conduce?

EJEMPLO CONCEPTUAL 2.2 La velocidad de diferentes objetos

Considere los siguientes movimientos unidimensionales: **A)** una bola lanzada directamente hacia arriba llega al punto más alto y cae de vuelta hacia la mano del lanzador; **B)** un automóvil de carreras parte del reposo y aumenta su rapidez hasta 100 m/s; y **C)** una nave espacial navega por el espacio con velocidad constante. ¿Existen algunos puntos en el movimiento de estos objetos donde la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad promedio durante todo el movimiento? Si es así, identifique el(los) punto(s).

SOLUCIÓN

A) La velocidad promedio para la bola lanzada es cero porque la bola regresa al punto de partida; por lo tanto, su desplazamiento es cero. Hay un punto donde la velocidad instantánea es cero: en lo alto del movimiento.

B) La velocidad promedio del automóvil no se puede evaluar sin ambigüedad con la información dada, pero debe tener algún valor entre 0 y 100 m/s. Puesto que el automóvil tendrá una velocidad instantánea entre 0 y 100 m/s en algún momento durante el intervalo, debe haber algún instante cuando la velocidad instantánea sea igual a la velocidad promedio durante todo el movimiento.

C) Puesto que la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en *cualquier* tiempo y su velocidad promedio durante *cualquier* intervalo de tiempo son iguales.

[1] Observe que el desplazamiento Δx también tiende a cero conforme Δt tiende a cero, de modo que la proporción parece 0/0. Como Δx y Δt se vuelven cada vez más pequeños, la proporción $\Delta x/\Delta t$ tiende a un valor igual a la pendiente de la línea tangente a la curva x en función de t.

[2] Como con la velocidad, se quita el adjetivo para rapidez instantánea. "Rapidez" significa rapidez instantánea.

EJEMPLO 2.3 Velocidad promedio e instantánea

Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$, donde x está en metros y t está en segundos.[3] La gráfica posición-tiempo para este movimiento se muestra en la figura 2.4. Note que la partícula se mueve en la dirección x negativa durante el primer segundo de movimiento, en el momento $t = 1$ s está momentáneamente en reposo y se mueve en la dirección x positiva en tiempos $t > 1$ s.

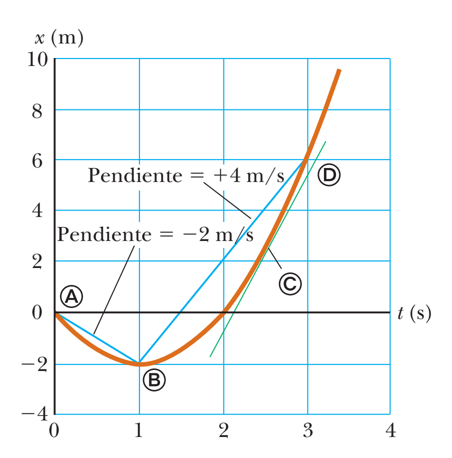


Figura 2.4 (Ejemplo 2.3) Gráfica posición-tiempo para una partícula que tiene una coordenada x que varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$.

A) Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo $t = 0$ a $t = 1$ s y $t = 1$ s a $t = 3$ s.

SOLUCIÓN

A partir de la gráfica de la figura 2.4, elabore una representación mental del movimiento de la partícula. Tenga en mente que la partícula no se mueve en una trayectoria curva en el espacio, tal como la que muestra la curva café en la exposición gráfica. La partícula se mueve sólo a lo largo del eje x en una dimensión. En $t = 0$, ¿se mueve a la derecha o a la izquierda?

Durante el primer intervalo de tiempo, la pendiente es negativa y por lo tanto la velocidad promedio es negativa. En consecuencia, se sabe que el desplazamiento entre Ⓐ y Ⓑ debe ser un número negativo que tiene unidades de metros. De igual modo, se espera que el desplazamiento entre Ⓑ y Ⓓ sea positivo.

En el primer intervalo de tiempo, haga $t_i = t_{Ⓐ} = 0$ y $t_f = t_{Ⓑ} = 1$ s y aplique la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento:

$$\Delta x_{Ⓐ\to Ⓑ} = x_f - x_i = x_{Ⓑ} - x_{Ⓐ}$$
$$= [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2 \text{ m}$$

Para el segundo intervalo de tiempo ($t = 1$ s a $t = 3$ s), sea $t_i = t_{Ⓑ} = 1$ s y $t_f = t_{Ⓓ} = 3$ s:

$$\Delta x_{Ⓑ\to Ⓓ} = x_f - x_i = x_{Ⓓ} - x_{Ⓑ}$$
$$= [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = +8 \text{ m}$$

También es posible leer estos desplazamientos directamente de la gráfica posición-tiempo.

B) Calcule la velocidad promedio durante estos dos intervalos de tiempo.

SOLUCIÓN

En el primer intervalo de tiempo, aplique la ecuación 2.2 con $\Delta t = t_f - t_i = t_{Ⓑ} - t_{Ⓐ} = 1$ s:

$$v_{x,\,\text{prom}\,(Ⓐ\to Ⓑ)} = \frac{\Delta x_{Ⓐ\to Ⓑ}}{\Delta t} = \frac{-2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}$$

En el segundo intervalo de tiempo, $\Delta t = 2$ s:

$$v_{x,\,\text{prom}\,(Ⓑ\to Ⓓ)} = \frac{\Delta x_{Ⓑ\to Ⓓ}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ m}}{2 \text{ s}} = +4 \text{ m/s}$$

Estos valores son los mismos que las pendientes de las líneas que unen estos puntos en la figura 2.4.

C) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en $t = 2.5$ s.

SOLUCIÓN

Mida la pendiente de la línea verde en $t = 2.5$ s (punto Ⓒ) en la figura 2.4:

$$v_x = +6 \text{ m/s}$$

Aprecie que esta velocidad instantánea está en el mismo orden de magnitud que los resultados anteriores; esto es, unos cuantos metros por segundo. ¿Esto es lo que habría esperado?

[3] Simplemente para facilitar la lectura, la expresión se escribe como $x = -4t + 2t^2$ en lugar de $x = (-4.00 \text{ m/s})t + (2.00 \text{ m/s}^2)t^{2.00}$. Cuando una ecuación resuma observaciones, considere que sus coeficientes tienen tantos dígitos significativos como otros datos citados en el problema. Considere que sus coeficientes tienen las unidades requeridas para una consistencia dimensional. Cuando inicie el cronómetro en $t = 0$, por lo general no se tiene la intención de limitar la precisión a un solo dígito. Considere que cualquier valor cero en este libro tiene tantas cifras significativas como necesite.

2.3 Modelos de análisis: La partícula bajo velocidad constante

Una técnica importante en la solución de problemas físicos es usar *modelos de análisis*. Tales modelos ayudan a analizar situaciones comunes en problemas físicos y lo guían hacia una solución. Un **modelo de análisis** es un problema que se ha resuelto. Es una de cualquiera de las dos descripciones siguientes 1) el comportamiento de alguna entidad física o 2) la interacción entre dicha entidad y el entorno. Cuando encuentre un nuevo problema, debe identificar los detalles fundamentales del mismo e intentar reconocer cuál de los tipos de problemas que ya resolvió sirve como modelo para el nuevo. Por ejemplo, suponga que un automóvil se mueve a lo largo de una autopista recta con una rapidez constante. ¿Es importante que sea un automóvil? ¿Es importante que sea una autopista? Si las respuestas a ambas preguntas son no, represente el automóvil como *una partícula bajo velocidad constante*, que se discutirá en esta sección.

Este método es un poco similar a la práctica común de la profesión legal de encontrar "antecedentes legales". Si encuentra un caso resuelto con anterioridad que sea muy similar, en cuanto a lo legal, al actual, se ofrece como modelo y se plantea un argumento en la corte que los lige en términos lógicos. Por lo tanto el fallo en el caso previo se usa para influir en el fallo del caso actual. En física sucederá algo similar. Para un problema determinado busque un "precedente físico", un modelo con el que ya esté familiarizado y que sea aplicable al problema actual.

Los modelos de análisis se generarán respecto a cuatro modelos de simplificación fundamentales. El primero es el modelo de partícula discutido en la introducción de este capítulo; se observará una partícula bajo varios comportamientos e interacciones ambientales. En capítulos siguientes se introducen más modelos de análisis en función de modelos de simplificación de un *sistema*, un *objeto rígido* y una *onda*. Una vez introducidos dichos modelos de análisis, se verá que aparecen de nuevo una y otra vez en diferentes situaciones de problemas.

Aplique la ecuación 2.2 para construir el primer modelo de análisis para resolver problemas. Considere una partícula que se mueve con una velocidad constante. El modelo de **partícula bajo velocidad constante** se aplica a *cualquier* situación en la que una entidad que se pueda representar como partícula se mueva con velocidad constante. Esta situación ocurre con frecuencia, de modo que este modelo es importante.

Si la velocidad de una partícula es constante, su velocidad instantánea en cualquier instante durante un intervalo de tiempo es la misma que la velocidad promedio durante el intervalo. Esto es, $v_x = v_{x,\,\text{prom}}$. Debido a esto, la ecuación 2.2 produce una ecuación útil para la representación matemática de esta situación:

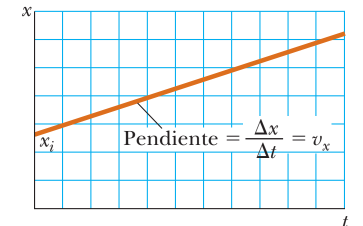


Figura 2.5 Gráfica posición-tiempo para una partícula bajo velocidad constante. El valor de la velocidad constante es la pendiente de la línea.

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Al recordar que $\Delta x = x_f - x_i$, se ve que $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, o bien

$$x_f = x_i + v_x\,\Delta t$$

Esta ecuación dice que la posición de la partícula se conoce por la suma de su posición original x_i en el tiempo $t = 0$ más el desplazamiento $v_x\,\Delta t$ que ocurre durante el intervalo de tiempo Δt. En la práctica, por lo general se elige el tiempo al principio del intervalo como $t_i = 0$ y el tiempo al final del intervalo como $t_f = t$, de modo que la ecuación se convierte en

Posición como una función del tiempo ▶

$$x_f = x_i + v_x t \quad (\text{para } v_x \text{ constante}) \qquad \textbf{(2.7)}$$

Las ecuaciones 2.6 y 2.7 son las ecuaciones básicas que se utilizan en el modelo de una partícula bajo velocidad constante. Se aplica a partículas u objetos que se representan como partículas.

La figura 2.5 es una exposición gráfica de la partícula bajo velocidad constante. En esta gráfica posición-tiempo, la pendiente de la línea que representa el movimiento es constante e igual a la magnitud de la velocidad. La ecuación 2.7, que es la ecuación de una línea recta, es la representación matemática del modelo de partícula bajo velocidad

constante. La pendiente de la línea recta es v_x y la ordenada al origen y es x_i en ambas representaciones.

EJEMPLO 2.4 **Modelado de un corredor como partícula**

Una científica estudia la biomecánica del cuerpo humano. Ella determina la velocidad de un sujeto experimental mientras corre a lo largo de una línea recta con una rapidez constante. La científica activa el cronómetro cuando el corredor pasa por un punto conocido y lo detiene después de que el corredor pasa por otro punto a 20 m de distancia. El intervalo de tiempo que indica el cronómetro es 4.0 s.

A) ¿Cuál es la velocidad del corredor?

SOLUCIÓN

Piense acerca del corredor en movimiento. El corredor se representa como partícula porque su tamaño y el movimiento de brazos y piernas son detalles innecesarios. Puesto que el problema establece que el sujeto corre con una rapidez constante, se representa como una partícula bajo velocidad constante.

Aplique la ecuación 2.6 para encontrar la velocidad constante del corredor:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20\text{ m} - 0}{4.0\text{ s}} = \boxed{5.0\text{ m/s}}$$

B) Si el corredor continúa su movimiento después de desactivar el cronómetro, ¿cuál es su posición después de transcurridos 10 s?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.7 y la velocidad que encontró en el inciso A) para descubrir la posición de la partícula en el tiempo $t = 10$ s:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0\text{ m/s})(10\text{ s}) = \boxed{50\text{ m}}$$

Note que este valor es más del doble que el de la posición de 20 m donde se desactivó el cronómetro. ¿Este valor es consistente con el tiempo de 10 s que es más del doble que el tiempo de 4.0 s?

Las manipulaciones matemáticas para la partícula bajo velocidad constante están contenidas de la ecuación 2.6 y su descendente, la ecuación 2.7. Estas ecuaciones sirven para resolver cualquier variable que resulte desconocida en las ecuaciones, si las otras variables son conocidas. Por ejemplo, en el inciso B) del ejemplo 2.4, se encuentra la posición cuando la velocidad y el tiempo se conocen. De igual modo, si se conocen la velocidad y la posición final, se aplica la ecuación 2.7 para encontrar el tiempo cuando el corredor está en dicha posición.

Una partícula bajo velocidad constante se mueve con una rapidez constante a lo largo de una línea recta. Ahora considere una partícula que se mueve con una rapidez constante a lo largo de una trayectoria curva. Esta situación se representa con el modelo de **partícula bajo rapidez constante**. La ecuación básica para este modelo es la ecuación 2.3, con la rapidez promedio v_{prom} sustituida por la rapidez constante v:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.8}$$

Como ejemplo, considere una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. Si la rapidez es 5.00 m/s y el radio de la trayectoria es de 10.0 m, se calcula el intervalo de tiempo requerido para completar un viaje alrededor del círculo:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\ (10.0\text{ m})}{5.00\text{ m/s}} = 12.6\text{ s}$$

2.4 Aceleración

En el ejemplo 2.3 se trabajó con una situación común en la cual la velocidad de una partícula cambia mientras se mueve. Cuando la velocidad de ésta cambia con el tiempo, se dice que la partícula *acelera*. Por ejemplo, la magnitud de la velocidad de un automóvil aumenta cuando se pisa el acelerador y disminuye cuando se aplican los frenos. Vea cómo cuantificar la aceleración.

Considere que un objeto representado como una partícula en movimiento a lo largo del eje x tiene una velocidad inicial v_{xi} en el tiempo t_i y una velocidad final v_{xf} en el tiempo t_f, como en la figura 2.6a. La **aceleración promedio** $a_{x,\text{ prom}}$ de la partícula se define como el *cambio* en velocidad Δv_x dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre el cambio:

Aceleración promedio ▶

$$a_{x,\text{ prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Como con la velocidad, cuando el movimiento a analizar sea unidimensional, se usan los signos positivo y negativo para indicar la dirección de la aceleración. Puesto que las dimensiones de velocidad son L/T y la dimensión de tiempo es T, la aceleración tiene dimensiones de longitud divididas entre el tiempo al cuadrado, o L/T^2. La unidad del SI de aceleración es metros por segundo al cuadrado (m/s^2). Es más sencillo interpretar estas unidades si piensa en ellas como metros por segundo por segundo. Por ejemplo, considere que un objeto tiene una aceleración de $+2\ m/s^2$. Debe formar una imagen mental del objeto que tiene una velocidad a lo largo de una línea recta y aumenta 2 m/s durante cada intervalo de 1 s. Si el objeto parte del reposo, debe ser capaz de representarlo moviéndose con una velocidad de +2 m/s después de 1 s, a +4 m/s después de 2 s, etcétera.

En algunas situaciones el valor de la aceleración promedio puede ser diferente durante distintos intervalos de tiempo. Por lo tanto, es útil definir la **aceleración instantánea** como el límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero. Este concepto es análogo a la definición de velocidad instantánea discutida en la sección 2.2. Si consideramos que el punto Ⓐ se acerca más y más al punto Ⓑ en la figura 2.6a y toma el límite de $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero, se obtiene la aceleración instantánea en el punto Ⓑ:

Aceleración instantánea ▶

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad \textbf{(2.10)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.4
Aceleración negativa

Tenga en mente que *la aceleración negativa no necesariamente significa que un objeto está frenando.* Si la aceleración es negativa y la velocidad es negativa, ¡el objeto está aumentando velocidad!

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.5
Desaceleración

La palabra *desaceleración* tiene la connotación popular de *frenar.* En este libro no se usará esta palabra porque confunde la definición dada para aceleración negativa.

Esto es: **la aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo**, que por definición es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo. La pendiente de la línea verde en la figura 2.6b es igual a la aceleración instantánea en el punto Ⓑ. En consecuencia, tal como la velocidad de una partícula en movimiento es la pendiente en un punto sobre la gráfica x–t de la partícula, la aceleración de una partícula es la pendiente en un punto sobre la gráfica v_x–t de la partícula. Uno puede interpretar la derivada de la velocidad respecto al tiempo como la relación de cambio de velocidad en el tiempo. Si a_x es positivo, la aceleración está en la dirección x positiva; si a_x es negativa, la aceleración está en la dirección x negativa.

Para el caso de movimiento en una línea recta, la dirección de la velocidad de un objeto y la dirección de su aceleración se relacionan del modo siguiente. **Cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su velocidad. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena.**

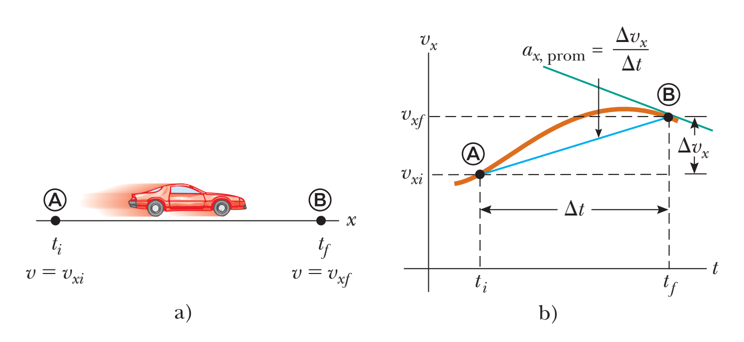


Figura 2.6 a) Un automóvil, modelado como partícula, que se mueve a lo largo del eje x de Ⓐ a Ⓑ, tiene velocidad v_{xi} en $t = t_i$ y velocidad v_{xf} en $t = t_f$. b) Gráfica velocidad-tiempo (café) para la partícula que se mueve en una línea recta. La pendiente de la línea recta azul que conecta Ⓐ y Ⓑ es la aceleración promedio del automóvil durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La pendiente de la línea verde es la aceleración instantánea del automóvil en el punto Ⓑ.

Para ayudar con esta discusión de los signos de velocidad y aceleración, se relaciona la aceleración de un objeto con la *fuerza* total ejercida sobre el objeto. En el capítulo 5 se establece formalmente que **la fuerza es proporcional a la aceleración**:

$$F_x \propto a_x \qquad \textbf{(2.11)}$$

Esta proporcionalidad indica que la aceleración es causada por una fuerza. Más aún, fuerza y aceleración son vectores, y los vectores actúan en la misma dirección. Debido a esto, piense acerca de los signos de la velocidad y la aceleración al considerar una fuerza aplicada a un objeto y que causa su aceleración. Suponga que velocidad y aceleración están en la misma dirección. Esta situación corresponde a un objeto que experimenta una fuerza que actúa en la misma dirección que su velocidad. En este caso, ¡el objeto aumenta su velocidad! Ahora suponga que velocidad y aceleración están en direcciones opuestas. En esta situación, el objeto se mueve en alguna dirección y experimenta una fuerza que actúa en la dirección opuesta. Por lo tanto, ¡el objeto frena! Es muy útil igualar la dirección de la aceleración a la dirección de una fuerza, porque es más fácil, a partir de la experiencia cotidiana, pensar acerca de qué efecto tendrá una fuerza sobre un objeto que pensar sólo en términos de la dirección de la aceleración.

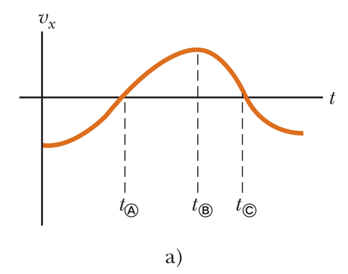
Pregunta rápida 2.3 Si un automóvil viaja hacia el este y frena, ¿cuál es la dirección de la fuerza sobre el automóvil que hace que frene? a) hacia el este, b) hacia el oeste, c) ni al este ni al oeste.

Desde ahora se usará el término *aceleración* para dar a entender aceleración instantánea. Cuando se hable de aceleración promedio, siempre se usará el adjetivo *promedio*. Puesto que $v_x = dx/dt$, la aceleración también se escribe como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Esto es: en un movimiento unidimensional, la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x respecto del tiempo.

La figura 2.7 ilustra cómo una gráfica aceleración-tiempo se relaciona con una gráfica velocidad-tiempo. La aceleración en cualquier tiempo es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en dicho tiempo. Los valores positivos de la aceleración corresponden a los puntos en la figura 2.7a donde la velocidad aumenta en la dirección x positiva. La aceleración alcanza un máximo en el tiempo $t_Ⓐ$, cuando la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo es un máximo. Después, la aceleración llega a cero en el tiempo $t_Ⓑ$, cuando la velocidad es un máximo (esto es: cuando la pendiente de la gráfica $v_x - t$ es cero). La aceleración es negativa cuando la velocidad disminuye en la dirección x positiva, y llega a su valor más negativo en el tiempo $t_Ⓒ$.



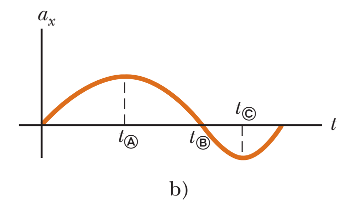


Figura 2.7 La aceleración instantánea se obtiene de la gráfica velocidad-tiempo a). En cada instante, la aceleración en la gráfica de a_x en función de t b) es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva de v_x en función de t a).

Pregunta rápida 2.4 Haga una gráfica velocidad-tiempo para el automóvil de la figura 2.1a. El límite de rapidez que se ve en la señal del camino es 30 km/h. ¿Cierto o falso? El automóvil supera el límite de rapidez en algún momento dentro del intervalo de tiempo 0 − 50 s.

EJEMPLO CONCEPTUAL 2.5 Relaciones gráficas entre x, v_x y a_x

La posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo, como en la figura 2.8a. Grafique la velocidad en función del tiempo y la aceleración en función del tiempo para el objeto.

SOLUCIÓN

La velocidad en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica x–t en dicho instante. Entre $t = 0$ y $t = t_Ⓐ$, la pendiente de la gráfica x-t aumenta uniformemente, de modo que la velocidad aumenta linealmente como se muestra en la figura 2.8b. Entre $t_Ⓐ$ y $t_Ⓑ$, la pendiente de la gráfica x–t es constante, de esa manera la velocidad permanece constante. Entre $t_Ⓑ$ y $t_Ⓓ$, la pendiente de la gráfica x–t disminuye, de igual manera el valor de la velocidad en la gráfica v_x–t disminuye. En $t_Ⓓ$, la pendiente de la gráfica x–t es cero, por eso la velocidad es cero en dicho instante. Entre $t_Ⓓ$ y $t_Ⓔ$, la pendiente de la gráfica x–t y debido a esto la velocidad son negativas y disminuyen uniformemente en este intervalo. En el intervalo $t_Ⓔ$ a $t_Ⓕ$, la pendiente de la gráfica x–t todavía es negativa, y en $t_Ⓕ$ va a cero. Por último, después de $t_Ⓕ$, la pendiente de la gráfica x–t es cero, lo que significa que el objeto está en reposo para $t > t_Ⓕ$.

La aceleración en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica v_x–t en dicho instante. En la figura 2.8c se muestra la gráfica de aceleración en funció del tiempo para ese objeto. La aceleración es constante y positiva entre 0 y $t_Ⓐ$, donde la pendiente de la gráfica v_x–t es positiva. Es cero entre $t_Ⓐ$ y $t_Ⓑ$ y para $t > t_Ⓕ$ porque la pendiente de la gráfica v_x–t es cero en estos tiempos. Es negativa entre $t_Ⓑ$ y $t_Ⓔ$ porque la pendiente de la gráfica v_x–t es negativa durante ese intervalo. Entre $t_Ⓔ$ y $t_Ⓕ$ la aceleración es positiva como lo es entre 0 y $t_Ⓐ$, pero mayor en valor porque la pendiente de la gráfica v_x–t es más inclinada.

Advierta que los cambios súbitos en aceleración que se muestran en la figura 2.8c no son físicos. Tales cambios instantáneos no ocurren en la realidad.

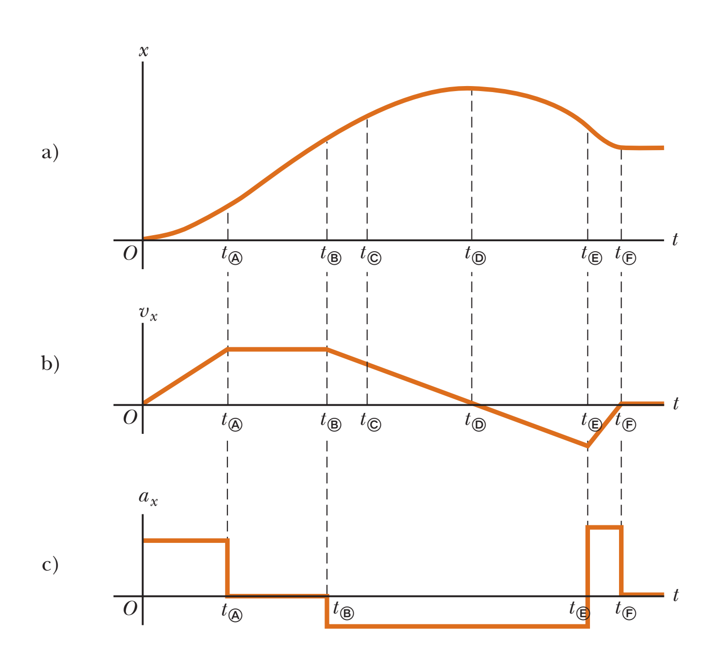


Figura 2.8 (Ejemplo 2.5) a) Gráfica posición-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje *x*. b) La gráfica velocidad-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica posición-tiempo en cada instante. c) La gráfica aceleración-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en cada instante.

EJEMPLO 2.6 Aceleración promedio e instantánea

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje *x* varía de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s, donde *t* está en segundos.

A) Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Piense qué hace la partícula a partir de la representación matemática. ¿Se mueve en $t = 0$? ¿En qué dirección? ¿Aumenta velocidad o frena? La figura 2.9 es una gráfica v_x–t que se creó a partir de la expresión de velocidad en función del tiempo dada en el enunciado del problema. Puesto que la pendiente de toda la curva v_x–t es negativa, se espera que la aceleración sea negativa.

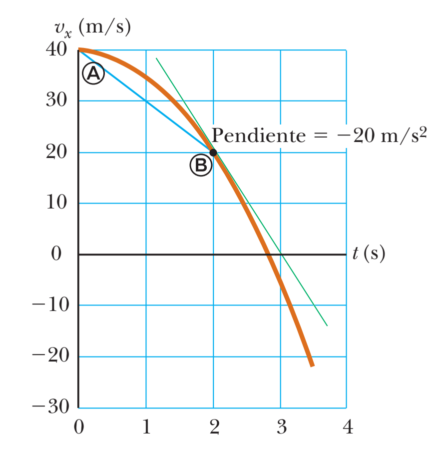


Figura 2.9 (Ejemplo 2.6) Gráfica velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje *x* de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s. La aceleración en $t = 2$ s es igual a la pendiente de la línea tangente verde en dicho tiempo.

Encuentre las velocidades en $t_i = t_Ⓐ = 0$ y $t_f = t_Ⓑ = 2.0$ s al sustituir estos valores de *t* en la expresión para la velocidad:

$$v_{xⒶ} = (40 - 5t_Ⓐ{}^2)\text{ m/s} = [40 - 5(0)^2]\text{ m/s} = +40\text{ m/s}$$

$$v_{xⒷ} = (40 - 5t_Ⓑ{}^2)\text{ m/s} = [40 - 5(2.0)^2]\text{ m/s} = +20\text{ m/s}$$

Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo especificado $\Delta t = t_Ⓑ - t_Ⓐ = 2.0$ s:

$$a_{x,\text{ prom}} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xⒷ} - v_{xⒶ}}{t_Ⓑ - t_Ⓐ} = \frac{(20 - 40)\text{ m/s}}{(2.0 - 0)\text{ s}}$$

$$= -10\text{ m/s}^2$$

El signo negativo es consistente con las expectativas, a saber: que la aceleración, representada por la pendiente de la línea que une los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo, es negativa.

B) Determine la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Al saber que la velocidad inicial en cualquier tiempo t es $v_{xi} = (40 - 5t^2)$ m/s, encuentre la velocidad en cualquier tiempo ulterior $t + \Delta t$:

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Encuentre el cambio en velocidad en el intervalo de tiempo Δt:

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = [-10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2] \text{ m/s}$$

Para encontrar la aceleración en cualquier tiempo t, divida esta expresión entre Δt y tome el límite del resultado conforme Δt tiende a cero:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t \text{ m/s}^2$$

Sustituya $t = 2.0$ s:

$$a_x = (-10)(2.0) \text{ m/s}^2 = \boxed{-20 \text{ m/s}^2}$$

Puesto que la velocidad de la partícula es positiva y la aceleración es negativa en este instante, la partícula disminuye su veocidad.

Note que las respuestas a los incisos A) y B) son diferentes. La aceleración promedio en A) es la pendiente de la línea azul que en la figura 2.9 conecta los puntos Ⓐ y Ⓑ. La aceleración instantánea en B) es la pendiente de la línea verde tangente a la curva en el punto Ⓑ. Repare también en que la aceleración *no* es constante en este ejemplo. Las situaciones que involucran aceleración constante se tratan en la sección 2.6.

Hasta el momento se han evaluado las derivadas de una función al comenzar con la definición de la función y luego tomar el límite de una relación específica. Si está familiarizado con el cálculo, reconocerá que hay reglas específicas para tomar derivadas. Estas reglas, que se mencionan en el apéndice B.6, le permiten evaluar derivadas rápidamente. Por ejemplo, una regla dice que la derivada de cualquier constante es cero. Como otro ejemplo, considere que x es proporcional a alguna potencia de t, como en la expresión

$$x = At^n$$

donde A y n son constantes. (Esta expresión es una forma funcional muy común.) La derivada de x respecto a t es

$$\frac{dx}{dt} = nAt^{n-1}$$

Al aplicar esta regla al ejemplo 2.5, en el que $v_x = 40 - 5t^2$, de inmediato se encuentra que la aceleración es $ax = dv_x/dt = -10t$.

2.5 Diagramas de movimiento

Con frecuencia los conceptos de velocidad y aceleración se confunden uno con otro, pero en realidad son cantidades muy diferentes. Al formar una representación mental de un objeto en movimiento, a veces es útil usar una representación pictórica llamada *diagrama de movimiento* para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento.

Un diagrama de movimiento se forma al considerar una fotografía *estroboscópica* de un objeto en movimiento, que muestra varias imágenes del objeto tomadas conforme la luz estroboscópica destella en intervalos constantes. La figura 2.10 representa tres conjuntos de fotografías estroboscópicas de automóviles que se mueven a lo largo de una autopista recta en una sola dirección, de izquierda a derecha. Los intervalos de tiempo entre los destellos del estroboscopio son iguales en cada parte del diagrama. De modo que, para no confundir las dos cantidades vectoriales, en la figura 2.10 se usa rojo para los vectores velocidad y violeta para los vectores aceleración. Los vectores se muestran en varios instantes durante el movimiento del objeto. Describa el movimiento del automóvil en cada diagrama.

En la figura 2.10a, las imágenes del automóvil están igualmente espaciadas, lo que muestra que el automóvil se mueve a través del mismo desplazamiento en cada intervalo de tiempo. Este espaciamiento igual es consistente con el automóvil que se mueve con *velocidad positiva constante* y *aceleración cero.*

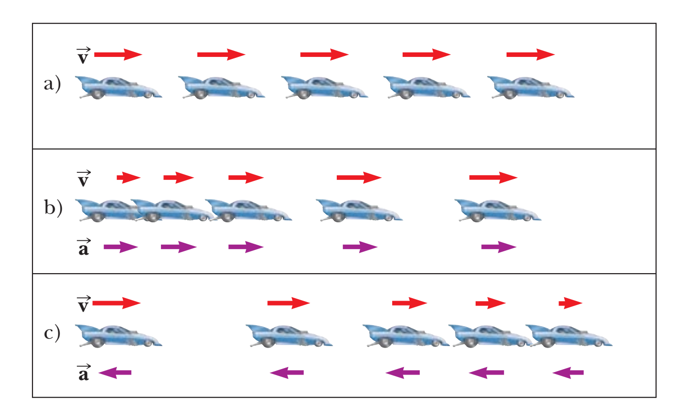


Figura 2.10 a) Diagrama de movimiento para un automóvil que se mueve con velocidad constante (aceleración cero). b) Diagrama de movimiento para un automóvil cuya aceleración constante está en la dirección de su velocidad. El vector velocidad en cada instante se indica mediante una flecha roja y la aceleración constante se indica mediante una flecha violeta. c) Diagrama de movimiento para un automóvil cuya aceleración constante está en la dirección *opuesta* a la velocidad en cada instante.

Se podría representar el automóvil como una partícula y describirlo con el modelo de partícula bajo velocidad constante.

En la figura 2.10b, las imágenes se separan más conforme avanza el tiempo. En este caso, el vector velocidad aumenta en longitud con el tiempo, porque el desplazamiento del automóvil entre posiciones adyacentes aumenta en el tiempo. Esta característica sugiere que el automóvil se mueve con una *velocidad positiva* y una *aceleración positiva*. La velocidad y la aceleración están en la misma dirección. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala al automóvil en la misma dirección en que se mueve: aumenta velocidad.

En la figura 2.10c, el automóvil frena conforme se mueve a la derecha porque su desplazamiento entre imágenes adyacentes disminuye con el tiempo. Este caso sugiere que el automóvil se mueve hacia la derecha con una aceleración negativa. La longitud del vector velocidad disminuye en el tiempo y eventualmente llega a cero. A partir de este diagrama se ve que los vectores aceleración y velocidad *no* están en la misma dirección. El automóvil se mueve con una *velocidad positiva*, pero con una *aceleración negativa*. (Este tipo de movimiento se muestra para un automóvil que derrapa hasta detenerse después de aplicar los frenos.) La velocidad y la aceleración están en direcciones opuestas. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala el automóvil en dirección opuesta a la que se mueve: frena.

Los vectores aceleración violeta en los incisos b) y c) de la figura 2.10 tienen todos la misma longitud. Por lo tanto, estos diagramas representan movimiento de una *partícula bajo aceleración constante*. Este modelo importante de análisis se discutirá en la siguiente sección.

Pregunta rápida 2.5 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? a) Si un automóvil viaja hacia el este, su aceleración debe estar hacia el este. b) Si un automóvil frena, su aceleración debe ser negativa. c) Una partícula con aceleración constante nunca puede detenerse ni permanecer detenida.

2.6 La partícula bajo aceleración constante

Si la aceleración de una partícula varía con el tiempo, su movimiento es complejo y difícil de analizar. Sin embargo, un tipo muy común y simple de movimiento unidimensional, es aquel en el que la aceleración es constante. En tal caso, la aceleración promedio $a_{x,\,\text{prom}}$ en

cualquier intervalo de tiempo es numéricamente igual a la aceleración instantánea a_x en cualquier instante dentro del intervalo, y la velocidad cambia con la misma proporción a lo largo del movimiento. Esta situación ocurre con suficiente frecuencia como para que se le identifique como un modelo de análisis: la **partícula bajo aceleración constante**. En la discusión que sigue se generan varias ecuaciones que describen el movimiento de una partícula para este modelo.

Si en la ecuación 2.9 sustituye $a_{x,\text{ prom}}$ con a_x y toma $t_i = 0$ y t_f como cualquier tiempo t posterior, se encuentra que

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}$$

o

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.13}$$

Esta poderosa expresión permite determinar la velocidad de un objeto en *cualquier* tiempo t, si se conoce la velocidad inicial v_{xi} del objeto y su aceleración a_x (constante). En la figura 2.11b se muestra una gráfica velocidad-tiempo para este movimiento con aceleración constante. La gráfica es una línea recta, cuya pendiente es la aceleración a_x; la pendiente (constante) es consistente con $a_x = dv_x/dt$ constante. Note que la pendiente es positiva, lo que indica una aceleración positiva. Si la aceleración fuese negativa, la pendiente de la línea en la figura 2.11b sería negativa. Cuando la aceleración es constante, la gráfica de aceleración en función del tiempo (figura 2.11c) es una línea recta que tiene una pendiente cero.

Puesto que la velocidad con aceleración constante varía linealmente en el tiempo, de acuerdo con la ecuación 2.13, se expresa la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo como la media aritmética de la velocidad inicial v_{xi} y la velocidad final v_{xf}:

$$v_{x,\text{ prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.14}$$

Note que esta expresión para la velocidad promedio *sólo* se aplica en situaciones en que la aceleración es constante.

Ahora es necesario aplicar las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.14 para obtener la posición de un objeto como función del tiempo. Al recordar que Δx en la ecuación 2.2 representa $x_f - x_i$ y reconocer que $\Delta t = t_f - t_i = t - 0 = t$, se encuentra que

$$x_f - x_i = v_{x,\text{ prom}}\, t = \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.15}$$

◀ Posición como una función de la velocidad y el tiempo

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de las velocidades inicial y final.

Otra expresión útil para la posición de una partícula bajo aceleración constante se obtiene al sustituir la ecuación 2.13 en la ecuación 2.15:

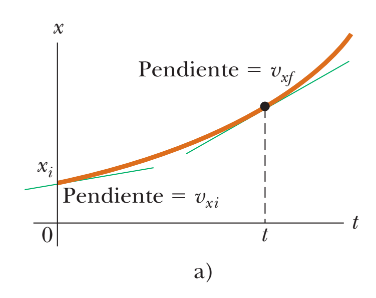
$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]t$$

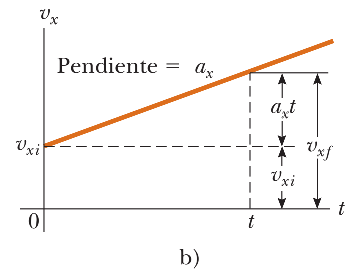
$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.16}$$

◀ Posición como una función del tiempo

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de la velocidad inicial y la aceleración constante.

La gráfica posición-tiempo para movimiento con aceleración constante (positiva) que se muestra en la figura 2.11a se obtiene de la ecuación 2.16. Perciba que la curva es una parábola. La pendiente de la línea tangente a esta curva en $t = 0$ es igual a la velocidad inicial v_{xi}, y la pendiente de la línea tangente en cualquier tiempo posterior t es igual a la velocidad v_{xf} en dicho tiempo.





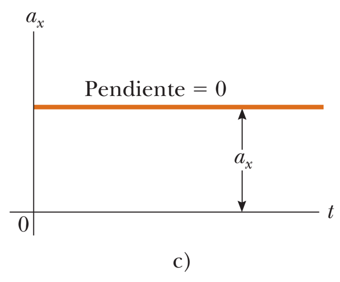


Figura 2.11 Una partícula bajo aceleración constante a_x que se mueve a lo largo del eje x: a) gráfica posición-tiempo, b) gráfica velocidad-tiempo y c) gráfica aceleración-tiempo.

Por último, es posible obtener una expresión para la velocidad final que no contenga tiempo como variable al sustituir el valor de t de la ecuación 2.13 en la ecuación 2.15:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = x_i + \frac{v_{xf}^{\,2} - v_{xi}^{\,2}}{2a_x}$$

Velocidad como una función de la posición ▶

$$v_{xf}^{\,2} = v_{xi}^{\,2} + 2a_x\,(x_f - x_i) \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \qquad \textbf{(2.17)}$$

Esta ecuación proporciona la velocidad final en términos de la velocidad inicial, la aceleración constante y la posición de la partícula.

Para movimiento con aceleración *cero*, se ve de las ecuaciones 2.13 y 2.16 que

$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned}\right\} \quad \text{cuando } a_x = 0$$

Esto es, cuando la aceleración de una partícula es cero, su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo. En términos de modelos, cuando la aceleración de una partícula es cero, el modelo de partícula bajo aceleración constante se reduce al modelo de partícula bajo velocidad constante (sección 2.3).

Pregunta rápida 2.6 En la figura 2.12, relacione cada gráfica v_x–t de la parte superior con la gráfica a_x–t de la parte inferior que mejor describa el movimiento.

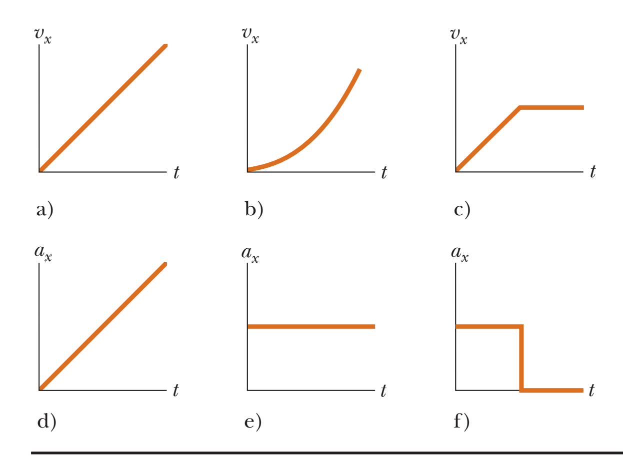


Figura 2.12 (Pregunta rápida 2.6) Los incisos a), b) y c) son gráficas v_x–t de objetos en movimiento unidimensional. Las posibles aceleraciones de cada objeto se muestran en forma desordenada en d), e) y f).

Las ecuaciones de la 2.13 a la 2.17 son **ecuaciones cinemáticas** útiles para resolver cualquier problema que involucre una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. Las cuatro ecuaciones cinemáticas que se usan con más frecuencia se mencionan en la tabla 2.2. La elección de cuál ecuación usar en una situación dada depende de qué sepa de antemano. A veces es necesario usar dos de estas ecuaciones para resolver dos incógnitas. Debe reconocer que las cantidades que varían durante el movimiento son la posición x_f, la velocidad v_{xf} y el tiempo t.

Al resolver numerosos ejercicios y problemas obtendrá mucha experiencia en el uso de estas ecuaciones. Muchas veces descubrirá que se puede usar más de un método para

TABLA 2.2

Ecuaciones cinemáticas para movimiento de una partícula bajo aceleración constante

Número de ecuación	Ecuación	Información que se conoce por la ecuación
2.13	$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocidad como función del tiempo
2.15	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Posición como función de velocidad y tiempo
2.16	$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición como función del tiempo
2.17	$v_{xf}^{\,2} = v_{xi}^{\,2} + 2a_x\,(x_f - x_i)$	Velocidad como función de la posición

Nota: El movimiento es a lo largo del eje x.

obtener una solución. Recuerde que estas ecuaciones de cinemática *no se pueden* usar en una situación en que la aceleración varía con el tiempo. Son útiles sólo cuando la aceleración es constante.

EJEMPLO 2.7 Aterrizaje en portaaviones

Un jet aterriza en un portaaviones a 140 mi/h ($\approx$ 63 m/s).

A) ¿Cuál es su aceleración (constante) si se detiene en 2.0 s debido a un cable de arresto que traba al jet y lo deja en reposo?

SOLUCIÓN

Es posible que haya visto películas o programas de televisión en los que un jet aterriza sobre un portaaviones y se lleva al reposo sorprendentemente rápido mediante un cable de arresto. Puesto que la aceleración del jet se supone constante, se le representa como una partícula bajo aceleración constante. El eje x se define como la dirección de movimiento del jet. Una lectura cuidadosa del problema revela que, además de estar dada la rapidez inicial de 63 m/s, también se sabe que la rapidez final es cero. Perciba también que no se tiene información acerca del cambio en posición del jet mientras frena.

La ecuación 2.13 es la única en la tabla 2.2 que no involucra la posición, de modo que se le usa para encontrar la aceleración del jet, representado como partícula:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} \approx \frac{0 - 63 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s}}$$
$$= -32 \text{ m/s}^2$$

B) Si el jet toca al portaaviones en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es su posición final?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.15 para resolver la posición final:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \tfrac{1}{2}(63 \text{ m/s} + 0)(2.0 \text{ s}) = 63 \text{ m}$$

Si el jet recorre más allá de 63 m, puede caer al océano. La idea de usar cables de arresto para frenar a la aeronave que aterriza y permitirle aterrizar con seguridad en los barcos surgió en la primera Guerra Mundial. Los cables todavía son una parte vital de la operación de los modernos portaaviones.

¿Qué pasaría si? Suponga que el jet aterriza en la cubierta del portaaviones con una rapidez mayor que 63 m/s pero tiene la misma aceleración debida al cable calculada en el inciso A). ¿Cómo cambiará esto la respuesta del inciso B)?

Respuesta Si el jet viaja más rápido que al principio se detendrá más lejos de su punto de partida, de modo que la respuesta del inciso B) sería más grande. Matemáticamente, en la ecuación 2.15 se ve que, si v_{xi} es más grande, x_f será más grande.

EJEMPLO 2.8 ¡Observe el límite de rapidez!

Un automóvil que viaja con una rapidez constante de 45.0 m/s pasa por donde un patrullero en motocicleta está oculto detrás de un anuncio espectacular. Un segundo después de que el automóvil pasa el anuncio, el patrullero sale de su escondite para detener al automóvil, que acelera con una relación constante de 3.00 m/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en dar alcance al automóvil?

SOLUCIÓN

Una representación pictórica (figura 2.13) ayuda a clarificar la secuencia de eventos. El automóvil se modela como una partícula bajo velocidad constante y el patrullero se modela como una partícula bajo aceleración constante.

Primero, escriba expresiones para la posición de cada vehículo como función del tiempo. Es conveniente elegir la posición del anuncio como el origen y hacer $t_{Ⓑ} = 0$ como el tiempo en que el patrullero comienza a moverse. En dicho

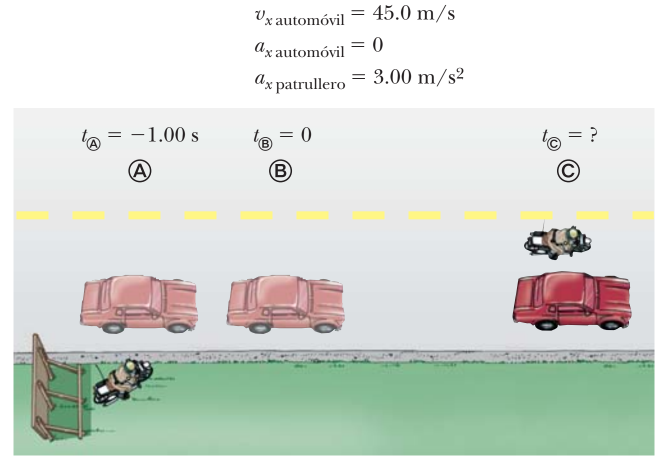


Figura 2.13 (Ejemplo 2.8) Un veloz automóvil rebasa a un patrullero oculto.

instante, el automóvil ya recorrió una distancia de 45.0 m desde el anuncio, porque viajó con una rapidez constante de $v_x = 45.0$ m/s durante 1 s. Por lo tanto, la posición inicial del automóvil es $x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

Al aplicar la ecuación 2.7 para obtener la posición del automóvil en cualquier tiempo t:

$$x_{\text{automóvil}} = x_{Ⓑ} + v_{x\,\text{automóvil}}t = 45.0\text{ m} + (45.0\text{ m/s})t$$

Una revisión rápida muestra que, en $t = 0$, esta expresión da la posición inicial correcta del automóvil cuando el patrullero comienza a moverse: $x_{\text{automóvil}} = x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

El patrullero parte del reposo en $t_{Ⓑ} = 0$ y acelera a 3.00 m/s^2 alejándose del origen. Use la ecuación 2.16 para dar la posición en cualquier tiempo t:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$x_{\text{patrullero}} = 0 + (0)t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \tfrac{1}{2}(3.00\text{ m/s}^2)t^2$$

Iguale las dos posiciones para representar al patrullero dando alcance al automóvil en la posición Ⓒ:

$$x_{\text{patrullero}} = x_{\text{automóvil}}$$

$$\tfrac{1}{2}(3.00\text{ m/s}^2)t^2 = 45.0\text{ m} + (45.0\text{ m/s})t$$

Simplifique para obtener una ecuación cuadrática:

$$1.50t^2 - 45.0t - 45.0 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es $t =$ 31.0 s.

(Para ayuda en la resolución de ecuaciones cuadráticas, vea el apéndice B.2.)

¿Qué pasaría si? ¿Y si el patrullero tiene una motocicleta más poderosa con una aceleración mayor? ¿Cómo cambiaría el tiempo en que el patrullero da alcance al automóvil?

Respuesta Si la motocicleta tuviese una aceleración mayor, el patrullero alcanzaría al automóvil más rápido, de modo que la respuesta para el tiempo sería menor que 31 s.

Presente la ecuación cuadrática final anterior en términos de los parámetros del problema:

$$\tfrac{1}{2}a_x t^2 - v_{x\,\text{automóvil}}t - x_{Ⓑ} = 0$$

Resuelva la ecuación cuadrática:

$$t = \frac{v_{x\,\text{automóvil}} \pm \sqrt{v_{x\,\text{automóvil}}^2 + 2a_x x_{Ⓑ}}}{a_x} = \frac{v_{x\,\text{automóvil}}}{a_x} + \sqrt{\frac{v_{x\,\text{automóvil}}^2}{a_x^2} + \frac{2x_{Ⓑ}}{a_x}}$$

donde se eligió el signo positivo porque es la única opción consistente con un tiempo $t > 0$. Dado que todos los términos del lado derecho de la ecuación tienen la aceleración a_x en el denominador, aumentar la aceleración disminuirá el tiempo en que el patrullero alcanza al automóvil.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.6

***g* y g**

Asegúrese de no confundir el símbolo cursivo g para la aceleración en caída libre con el símbolo no cursivo g que se usa como abreviatura de la unidad gramo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.7

El signo de *g*

Tenga en mente que g es un *número positivo*. Es tentador sustituir -9.80 m/s^2 por g, pero resista la tentación. La aceleración gravitacional descendente se indica explícitamente al establecer la aceleración como $a_y = -g$.

2.7 Objetos en caída libre

Es bien sabido que, en ausencia de resistencia del aire, todos los objetos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. No fue sino hasta alrededor de 1600 que se aceptó esta conclusión. Antes de esta época, las enseñanzas del filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) sostenían que los objetos más pesados caían más rápido que los ligeros.

El italiano Galileo Galilei (1564-1642) originó las ideas actuales acerca de los objetos que caen. Hay una leyenda de que él demostró el comportamiento de los objetos que caen al observar que dos pesos diferentes soltados simultáneamente de la Torre Inclinada de Pisa golpeaban el suelo aproximadamente al mismo tiempo. Aunque hay ciertas dudas de que llevó a cabo este experimento particular, está bien establecido que Galileo realizó muchos experimentos sobre objetos en movimiento en planos inclinados. En sus experimentos hacía rodar bolas por un plano ligeramente inclinado y medía las distancias que recorrían en intervalos de tiempo sucesivos. El propósito del plano inclinado era reducir

la aceleración, lo que hizo posible que tomara mediciones precisas de los intervalos de tiempo. Al aumentar gradualmente la pendiente del plano, al final fue capaz de extraer conclusiones acerca de los objetos en caída libre, porque una bola en caída libre es equivalente a una bola que se mueve por un plano inclinado vertical.

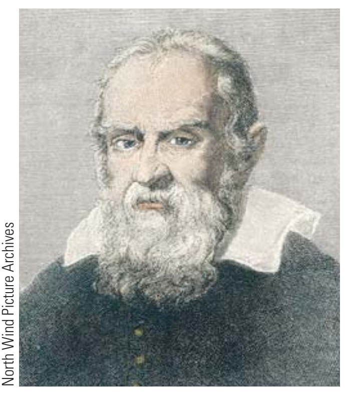
Acaso quiera intentar el siguiente experimento. Suelte simultáneamente, desde la misma altura, una moneda y un trozo de papel arrugado. Si los efectos de la resistencia del aire son despreciables, ambos tendrán el mismo movimiento y golpearán el suelo al mismo tiempo. En el caso idealizado, en el que la resistencia del aire está ausente, a tal movimiento se le refiere como movimiento *en caída libre*. Si este mismo experimento se pudiese realizar en un vacío, en el que la resistencia del aire realmente es despreciable, el papel y la moneda caerían con la misma aceleración aun cuando el papel no esté arrugado. El 2 de agosto de 1971, el astronauta David Scott realizó tal demostración en la Luna. Soltó simultáneamente un martillo y una pluma y los dos objetos cayeron al mismo tiempo en la superficie lunar. ¡Seguramente esta simple demostración habría complacido a Galileo!

Cuando se usa la expresión *objeto en caída libre* no necesariamente se hace referencia a un objeto que se suelta desde el reposo. **Un objeto en caída libre es cualquier objeto que se mueve libremente sólo bajo la influencia de la gravedad, sin importar su movimiento inicial. Los objetos que se lanzan hacia arriba o abajo y los que se liberan desde el reposo están todos en caída libre una vez que se liberan. Cualquier objeto en caída libre experimenta una aceleración dirigida *hacia abajo*, sin importar su movimiento inicial.**

La magnitud de la *aceleración de caída libre* se denotará mediante el símbolo g. El valor de g cerca de la superficie de la Tierra disminuye conforme aumenta la altitud. Además, ocurren ligeras variaciones en g con cambios en latitud. En la superficie de la Tierra, el valor de g es aproximadamente 9.80 m/s^2. A menos que se establezca de otro modo, se usará este valor para g cuando se realicen cálculos. Para hacer estimaciones rápidas, use $g = 10$ m/s^2.

Si se ignora la resistencia del aire y se supone que la aceleración de caída libre no varía con la altitud en distancias verticales cortas, el movimiento de un objeto en caída libre que se mueve verticalmente es equivalente al movimiento de una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. Debido a eso, se aplican las ecuaciones desarrolladas en la sección 2.6 para objetos que se mueven con aceleración constante. La única modificación que se necesita hacer en estas ecuaciones para los objetos en caída libre es notar que el movimiento es en la dirección vertical (la dirección y) antes que en la dirección horizontal (x) y que la aceleración es hacia abajo y tiene una magnitud de 9.80 m/s^2. En consecuencia, siempre se elegirá $a_y = -g = -9.80$ m/s^2, donde el signo negativo significa que la aceleración de un objeto en caída libre es hacia abajo. En el capítulo 13 se estudiará cómo tratar con las variaciones en g con la altitud.

Pregunta rápida 2.7 Examine las siguientes opciones: a) aumenta, b) disminuye, c) aumenta y luego disminuye, d) disminuye y luego aumenta, e) permanece igual. A partir de estas opciones, seleccione lo que le ocurre a **i)** la aceleración y **ii)** la rapidez de una bola después de que se lanza hacia arriba en el aire.



North Wind Picture Archives

GALILEO GALILEI
Físico y astrónomo italiano (1564-1642)
Galileo formuló las leyes que gobiernan el movimiento de los objetos en caída libre e hizo muchos otros descubrimientos reveladores en física y astronomía. Galileo defendió públicamente la afirmación de Nicolás Copérnico de que el Sol está en el centro del Universo (sistema heliocéntrico). Publicó *Diálogo sobre los dos grandes sistemas del mundo* para apoyar el modelo copernicano, que la Iglesia católica declaró herético.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.8
Aceleración en lo alto del movimiento

Un error común es considerar que la aceleración de un proyectil en lo alto de su trayectoria es cero. Aunque la velocidad en lo alto del movimiento de un objeto que se lanza hacia arriba momentáneamente va a cero, *la aceleración todavía corresponde a la gravedad* en este punto. Si la velocidad y la aceleración fuesen cero, el proyectil permanecería en lo alto.

EJEMPLO CONCEPTUAL 2.9 Los paracaidistas osados

Un paracaidista salta de un helicóptero suspendido. Pocos segundos después, salta otro paracaidista y ambos caen a lo largo de la misma línea vertical. Ignore la resistencia del aire, de modo que ambos paracaidistas caen con la misma aceleración. ¿La diferencia en sus magnitudes de velocidad permanece igual a lo largo de la caída? ¿La distancia vertical entre ellos permanece igual durante la caída?

SOLUCIÓN

En cualquier instante dado, las magnitudes de velocidad de los paracaidistas son diferentes porque uno salta primero. Sin embargo, en cualquier intervalo de tiempo Δt después de este instante, los dos paracaidistas aumentan sus rapideces en la misma cantidad porque tienen la misma aceleración. Por lo tanto, la diferencia en sus magnitudes de velocidad permanece igual a lo largo de la caída.

El primero que saltó siempre tiene una mayor rapidez que el segundo. Por lo tanto, en un intervalo de tiempo dado, el primer paracaidista cubre una mayor distancia que el segundo. En consecuencia, la distancia de separación entre ellos aumenta.

EJEMPLO 2.10 ¡No es un mal lanzamiento para un novato!

A una piedra que se lanza desde lo alto de un edificio se le da una velocidad inicial de 20.0 m/s directo hacia arriba. El edificio tiene 50.0 m de alto y la piedra apenas libra el borde del techo en su camino hacia abajo, como se muestra en la figura 2.14.

A) Use $t_{Ⓐ} = 0$ como el tiempo cuando la piedra deja la mano del lanzador en la posición Ⓐ y determine el tiempo en el que la piedra llega a su altura máxima.

SOLUCIÓN

Tal vez usted tenga experiencia en soltar objetos o lanzarlos hacia arriba y observarlos caer, de modo que este problema debe describir una experiencia familiar. Puesto que la piedra está en caída libre, se modela como partícula bajo aceleración constante debido a la gravedad.

Use la ecuación 2.13 para calcular el tiempo en que la piedra llega a su altura máxima:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y}$$

Sustituya valores numéricos:

$$t = t_{Ⓑ} = \frac{0 - 20.0 \text{ m/s}}{-9.80 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ s}$$

B) Encuentre la altura máxima de la piedra.

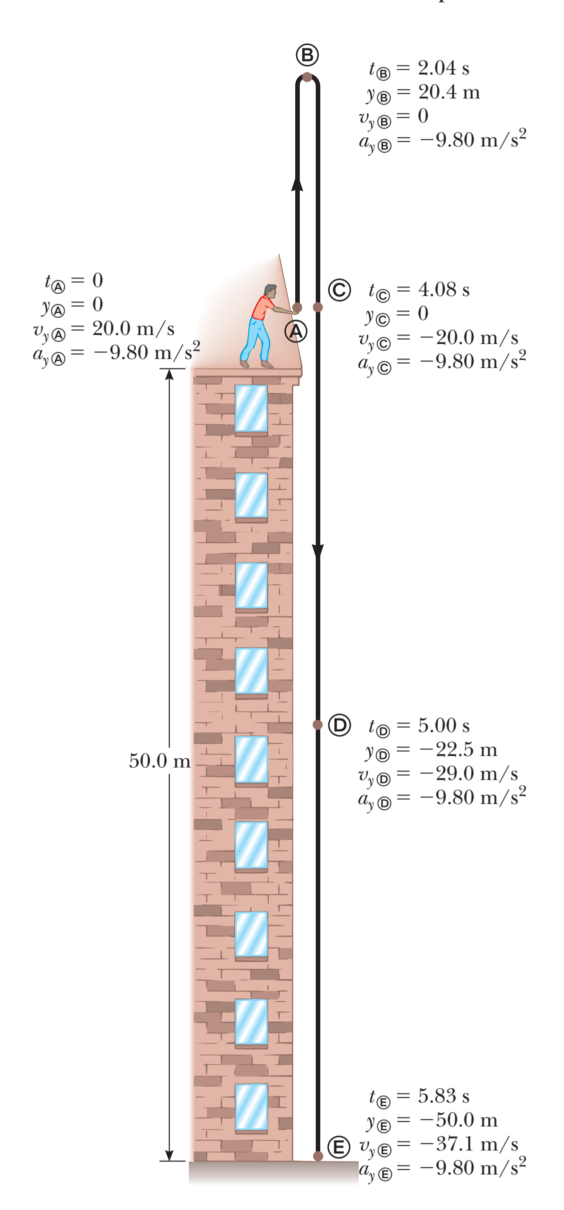


Figura 2.14 (Ejemplo 2.10) Posición y velocidad frente a tiempo para una piedra en caída libre que se lanza inicialmente hacia arriba con una velocidad $v_{yi} = 20.0$ m/s. Muchas de las cantidades en las etiquetas para los puntos en el movimiento de la piedra se calculan en el ejemplo. ¿Puede verificar los valores que no están calculados?

SOLUCIÓN

Sea $y_{\text{Ⓐ}} = 0$ y sustituya el tiempo del inciso A) en la ecuación 2.16 para encontrar la altura máxima:

$$y_{\text{máx}} = y_{\text{Ⓑ}} = y_{\text{Ⓐ}} + v_{x\text{Ⓐ}}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_{\text{Ⓑ}} = 0 + (20.0\text{ m/s})(2.04\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\text{ m/s}^2)(2.04\text{ s})^2 = \boxed{20.4\text{ m}}$$

C) Determine la velocidad de la piedra cuando regresa a la altura desde la que se lanzó.

Sustituya los valores conocidos en la ecuación 2.17:

$$v_{y\text{Ⓒ}}^2 = v_{y\text{Ⓐ}}^2 + 2a_y(y_{\text{Ⓒ}} - y_{\text{Ⓐ}})$$

$$v_{y\text{Ⓒ}}^2 = (20.0\text{ m/s})^2 + 2(-9.80\text{ m/s}^2)(0 - 0) = 400\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{y\text{Ⓒ}} = \boxed{-20.0\text{ m/s}}$$

Cuando se saca la raíz cuadrada, se elige una raíz positiva o una negativa. Se elige la raíz negativa porque se sabe que la piedra se mueve hacia abajo al punto Ⓒ. La velocidad de la piedra cuando llega de vuelta a su altura original es igual en magnitud a su velocidad inicial pero es opuesta en dirección.

D) Encuentre la velocidad y posición de la piedra en $t = 5.00$ s.

Calcule la velocidad en Ⓓ a partir de la ecuación 2.13:

$$v_{y\text{Ⓓ}} = v_{y\text{Ⓐ}} + a_y t = 20.0\text{ m/s} + (-9.80\text{ m/s}^2)(5.00\text{ s}) = \boxed{-29.0\text{ m/s}}$$

Use la ecuación 2.16 para encontrar la posición de la piedra en $t_{\text{Ⓓ}} = 5.00$ s:

$$y_{\text{Ⓓ}} = y_{\text{Ⓐ}} + v_{y\text{Ⓐ}}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$= 0 + (20.0\text{ m/s})(5.00\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\text{ m/s}^2)(5.00\text{ s})^2$$

$$= \boxed{-22.5\text{ m}}$$

La elección del tiempo definida como $t = 0$ es arbitraria y depende de usted seleccionarla. Como ejemplo de esta arbitrariedad, elija $t = 0$ como el tiempo en que la piedra está en el punto más alto de su movimiento. Luego resuelva los incisos C) y D) de nuevo usando este nuevo instante inicial y note que sus respuestas son iguales que las anteriores.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el edificio tuviese 30.0 m de altura en lugar de 50.0 m? ¿Qué respuestas cambiarían en los incisos A) a D)?

Respuesta Ninguna de las respuestas cambiaría. Todo el movimiento tiene lugar en el aire durante los primeros 5.00 s. (Observe que incluso para un edificio de 30.0 m de alto, la piedra está arriba del suelo en $t = 5.00$ s.) Por lo tanto, la altura del edificio no es un problema. Matemáticamente, si se observan de nuevo los cálculos, se ve que nunca se ingresó la altura del edificio en ninguna ecuación.

2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

Esta sección supone que el lector está familiarizado con las técnicas del cálculo integral. Si aún no estudia integración en su curso de cálculo, debe saltar esta sección o cubrirla después de que se familiarice con la integración.

La velocidad de una partícula que se mueve en línea recta se obtiene si se conoce su posición como función del tiempo. En términos matemáticos, la velocidad es igual a la derivada de la posición respecto al tiempo. También es posible encontrar la posición de una partícula si se conoce su velocidad como función del tiempo. En cálculo, al procedimiento que se usa para realizar esta tarea se le conoce como *integración* o como encontrar la *antiderivada*. En términos gráficos, es equivalente a encontrar el área bajo una curva.

Ponga por caso que la gráfica v_x–t para una partícula que se mueve a lo largo del eje x es como se muestra en la figura 2.15. Divida el intervalo de tiempo $t_f - t_i$ en muchos pequeños intervalos, cada uno de duración Δt_n. A partir de la definición de velocidad promedio es claro que el desplazamiento de la partícula durante cualquier intervalo pequeño, como el

Figura 2.15 Velocidad en función del tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. El área del rectángulo sombreado es igual al desplazamiento Δx en el intervalo de tiempo Δt_n, mientras que el área total bajo la curva es el desplazamiento total de la partícula.

sombreado en la figura 2.15, se conoce por $\Delta x_n = v_{xn,\text{ prom}}\,\Delta t_n$, donde $v_{xn,\text{ prom}}$ es la velocidad promedio en dicho intervalo. En consecuencia, el desplazamiento durante este pequeño intervalo simplemente es el área del rectángulo sombreado. El desplazamiento total para el intervalo $t_f - t_i$ es la suma de las áreas de todos los rectángulos desde t_i hasta t_f:

$$\Delta x = \sum_n v_{xn,\text{ prom}}\,\Delta t_n$$

donde el símbolo Σ (letra griega mayúscula sigma) significa una suma que incluye todos los términos, esto es, completos los valores de n. Ahora, conforme los intervalos se hacen cada vez más pequeños, el número de términos en la suma aumenta y la suma tiende a un valor igual al área bajo la gráfica velocidad-tiempo. Debido a esto, en el límite $n \to \infty$, o $\Delta t_n \to 0$, el desplazamiento es

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn}\,\Delta t_n \qquad \textbf{(2.18)}$$

Observe que en la suma se sustituyó la velocidad promedio $v_{xn,\text{ prom}}$ con la velocidad instantánea v_{xn}. Como puede ver en la figura 2.15, esta aproximación es válida en el límite de intervalos muy pequeños. En consecuencia, si se conoce la gráfica v_x–t para movimiento a lo largo de una línea recta, se obtiene el desplazamiento durante cualquier intervalo de tiempo al medir el área bajo la curva correspondiente a dicho intervalo de tiempo.

El límite de la suma que se muestra en la ecuación 2.18 se llama **integral definida** y se escribe

Integral definida ►

$$\lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn}\,\Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\,dt \qquad \textbf{(2.19)}$$

donde $v_x(t)$ denota la velocidad en cualquier tiempo t. Si se conoce la forma funcional explícita de $v_x(t)$ y se proporcionan los límites, se evalúa la integral. A veces la gráfica v_x–t para una partícula en movimiento tiene una forma mucho más simple que la mostrada en la figura 2.15. Por ejemplo, suponga que una partícula se mueve con velocidad constante v_{xi}. En este caso, la gráfica v_x–t es una línea horizontal, como en la figura 2.16, y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo Δt simplemente es el área del rectángulo sombreado:

$$\Delta x = v_{xi}\,\Delta t \quad (\text{cuando } v_x = v_{xi} = \text{constante})$$

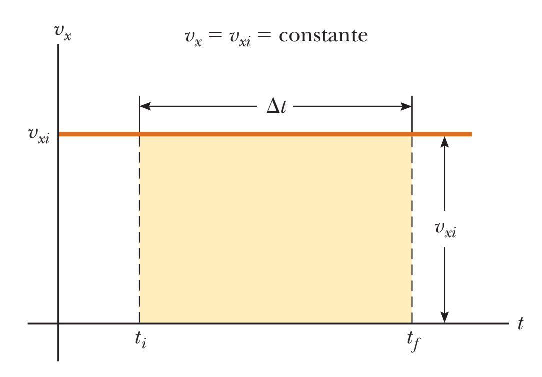


Figura 2.16 Curva velocidad-tiempo para una partícula que se mueve con velocidad constante v_{xi}. El desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo $t_f - t_i$ es igual al área del rectángulo sombreado.

Ecuaciones cinemáticas

Ahora se aplican las ecuaciones que definen la aceleración y velocidad para deducir dos de las ecuaciones cinemáticas, las ecuaciones 2.13 y 2.16.

La ecuación que define la aceleración (ec. 2.10),

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

se puede escribir como $dv_x = a_x\, dt$, o, en términos de una integral (o antiderivada), como

$$v_{xf} - v_{xi} = \int_0^t a_x\, dt$$

Para el caso especial en el que la aceleración es constante, a_x se puede remover de la integral para dar

$$v_{xf} - v_{xi} = a_x \int_0^t dt = a_x(t - 0) = a_x t \qquad \textbf{(2.20)}$$

que es la ecuación 2.13.

Ahora considere la ecuación que define la velocidad (ec. 2.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Esta ecuación se escribe como $dx = v_x\, dt$, o en forma integral como

$$x_f - x_i = \int_0^t v_x\, dt$$

Puesto que $v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x t$, esta expresión se convierte en

$$x_f - x_i = \int_0^t (v_{xi} + a_x t)dt = \int_0^t v_{xi}\, dt + a_x \int_0^t t\, dt = v_{xi}\,(t - 0) + a_x\left(\frac{t^2}{2} - 0\right)$$

$$x_f - x_i = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

que es la ecuación 2.16.

Además de lo que espera aprender acerca de conceptos físicos, una experiencia muy valiosa que debe desarrollar de sus cursos de física es la habilidad para resolver problemas complicados. La forma en que los físicos abordan situaciones complejas y las descomponen en trozos manejables es extremadamente útil. La siguiente es una estrategia general para resolver problemas que lo guían a través de las etapas. Para ayudarlo a recordar las etapas de la estrategia, éstas son *conceptualizar*, *categorizar*, *analizar* y *finalizar*.

ESTRATEGIA GENERAL PARA RESOLVER PROBLEMAS

Conceptualizar

- La primera cosa que debe hacer cuando aborde un problema es *pensar* y *comprender* la situación. Estudie cuidadosamente cualesquiera representaciones de la información (por ejemplo: diagramas, gráficas, tablas o fotografías) que acompañen al problema. Imagine una película, que corra en su mente, de lo que sucede en el problema.
- Si no se le proporciona una representación pictórica, casi siempre debe hacer un dibujo rápido de la situación. Indique cualesquiera valores conocidos, acaso en una tabla o directamente en su bosquejo.
- Ahora enfóquese en qué información algebraica o numérica se proporciona en el problema. Lea con cuidado el enunciado del problema y busque frases clave como "parte del reposo" ($v_i = 0$), "se detiene" ($v_f = 0$) o "cae libremente" ($a_y = -g = -9.80$ m/s^2).
- Ahora enfóquese en el resultado que se espera del problema resuelto. ¿Exactamente qué es lo que plantea la pregunta? ¿El resultado final será numérico o algebraico? ¿Sabe qué unidades esperar?
- No olvide incorporar información de su propia experiencia y sentido común. ¿Cómo sería una respuesta razonable? Por ejemplo, no esperaría calcular la rapidez de un automóvil como 5×10^6 m/s.

Categorizar

- Una vez que tenga una buena idea de lo que trata el problema, necesita *simplificar* el problema. Quite los detalles que no sean importantes para la solución. Por ejemplo, modele un objeto en movimiento como partícula. Si es adecuado, ignore la resistencia del aire o la fricción entre un objeto que se desliza y una superficie.
- Cuando simplifique el problema, es importante *categorizar* el problema. ¿Es un simple *problema de sustitución* en el que los números se sustituyen en una ecuación? Si es así, es probable que el problema termine cuando realice esta sustitución. Si no, enfrenta lo que se llama *problema analítico*: la situación se debe analizar más profundamente para llegar a una solución.
- Si es un problema analítico, necesita categorizarlo aún más. ¿Ha visto este tipo de problemas antes? ¿Cae en la creciente lista de tipos de problemas que ha resuelto anteriormente? Si es así, identifique cualquier modelo de análisis apropiado al problema para preparar la etapa de *analizar* siguiente. Los primeros tres tipos de modelos de análisis se vieron en este capítulo: partícula bajo velocidad constante, partícula bajo rapidez constante y partícula bajo aceleración constante. Ser capaz de clasificar un problema con un modelo de análisis hace mucho más sencillo tender un plan para resolverlo. Por ejemplo, si su simplificación muestra que el problema se puede tratar como una partícula bajo aceleración constante y ya resolvió un problema similar (como los ejemplos de la sección 2.6), la solución al presente problema sigue un patrón similar.

Analizar

- Ahora debe analizar el problema y esforzarse por una solución matemática. Puesto que ya categorizó el problema e identificó un modelo de análisis, no debe ser muy difícil seleccionar ecuaciones relevantes que se apliquen al tipo de situación en el problema. Por ejemplo, si involucra una partícula bajo aceleración constante, las ecuaciones de la 2.13 a la 2.17 son relevantes.
- Use álgebra (y cálculo, si es necesario) para resolver simbólicamente la variable desconocida en términos de lo que está dado. Sustituya los números adecuados, calcule el resultado y redondee al número adecuado a cifras significativas.

Finalizar

- Examine su respuesta numérica. ¿Tiene las unidades correctas? ¿Satisface las expectativas de su conceptualización del problema? ¿Qué hay acerca de la forma algebraica del resultado? ¿Tiene sentido? Examine las variables del problema para ver si la respuesta cambiaría en una forma físicamente significativa si las variables aumentan o disminuyen drásticamente o incluso si se vuelven cero. Buscar casos limitados para ver si producen valores esperados es una forma muy útil de asegurarse de que obtiene resultados razonables.
- Piense acerca de cómo se compara este problema con otros que ha resuelto. ¿Cómo fue similar? ¿En qué formas críticas difiere? ¿Por qué se asignó este problema? ¿Puede imaginar qué aprendió al hacerlo? Si es una nueva categoría de problema, asegúrese de que lo comprendió para que pueda usarlo como modelo para resolver problemas similares en el futuro.

Cuando resuelva problemas complejos, es posible que necesite identificar una serie de subproblemas y aplicar la estrategia para resolver cada uno. Para problemas simples, probablemente no necesite esta estrategia. Sin embargo, cuando intente resolver un problema y no sepa qué hacer a continuación, recuerde las etapas en la estrategia y úselas como guía.

Para practicar sería útil que vuelva a revisar los ejemplos trabajados en este capítulo e identifique los pasos *conceptualizar*, *categorizar*, *analizar* y *finalizar*. En el resto de este libro se etiquetarán estas etapas en los ejemplos trabajados. Muchos capítulos del libro incluyen una sección de "Estrategia para Resolución de Problemas" que le ayudarán a través de los puntos difíciles. Estas secciones se organizan de acuerdo con esta "Estrategia General para Resolver Problemas" y se hacen a la medida de los tipos específicos de problemas que se abordan en dicho capítulo.

Resumen

DEFINICIONES

Cuando una partícula se mueve a lo largo del eje x desde alguna posición inicial x_i hasta alguna posición final x_f, su **desplazamiento** es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \qquad (2.1)$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante cierto intervalo de tiempo es el desplazamiento Δx dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho desplazamiento:

$$v_{x,\text{ prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

La **rapidez promedio** de una partícula es igual a la relación de la distancia total que recorre al intervalo de tiempo total durante el que recorre dicha distancia:

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero. Por definición, este límite es igual a la derivada de x respecto a t, o la relación de cambio en el tiempo de la posición:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.5)$$

La **rapidez instantánea** de una partícula es igual a la magnitud de su velocidad instantánea.

La **aceleración promedio** de una partícula se define como la relación de cambio en su velocidad Δv_x dividida entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$a_{x,\text{ prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad (2.9)$$

La **aceleración instantánea** es igual al límite de la proporción $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a 0. Por definición, este límite es igual a la derivada de v_x respecto a t, o la relación de cambio en el tiempo de la velocidad:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.10)$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando la velocidad y la aceleración de un objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su velocidad. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena. Recuerde que $Fx \propto a_x$ es una forma útil de identificar la dirección de la aceleración al asociarla con una fuerza.

Un objeto en caída libre en presencia de la gravedad de la Tierra experimenta aceleración de caída libre dirigida hacia el centro de la Tierra. Si la resistencia del aire es despreciable, el movimiento ocurre cerca de la superficie de la Tierra y si el intervalo del movimiento es pequeño comparado con el radio de la Tierra, la aceleración de caída libre g es constante durante el rango de movimiento, donde g es igual a 9.80 m/s^2.

Los problemas complicados se abordan mejor en una forma organizada. Recuerde y aplique los pasos *conceptualizar*, *categorizar*, *analizar* y *finalizar* de la "Estrategia General para Resolver Problemas" cuando los necesite.

(*continúa*)

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula bajo velocidad constante. Si una partícula se mueve en línea recta con una rapidez constante v_x, su velocidad constante se conoce por

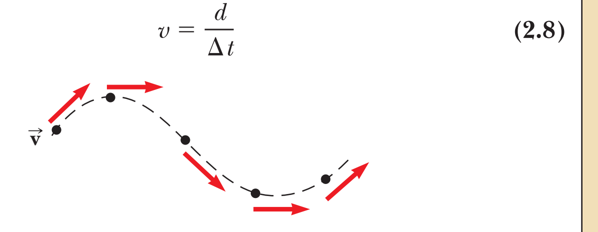
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \textbf{(2.6)}$$

y su posición se proporciona por

$$xf = x_i + v_x t \quad \textbf{(2.7)}$$

Partícula bajo rapidez constante. Si una partícula se mueve una distancia d a lo largo de una trayectoria curva o recta con rapidez constante, su rapidez constante se conoce por

$$v = \frac{d}{\Delta t} \quad \textbf{(2.8)}$$



Partícula bajo aceleración constante. Si una partícula se mueve en línea recta con aceleración constante a_x, su movimiento se describe mediante las ecuaciones cinemáticas:

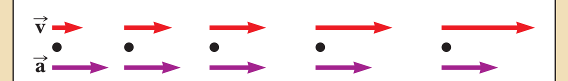
$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad \textbf{(2.13)}$$

$$v_{x,\ \text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad \textbf{(2.14)}$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad \textbf{(2.15)}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \quad \textbf{(2.16)}$$

$$v_{xf}^{\,2} = v_{xi}^{\,2} + 2a_x(x_f - x_i) \quad \textbf{(2.17)}$$



Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Una gota de aceite cae recta hacia abajo en el camino desde el motor de un automóvil en movimiento cada 5 s. La figura P2.1 muestra el patrón de las gotas que quedan en el pavimento. ¿Cuál es la rapidez promedio del automóvil en esta sección de su movimiento? a) 20 m/s, b) 24 m/s, c) 30 m/s, d) 100 m/s, e) 120 m/s.

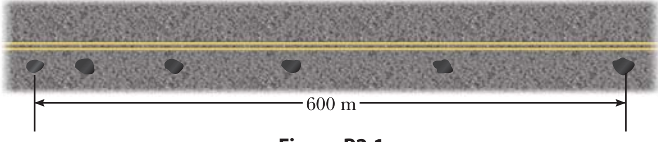
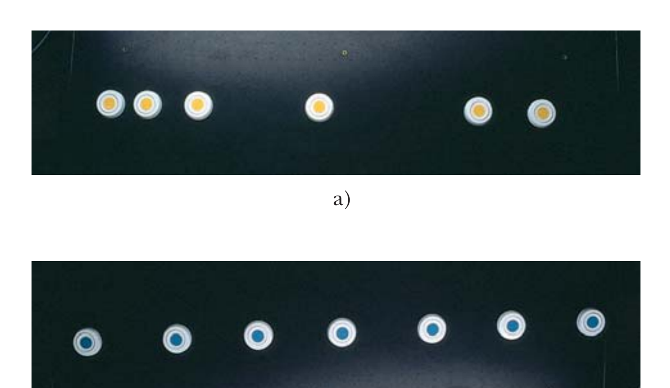


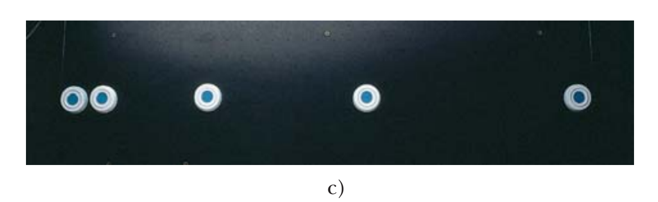
Figura P2.1

2. Si la velocidad promedio de un objeto es cero en cierto intervalo de tiempo, ¿qué puede decir acerca del desplazamiento del objeto durante dicho intervalo?
3. **O** ¿La velocidad instantánea de un objeto en un instante de tiempo alguna vez es mayor en magnitud que la velocidad promedio en un intervalo de tiempo que contenga al instante? ¿Alguna vez es menor?
4. **O** Un carro es empujado a lo largo de una pista horizontal recta. a) En cierta sección de su movimiento, su velocidad original es $v_{xi} = +3$ m/s y experimenta un cambio en velocidad de $\Delta v_x = +4$ m/s. ¿En esta sección de su movimiento aumenta su velocidad o frena? ¿Su aceleración es positiva o negativa? b) En otra parte de su movimiento, $v_{xi} = -3$ m/s y $\Delta v_x = +4$ m/s. ¿Experimenta aumento o disminución neta en rapidez? ¿Su aceleración es positiva o negativa? c) En un tercer segmento de su movimiento, $v_{xi} = +3$ m/s y $\Delta v_x = -4$ m/s. ¿Tiene una ganancia o pérdida neta en rapidez? ¿Su aceleración es positiva o negativa? d) En un cuarto intervalo de tiempo, $v_{xi} = -3$ m/s y $\Delta v_x = -4$ m/s. ¿El carro gana o pierde rapidez? ¿Su aceleración es positiva o negativa?
5. Dos automóviles se mueven en la misma dirección en pistas paralelas a lo largo de una autopista. En algún instante, la velocidad del automóvil A supera la velocidad del automóvil B. ¿Esto significa que la aceleración de A es mayor que la de B? Explique.
6. **O** Cuando el piloto invierte la hélice en un bote que se mueve al norte, el bote se mueve con una aceleración dirigida al sur. Si la aceleración del bote sigue constante en magnitud y dirección, ¿qué le ocurrirá al bote (elija una)? a) Eventualmente se detendrá y luego permanecerá en reposo. b) Al final se detendrá y luego comenzará a aumentar rapidez en la dirección hacia adelante. c) Eventualmente se detendrá y luego comenzará a aumentar rapidez en la dirección contraria. d) Nunca se detendrá sino que perderá rapidez cada vez más lentamente por siempre. e) Nunca se detendrá sino que continuará ganando rapidez en la dirección hacia adelante.
7. **O** Cada una de las fotografías estroboscópicas a), b) y c) de la figura P2.7 se tomó de un solo disco que se mueve hacia la derecha, que se toma como la dirección positiva. Dentro de cada fotografía, el intervalo de tiempo entre imágenes es constante. **i)** ¿Cuál(es) fotografía(s), si alguna, muestra(n) velocidad cero constante? **ii)** ¿Cuál(es) fotografía(s), si alguna, muestra aceleración cero constante? **iii)** ¿Cuál(es) fotografía(s), si alguna, muestran velocidad constante positiva? **iv)** ¿Cuál(es) fotografía(s), si alguna, muestra aceleración constante positiva? **v)** ¿Cuál(es) fotografía(s), si alguna, muestra(n) algún movimiento con aceleración negativa?



a)

b)



c)

Figura P2.7 Pregunta 7 y problema 17.

8. Intente el siguiente experimento lejos del tráfico, donde pueda hacerlo a salvo. Con el automóvil que usted conduzca moviéndose lentamente en un camino recto a nivel, cambie la velocidad a neutral y deje que el automóvil se deslice. En el momento en que el automóvil llegue a un alto completo, pise fuerte el freno y note lo que siente. Ahora repita el mismo experimento en una pendiente muy ligera hacia arriba. Explique la diferencia de lo que se siente en los dos casos. (Brian Popp sugirió la idea para esta pregunta.)

9. **O** Un patinador se desliza por una larga colina, parte del reposo y se mueve con aceleración constante para cubrir cierta distancia en 6 s. En un segundo intento, parte del reposo y se mueve con la misma aceleración sólo durante 2 s. ¿Qué tan diferente es su desplazamiento en este segundo intento, comparado con el primero? a) un tercio de largo, b) tres veces mayor, c) un noveno de largo, d) nueve veces mayor, e) $1/\sqrt{3}$ veces de largo, f) $\sqrt{3}$ veces mayor, g) ninguna de estas respuestas

10. **O** ¿Las ecuaciones de cinemática (ecs. 2.13–2.17) se usan en una situación en que la aceleración varía en el tiempo? ¿Se puede usar cuando la aceleración es cero?

11. Un estudiante en lo alto de un edificio de altura h lanza una bola hacia arriba con una rapidez v_i y luego lanza una segunda bola hacia abajo con la misma rapidez inicial $|v_i|$. ¿Cómo se comparan las velocidades finales de las bolas cuando llegan al suelo?

12. **O** Una cuenta se libera desde el reposo a cierta altura, cae libremente y alcanza una rapidez de impacto de 4 m/s en el suelo. **i)** A continuación, la partícula se lanza hacia abajo con una rapidez inicial de 3 m/s desde la misma altura. En este intento, ¿cuál es su rapidez en el suelo? a) menor que 4 m/s, b) 4 m/s, c) entre 4 m/s y 5 m/s, d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ m/s = 5 m/s, e) entre 5 m/s y 7 m/s, f) (3 + 4) m/s = 7 m/s, g) mayor que 7 m/s. **ii)** En un tercer intento la cuenta se lanza hacia arriba con una rapidez inicial de 3 m/s desde la misma altura. ¿Cuál es su rapidez en el suelo en este intento? Elija su respuesta de la misma lista de la a) a la g).

13. **O** Una bola de hule duro, que no es afectada por la resistencia del aire en su movimiento, se lanza hacia arriba desde la altura del hombro, cae a la acera, rebota a una altura máxima un poco menor y se atrapa en su camino hacia abajo. Este movimiento se representa en la figura P2.13, donde las posiciones sucesivas de la bola, de Ⓐ a Ⓖ, no están igualmente espaciadas en el tiempo. En el punto Ⓔ el centro de la bola está en su punto más bajo del movimiento. El movimiento de la bola es a lo largo de una línea recta, pero el diagrama muestra posiciones sucesivas corridas a la derecha para evitar traslape. Elija la dirección positiva y hacia arriba. **i)** Clasifique las situaciones de la Ⓐ a la Ⓖ de acuerdo con la rapidez de la bola $|v_y|$ en cada punto, con la rapidez más grande primero. **ii)** Clasifique las mismas situaciones de acuerdo con la velocidad de la bola en cada punto. **iii)** Clasifique las mismas situaciones de acuerdo con la aceleración a_y de la bola en cada punto. En cada clasificación, recuerde que cero es mayor que un valor negativo. Si dos valores son iguales, muestre que son iguales en su clasificación.

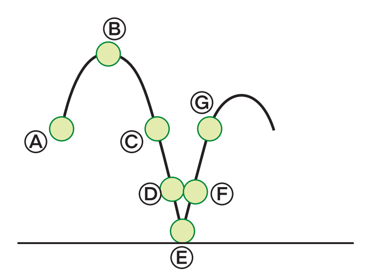


Figura P2.13

14. **O** Usted suelta una bola desde una ventana ubicada en un piso superior de un edificio. Golpea el suelo con rapidez v. Ahora repite la caída, pero le pide a un amigo abajo en el suelo que lance otra bola hacia arriba con rapidez v. Su amigo lanza la bola hacia arriba en el mismo momento en que usted suelta la suya desde la ventana. En alguna ubicación, las bolas pasan una a la otra. ¿Esta ubicación está a) *en* el punto medio entre ventana y suelo, b) *arriba* de este punto o c) *abajo* de este punto?

Problemas

Sección 2.1 Posición, velocidad y rapidez

1. En la figura P2.1 se muestra la posición en función del tiempo para cierta partícula que se mueve a lo largo del eje x. Encuentre la velocidad promedio en los siguientes intervalos de tiempo. a) 0 a 2 s, b) 0 a 4 s, c) 2 s a 4 s, d) 4 s a 7 s, e) 0 a 8 s.

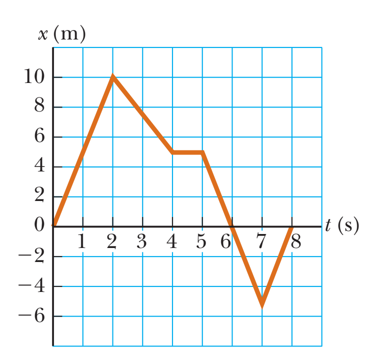


Figura P2.1 Problemas 1 y 8.

2. La posición de un carro de derby se observó en varios momentos; los resultados se resumen en la tabla siguiente. Encuentre la velocidad promedio del auto para a) el primer intervalo de tiempo de 1 s, b) los últimos 3 s y c) todo el periodo de observación.

***t* (s)**	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
***x* (m)**	0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5

3. Una persona camina, primero, con rapidez constante de 5.00 m/s a lo largo de una línea recta desde el punto *A* al punto *B* y luego de regreso a lo largo de la línea de *B* a *A* con una rapidez constante de 3.00 m/s. a) ¿Cuál es su rapidez promedio durante todo el viaje? b) ¿Cuál es su velocidad promedio durante todo el viaje?

4. Una partícula se mueve de acuerdo con la ecuación $x = 10t^2$, donde x está en metros y t en segundos. a) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2.00 s a 3.00 s. b) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2.00 s a 2.10 s.

Sección 2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

5. En la figura P2.5 se muestra una gráfica posición-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. a) En-cuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo t = 1.50 s a t = 4.00 s. b) Determine la velocidad instantánea en t = 2.00 s al medir la pendiente de la línea tangente que se muestra en la gráfica. c) ¿En qué valor de t la velocidad es cero?

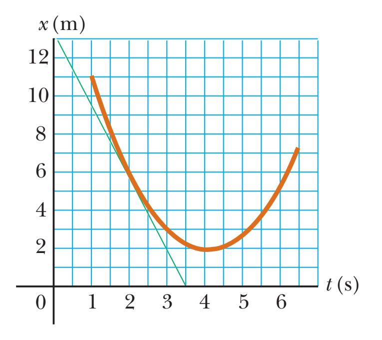


Figura P2.5

6. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = 3t^2$, donde x está en metros y t en segundos. Evalúe su posición a) en t = 3.00 s y b) en 3.00 s + Δt. c) Evalúe el límite de $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero para encontrar la velocidad en t = 3.00 s.

7. a) Use los datos del problema 2.2 para construir una gráfica uniforme de posición en función del tiempo. b) Con la construcción de tangentes a la curva $x(t)$, encuentre la velocidad instantánea del automóvil en varios instantes. c) Grafique la velocidad instantánea en función del tiempo y, a partir de la gráfica, determine la aceleración promedio del automóvil. d) ¿Cuál fue la velocidad inicial del automóvil?

8. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula descrita en la figura P2.1 en los siguientes tiempos: a) t = 1.0 s, b) t = 3.0 s, c) t = 4.5 s, d) t = 7.5 s.

Sección 2.3 Modelos de análisis: la partícula bajo velocidad constante

9. Una liebre y una tortuga compiten en una carrera en una ruta de 1.00 km de largo. La tortuga paso a paso continuo y de manera estable a su máxima rapidez de 0.200 m/s se dirige hacia la línea de meta. La liebre corre a su máxima rapidez de 8.00 m/s hacia la meta durante 0.800 km y luego se detiene para fastidiar a la tortuga. ¿Cuán cerca de la meta la liebre puede dejar que se acerque la tortuga antes de reanudar la carrera, que gana la tortuga en un final de fotografía? Suponga que ambos animales, cuando se mueven, lo hacen de manera constante a su respectiva rapidez máxima.

Sección 2.4 Aceleración

10. Una superbola de 50.0 g que viaja a 25.0 m/s bota en una pared de ladrillo y rebota a 22.0 m/s. Una cámara de alta rapidez registra este evento. Si la bola está en contacto con la pared durante 3.50 ms, ¿cuál es la magnitud de la aceleración promedio de la bola durante este intervalo de tiempo? *Nota:* 1 ms = 10^{-3} s.

11. Una partícula parte del reposo y acelera como se muestra en la figura P2.11. Determine a) la rapidez de la partícula en t = 10.0 s y en t = 20.0 s y b) la distancia recorrida en los primeros 20.0 s.

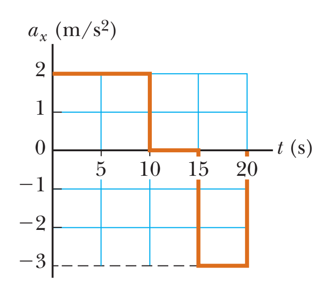


Figura P2.11

12. En la figura P2.12 se muestra una gráfica velocidad-tiempo de un objeto que se mueve a lo largo del eje x. a) Trace una gráfica de la aceleración en función del tiempo. b) Determine

la aceleración promedio del objeto en los intervalos de tiempo $t = 5.00$ s a $t = 15.0$ s y $t = 0$ a $t = 20.0$ s.

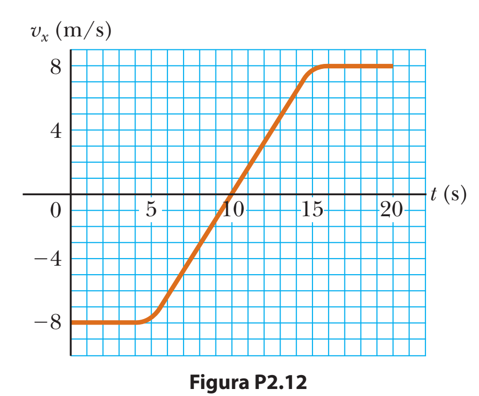


Figura P2.12

13. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $x = 2.00 + 3.00t - 1.00t^2$, donde x está en metros y t en segundos. En $t = 3.00$ s, encuentre a) la posición de la partícula, b) su velocidad y c) su aceleración.

14. Una niña rueda una canica sobre una pista con dobleces que mide 100 cm de largo, como se muestra en la figura P2.14. Use x para representar la posición de la canica a lo largo de la pista. En las secciones horizontales de $x = 0$ a $x = 20$ cm y de $x = 40$ cm a $x = 60$ cm, la canica rueda con rapidez constante. En las secciones de pendiente, la rapidez de la canica cambia de manera uniforme. En los lugares donde la pendiente cambia, la canica permanece en la pista y no experimenta cambios súbitos en rapidez. La niña da a la canica cierta rapidez inicial en $x = 0$ y $t = 0$ y luego la observa rodar a $x = 90$ cm, donde regresa, y eventualmente regresa a $x = 0$ con la misma rapidez con la que al inicio la niña la liberó. Prepare gráficas de x en función de t, v_x en función de t y a_x en función de t, alineadas verticalmente con sus ejes de tiempo idénticos, para mostrar el movimiento de la canica. No podrá colocar números distintos a cero en el eje horizontal o en los ejes de velocidad o aceleración, sino mostrar los tamaños relativos correctos en las gráficas.

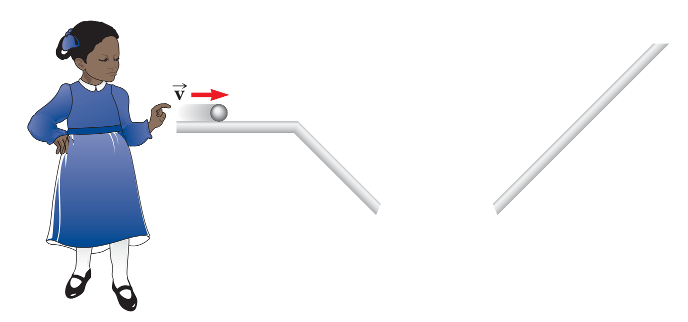


Figura P2.14

15. Un objeto se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $x(t) = (3.00t^2 + 2.00t + 3.00)$ m, donde t está en segundos. Determine a) la rapidez promedio entre $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, b) la rapidez instantánea en $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, c) la aceleración promedio entre $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, y d) la aceleración instantánea en $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s.

16. La figura P2.16 muestra una gráfica de v_x en función de t para el movimiento de un motociclista mientras parte del reposo y se mueve a lo largo del camino en línea recta. a) Encuentre la aceleración promedio para el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 6.00$ s. b) Estime el tiempo en que la aceleración tiene su mayor valor positivo y el valor de la aceleración en dicho instante. c) ¿Cuándo la aceleración es cero? d) Estime el máximo valor negativo de la aceleración y el tiempo en el que ocurre.

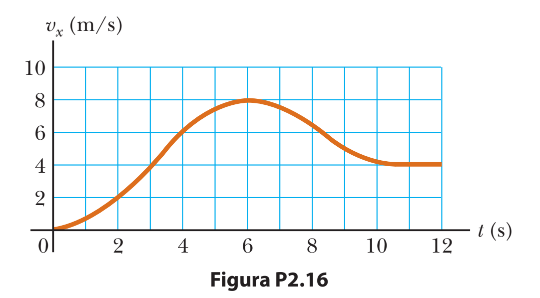


Figura P2.16

Sección 2.5 Diagramas de movimiento

17. ● Cada una de las fotografías estroboscópicas a), b) y c) en la figura P2.7 se tomó de un solo disco que se mueve hacia la derecha, que se considera la dirección positiva. Dentro de cada fotografía el intervalo de tiempo entre imágenes es constante. Para cada fotografía prepare gráficas de x en función de t, v_x en función de t y a_x en función de t, alineada verticalmente con sus ejes de tiempo idénticos, para mostrar el movimiento del disco. No podrá colocar números distintos de cero sobre los ejes, sino mostrar los tamaños relativos correctos sobre las gráficas.

18. Dibuje diagramas de movimiento para a) un objeto que se mueve a la derecha con rapidez constante, b) un objeto que se mueve a la derecha y aumenta rapidez con relación constante, c) un objeto que se mueve a la derecha y frena con relación constante, d) un objeto que se mueve a la izquierda y aumenta rapidez con relación constante, y e) un objeto que se mueve a la izquierda y frena con relación constante. f) ¿Cómo modificaría su dibujo si los cambios en rapidez no fuesen uniformes; esto es, si la rapidez no cambiara con relación constante?

Sección 2.6 La partícula bajo aceleración constante

19. ● Considere una porción de aire en un tubo recto que se mueve con una aceleración constante de -4.00 m/s^2 y tiene una velocidad de 13.0 m/s a las 10:05:00 a.m., en cierta fecha. a) ¿Cuál es su velocidad a las 10:05:01 a.m.? b) ¿A las 10:05:02 a.m.? c) ¿A las 10:05:02.5 a.m.? d) ¿A las 10:05:04 a.m.? e) ¿A las 10:04:59 a.m.? f) Describa la forma de una gráfica de velocidad en función del tiempo para esta porción de aire. g) Argumente a favor o en contra del enunciado "conocer un solo valor de la aceleración constante de un objeto es como conocer toda una lista de valores para su velocidad".

20. Un camión cubre 40.0 m en 8.50 s mientras frena de manera uniforme a una rapidez final de 2.80 m/s. a) Encuentre su rapidez original. b) Encuentre su aceleración.

21. Un objeto que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12.0 cm/s en la dirección x positiva cuando su coordenada x es 3.00 cm. Si su coordenada x 2.00 s después es -5.00 cm, ¿cuál es su aceleración?

22. La figura P2.22 representa parte de los datos de desempeño de un automóvil propiedad de un orgulloso estudiante de física. a) Calcule la distancia total recorrida al calcular el área bajo la línea de la gráfica. b) ¿Qué distancia recorre el automóvil entre los tiempos $t = 10$ s y $t = 40$ s? c) Dibuje una gráfica de su aceleración en función del tiempo entre $t = 0$ y $t = 50$ s. d) Escriba una ecuación para x como función del tiempo para cada fase del movimiento, representado por i) $0a$, ii) ab y iii) bc. e) ¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil entre $t = 0$ y $t = 50$ s?

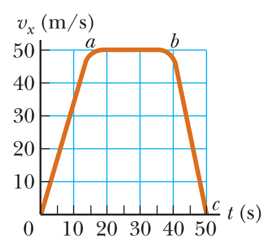


Figura P2.22

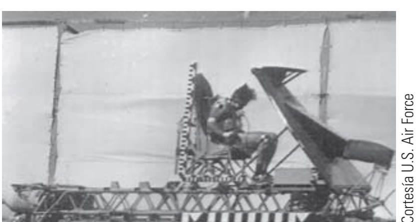
23. ● Un avión jet se aproxima para aterrizar con una rapidez de 100 m/s y una aceleración con una magnitud máxima de 5.00 m/s^2 conforme llega al reposo. a) Desde el instante cuando el avión toca la pista, ¿cuál es el intervalo de tiempo mínimo necesario antes de que llegue al reposo? b) ¿Este avión puede aterrizar en el aeropuerto de una pequeña isla tropical donde la pista mide 0.800 km de largo? Explique su respuesta.

24. ● En $t = 0$, un carro de juguete se pone a rodar en una pista recta con posición inicial de 15.00 cm, velocidad inicial de -3.50 cm/s y aceleración constante de 2.40 cm/s^2. En el mismo momento, otro carro de juguete se pone a rodar en una pista adyacente con posición inicial de 10.0 cm, una velocidad inicial de $+5.50$ cm/s y aceleración constante cero. a) ¿En qué tiempo, si alguno, los dos carros tienen iguales rapideces? b) ¿Cuáles son sus rapideces en dicho tiempo? c) ¿En qué tiempo(s), si alguno, los carros se rebasan mutuamente? d) ¿Cuáles son sus ubicaciones en dicho tiempo? e) Explique la diferencia entre la pregunta a) y la pregunta c) tan claramente como le sea posible. Escriba (o dibuje) para una audiencia blanco de estudiantes que no comprendan de inmediato que las condiciones son diferentes.

25. El conductor de un automóvil aplica los frenos cuando ve un árbol que bloquea el camino. El automóvil frena uniformemente con una aceleración de -5.60 m/s^2 durante 4.20 s, y hace marcas de derrape rectas de 62.4 m de largo que terminan en el árbol. ¿Con qué rapidez el automóvil golpea el árbol?

26. *¡Ayuda! ¡Se perdió una de las ecuaciones!* El movimiento con aceleración constante se describe con las variables y parámetros v_{xi}, v_{xf}, a_x, t y $x_f - x_i$. En las ecuaciones en la tabla 2.2, la primera no involucra $x_f - x_i$, la segunda no contiene a_x, la tercera omite v_{xf} y la última deja fuera t. De modo que, para completar el conjunto, debe haber una ecuación que *no* involucre v_{xi}. Dedúzcula a partir de las otras. Aplíquela para resolver el problema 25 en un paso.

27. Durante muchos años, el récord mundial de rapidez en tierra lo poseyó el coronel John P. Stapp, de la fuerza aérea de Estados Unidos. Él participó en un estudio para ver si un piloto de jet podría sobrevivir a la expulsión de emergencia. El 19 de marzo de 1954, viajó en un trineo impulsado por cohete que se movió por una pista a una rapidez de 632 mi/h. Él y el trineo llegaron al reposo en 1.40 s con seguridad (figura P2.27). Determine a) la aceleración negativa que experimentó y b) la distancia que recorrió durante esta aceleración negativa.




Cortesía U.S. Air Force

Figura P2.27 (*Izquierda*) Coronel John Stapp en el trineo cohete. (*Derecha*) El rostro de Stapp se deforma por el esfuerzo de la rápida aceleración negativa.

28. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición está dada por la ecuación $x = 2 + 3t - 4t^2$, con x en metros y t en segundos. Determine a) su posición cuando cambia de dirección y b) su velocidad cuando regresa a la posición que tenía en $t = 0$.

29. Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera desde una rapidez de 2.00×10^4 m/s a 6.00×10^6 m/s en 1.50 cm. a) ¿En qué intervalo de tiempo el electrón recorre estos 1.50 cm? b) ¿Cuál es su aceleración?

30. ● Dentro de una compleja máquina como una línea de ensamblado robótico, suponga que una parte se desliza a lo largo de una pista recta. Un sistema de control mide la velocidad promedio de la parte durante cada intervalo de tiempo sucesivo $\Delta t_0 = t_0 - 0$, lo compara con el valor v_c que debe ser y enciende y apaga un servomotor para dar a la parte un pulso corrector de aceleración. El pulso consiste de una aceleración constante a_m aplicada durante el intervalo de tiempo $\Delta t_m = \Delta t_m - 0$ dentro del siguiente intervalo de tiempo de control Δt_0. Como se muestra en la figura P2.30, la parte se puede modelar con una aceleración cero cuando el motor se apaga (entre t_m y t_0). Una computadora en el sistema de control elige el tamaño de la aceleración de modo que la velocidad final de la parte tendrá el valor correcto v_c. Suponga que la parte inicialmente está en reposo y tendrá velocidad instantánea v_c en el tiempo t_0. a) Encuentre el valor requerido de a_m en términos de v_c y t_m. b) Muestre que el desplazamiento Δx de la parte durante el intervalo de tiempo Δt_0 está dado por $\Delta x = v_c(t_0 - 0.5t_m)$. Para valores específicos de v_c y t_0, c) ¿cuál es el desplazamiento mínimo del inciso? d) ¿Cuál es el desplazamiento máximo del inciso? e) ¿Son físicamente obtenibles los desplazamientos mínimo y máximo?

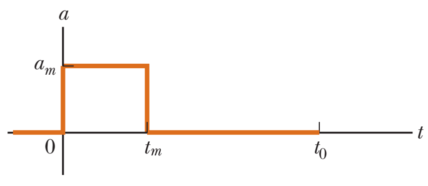


Figura P2.30

31. ● Un deslizador en una pista de aire porta una bandera de longitud ℓ a través de una fotopuerta estacionaria, que mide el intervalo de tiempo Δt_d durante el que la bandera bloquea

un haz de luz infrarroja que pasa a través de la fotopuerta. La relación $v_d = \ell/\Delta t_d$ es la velocidad promedio del deslizador durante esta parte de su movimiento. Suponga que el deslizador se mueve con aceleración constante. a) Argumente a favor o en contra de la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad de la fotopuerta en el espacio. b) Argumente a favor o en contra de la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad de la fotopuerta en el tiempo.

32. ● Speedy Sue, que conduce a 30.0 m/s, entra a un túnel de un carril. En seguida observa una camioneta lenta 155 m adelante que se mueve a 5.00 m/s. Sue aplica los frenos pero sólo puede acelerar a -2.00 m/s^2 porque el camino está húmedo. ¿Habrá una colisión? Establezca cómo llega a su respuesta. Si es sí, determine cuán lejos en el túnel y en qué tiempo ocurre la colisión. Si es no, determine la distancia de acercamiento más próxima entre el automóvil de Sue y la camioneta.

33. *¡Vroom, vroom!* Tan pronto como un semáforo se pone en verde, un automóvil aumenta rapidez desde el reposo a 50.0 mi/h con aceleración constante de 9.00 mi/h · s. En el carril de bicicletas, un ciclista aumenta la rapidez desde el reposo a 20.0 mi/h con aceleración constante de 13.0 mi/h · s. Cada vehículo mantiene velocidad constante después de alcanzar su rapidez de crucero. a) ¿Para qué intervalo de tiempo la bicicleta está adelante del automóvil? b) ¿Por cuánta distancia máxima la bicicleta adelanta al automóvil?

34. Resuelva el ejemplo 2.8 (¡Observe el límite de rapidez!) mediante un método gráfico. En la misma gráfica trace posición en función del tiempo para el automóvil y el oficial de policía. De la intersección de las dos curvas lea el tiempo cuando el patrullero da alcance al automóvil.

35. ● Un deslizador de 12.4 cm de longitud se mueve sobre una pista de aire con aceleración constante. Transcurre un intervalo de tiempo de 0.628 s entre el momento cuando su extremo frontal pasa un punto fijo Ⓐ a lo largo de la pista y el momento cuando su extremo trasero pasa este punto. A continuación, transcurre un intervalo de tiempo de 1.39 s entre el momento cuando el extremo trasero del deslizador pasa el punto Ⓐ y el momento cuando el extremo frontal del deslizador pasa un segundo punto Ⓑ más lejos en la pista. Después de ello, transcurren 0.431 s adicionales hasta que el extremo trasero del deslizador pasa el punto Ⓑ. a) Encuentre la rapidez promedio del deslizador conforme pasa el punto Ⓐ. b) Encuentre la aceleración del deslizador. c) Explique cómo calcula la aceleración sin saber la distancia entre los puntos Ⓐ y Ⓑ.

Sección 2.7 Objetos en caída libre

Nota: En todos los problemas de esta sección, ignore los efectos de la resistencia del aire.

36. En un video clásico de *America's Funniest Home Videos*, un gato dormido rueda suavemente de lo alto de una cálida televisión. Si ignora la resistencia del aire, calcule a) la posición y b) la velocidad del gato después de 0.100 s, 0.200 s y 0.300 s.

37. ● *Cada mañana a las siete en punto*
Hay veinte terriers taladrando la roca.
El jefe viene y les dice, "Manténgase firmes
Y apóyense duro sobre el talador de hierro fundido

Y taladren, terriers, taladren." Y taladren, terriers, taladren.
Es trabajar todo el día por azúcar en su té…
Y taladren, terriers, taladren.
Más allá de las vías. Y taladren, terriers, taladren.

El nombre del capataz era John McAnn.
Por Dios, fue a quien culparon.
Un día una explosión prematura se suscitó
Y una milla en el aire el gran Jim Goff subió. Y taladren…

Entonces, cuando el siguiente día de paga llegó,
Jim Goff un dólar menos encontró.
Cuando él preguntó por qué, esta réplica recibió:
"Fue por el tiempo que en el cielo permaneció".
Y taladren…

—Canción popular estadounidense

¿Cuál era el salario por hora de Goff? Establezca las suposiciones que hizo para calcularlo.

38. Una bola se lanza directamente hacia arriba, con una rapidez inicial de 8.00 m/s, desde una altura de 30.0 m. ¿Después de qué intervalo de tiempo la bola golpea al suelo?

39. Un estudiante lanza un conjunto de llaves verticalmente hacia arriba a su hermana de fraternidad, quien está en una ventana 4.00 m arriba. Las llaves las atrapa 1.50 s después con la mano extendida. a) ¿Con qué velocidad inicial se lanzaron las llaves? b) ¿Cuál fue la velocidad de las llaves justo antes de ser atrapadas?

40. ● Emily desafía a su amigo David a atrapar un billete de dólar del modo siguiente. Ella sostiene el billete verticalmente, como se muestra en la figura P2.40, con el centro del billete entre los dedos índice y pulgar de David, quien debe atrapar el billete después de que Emily lo libere sin mover su mano hacia abajo. Si su tiempo de reacción es 0.2 s, ¿tendrá éxito? Explique su razonamiento.

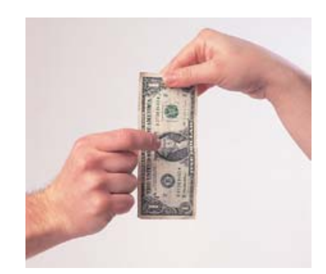


Figura P2.41

41. Se golpea una pelota de beisbol de modo que viaja recto hacia arriba después de ser golpeada por el bat. Un aficionado observa que a la bola le toma 3.00 s llegar a su máxima altura. Encuentre a) la velocidad inicial de la bola y b) la altura que alcanza.

42. ● Un atacante en la base de la pared de un castillo de 3.65 m de alto lanza una roca recta hacia arriba con una rapidez de 7.40 m/s a una altura de 1.55 m sobre el suelo. a) ¿La roca llegará a lo alto de la pared? b) Si es así, ¿cuál es su rapidez en lo alto? Si no, ¿qué rapidez inicial debe tener para llegar a lo alto? c) Encuentre el cambio en rapidez de una roca lanzada recta hacia abajo desde lo alto de la pared con una rapidez inicial de 7.40 m/s y que se mueve entre los mismos dos puntos. d) ¿El cambio en rapidez de la roca que se mueve hacia abajo concuerda con la magnitud del cambio de rapidez de la roca que se mueve hacia arriba entre las mismas elevaciones? Explique físicamente por qué sí o por qué no concuerda.

43. Un osado vaquero sentado en la rama de un árbol desea caer verticalmente sobre un caballo que galopa bajo el árbol. La rapidez constante del caballo es 10.0 m/s y la distancia desde

la rama hasta el nivel de la silla de montar es 3.00 m. a) ¿Cuál debe ser la distancia horizontal entre la silla y la rama cuando el vaquero haga su movimiento? b) ¿Para qué intervalo de tiempo está en el aire?

44. La altura de un helicóptero sobre el suelo está dada por $h = 3.00t^3$, donde h está en metros y t en segundos. Después de 2.00 s, el helicóptero libera una pequeña valija de correo. ¿Cuánto tiempo, después de su liberación, la valija llega al suelo?

45. Un objeto en caída libre requiere 1.50 s para recorrer los últimos 30.0 m antes de golpear el suelo. ¿Desde qué altura sobre el suelo cayó?

Sección 2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

46. Un estudiante conduce un ciclomotor a lo largo de un camino recto como se describe por la gráfica velocidad en función del tiempo de la figura P2.46. Bosqueje esta gráfica en medio de una hoja de papel gráfico. a) Directamente sobre su gráfica, bosqueje una gráfica de la posición en función del tiempo y alinee las coordenadas de tiempo de las dos gráficas. b) Bosqueje una gráfica de la aceleración en función del tiempo directamente bajo de la gráfica v_x–t, y de nuevo alinee las coordenadas de tiempo. En cada gráfica muestre los valores numéricos de x y a_x para todos los puntos de inflexión. c) ¿Cuál es la aceleración en $t = 6$ s? d) Encuentre la posición (relativa al punto de partida) en $t = 6$ s. e) ¿Cuál es la posición final del ciclomotor en $t = 9$ s?

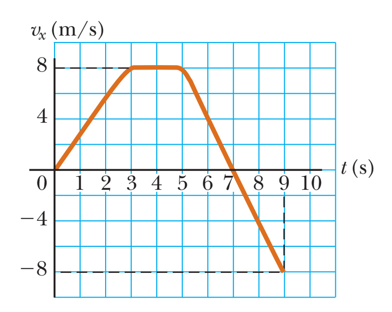


Figura P2.46

47. Los ingenieros automotrices se refieren a la tasa de cambio de la aceleración en el tiempo como el "jalón". Suponga que un objeto se mueve en una dimensión tal que su jalón J es constante. a) Determine expresiones para su aceleración $a_x(t)$, velocidad $v_x(t)$ y posición $x(t)$, dado que su aceleración, velocidad y posición iniciales son a_{xi}, v_{xi} y x_i, respectivamente. b) Muestre que $a_x^2 = a_{xi}^2 + 2J(v_x - v_{xi})$.

48. La rapidez de una bala mientras viaja por el cañón de un rifle hacia la abertura está dada por $v = (-5.00 \times 10^7)t^2 + (3.00 \times 10^5)t$, donde v está en metros por segundo y t en segundos. La aceleración de la bala justo cuando sale del cañón es cero. a) Determine la aceleración y posición de la bala como función del tiempo cuando la bala está en el cañón. b) Determine el intervalo de tiempo durante el que la bala acelera. c) Encuentre la rapidez a la que sale del cañón la bala. d) ¿Cuál es la longitud del cañón?

Problemas adicionales

49. Un objeto está en $x = 0$ en $t = 0$ y se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la gráfica velocidad-tiempo de la figura P2.49. a) ¿Cuál es la aceleración del objeto entre 0 y 4 s? b) ¿Cuál es la aceleración del objeto entre 4 s y 9 s? c) ¿Cuál es la aceleración del objeto entre 13 s y 18 s? d) ¿En qué tiempo(s) el objeto se mueve con la rapidez más baja? e) ¿En qué tiempo el objeto está más lejos de $x = 0$? f) ¿Cuál es la posición final x del objeto en $t = 18$ s? g) ¿A través de qué distancia total el objeto se mueve entre $t = 0$ y $t = 18$ s?

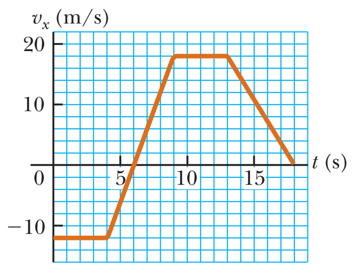
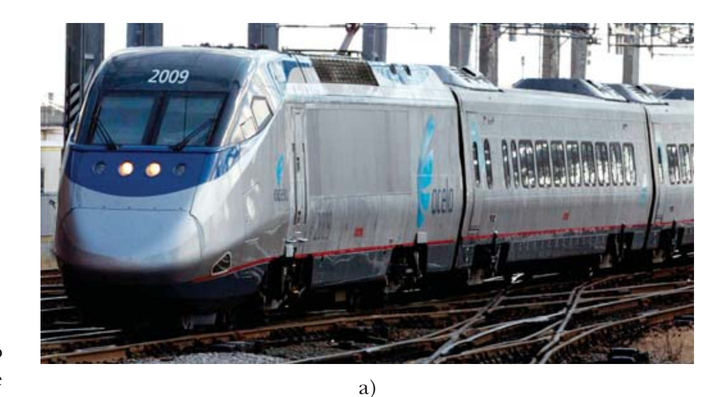


Figura P2.49

50. ● El Acela, que se muestra en la figura P2.50a, es un tren eléctrico en la ruta Washington-Nueva York-Boston y transporta pasajeros a 170 mi/h. La inclinación de los vagones es de hasta 6° de la vertical para evitar que los pasajeros sientan que se les empuja a un lado cuando entran en curvas. En la figura P2.50b se muestra una gráfica velocidad-tiempo para el Acela. a) Describa el movimiento del tren en cada intervalo de tiempo sucesivo. b) Encuentre la aceleración pico positiva del tren en el movimiento graficado. c) Encuentre el desplazamiento del tren, en millas, entre $t = 0$ y $t = 200$ s.



a)

200
150
100
50
0
−50
−100
v (mi/h)
−50 0 50 100 150 200 250 300 350 400
t (s)

b)

Figura P2.50 a) El Acela: 1 171 000 lb de acero frío que transporta atronadoramente 304 pasajeros. b) Gráfica velocidad frente a tiempo para el Acela.

51. Un cohete de prueba se dispara verticalmente hacia arriba desde un pozo. Una catapulta le da una rapidez inicial de 80.0 m/s a nivel del suelo. Después se encienden sus motores y

acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 hasta que llega a una altitud de 1 000 m. En este punto sus motores fallan y el cohete entra en caída libre, con una aceleración de -9.80 m/s^2. a) ¿Para qué intervalo de tiempo el cohete está en movimiento sobre el suelo? b) ¿Cuál es su altitud máxima? c) ¿Cuál es su velocidad justo antes de chocar con la Tierra? (Necesitará considerar el movimiento mientras el motor funciona separado del movimiento en caída libre.)

52. ● En la figura 2.11b, el área bajo la curva velocidad en función del tiempo y entre el eje vertical y el tiempo t (línea discontinua vertical) representa el desplazamiento. Como se muestra, esta área consiste de un rectángulo y un triángulo. Calcule sus áreas y establezca cómo se compara la suma de las dos áreas con la expresión en el lado derecho de la ecuación 2.16.

53. Estableciendo un récord mundial en una carrera de 100 m, Maggie y Judy cruzan la línea final en un empate muy apretado, pues ambas tardan 10.2 s. Acelerando uniformemente, a Maggie le toma 2.00 s y a Judy 3.00 s lograr su máxima rapidez, que mantienen durante el resto de la carrera. a) ¿Cuál fue la aceleración de cada corredora? b) ¿Cuáles fueron sus respectivas magnitudes de velocidad máximas? c) ¿Cuál corredora estuvo adelante en la marca de 6.00 s y por cuánto?

54. ● *¿Cuánto tiempo debe durar la luz amarilla del semáforo?* Suponga que conduce al límite de rapidez v_0. Conforme se aproxima a un cruce de 22.0 m de ancho, ve que la luz se pone amarilla. Durante su tiempo de reacción de 0.600 s, viaja con rapidez constante mientras reconoce la advertencia, decide si se detiene o cruza la intersección, y mueve su pie al freno si debe frenar. Su automóvil tiene buenos frenos y puede acelerar a -2.40 m/s^2. Antes de ponerse roja, la luz debe permanecer en amarillo lo suficiente para que sea capaz de llegar al otro lado de la intersección sin aumentar rapidez, si está muy cerca de la intersección como para frenar antes de entrar a ella. a) Encuentre el intervalo de tiempo Δt_y requerido que la luz debe permanecer en amarillo en términos de v_0. Evalúe su respuesta para b) $v_0 = 8.00$ m/s $= 28.8$ km/h, c) $v_0 = 11.0$ m/s $= 40.2$ km/h, d) $v_0 = 18.0$ m/s $= 64.8$ km/h y e) $v_0 = 25.0$ m/s $= 90.0$ km/h. **¿Qué pasaría si?** Evalúe su respuesta para f) v_0 que tiende a cero y g) v_0 que tiende a infinito. h) Describa el patrón de variación de Δt_y con v_0. Tal vez también quiera bosquejar una gráfica del mismo. Explique físicamente las respuestas a los incisos f) y g). i) ¿Para qué valores de v_0 sería mínimo Δt_y? y j) ¿Cuál es este intervalo de tiempo mínimo? *Sugerencia:* Puede encontrar más fácil de hacer el inciso a) después de hacer primero el inciso b).

55. Un tren de pasajeros viaja entre dos estaciones del centro de la ciudad. Puesto que las estaciones sólo están separadas 1.00 km, el tren nunca alcanza su máxima rapidez de viaje posible. Durante las horas de tráfico el ingeniero minimiza el intervalo de tiempo Δt entre las dos estaciones al acelerar durante un intervalo de tiempo Δt_1 con una proporción $a_1 = 0.100$ m/s^2 para luego frenar inmediatamente con una aceleración $a_2 = -0.500$ m/s^2 en un intervalo de tiempo Δt_2. Encuentre el intervalo de tiempo de viaje mínimo Δt y el intervalo de tiempo Δt.

56. Un Ferrari F50 de 4.52 m de longitud se mueve al norte en una autopista que interseca con otro camino perpendicular. El ancho de la intersección desde el extremo cercano al extremo lejano es de 28.0 m. El Ferrari tiene una aceleración constante de 2.10 m/s^2 de magnitud dirigida al sur. El intervalo de tiempo requerido para que la nariz del Ferrari se mueva desde el extremo cercano (sur) de la intersección hasta el extremo norte de la intersección es 3.10 s. a) ¿Cuán lejos está la nariz del Ferrari del extremo sur de la intersección cuando se detiene? b) ¿Para qué intervalo de tiempo *cualquier* parte del Ferrari está dentro de las fronteras de la intersección? c) Un Corvette está en reposo en el camino de intersección perpendicular. Mientras la nariz del Ferrari entra a la intersección, el Corvette parte del reposo y acelera al este a 5.60 m/s^2. ¿Cuál es la distancia mínima desde el extremo cercano (oeste) de la intersección a la que la nariz del Corvette puede comenzar su movimiento, si el Corvette debe entrar a la intersección después de que el Ferrari haya salido completamente de la intersección? d) Si el Corvette comienza su movimiento en la posición dada por su respuesta en el inciso c), ¿con qué rapidez entra a la intersección?

57. Un inquisitivo estudiante de física y montañista asciende un risco de 50.0 m que cuelga sobre un tranquilo ojo de agua. Lanza dos piedras verticalmente hacia abajo, con una separación de 1.00 s y observa que causan una sola salpicadura. La primera piedra tiene una rapidez inicial de 2.00 m/s. a) ¿Cuánto tiempo después de liberar la primera piedra las dos piedras golpean el agua? b) ¿Qué velocidad inicial debe tener la segunda piedra si deben golpear simultáneamente? c) ¿Cuál es la rapidez de cada piedra en el instante en que las dos golpean el agua?

58. ● Una bola de hule duro, liberada a la altura del pecho, cae al pavimento y rebota de vuelta casi a la misma altura. Cuando está en contacto con el pavimento, el lado inferior de la bola se aplana temporalmente. Suponga que la profundidad máxima de la abolladura es del orden de 1 cm. Calcule una estimación del orden de magnitud para la aceleración máxima de la bola mientras está en contacto con el pavimento. Establezca sus suposiciones, las cantidades que estimó y los valores que estimó para ellos.

59. Kathy Kool compra un automóvil deportivo que puede acelerar con una relación de 4.90 m/s^2. Decide probar el automóvil corriendo con otro conductor, Stan Speedy. Ambos parten del reposo, pero el experimentado Stan deja la línea de partida 1.00 s antes que Kathy. Stan se mueve con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 y Kathy mantiene una aceleración de 4.90 m/s^2. Encuentre a) el tiempo cuando Kathy alcanza a Stan, b) la distancia que recorre antes de alcanzarlo y c) las rapideces de ambos automóviles en el instante en que lo alcanza.

60. Una roca se suelta desde el reposo en un pozo. a) El sonido de la salpicadura se escucha 2.40 s después de que la roca se libera desde el reposo. ¿Cuán lejos abajo de lo alto del pozo es la superficie del agua? La rapidez del sonido en el aire (a temperatura ambiente) es 336 m/s. b) **¿Qué pasaría si?** Si se ignora el tiempo de viaje para el sonido, ¿qué error porcentual se introduce cuando se calcula la profundidad del pozo?

61. ● En un manual para conductor de California, se dieron los siguientes datos acerca de la distancia mínima que un automóvil recorre para detenerse a partir de varias rapideces originales. La "distancia pensada" representa cuán lejos viaja el automóvil durante el tiempo de reacción del conductor, después de que aparezca una razón para frenar pero antes de que el conductor pueda aplicar los frenos. La "distancia de frenado" es el desplazamiento del automóvil después de aplicar los frenos. a) ¿Los datos de distancia pensada son consistentes con la suposición de que el automóvil viaja con rapidez constante? Explique. b) Determine el mejor valor de tiempo de reacción sugerido por los datos. c) ¿Los datos de distancia de frenado

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

son consistentes con la suposición de que el automóvil viaja con aceleración constante? Explique. d) Determine el mejor valor para la aceleración sugerido por los datos.

Rapidez (mi/h)	Distancia pensada (ft)	Distancia de frenado (ft)	Distancia de frenado total (ft)
25	27	34	61
35	38	67	105
45	49	110	159
55	60	165	225
65	71	231	302

62. ● Astronautas en un planeta distante lanzan una roca al aire. Con la ayuda de una cámara que toma fotografías a una rapidez estable, registran la altura de la roca como función del tiempo como se da en la tabla de la siguiente columna. a) Encuentre la velocidad promedio de la roca en el intervalo de tiempo entre cada medición y la siguiente. b) Use estas velocidades promedio para aproximar velocidades instantáneas en los puntos medios de los intervalos de tiempo y haga una gráfica de la velocidad como función del tiempo. ¿La roca se mueve con aceleración constante? Si es así, trace una línea recta de mejor ajuste en la gráfica y calcule su pendiente para encontrar la aceleración.

Tiempo (s)	Altura (m)	Tiempo (s)	Altura (m)
0.00	5.00	2.75	7.62
0.25	5.75	3.00	7.62
0.50	6.40	3.25	6.77
0.75	6.94	3.50	6.20
1.00	7.38	3.75	5.52
1.25	7.72	4.00	4.73
1.50	7.96	4.25	3.85
1.75	8.10	4.50	2.86
2.00	8.13	4.75	1.77
2.25	8.07	5.00	0.58
2.50	7.90		

63. Dos objetos, A y B, se conectan mediante una barra rígida que tiene longitud L. Los objetos se deslizan a lo largo de rieles guía perpendiculares como se muestra en la figura P2.63. Suponga que A se desliza hacia la izquierda con una rapidez constante v. Encuentre la velocidad de B cuando $\theta = 60.0°$.

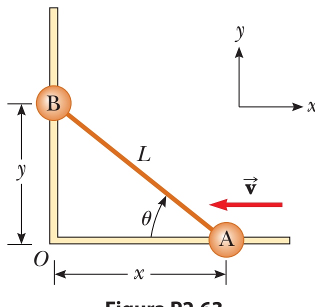


Figura P2.63

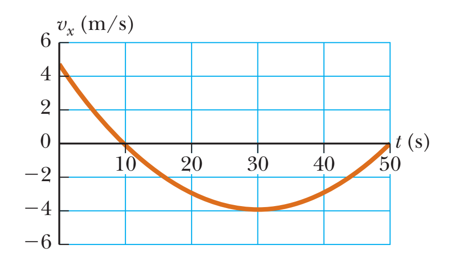
Respuestas a preguntas rápidas

2.1 c). Si la partícula se mueve a lo largo de una línea sin cambiar dirección, el desplazamiento y la distancia recorridos sobre cualquier intervalo de tiempo serán iguales. Como resultado, la magnitud de la velocidad promedio y de la rapidez promedio serán iguales. Sin embargo, si la partícula invierte dirección, el desplazamiento será menor que la distancia recorrida. A su vez, la magnitud de la velocidad promedio será más pequeña que la rapidez promedio.

2.2 b). Sin importar su rapidez en todos los demás tiempos, si su rapidez instantánea en el instante en que se mide es mayor que el límite de rapidez, puede recibir una infracción.

2.3 b). Si el automóvil frena, una fuerza debe jalar en la dirección opuesta a su velocidad.

2.4 Falso. Su gráfica debe parecerse algo a la siguiente.



Esta gráfica v_x–t muestra que la rapidez máxima es de aproximadamente 5.0 m/s, que es 18 km/h (= 11 mi/h), de modo que el conductor no aumentaba rapidez.

2.5 c). Si una partícula con aceleración constante se detiene y su aceleración sigue constante, debe comenzar a moverse de nuevo en la dirección opuesta. Si no lo hace, la aceleración cambiaría desde su valor original constante a cero. La opción a) no es correcta porque la dirección de la aceleración no se especifica por la dirección de la velocidad. La opción b) tampoco es correcta por contraejemplo; un automóvil que se mueve en la dirección $-x$ y frena tiene una aceleración positiva.

2.6 La gráfica a) tiene una pendiente constante, que indica una aceleración constante; se representa mediante la gráfica e).

La gráfica b) representa una rapidez que aumenta constantemente pero no a una tasa uniforme. Por lo tanto, la aceleración debe aumentar y la gráfica que mejor muestra esto es d).

La gráfica c) muestra una velocidad que primero aumenta a una proporción constante, lo que revela aceleración constante. Luego la velocidad deja de aumentar y se vuelve constante, lo que indica aceleración cero. La mejor relación a esta situación es la gráfica f).

2.7 **i**), e). Para todo el intervalo de tiempo que la bola está en caída libre, la aceleración es la de la gravedad. **ii**), d). Mientras la bola se eleva, va frenando. Después de llegar al punto más alto, la bola comienza a caer y su rapidez aumenta.



Los controles en la cabina de una aeronave comercial ayudan al piloto a mantener el control sobre la velocidad del aparato (cuán rápido viaja y en qué dirección lo hace) lo cual le permite aterrizar con seguridad. Las cantidades que se definen tanto por una magnitud como por una dirección, como la velocidad, se llaman *cantidades vectoriales*. (Mark Wagner/Getty Images)

3 Vectores

En el estudio de la física con frecuencia se necesita trabajar con cantidades físicas que tie-nen propiedades tanto numéricas como direccionales. Como se apuntó en la sección 2.1, las cantidades de esta naturaleza son cantidades vectoriales. Este capítulo está interesado principalmente en las propiedades generales de las cantidades vectoriales. Se analizan la suma y resta de cantidades vectoriales, con aplicaciones comunes a situaciones físicas.

Las cantidades vectoriales se usan en todas las partes de este texto. Por tanto, es imperativo que domine las técnicas que se discuten en este capítulo.

3.1 Sistemas coordenados

Muchos aspectos de la física incluyen una descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo, en el capítulo 2, se vio que la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios tiempos. En dos dimensiones esta descripción se logra con el uso del sistema de coordenadas cartesianas, en el que ejes perpendiculares cruzan en un punto definido como el origen (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas también se llaman *coordenadas rectangulares.*

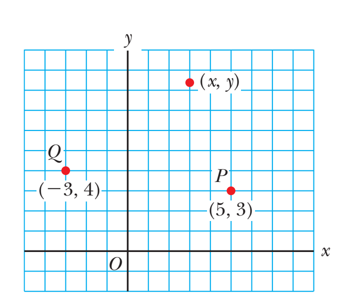


Figura 3.1 Designación de puntos en un sistema coordenado cartesiano. Cualquier punto se etiqueta con las coordenadas (x, y).

A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus *coordenadas polares planas* (r, θ), como se muestra en la figura 3.2a. En este *sistema de coordenadas polares*, r es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas (x, y) y θ es el ángulo entre un eje fijo y una línea dibujada desde el origen hasta el punto. El eje fijo es el eje x positivo y θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el mismo. A partir del triángulo rectángulo de la figura 3.2b, se encuentra que

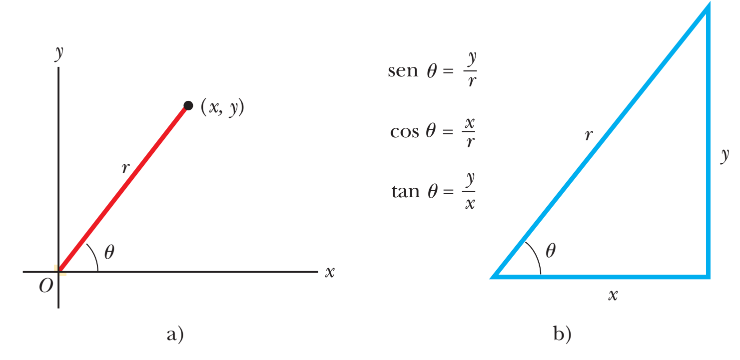


Figura 3.2 a) Las coordenadas polares planas de un punto se representan mediante la distancia r y el ángulo θ, donde θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo. b) Se usa el triángulo rectángulo para relacionar (x, y) con (r, θ).

sen $\theta = y/r$ y que $\cos\theta = x/r$. (En el apéndice B.4 se presenta una revisión de las funciones trigonométricas.) En consecuencia, si parte con las coordenadas polares planas de cualquier punto, al aplicar las siguientes ecuaciones obtiene las coordenadas cartesianas

$$x = r\cos\theta \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \textbf{(3.2)}$$

Además, las definiciones de trigonometría dicen que

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{(3.4)}$$

La ecuación 3.4 es el conocido teorema de Pitágoras.

Estas cuatro expresiones, que relacionan las coordenadas (x, y) con las coordenadas (r, θ), se aplican sólo cuando θ se define como se muestra en la figura 3.2a; en otras palabras, cuando θ es positivo, es un ángulo que se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo. (Algunas calculadoras científicas realizan conversiones entre coordenadas cartesianas y polares en función de estas convenciones estándar.) Si como eje de referencia para el ángulo polar θ se elige otro distinto del eje x positivo o si el sentido de θ creciente se elige de modo diferente, cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas.

EJEMPLO 3.1 Coordenadas polares

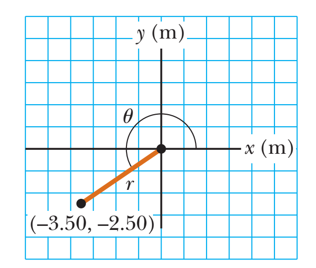


Figura 3.3 (Ejemplo 3.1) Encuentre las coordenadas polares cuando tiene las coordenadas cartesianas.

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se muestra en la figura 3.3. Encuentre las coordenadas polares de este punto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El dibujo de la figura 3.3 ayuda a formar conceptos del problema.

Categorizar A partir del enunciado del problema y de la etapa Conceptualizar, se entiende que simplemente se convierte de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Debido a esto, se considera este ejemplo como un problema de sustitución. Dichos problemas por lo general no tienen una etapa de análisis amplia distinta de la sustitución de números en una ecuación dada. De igual modo, la etapa "Finalizar" consiste principalmente en comprobar las unidades y asegurarse de que la respuesta es razonable. En consecuencia, para problemas de sustitución, no se marcarán las etapas "Analizar" y "Finalizar".

Aplique la ecuación 3.4 para encontrar r:
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50 \text{ m})^2 + (-2.50 \text{ m})^2} = \boxed{4.30 \text{ m}}$$

Aplique la ecuación 3.3 para hallar θ:
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50 \text{ m}}{-3.50 \text{ m}} = 0.714$$
$$\theta = \boxed{216°}$$

Advierta que debe usar los signos de x y y para encontrar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema coordenado. Esto es, $\theta = 216°$, no 35.5°.

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Ahora se describirá formalmente la diferencia entre cantidades escalares y cantidades vectoriales. Cuando quiere saber la temperatura exterior para saber cómo vestirse, la única información que necesita es un número y la unidad "grados C" o "grados F". Así, la temperatura es un ejemplo de *cantidad escalar*:

> Una **cantidad escalar** se especifica por completo mediante un valor único con una unidad adecuada y no tiene dirección.

Otros ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, rapidez e intervalos de tiempo. Las reglas de aritmética ordinaria se usan para manipular cantidades escalares.

Si se prepara para pilotear un pequeño avión y necesita saber la velocidad del viento, debe conocer tanto la rapidez del viento como su dirección. Puesto que la dirección es importante para una especificación completa, la velocidad es una *cantidad vectorial*:

> Una **cantidad vectorial** se especifica por completo mediante un número y unidades apropiadas más una dirección.

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento, como ya sabe por el capítulo 2. Suponga que una partícula se mueve desde algún punto Ⓐ hasta algún punto Ⓑ a lo largo de una trayectoria recta, como se muestra en la figura 3.4. Tal desplazamiento se representa con el dibujo de una flecha de Ⓐ a Ⓑ, en el que la punta de la flecha apunta alejándose del punto de partida. La dirección de la punta de flecha representa la dirección del desplazamiento y la longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento. Si la partícula viaja a lo largo de alguna otra trayectoria de Ⓐ a Ⓑ, como se muestra mediante la línea discontinua en la figura 3.4, su desplazamiento todavía es la flecha dibujada de Ⓐ a Ⓑ. El desplazamiento sólo depende de las posiciones inicial y final, de modo que el vector desplazamiento es independiente de la trayectoria que toma la partícula entre estos dos puntos.

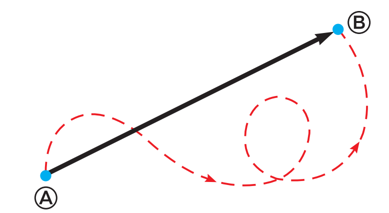


Figura 3.4 Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ a lo largo de una trayectoria arbitraria representada por la línea discontinua, su desplazamiento es una cantidad vectorial que se muestra mediante la flecha dibujada de Ⓐ a Ⓑ.

En este texto se usa una letra en negrita con una flecha sobre ella, como $\vec{\mathbf{A}}$, para representar un vector. Otra notación común para vectores, con la que se debe familiarizar, es un caracter en negrita: **A**. La magnitud del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se escribe A o $|\vec{\mathbf{A}}|$. La magnitud de un vector tiene unidades físicas, como metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

Pregunta rápida 3.1 ¿Cuáles de los siguientes son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? a) su edad b) aceleración c) velocidad d) rapidez e) masa

3.3 Algunas propiedades de los vectores

En esta sección se indagarán las propiedades generales de los vectores que representan cantidades físicas. También se discute cómo sumar y restar vectores con el uso de métodos algebraicos y geométricos.

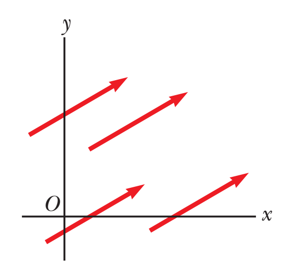


Figura 3.5 Estos cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección.

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos, dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se definen como iguales si tienen la misma magnitud y si apuntan en la misma dirección. Esto es, $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ sólo si $A = B$ y si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ apuntan en la misma dirección a lo largo de líneas paralelas. Por ejemplo, todos los vectores en la figura 3.5 son iguales aun cuando tengan diferentes puntos de inicio. Dicha propiedad permite mover, en un diagrama, un vector a una posición paralela a sí mismo sin afectar al vector.

Suma de vectores

Una forma conveniente de describir las reglas para sumar vectores es mediante un método gráfico. Para sumar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ al vector $\vec{\mathbf{A}}$, primero dibuje el vector $\vec{\mathbf{A}}$ en papel gráfico, con su magnitud representada mediante una escala de longitud conveniente, y luego dibuje el vector $\vec{\mathbf{B}}$ a la misma escala, con su origen iniciando desde la punta de $\vec{\mathbf{A}}$, como se muestra en la figura 3.6. El **vector resultante** $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ es el vector que se dibuja desde el origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

También se usa una construcción geométrica para sumar más de dos vectores, como se muestra en la figura 3.7 para el caso de cuatro vectores. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{D}}$ es el vector que completa el polígono. En otras palabras, $\vec{\mathbf{R}}$ **es el vector dibujado desde el origen del primer vector a la punta del último vector**. Esta técnica para sumar vectores con frecuencia se llama "método del paralelogramo".

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.1

Suma vectorial con suma escalar

Advierta que $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$ es muy diferente de $A + B = C$. La primera ecuación es una suma vectorial, que se debe manejar con cuidado, con un método gráfico. La segunda ecuación es una simple suma algebraica de números que se manejan con las reglas normales de aritmética.

Cuando se suman dos vectores, la suma es independiente del orden de la adición. (Quizás esto parezca trivial, pero como verá en el capítulo 11, el orden es importante cuando se multiplican vectores. Los procedimientos para multiplicar vectores se analizan en los capítulos 7 y 11.) Esta propiedad, que se aprecia en la construcción geométrica de la figura 3.8, se conoce como **ley conmutativa de la suma**:

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \qquad (3.5)$$

Cuando se suman tres o más vectores, su suma es independiente de la forma en la cual se agrupan los vectores individuales. En la figura 3.9 se muestra una prueba geométrica de esta regla para tres vectores. Esta propiedad se llama **ley asociativa de la suma**:

$$\vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}} \qquad (3.6)$$

En resumen, **una cantidad vectorial tiene tanto magnitud como dirección y también obedece las leyes de la suma vectorial** como se describe en las figuras de la 3.6 a la 3.9. Cuando se suman dos o más vectores, todos deben tener las mismas unidades y deben ser del mismo tipo de cantidad. No tiene sentido sumar un vector velocidad (por ejemplo, 60 km/h hacia el este) con un vector desplazamiento (por ejemplo, 200 km al norte) porque

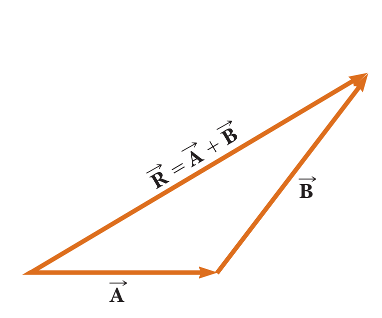


Figura 3.6 Cuando el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es el vector que va del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

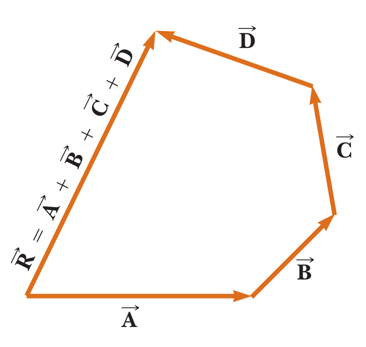


Figura 3.7 Construcción geométrica para sumar cuatro vectores. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es por definición el que completa el polígono.

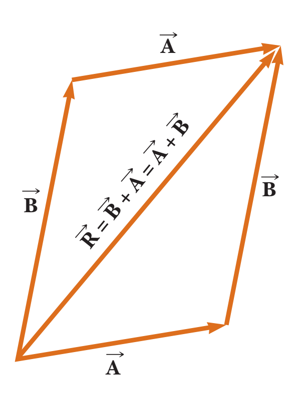


Figura 3.8 Esta construcción muestra que $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$ o, en otras palabras, que la suma vectorial es conmutativa.

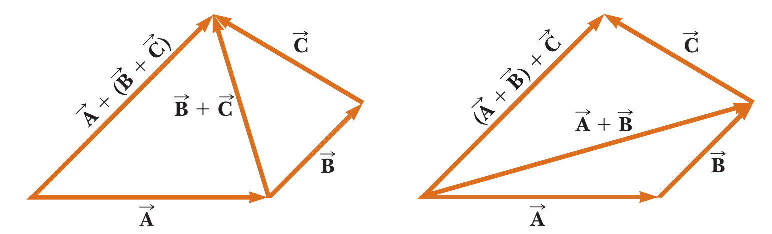


Figura 3.9 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la suma.

estos vectores representan diferentes cantidades físicas. La misma regla se aplica a los escalares. Por ejemplo, no tiene sentido sumar intervalos de tiempo con temperaturas.

Negativo de un vector

El negativo del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se define como el vector que, cuando se suma con $\vec{\mathbf{A}}$, da cero para la suma vectorial. Esto es: $\vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{A}}) = 0$. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $-\vec{\mathbf{A}}$ tienen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas.

Resta de vectores

La operación de resta vectorial utiliza la definición del negativo de un vector. Se define la operación $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ como el vector $-\vec{\mathbf{B}}$ que se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$:

$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}}) \qquad \textbf{(3.7)}$$

En la figura 3.10a se ilustra la construcción geométrica para restar dos vectores de esta forma.

Otra forma de observar la resta vectorial es notar que la diferencia $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ entre dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es lo que debe sumar al segundo vector para obtener el primero. En este caso, como muestra la figura 3.10b, el vector $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ apunta desde la punta del segundo vector a la punta del primero.

Multiplicación de un vector por un escalar

Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar positiva m, el producto $m\vec{\mathbf{A}}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$ y magnitud mA. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$, el producto $-m\vec{\mathbf{A}}$ tiene una dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$. Por ejemplo, el vector $5\vec{\mathbf{A}}$ es cinco veces tan largo como $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$; el vector $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{A}}$ es un tercio la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$.

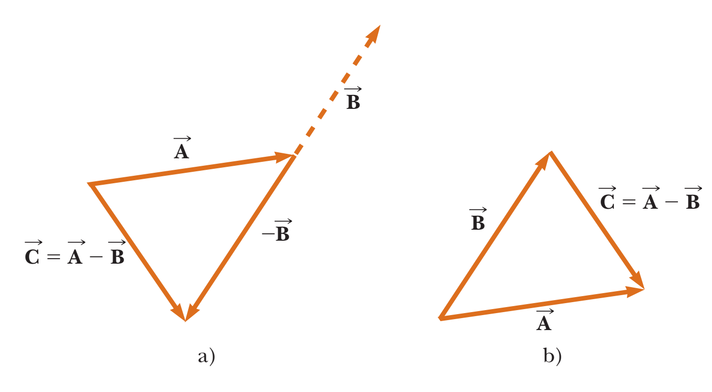


Figura 3.10 a) Esta construcción muestra cómo restar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ del vector $\vec{\mathbf{A}}$. El vector $-\vec{\mathbf{B}}$ es igual en magnitud al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y apunta en la dirección opuesta. Para restar $\vec{\mathbf{B}}$ de $\vec{\mathbf{A}}$, aplique la regla de suma vectorial a la combinación de $\vec{\mathbf{A}}$ y $-\vec{\mathbf{B}}$: primero dibuje $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de algún eje conveniente y luego coloque el origen de $-\vec{\mathbf{B}}$ en la punta de $\vec{\mathbf{A}}$ y **C** es la diferencia $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. b) Una segunda forma de observar la resta vectorial. El vector diferencia $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ es el vector que se debe sumar a $\vec{\mathbf{B}}$ para obtener $\vec{\mathbf{A}}$.

Pregunta rápida 3.2 Las magnitudes de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son A = 12 unidades y B = 8 unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los valores *más grandes* y *más pequeños* posibles para la magnitud del vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$? a) 14.4 unidades, 4 unidades, b) 12 unidades, 8 unidades, c) 20 unidades, 4 unidades, d) ninguna de estas respuestas.

Pregunta rápida 3.3 Si el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, ¿cuáles *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero? a) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos y en la misma dirección. b) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos y en direcciones opuestas. c) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen la misma magnitud. d) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son perpendiculares.

EJEMPLO 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

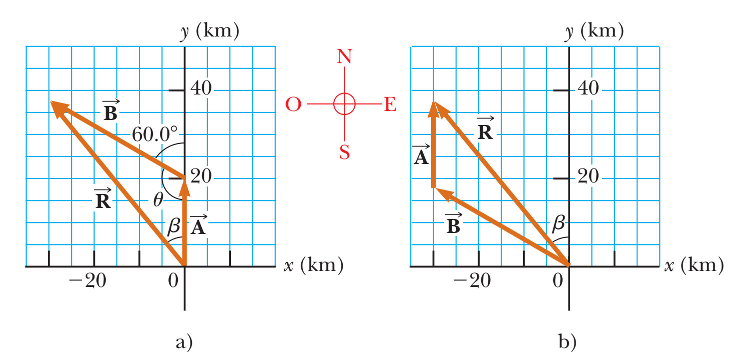


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. b) Sumar los vectores en orden inverso $(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}})$ da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ dibujados en la figura 3.11a ayudan a formar conceptos del problema.

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ es la resultante cuando se suman los dos desplazamientos individuales $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Incluso se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos.

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con el álgebra. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo (véase el apéndice B.4).

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y advierta que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$

$$= 48.2\text{ km}$$

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{B} = \frac{\text{sen}\,\theta}{R}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{B}{R}\,\text{sen}\,\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\,\text{sen}\,120° = 0.629$$

$$\beta = 38.9°$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

Finalizar ¿El ángulo β, que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo real medido del diagrama con el uso del método gráfico? ¿Es razonable que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ sea mayor que la de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? ¿Las unidades de $\vec{\mathbf{R}}$ son correctas?

Aunque el método gráfico de sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, un triángulo sólo resulta si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿Qué pasaría si? Considere que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores sumados en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

El método gráfico de suma de vectores no se recomienda cuando se requiere gran precisión o en problemas tridimensionales. En esta sección se describe un método de suma de vectores que utiliza las proyecciones de los vectores a lo largo de los ejes coordenados. Dichas proyecciones se llaman **componentes** del vector o sus **componentes rectangulares**. Cualquier vector se puede describir por completo mediante sus componentes.

Considere un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano *xy* y forma un ángulo arbitrario θ con el eje positivo *x*, como se muestra en la figura 3.12a. Este vector se puede expresar como la suma de otros dos *vectores componentes* $\vec{\mathbf{A}}_x$, que es paralelo al eje *x*, y $\vec{\mathbf{A}}_y$, que es paralelo al eje *y*. De la figura 3.12b se ve que los tres vectores forman un triángulo rectángulo y que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$. Con frecuencia se hará alusión a las "componentes de un vector $\vec{\mathbf{A}}$", escritas A_x y A_y (la notación es sin negritas). La componente A_x representa la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje *x*, y la componente A_y representa la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje *y*. Estas componentes pueden ser positivas o negativas. La componente A_x es positiva si el vector componente $\vec{\mathbf{A}}_x$ apunta en la dirección *x* positiva y es negativa si $\vec{\mathbf{A}}_x$ apunta en la dirección *x* negativa. Lo mismo es cierto para la componente A_y.

De la figura 3.12 y de la definición de seno y coseno, es claro que $\cos\theta = A_x/A$ y que $\operatorname{sen}\theta = A_y/A$. Por tanto, las componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ son

$$A_x = A\cos\theta \quad (3.8)$$

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta \quad (3.9)$$

◀ Componentes del vector $\vec{\mathbf{A}}$

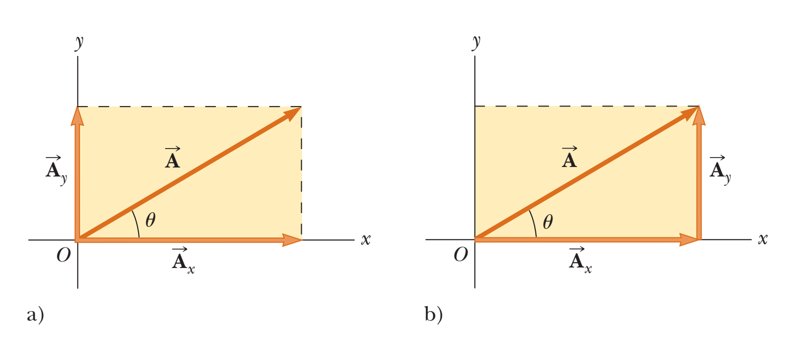


Figura 3.12 a) Un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano *xy* se representa mediante sus vectores componentes $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$. b) El vector componente *y* $\vec{\mathbf{A}}_y$ se puede mover hacia la derecha de modo que se sume a $\vec{\mathbf{A}}_x$. La suma vectorial de los vectores componentes es $\vec{\mathbf{A}}$. Estos tres vectores forman un triángulo rectángulo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.2

Vectores componentes con componentes

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$ son los *vectores componentes* de $\vec{\mathbf{A}}$. No debe confundirlos con las cantidades A_x y A_y, que siempre se referirán como las *componentes* de $\vec{\mathbf{A}}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.3

Componentes *x* y *y*

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 asocian el coseno del ángulo con la componente *x* y el seno del ángulo con la componente *y*. Tal asociación es verdadera *sólo* porque el ángulo θ se midió respecto del eje *x*, así que no memorice estas ecuaciones. Si θ se mide en relación con el eje *y* (como en algunos problemas), estas ecuaciones serán incorrectas. Piense acerca de cuál lado del triángulo, que contiene las componentes, es adyacente al ángulo y cuál lado es opuesto y luego asigne el coseno y el seno en concordancia.

	y	
A_x negativo A_y positivo		A_x positivo A_y positivo
A_x negativo A_y negativo		A_x positivo A_y negativo

Figura 3.13 Los signos de las componentes de un vector dependen del cuadrante en el que se ubica el vector.

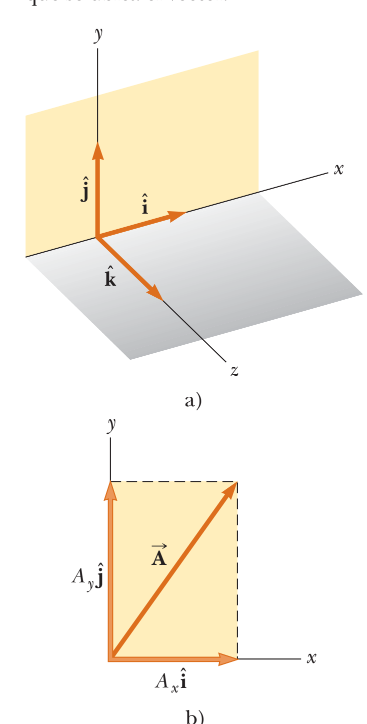


Figura 3.14 a) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ se dirigen a lo largo de los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente. b) El vector $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$ que se encuentra en el plano *xy* tiene componentes A_x y A_y.

Las magnitudes de estas componentes son las longitudes de los dos lados de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de longitud *A*. Debido a esto, la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$ se relacionan con sus componentes mediante las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \qquad \textbf{(3.11)}$$

Observe que **los signos de las componentes A_x y A_y dependen del ángulo** θ. Por ejemplo, si $\theta = 120°$, A_x es negativa y A_y positiva. Si $\theta = 225°$, tanto A_x como A_y son negativas. La figura 3.13 resume los signos de las componentes cuando $\vec{\mathbf{A}}$ se encuentra en varios cuadrantes.

Cuando resuelva problemas, especifique un vector $\vec{\mathbf{A}}$ con sus componentes A_x y A_y o con su magnitud y dirección *A* y θ.

Suponga que trabaja un problema físico que requiere descomponer un vector en sus componentes. En muchas aplicaciones, es conveniente expresar las componentes en un sistema coordenado que tenga ejes que no sean horizontales ni verticales, pero que sean mutuamente perpendiculares. Por ejemplo, se considerará el movimiento de los objetos que se deslizan por planos inclinados. Para tales ejemplos, conviene orientar el eje *x* paralelo al plano y el eje *y* perpendicular al plano.

Pregunta rápida 3.4 Elija la respuesta correcta para hacer verdadera la oración: Una componente de un vector es a) siempre, b) nunca o c) a veces mayor que la magnitud del vector.

Vectores unitarios

Las cantidades vectoriales con frecuencia se expresan en términos de vectores unitarios. **Un vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1.** Los vectores unitarios se usan para especificar una dirección conocida y no tienen otro significado físico. Son útiles exclusivamente como una convención para describir una dirección en el espacio. Se usarán los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ para representar los vectores unitarios que apuntan en las direcciones *x*, *y* y *z* positivas, respectivamente. (Los "sombreros", o circunflejos, sobre los símbolos son una notación estándar para vectores unitarios.) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares en un sistema coordenado de mano derecha, como se muestra en la figura 3.14a. La magnitud de cada vector unitario es igual a 1; esto es, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$.

Considere un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano *xy*, como se muestra en la figura 3.14b. El producto de la componente A_x y el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es el vector componente $\vec{\mathbf{A}}_x = A_x\hat{\mathbf{i}}$, que se encuentra en el eje *x* y tiene magnitud $|A_x|$. Del mismo modo, $\vec{\mathbf{A}}_y = A_y\hat{\mathbf{j}}$ es el vector componente de magnitud $|A_y|$ que se encuentra en el eje *y*. Por tanto, la notación del vector unitario para el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.12)}$$

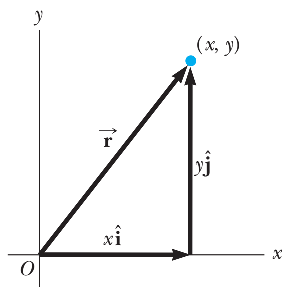


Figura 3.15 El punto cuyas coordenadas cartesianas son (*x*, *y*) se representa mediante el vector posición $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.

Por ejemplo, considere un punto que se encuentra en el plano *xy* y tiene coordenadas cartesianas (*x*, *y*), como en la figura 3.15. El punto se especifica mediante el **vector posición** $\vec{\mathbf{r}}$, que en forma de vector unitario está dado por

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Esta notación indica que las componentes de $\vec{\mathbf{r}}$ son las coordenadas *x* y *y*.

Ahora, ¿cómo usar las componentes para sumar vectores cuando el método gráfico no es suficientemente preciso? Suponga que quiere sumar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ al vector $\vec{\mathbf{A}}$ en la ecuación 3.12, donde el vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes B_x y B_y. Debido a la conveniencia contable de los vectores unitarios, todo lo que se hace es sumar las componentes *x* y *y* por separado. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x\,\hat{} + A_y\,\hat{}) + (B_x\,\hat{} + B_y\,\hat{})$$

o

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, se ve que las componentes del vector resultante son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \qquad \textbf{(3.15)}$$

La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y el ángulo que forma con el eje x de sus componentes se obtienen con las correspondencias

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \qquad \textbf{(3.16)}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \qquad \textbf{(3.17)}$$

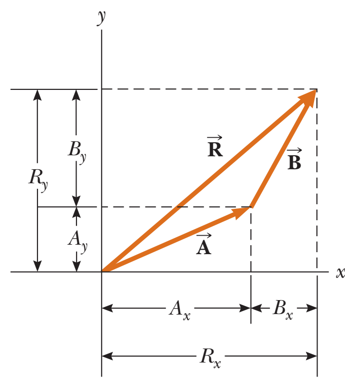


Figura 3.16 Esta construcción geométrica para la suma de dos vectores muestra la relación entre las componentes del resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y las componentes de los vectores individuales.

Esta suma por componentes se comprueba con una construcción geométrica similar a la que se muestra en la figura 3.16. Recuerde los signos de las componentes cuando use el método algebraico o el gráfico.

En ocasiones es necesario considerar situaciones que implican movimiento en tres componentes de dirección. La extensión de los métodos a vectores tridimensionales es directa. Si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen componentes x, y y z, se expresan en la forma

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(3.18)}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(3.19)}$$

La suma de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(3.20)}$$

Distinga la ecuación 3.20 de la ecuación 3.14: en la ecuación 3.20, el vector resultante también tiene una componente z, $R_z = A_z + B_z$. Si un vector $\vec{\mathbf{R}}$ tiene componentes x, y y z, la magnitud del vector es $R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}}$. El ángulo θ_x que $\vec{\mathbf{R}}$ forma con el eje x se encuentra de la expresión $\theta_x = R_x/R$, con expresiones similares para los ángulos respecto de los ejes y y z.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.4

Tangentes en calculadoras

La ecuación 3.17 involucra el cálculo de un ángulo mediante una función tangente. Por lo general, la función tangente inversa en las calculadoras proporciona un ángulo entre −90° y +90°. En consecuencia, si el vector que estudia se encuentra en el segundo o tercer cuadrantes, el ángulo medido desde el eje x positivo será el ángulo que dé su calculadora más 180°.

Pregunta rápida 3.5 ¿Para cuáles de los siguientes vectores la magnitud del vector es igual a una de las componentes del vector? a) $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$, b) $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{j}}$, c) $\vec{\mathbf{C}} = +5\hat{\mathbf{k}}$.

EJEMPLO 3.3 La suma de dos vectores

Encuentre la suma de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se encuentran en el plano xy y está dada por

$$\vec{\mathbf{A}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{B}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}$$

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede formar conceptos de la situación al dibujar los vectores en papel gráfico.

Categorizar Clasifique este ejemplo como un simple problema de sustitución. Al comparar esta expresión para $\vec{\mathbf{A}}$ con la expresión general $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$, es claro que $A_x = 2.0$ m y $A_y = 2.0$ m. Del mismo modo, $B_x = 2.0$ m y $B_y = -4.0$ m.

Aplique la ecuación 3.14 para obtener el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (2.0 + 2.0)\hat{\mathbf{i}}\text{ m} + (2.0 - 4.0)\hat{\mathbf{j}}\text{ m}$$

Evalúe los componentes de $\vec{\mathbf{R}}$:

$$R_x = 4.0\text{ m} \qquad R_y = -2.0\text{ m}$$

Aplique la ecuación 3.16 para encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0 \text{ m})^2 + (-2.0 \text{ m})^2} = \sqrt{20} \text{ m} = \boxed{4.5 \text{ m}}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ a partir de la ecuación 3.17:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0 \text{ m}}{4.0 \text{ m}} = -0.50$$

Es probable que su calculadora dé la respuesta $-27°$ para $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. Esta respuesta es correcta si se le interpreta como $27°$ en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x. La forma estándar es citar los ángulos medidos contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $+x$, y que el ángulo para este vector es $\theta = 333°$

EJEMPLO 3.4 El desplazamiento resultante

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 = (15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}})$ cm, $\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = (23\hat{\mathbf{i}} + 14\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}})$ cm y $\Delta\vec{\mathbf{r}}_3 = (-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}})$ cm. Encuentre las componentes del desplazamiento resultante y su magnitud.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque x es suficiente para ubicar un punto en una dimensión, es necesario un vector $\vec{\mathbf{r}}$ para ubicar un punto en dos o tres dimensiones. La notación $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es una generalización del desplazamiento unidimensional Δx en la ecuación 2.1. Los desplazamientos tridimensionales son más difíciles de conceptualizar que los de dos dimensiones, porque éstos se pueden dibujar en papel.

Para este problema, imagine que traza con su lápiz, en un papel gráfico en el que ya dibujó los ejes x y y, el origen. Mueva su lápiz 15 cm a la derecha a lo largo del eje x, luego 30 cm hacia arriba a lo largo del eje y y luego 12 cm en dirección *perpendicular hacia usted*. Este procedimiento proporciona el desplazamiento descrito por $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1$. Desde este punto, mueva su lápiz 23 cm a la derecha, paralelo al eje x, luego 14 cm paralelo al papel en la dirección $-y$ y luego 5.0 cm en dirección perpendicular, alejándose de usted, hacia el papel. Ahora está en el desplazamiento desde el origen descrito por $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2$. Desde este punto, mueva su lápiz 13 cm a la izquierda en la dirección $-x$ y (¡finalmente!) 15 cm paralelo al papel gráfico, a lo largo del eje y. Su posición final está a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3$ desde el origen.

Categorizar A pesar de la difícil conceptualización en tres dimensiones, se puede clasificar este problema como un problema de sustitución debido a los cuidadosos métodos contables desarrollados para vectores. La manipulación matemática sigue la pista de este movimiento a lo largo de tres ejes perpendiculares en una forma organizada y compacta, como se aprecia a continuación.

Para encontrar el desplazamiento resultante y los tres vectores:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{r}} &= \Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3 \\ &= (15 + 23 - 13)\hat{\mathbf{i}} \text{ cm} + (30 - 14 + 15)\hat{\mathbf{j}} \text{ cm} + (12 - 5.0 + 0)\hat{\mathbf{k}} \text{ cm} \\ &= (25\hat{\mathbf{i}} + 31\hat{\mathbf{j}} + 7.0\hat{\mathbf{k}}) \text{ cm}\end{aligned}$$

Encuentre la magnitud del vector resultante:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ &= \sqrt{(25 \text{ cm})^2 + (31 \text{ cm})^2 + (7.0 \text{ cm})^2} = \boxed{40 \text{ cm}}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.5 De paseo

Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25.0 km hacia el sureste desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40.0 km en una dirección 60.0° al noreste, punto en el que descubre una torre de guardabosque.

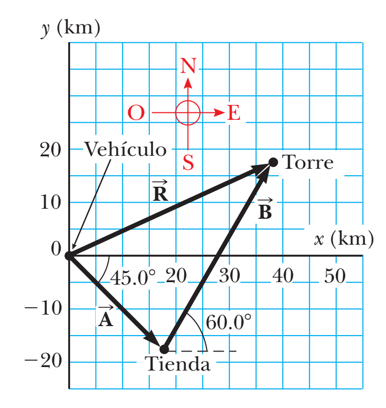


Figura 3.17 (Ejemplo 3.5) El desplazamiento total de la excursionista es el vector $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$.

A) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Forme conceptos del problema mediante el dibujo de un bosquejo como el de la figura 3.17. Si los vectores desplazamiento del primero y segundo días se denotan como $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, respectivamente, y se usa el vehículo como el origen de las coordenadas, se obtienen los vectores que se muestran en la figura 3.17.

Categorizar Al dibujar el resultante $\vec{\mathbf{R}}$, se clasifica este problema como uno que antes se resolvió: una suma de dos vectores. Ahora debe entender el poder de la categorización: muchos problemas nuevos son muy similares a problemas que ya se han resuelto, si se tiene cuidado al conceptualizarlos. Una vez dibujados los vectores desplazamiento y clasificado el problema, ya no se trata sólo de una excursionista, una caminata, un vehículo, una tienda o una torre. Es un problema acerca de suma vectorial, que ya ha resuelto.

Analizar El desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 25.0 km y se dirige 45.0° abajo del eje x positivo.

Encuentre las componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$A_x = A\cos(-45.0°) = (25.0 \text{ km})(0.707) = 17.7 \text{ km}$$

$$A_y = A\,\text{sen}(-45.0°) = (25.0 \text{ km})(-0.707) = -17.7 \text{ km}$$

El valor negativo de A_y indica que la excursionista camina en la dirección y negativa durante el primer día. Los signos de A_x y A_y también son evidentes en la figura 3.17.

Halle las componentes de $\vec{\mathbf{B}}$ con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0 \text{ km})(0.500) = 20.0 \text{ km}$$

$$B_y = B\,\text{sen}\,60.0° = (40.0 \text{ km})(0.866) = 34.6 \text{ km}$$

B) Determine las componentes del desplazamiento resultante de la excursionista $\vec{\mathbf{R}}$ para el viaje. Encuentre una expresión para $\vec{\mathbf{R}}$ en términos de vectores unitarios.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 3.15 para encontrar las componentes del desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7 \text{ km} + 20.0 \text{ km} = 37.7 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7 \text{ km} + 34.6 \text{ km} = 16.9 \text{ km}$$

Escriba el desplazamiento total en forma de vector unitario:

$$\vec{\mathbf{R}} = (37.7\hat{\mathbf{i}} + 16.9\hat{\mathbf{j}}) \text{ km}$$

Finalizar Al observar la representación gráfica de la figura 3.17, se estima que la posición de la torre es aproximadamente (38 km, 17 km), que es consistente con las componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ en el resultado de la posición final de la excursionista. Además, ambas componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ son positivas, lo que coloca la posición final en el primer cuadrante del sistema coordenado, lo que también es consistente con la figura 3.17.

¿Qué pasaría si? Después de llegar a la torre, la excursionista quiere regresar a su vehículo a lo largo de una sola línea recta. ¿Cuáles son las componentes del vector que representa esta caminata? ¿Cuál debe ser la dirección de la caminata?

Respuesta El vector deseado $\vec{\mathbf{R}}_{\text{vehículo}}$ es el negativo del vector $\vec{\mathbf{R}}$:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{vehículo}} = -\vec{\mathbf{R}} = (-37.7\hat{\mathbf{i}} - 16.9\hat{\mathbf{j}}) \text{ km}$$

La dirección se encuentra al calcular el ángulo que el vector forma con el eje x:

$$\tan\theta = \frac{R_{\text{vehículo},y}}{R_{\text{vehículo},x}} = \frac{-16.9 \text{ km}}{-37.7 \text{ km}} = 0.448$$

que da un ángulo de $\theta = 204.1°$, o 24.1° al suroeste.

Resumen

DEFINICIONES

Las **cantidades escalares** son las que sólo tienen un valor numérico y no tienen dirección asociada. Las **cantidades vectoriales** tienen tanto magnitud como dirección y obedecen las leyes de la suma vectorial. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Cuando se suman dos o más vectores, deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. Se pueden sumar gráficamente dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En este método (figura 3.6), el vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ corre del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

Un segundo método de suma de vectores involucra las **componentes** de los vectores. La componente x A_x del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es igual a la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje x de un sistema coordenado, donde $A_x = A\cos\theta$. La componente y A_y de $\vec{\mathbf{A}}$ es la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje y, donde $A_y = A\,\text{sen}\,\theta$.

Si un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una componente x A_x y una componente y A_y, el vector se expresa en forma de vector unitario como $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$. En esta notación, $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva y $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Puesto que $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$.

El resultante de dos o más vectores se encuentra al descomponer todos los vectores en sus componentes x y y, sumar sus componentes resultantes x y y, y luego usar el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud del vector resultante. Se puede encontrar el ángulo que forma el vector resultante respecto del eje x al usar una función trigonométrica adecuada.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Sí o no: ¿Cada una de las siguientes cantidades es un vector? a) fuerza, b) temperatura, c) el volumen de agua en una lata, d) las calificaciones de un programa de televisión, e) la altura de un edificio, f) la velocidad de un automóvil deportivo, g) la edad del Universo.
2. Un libro se mueve una vez alrededor del perímetro de una mesa con dimensiones 1.0 m × 2.0 m. Si el libro termina en su posición inicial, ¿cuál es su desplazamiento? ¿Cuál es la distancia recorrida?
3. **O** La figura P3.3 muestra dos vectores, $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$. ¿Cuál de las posibilidades de la a) a la d) es el vector $\vec{\mathbf{D}}_2 - 2\vec{\mathbf{D}}_1$, o e) no es ninguna de ellas?

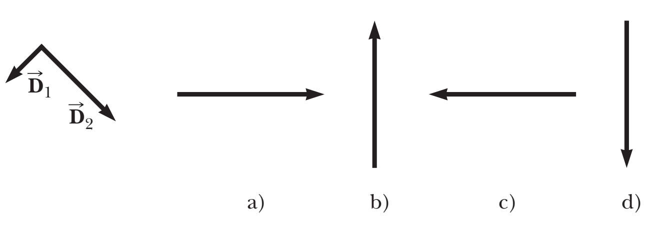
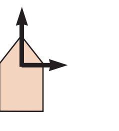
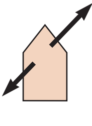
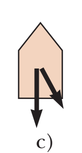
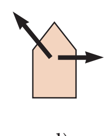
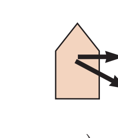


Figura P3.3

4. **O** La herramienta de corte en un torno está dada por dos desplazamientos, uno de 4 cm de magnitud y otro de 3 cm de magnitud, en cada una de las cinco situaciones de la a) a la e), diagramadas en la figura P3.4. Ordene estas situaciones de acuerdo con la magnitud del desplazamiento total de la herramienta, poniendo primero la situación con la mayor magnitud resultante. Si el desplazamiento total es del mismo tamaño en dos situaciones, dé a dichas letras igual disposición.

a) b) c) d) e)

Figura P3.4

5. **O** Sea $\vec{\mathbf{A}}$ la representación de un vector velocidad que apunta desde el origen en el segundo cuadrante. a) ¿Su componente x es positiva, negativa o cero? b) ¿Su componente y es positiva, negativa o cero? Sea $\vec{\mathbf{B}}$ la representación de un vector veloci-

dad que apunta desde el origen en el cuarto cuadrante. c) ¿Su componente x es positiva, negativa o cero? d) ¿Su componente y es positiva, negativa o cero? e) Considere el vector $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. ¿Qué concluye acerca de los cuadrantes en los que puede o no estar? f) Ahora considere el vector $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$. ¿Qué concluye acerca de los cuadrantes en los que puede o no estar?

6. **O i)** ¿Cuál es la magnitud del vector $(10\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{k}})$ m/s) a) 0, b) 10 m/s, c) −10 m/s, d) 10, e) −10, f) 14.1 m/s, g) indefinido. **ii)** ¿Cuál es la componente y de este vector? (Elija de entre las mismas respuestas.)

7. **O** Un submarino se sumerge desde la superficie del agua en un ángulo de 30° bajo la horizontal, siguiendo una trayectoria recta de 50 m de largo. ¿Por tanto, a qué distancia está el submarino de la superficie del agua? a) 50 m, b) sen 30°, c) cos 30°, d) tan 30°, e) (50 m)/sen 30°, f) (50 m)/cos 30°, g) (50 m)/tan 30°, h) (50 m) sen 30°, i) (50 m)cos 30°, j) (50 m)tan 30°, k) (sen 30°)/50 m, l) (cos 30°)/50 m, m) (tan 30°)/50 m, n) 30 m, o) 0, p) ninguna de estas respuestas.

8. **O i)** ¿Cuál es la componente x del vector que se muestra en la figura P3.8? a) 1 cm, b) 2 cm, c) 3 cm, d) 4 cm, e) 6 cm, f) −1 cm, g) −2 cm, h) −3 cm, i) −4 cm, j) −6 cm, k) ninguna de estas respuestas. **ii)** ¿Cuál es la componente y de este vector? (Elija de entre las mismas respuestas.)

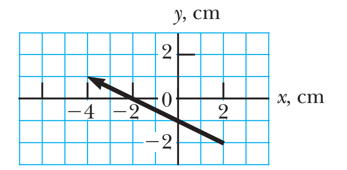


Figura P3.8

9. **O** El vector $\vec{\mathbf{A}}$ se encuentra en el plano xy. **i)** ¿Sus dos componentes serán negativas si se encuentra en cuál(es) cuadrante(s)? elija todo lo que aplique. a) el primer cuadrante, b) el segundo cuadrante, c) el tercer cuadrante, d) el cuarto cuadrante. **ii)** ¿Hacia qué orientación sus componentes tendrán signos opuestos? Elija de entre las mismas posibilidades.

10. Si el componente del vector $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de la dirección del vector $\vec{\mathbf{B}}$ es cero, ¿qué puede concluir acerca de los dos vectores?

11. ¿La magnitud de un vector puede tener un valor negativo? Explique.

12. ¿Es posible sumar una cantidad vectorial a una cantidad escalar? Explique.

Problemas

Sección 3.1 Sistemas coordenados

1. Las coordenadas polares de un punto son $r = 5.50$ m y $\theta = 240°$. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

2. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares (2.50 m, 30.0°) y (3.80 m, 120.0°). Determine a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y b) la distancia entre ellos.

3. Una mosca aterriza en la pared de una habitación. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema coordenado cartesiano bidimensional. Si la mosca se ubica en el punto que tiene coordenadas (2.00, 1.00) m, a) ¿A qué distancia está de la esquina de la habitación? b) ¿Cuál es su posición en coordenadas polares?

4. Las coordenadas rectangulares de un punto están dadas por $(2, y)$, y sus coordenadas polares son $(r, 30°)$. Determine y y r.

5. Sean (r, θ) las coordenadas polares del punto (x, y). Determine las coordenadas polares para los puntos a) $(-x, y)$, b) $(-2x, -2y)$ y c) $(3x, -3y)$.

Sección 3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Sección 3.3 Algunas propiedades de los vectores

6. Un avión vuela desde el campo base al lago A, a 280 km de distancia en la dirección 20.0° al noreste. Después de soltar suministros vuela al lago B, que está a 190 km a 30.0° al noroeste del lago A. Determine gráficamente la distancia y dirección desde el lago B al campo base.

7. Una topógrafa mide la distancia a través de un río recto con el siguiente método: partiendo directamente a través de un árbol en la orilla opuesta, camina 100 m a lo largo del margen del río para establecer una línea base. Luego observa hacia el árbol. El ángulo de su línea base al árbol es de 35.0°. ¿Qué tan ancho es el río?

8. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ de 6.00 unidades de magnitud actúa sobre un objeto en el origen en una dirección 30.0° sobre el eje x positivo. Una segunda fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ de 5.00 unidades de magnitud actúa sobre el objeto en la dirección del eje y positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$.

9. Un patinador se desliza a lo largo de una trayectoria circular de 5.00 m de radio. Si realiza medio círculo, encuentre a) la magnitud del vector desplazamiento y b) que distancia ha patinado. c) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento si patina alrededor de todo el círculo?

10. Defina arbitrariamente el "vector instantáneo altura" de una persona como el vector desplazamiento desde el punto medio entre sus pies y lo alto de su cabeza. Realice una estimación del orden de magnitud del vector total altura de todas las personas en una ciudad de 100 000 habitantes a) a las 10 en punto de la mañana del martes y b) a las 5 en punto de la mañana del sábado. Explique sus razonamientos.

11. Cada uno de los vectores desplazamientos $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se muestran en la figura P3.11 tiene una magnitud de 3.00 m. Encuentre gráficamente a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, b) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, c) $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$ y d) $\vec{\mathbf{A}} - 2\vec{\mathbf{B}}$. Reporte todos los ángulos en sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.

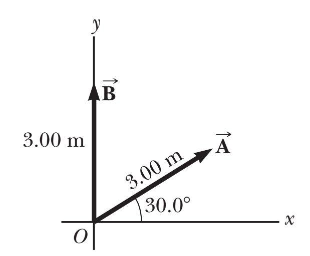


Figura P3.11 Problemas 11 y 32.

12. ● Tres desplazamientos son $\vec{\mathbf{A}}$ = 200 m al sur, $\vec{\mathbf{B}}$ = 250 m al oeste y $\vec{\mathbf{C}}$ = 150 m a 30.0° al noreste. Construya un diagrama separado para cada una de las siguientes posibles formas de sumar estos vectores: $\vec{\mathbf{R}}_1 = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$; $\vec{\mathbf{R}}_2 = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{A}}$; $\vec{\mathbf{R}}_3 = \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$. Explique qué puede concluir al comparar los diagramas.

13. Un carro de montaña rusa se mueve 200 pies horizontalmente y luego se eleva 135 pies a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. A continuación viaja 135 pies a un ángulo de 40.0° hacia abajo. ¿Cuál es su desplazamiento desde su punto de partida? Use técnicas gráficas.

14. ● Un comprador que empuja un carrito a lo largo de una tienda se mueve 40.0 m por un pasillo, luego da una vuelta de 90.0° y se mueve 15.0 m. Luego da otra vuelta de 90.0° y se mueve 20.0 m. a) ¿A qué distancia está el comprador de su posición original? b) ¿Qué ángulo forma su desplazamiento total con su dirección original? Advierta que no se especificó si el comprador da vuelta a derecha o izquierda. Explique cuántas respuestas son posibles para los incisos a) y b) y dé las posibles respuestas.

Sección 3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

15. Un vector tiene una componente *x* de −25.0 unidades y otra componente *y* de 40.0 unidades. Encuentre la magnitud y dirección de este vector.

16. Una persona camina 25.0° al noreste durante 3.10 km. ¿Qué distancia tendría que caminar hacia el norte y hacia el este para llegar a la misma posición?

17. ● Una minivan viaja recto al norte en el carril derecho de una autopista a 28.0 m/s. Un camper pasa a la minivan y luego cambia del carril izquierdo al derecho. Mientras lo hace, la trayectoria del camper sobre el camino es un desplazamiento recto a 8.50° al noreste. Para evitar chocar con la minivan, la distancia norte–sur entre la defensa trasera del camper y la defensa delantera de la minivan no deben disminuir. ¿El camper puede conducirse para satisfacer este requisito? Explique su respuesta.

18. Una chica que entrega periódicos cubre su ruta al viajar 3.00 cuadras al oeste, 4.00 cuadras al norte y luego 6.00 cuadras al este. a) ¿Cuál es su desplazamiento resultante? b) ¿Cuál es la distancia total que recorre?

19. Obtenga expresiones en forma de componentes para los vectores de posición que tienen las siguientes coordenadas polares: a) 12.8 m, 150°, b) 3.30 cm, 60.0°, c) 22.0 pulg, 215°.

20. Un vector desplazamiento que se encuentra en el plano *xy* tiene una magnitud de 50.0 m y se dirige en un ángulo de 120° al eje *x* positivo. ¿Cuáles son las componentes rectangulares de este vector?

21. Mientras explora una cueva, un espeleólogo comienza en la entrada y se mueve las siguientes distancias. Va 75.0 m al norte, 250 m al este, 125 m a un ángulo de 30.0° al noreste y 150 m al sur. Encuentre su desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

22. Un mapa sugiere que Atlanta está a 730 millas en una dirección de 5.00° al noreste desde Dallas. El mismo mapa muestra que Chicago está a 560 millas en una dirección de 21.0° al noroeste desde Atlanta. Represente la Tierra como plana y use esta información para encontrar el desplazamiento de Dallas a Chicago.

23. Un hombre que empuja una podadora por el suelo hace que experimente dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120° con el eje *x* positivo. El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35.0° con el eje *x* positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

24. Dados los vectores $\vec{\mathbf{A}} = 2.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}}$, a) dibuje la suma vectorial $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y la diferencia vectorial $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. b) Calcule $\vec{\mathbf{C}}$ y $\vec{\mathbf{D}}$, primero en términos de vectores unitarios y luego en términos de coordenadas polares, con ángulos medidos respecto del eje $+x$.

25. Considere los dos vectores $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$. Calcule a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, b) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, c) $|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}|$, d) $|\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}|$, y e) las direcciones de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$.

26. Una pendiente de esquiar cubierta de nieve forma un ángulo de 35.0° con la horizontal. Cuando un esquiador cae a plomo por la colina, una porción de nieve salpicada se proyecta a una posición máxima de 5.00 m a 20.0° de la vertical en dirección arriba de la colina, como se muestra en la figura P3.26. Encuentre las componentes de su posición máxima a) paralela a la superficie y b) perpendicular a la superficie.

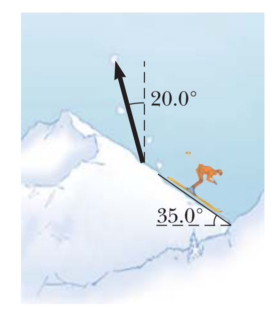


Figura P3.26

27. Una partícula se somete a los siguientes desplazamientos consecutivos: 3.50 m al sur, 8.20 m al noreste y 15.0 m al oeste. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

28. En un juego de futbol americano, un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpeo, corre hacia atrás una distancia de 10.0 yardas y luego corre de manera lateral paralelo a la línea de golpeo 15.0 yardas. En este punto, lanza un pase recto hacia adelante 50.0 yardas perpendicular a la línea de golpeo. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón?

29. Un golfista novato necesita tres golpes para meter la bola. Los desplazamientos sucesivos de la bola son: 4.00 m al norte,

2.00 m al noreste y 1.00 m a 30.0° al suroeste. Si parte del mismo punto inicial, ¿cuál sería el desplazamiento más sencillo que un golfista experto necesitaría para hacer el hoyo?

30. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes *x* y *y* de −8.70 cm y 15.0 cm, respectivamente; el vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes *x* y *y* de 13.2 cm y −6.60 cm, respectivamente. Si $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + 3\vec{\mathbf{C}} = 0$, ¿cuáles son las componentes de $\vec{\mathbf{C}}$?

31. La vista desde el helicóptero en la figura P3.31 muestra a dos personas jalando una mula terca. Encuentre a) la fuerza única que es equivalente a las dos fuerzas que se muestran y b) la fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para hacer la fuerza resultante igual a cero. Las fuerzas se miden en unidades de newtons (representada por N).

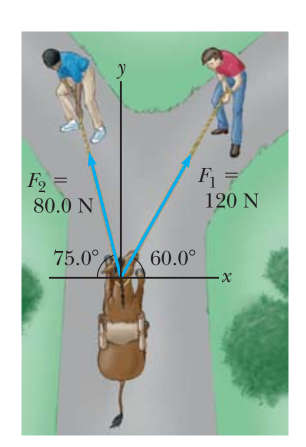


Figura P3.31

32. Use el método de componentes para sumar los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se muestran en la figura P3.11. Exprese la resultante $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ en notación de vector unitario.

33. El vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes *x*, *y* y *z* de 4.00, 6.00 y 3.00 unidades, respectivamente. Calcule la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y los ángulos que $\vec{\mathbf{B}}$ forma con los ejes coordenados.

34. Considere los tres vectores desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})$ m, $\vec{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$ m y $\vec{\mathbf{C}} = (-2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})$ m. Use el método de componentes para determinar a) la magnitud y dirección del vector $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$ y b) la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$.

35. Dados los vectores desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ m y $\vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}})$ m, encuentre las magnitudes de los vectores a) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y b) $\vec{\mathbf{D}} = 2\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, y también exprese cada uno en términos de sus componentes rectangulares.

36. En la operación de ensamblado que se ilustra en la figura P3.36, un robot primero mueve un objeto en recta hacia arriba con esto también al este, alrededor de un arco que forma un cuarto de círculo de 4.80 cm de radio que se encuentra en un plano vertical este–oeste. Luego el robot mueve el objeto hacia arriba y al norte, a través de un cuarto de círculo de 3.70 cm de radio que se encuentra en un plano vertical norte–sur. Encuentre a) la magnitud del desplazamiento total del objeto y b) el ángulo que el desplazamiento total forma con la vertical.

37. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes *x*, *y* y *z* de 8.00, 12.0 y −4.00 unidades, respectivamente. a) Escriba una expresión vectorial para $\vec{\mathbf{A}}$ en notación de vector unitario. b) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector $\vec{\mathbf{B}}$ de un cuarto de longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ que apunte en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$. c) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector $\vec{\mathbf{C}}$ tres veces la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ que apunte en la dirección opuesta a la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$.

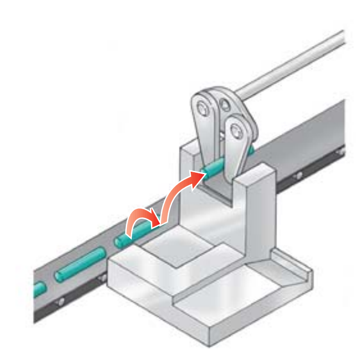


Figura P3.36

38. Usted está de pie sobre el suelo en el origen de un sistema coordenado. Un avión vuela sobre usted con velocidad constante paralela al eje *x* y a una altura fija de 7.60×10^3 m. En el tiempo $t = 0$ el avión está directamente arriba de usted de modo que el vector que va de usted a él es $\vec{\mathbf{P}}_0 = (7.60 \times 10^3 \text{ m})\,\hat{\mathbf{j}}$. En $t = 30.0$ s, el vector de posición que va de usted al avión es $\vec{\mathbf{P}}_{30} = (8.04 \times 10^3 \text{ m})\,\hat{\mathbf{i}} + (7.60 \times 10^3 \text{ m})\,\hat{\mathbf{j}}$. Determine la magnitud y orientación del vector de posición del avión en $t = 45.0$ s.

39. Una estación de radar ubica un barco hundido en un intervalo de 17.3 km y orientación 136° en sentido de las manecillas del reloj desde el norte. Desde la misma estación, un avión de rescate está en un intervalo horizontal de 19.6 km, 153° en sentido de las manecillas del reloj desde el norte, con elevación de 2.20 km. a) Escriba el vector de posición para el barco en relación con el avión, con $\hat{\mathbf{i}}$ que representa el este, $\hat{\mathbf{j}}$ el norte y $\hat{\mathbf{k}}$ hacia arriba. b) ¿Qué tan separados están el avión y el barco?

40. a) El vector $\vec{\mathbf{E}}$ tiene 17.0 cm de magnitud y se dirige 27.0° contra las manecillas el reloj desde el eje +*x*. Expréselo en notación de vectores unitarios. b) El vector $\vec{\mathbf{F}}$ tiene 17.0 cm de magnitud y se dirige 27.0° contra las manecillas del reloj desde el eje +*y*. Expréselo en notación de vectores unitarios. c) El vector $\vec{\mathbf{G}}$ tiene 17.0 cm de magnitud y se dirige 27.0° en sentido de las manecillas del reloj desde el eje −*y*. Expréselo en notación de vectores unitarios.

41. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene un componente *x* negativo de 3.00 unidades de longitud y un componente *y* positivo de 2.00 unidades de longitud. a) Determine una expresión para $\vec{\mathbf{A}}$ en notación de vectores unitarios. b) Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{A}}$. c) ¿Qué vector $\vec{\mathbf{B}}$, cuando se suma a $\vec{\mathbf{A}}$, da un vector resultante sin componente *x* y una componente *y* negativa de 4.00 unidades de longitud?

42. Conforme pasa sobre la isla Gran Bahamas, el ojo de un huracán se mueve en una dirección 60.0° al noroeste con una rapidez de 41.0 km/h. Tres horas después el curso del huracán cambia súbitamente al norte y su rapidez baja a 25.0 km/h. ¿A qué distancia de Gran Bahamas está el ojo 4.50 h después de que pasa sobre la isla?

43. En la figura P3.43 se muestran tres vectores desplazamiento de una pelota de croquet, donde $|\vec{\mathbf{A}}| = 20.0$ unidades, $|\vec{\mathbf{B}}| = 40.0$ unidades y $|\vec{\mathbf{C}}| = 30.0$ unidades. Encuentre a) el resultante en

notación de vectores unitarios y b) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante.

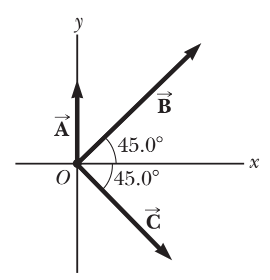


Figura P3.43

44. ● a) Con $\vec{A} = (6.00\hat{i} - 8.00\hat{j})$ unidades, $\vec{B} = (-8.00\hat{i} + 3.00\hat{j})$ unidades y $\vec{C} = (26.0\hat{i} + 19.0\hat{j})$ unidades, determine a y b tal que $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C}$. b) Un estudiante aprendió que una sola ecuación no se puede resolver para determinar valores para más de una incógnita en ella. ¿Cómo podría explicarle que tanto a como b se pueden determinar a partir de la ecuación que se usó en el inciso a)?

45. ● *¿Todavía está ahí?* En la figura P3.45, el segmento de línea representa una trayectoria desde el punto con vector de posición $(5\hat{i} + 3\hat{j})$ m al punto con posición $(16\hat{i} + 12\hat{j})$ m. El punto A está en dicha trayectoria, a una fracción f del camino hacia el destino. a) Encuentre el vector de posición del punto A en términos de f. b) Evalúe la expresión del inciso a) en el caso $f = 0$. Explique si el resultado es razonable. c) Evalúe la expresión para $f = 1$. Explique si el resultado es razonable.

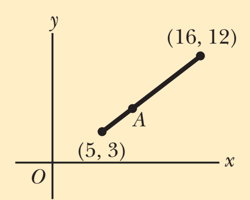


Figura P3.45 El punto A está a una fracción f de la distancia desde el punto inicial (5, 3) al punto final (16, 12).

Problemas adicionales

46. El 1 de diciembre de 1955, Rosa Parks (1913–2005), un icono del inicio del movimiento de los derechos civiles, permaneció sentada en su asiento de autobús cuando un hombre blanco la demandó. La policía de Montgomery, Alabama, la arrestó. El 5 de diciembre, los afroamericanos comenzaron a rechazar el uso de todos los autobuses de la ciudad. Bajo el liderazgo de la Montgomery Improvement Association, surgió de inmediato un eficiente sistema de transporte alternativo, proporcionado por afroamericanos con aproximadamente 35 000 viajes por día mediante voluntarios, taxis privados, uso compartido del automóvil y de viajes. Los autobuses permanecieron vacíos hasta que se integraron bajo orden de la corte del 21 de diciembre de 1956. Al recoger a sus pasajeros, suponga que un conductor en el centro de Montgomery pasa por cuatro desplazamientos sucesivos representados por la expresión

$$(-6.30\text{b})\hat{i} - (4.00\text{b} \cos 40°)\hat{i} - (4.00\text{b} \text{ sen } 40°)\hat{j}$$
$$+ (3.00\text{b} \cos 50°)\hat{i} - (3.00\text{b} \text{ sen } 50°)\hat{j} - (5.00\text{b})\hat{j}$$

Aquí b representa una cuadra de la ciudad, una conveniente unidad de distancia de tamaño uniforme; $\hat{i}$ es este y $\hat{j}$ es norte. a) Dibuje un mapa de los desplazamientos sucesivos. b) ¿Qué distancia total recorrió? c) Calcule la magnitud y dirección de su desplazamiento total. La estructura lógica de este problema y de muchos problemas en capítulos posteriores la sugirieron Alan van Heuvelen y David Maloney, *American Journal of Physics*, **67**(3) pp. 252–256, marzo de 1999.

47. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ sea 100 veces mayor que la magnitud de $\vec{A} - \vec{B}$, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

48. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ sea mayor que la magnitud de $\vec{A} - \vec{B}$ por el factor n, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

49. Un controlador de tráfico aéreo observa dos aeronaves en la pantalla de su radar. La primera está a una altitud de 800 m, 19.2 km de distancia horizontal y 25.0° al suroeste. La segunda está a una altitud de 1 100 m, 17.6 km de distancia horizontal y 20.0° al suroeste. ¿Cuál es la distancia entre las dos aeronaves? (Coloque el eje x al oeste, el eje y al sur y el eje z vertical.)

50. El animal de peluche más grande del mundo es una víbora de 420 m de largo, construida por niños noruegos. Suponga que la víbora se encuentra en un parque, como se muestra en la figura P3.50, y forma dos lados rectos de un ángulo de 105°, con un lado de 240 m de largo. Olaf e Inge corren una competencia que inventan. Inge corre directamente desde la cola de la víbora a su cabeza, y Olaf parte del mismo lugar en el mismo momento pero corre a lo largo de la víbora. Si ambos niños corren uniformemente a 12.0 km/h, ¿cuánto tiempo antes que Olaf, Inge llega a la cabeza de la víbora?



Figura P3.50

51. Un barco transbordador lleva turistas entre tres islas. Navega de la primera isla a la segunda isla, a 4.76 km de distancia, en una dirección 37.0° al noreste. Luego navega de la segunda isla a la tercera en una dirección de 69.0° al noroeste. Por último, regresa a la primera isla y navega en una dirección 28.0° al sureste. Calcule la distancia entre a) la segunda y tercera islas y b) la primera y tercera islas.

52. Un vector está dado por $\vec{R} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. Encuentre a) las magnitudes de los componentes x, y y z, b) la magnitud de $\vec{R}$ y c) los ángulos entre $\vec{R}$ y los ejes x, y y z.

53. Un avión jet, que al inicio se mueve a 300 mi/h al este, súbitamente entra a una región donde el viento sopla a 100 mi/h hacia la dirección de 30.0° al noreste. ¿Cuáles son la nueva rapidez y dirección del avión en relación con el nivel de la tierra?

54. ● Sea $\vec{A}$ = 60.0 cm a 270° medido desde la horizontal. Sea $\vec{B}$ = 80.0 cm a cierto ángulo θ. a) Encuentre la magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ como función de θ. b) De la respuesta del inciso a), ¿para qué valor de θ $\vec{A} + \vec{B}$ toma su valor máximo? ¿Cuál es dicho valor máximo? c) A partir de la respuesta del inciso a), ¿para qué valor de θ $|\vec{A}| + |\vec{B}|$ toma su valor mínimo? ¿Cuál es

este valor mínimo? d) Sin referencia a la respuesta del inciso a), argumente si las respuestas a los incisos b) y c) tienen o no sentido.

55. Después de que una pelota rueda por el borde de una mesa horizontal en el tiempo $t = 0$, su velocidad como función del tiempo se conoce por

$$\vec{\mathbf{v}} = 1.2\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s} - 9.8t\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

El desplazamiento de la bola al caer del borde de la mesa, mientras el intervalo de tiempo de 0.380 s durante el cual está en vuelo, se proporciona por

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{0.380 \text{ s}} \vec{\mathbf{v}}\, dt$$

Para realizar la integral, puede usar el teorema del cálculo

$$\int (A + Bf(x))\, dx = \int A\, dx + B\int f(x)\, dx$$

Considere las unidades y los vectores unitarios como constantes, representados por A y B. Haga la integración para calcular el desplazamiento de la pelota.

56. ● Encuentre la suma de estas cuatro fuerzas vectoriales: 12.0 N a la derecha a 35.0° sobre la horizontal, 31.0 N a la izquierda a 55.0° arriba de la horizontal, 8.40 N a la izquierda a 35.0° abajo de la horizontal y 24.0 N a la derecha a 55.0° abajo de la horizontal. Siga estos pasos. Como guía haga un bosquejo de esta situación, explique cómo puede simplificar los cálculos al realizar una elección particular para las direcciones de los ejes x y y. ¿Cuál es su elección? Después sume los vectores por el método de componentes.

57. Una persona que sale a caminar sigue la trayectoria que se muestra en la figura P3.57. El viaje total consiste en cuatro trayectorias en línea recta. Al final de la caminata, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona, medido desde el punto de partida?

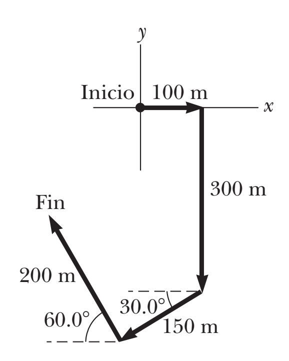


Figura P3.57

58. ● La posición instantánea de un objeto se especifica por su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ dirigido desde un origen fijo a la posición del objeto, representado como partícula. Suponga para cierto objeto que el vector de posición es una función de tiempo dado por $\vec{\mathbf{r}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2t\hat{\mathbf{k}}$, donde r está en metros y t en segundos. Evalúe $d\mathbf{r}/dt$. ¿Qué representa respecto al objeto?

59. ● Long John Silver, un pirata, enterró su tesoro en una isla con cinco árboles, ubicados en los puntos (30.0 m, −20.0 m), (60.0 m, 80.0 m), (−10 m, −10 m), (40.0 m, −30.0 m) y (−70.0 m, 60.0 m), todos medidos en relación con algún origen, como se muestra en la figura P3.59. La bitácora del barco indica comenzar en el árbol A y moverse hacia el árbol B, pero sólo cubrir la mitad de la distancia entre A y B. Luego moverse hacia el árbol C, cubrir un tercio de la distancia entre su ubicación actual y C. A continuación debe moverse hacia el árbol D y cubrir un cuarto de la distancia entre donde está y D. Por último, moverse hacia el árbol E y cubrir un quinto de la distancia entre usted y E, detenerse y cavar. a) Suponga que determinó correctamente el orden en que el pirata etiquetó los árboles como A, B, C, D y E, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde está enterrado su tesoro? b) **¿Qué pasaría si?,** ¿Y si no sabe la forma en que el pirata marcó los árboles? ¿Qué ocurriría con la respuesta si reordena los árboles, por ejemplo a B(30 m, −20 m), A(60 m, 80 m), E(−10 m, −10 m), C(40 m, −30 m) y D(−70 m, 60 m)? Establezca su razonamiento para mostrar que la respuesta no depende del orden en el que los árboles se marcaron.

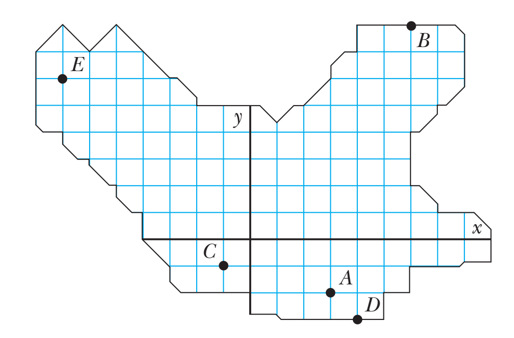


Figura P3.59

60. ● Considere un juego en el que N niños se colocan a distancias iguales alrededor de un círculo. En el centro del círculo hay una llanta de hule. Cada niño sostiene una cuerda unida a la llanta y, a una señal, jalan su cuerda. Todos los niños ejercen fuerzas de la misma magnitud F. En el caso $N = 2$, es fácil ver que la fuerza neta sobre la llanta será cero porque los dos vectores fuerza dirigidos en sentidos opuestos suman cero. De igual modo, si $N = 4$, 6 o cualquier entero par, la fuerza resultante sobre la llanta debe ser cero porque las fuerzas ejercidas por cada par de niños ubicados en posiciones opuestas se cancelarán. Cuando alrededor del círculo hay un número impar de niños, no es tan obvio si la fuerza total sobre la llanta central será cero. a) Calcule la fuerza neta sobre la llanta en el caso $N = 3$ al sumar las componentes de los tres vectores fuerza. Elija el eje x sobre una de las cuerdas. b) **¿Qué pasaría si?** Establezca el razonamiento que determinará la fuerza neta para el caso general donde N es cualquier entero, par o impar, mayor que uno. Proceda del modo siguiente. Suponga que la fuerza total no es cero. Luego debe apuntar en alguna dirección particular. Haga que cada niño se mueva una posición en sentido de las manecillas del reloj. Dé una razón de que la fuerza total debe tener una dirección girada en sentido de las manecillas del reloj por $360°/N$. No obstante argumente que la fuerza total debe ser la misma que antes. Explique qué prueba la contradicción acerca de la magnitud de la fuerza. Este problema ilustra una técnica muy útil de probar un resultado "por simetría", al usar un poco de matemáticas de *teoría de grupos*. La situación particular en realidad se encuentra en física y química cuando

un arreglo de cargas eléctricas (iones) ejerce fuerzas eléctricas sobre un átomo en una posición central en una molécula o en un cristal.

61. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen iguales magnitudes de 5.00. La suma de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es el vector $6.00\,\hat{\mathbf{j}}$. Determine el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

62. Un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a, b y c como se muestra en la figura P3.62. a) Obtenga una expresión vectorial para el vector de la cara diagonal $\vec{\mathbf{R}}_1$. ¿Cuál es la magnitud de este vector? b) Obtenga una expresión vectorial para el vector de cuerpo diagonal $\vec{\mathbf{R}}_2$. Advierta que $\vec{\mathbf{R}}_1$, $c\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{R}}_2$ forman un triángulo rectángulo. Pruebe que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}_2$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

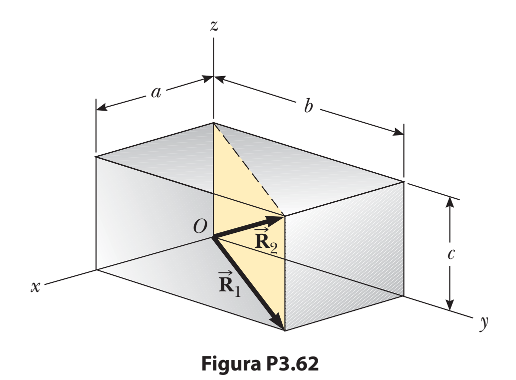


Figura P3.62

Respuestas a preguntas rápidas

3.1 Escalares: a), d), e). Ninguna de estas cantidades tiene una dirección. Vectores: b), c). Para estas cantidades, es necesaria la dirección para especificar completamente la cantidad.

3.2 c). El resultante tiene su magnitud máxima $A + B = 12 + 8 = 20$ unidades cuando el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se orienta en la misma dirección que el vector $\vec{\mathbf{B}}$. El vector resultante tiene su magnitud mínima $A - B = 12 - 8 = 4$ unidades cuando el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se orienta en la dirección opuesta al vector $\vec{\mathbf{B}}$.

3.3 b) y c). Para que sumen cero, los vectores deben apuntar en direcciones opuestas y tener la misma magnitud.

3.4 b). Del teorema de Pitágoras, la magnitud de un vector siempre es mayor que el valor absoluto de cada componente, a menos que sólo haya un componente distinto de cero, en cuyo caso la magnitud del vector es igual al valor absoluto de dicho componente.

3.5 c). La magnitud de $\vec{\mathbf{C}}$ es 5 unidades, la misma que la componente z. La respuesta b) no es correcta porque la magnitud de cualquier vector siempre es un número positivo, mientras que la componente y de $\vec{\mathbf{B}}$ es negativa.



Expulsión de lava de una erupción volcánica. Advierta las trayectorias parabólicas de las brasas proyectadas al aire. Todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (© Arndt/Premium Stock/PictureQuest)

4 Movimiento en dos dimensiones

En este capítulo se explora la cinemática de una partícula que se mueve en dos dimen- siones. Conocer lo básico del movimiento bidimensional permitirá, en futuros capítulos, examinar una diversidad de movimientos que van desde el movimiento de satélites en órbita al movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme. Primero se estudia, con detalle, la naturaleza vectorial de posición, velocidad y aceleración. A continuación se considera el movimiento de proyectiles y el movimiento circular uniforme como casos especiales de movimiento en dos dimensiones. También se discute el concepto del movimiento relativo, que muestra por qué los observadores en diferentes marcos de referencia pueden medir posiciones y velocidades distintas para una partícula conocida.

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

En el capítulo 2 se mostró que el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta se conoce por completo si se conoce su posición como función del tiempo. Ahora esta idea se amplía al movimiento bidimensional de una partícula en el plano *xy*. Se comienza por describir la posición de la partícula mediante su **vector de posición** $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen de algún sistema coordenado a la posición de la partícula en el plano *xy*, como en la figura 4.1 (página 72). En el tiempo t_i, la partícula está en el punto Ⓐ, descrito por el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_i$. En un tiempo posterior t_f, está en el punto Ⓑ, descrito por su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$. La trayectoria de Ⓐ a Ⓑ no necesariamente es una línea

recta. Conforme la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, su vector de posición cambia de $\vec{\mathbf{r}}_i$ a $\vec{\mathbf{r}}_f$. Como aprendió en el capítulo 2, el desplazamiento es un vector, y el desplazamiento de la partícula es la diferencia entre su posición final y su posición inicial. Ahora se define el **vector desplazamiento** $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula, véase la que se muestra en la figura 4.1, como la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

Vector desplazamiento ▶

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \tag{4.1}$$

En la figura 4.1 se indica la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Como se ve en la figura, la magnitud de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es *menor* que la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria curva que sigue la partícula.

Como vio en el capítulo 2, con frecuencia es útil cuantificar el movimiento al obtener la relación de un desplazamiento, dividido entre el intervalo de tiempo durante el que ocurre dicho desplazamiento, que proporciona la relación de cambio de posición. La cinemática bidimensional (o tridimensional) es similar a la cinemática unidimensional, pero ahora se debe usar notación vectorial completa en lugar de signos positivos y negativos para indicar la dirección del movimiento.

La **velocidad promedio** $\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}}$ de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

Velocidad promedio ▶

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

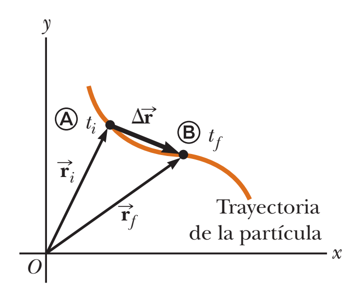


Figura 4.1 Una partícula que se mueve en el plano *xy* se ubica con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen hasta la partícula. El desplazamiento de la partícula conforme se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al vector $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$.

Al multiplicar o dividir una cantidad vectorial por una cantidad escalar positiva como Δt sólo cambia la magnitud del vector, no su dirección. Puesto que el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar positiva, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

La velocidad promedio entre los puntos es *independiente de la trayectoria*; porque la velocidad promedio es proporcional al desplazamiento, que sólo depende de los vectores de posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Al igual que el movimiento unidimensional, si una partícula comienza su movimiento en algún punto y regresa a dicho punto a través de cualquier trayectoria, su velocidad promedio es cero para este viaje, porque su desplazamiento es cero. Considere de nuevo a los jugadores de basquetbol en la cancha de la figura 2.2 (página 21). En la ocasión anterior sólo se consideró su movimiento unidimensional de ida y vuelta entre las canastas. Sin embargo, en realidad, se mueven sobre una superficie bidimensional, y corren de ida y vuelta entre las canastas así como de izquierda a derecha a través del ancho de la cancha. Al iniciar desde una canasta, un jugador puede seguir una trayectoria bidimensional muy complicada. No obstante, hasta regresar a la canasta original, la velocidad promedio de un jugador es cero porque el desplazamiento del jugador para todo el viaje es cero.

Considere de nuevo el movimiento de una partícula entre dos puntos en el plano *xy* como se muestra en la figura 4.2. Conforme el intervalo de tiempo sobre el que se observa el mo-

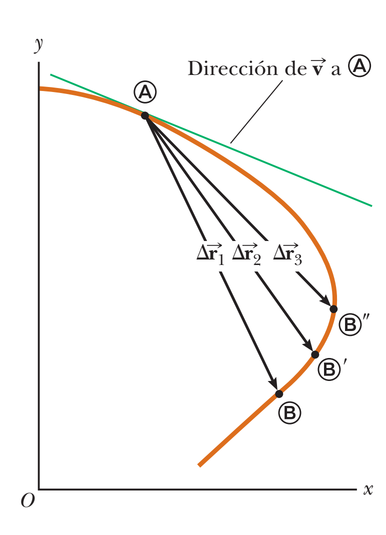


Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Una vez que el punto final de la trayectoria se mueve de Ⓑ a Ⓑ′ a Ⓑ″, el desplazamiento respectivo y los correspondientes intervalos de tiempo se vuelven más y más pequeños. En el límite, cuando el punto final se aproxima a Ⓐ, Δt tiende a cero y la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ tiende a la línea tangente a la curva en Ⓐ. Por definición, la velocidad instantánea en Ⓐ se dirige a lo largo de esta línea tangente.

vimiento se vuelve más y más pequeño (esto es, a medida que Ⓑ se mueve a Ⓑ′ y después a Ⓑ″, y así sucesivamente), la dirección del desplazamiento tiende a la línea tangente a la trayectoria en Ⓐ. La **velocidad instantánea** $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el límite de la velocidad promedio $\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \quad (4.3)$$

◄ Velocidad instantánea

Esto es, la velocidad instantánea es igual a la derivada del vector de posición respecto del tiempo. La dirección del vector velocidad instantánea en cualquier punto en la trayectoria de una partícula es a lo largo de una línea tangente a la trayectoria en dicho punto y en la dirección del movimiento.

La magnitud del vector velocidad instantánea $v = |\vec{\mathbf{v}}|$ de una partícula se llama *rapidez* de la partícula, que es una cantidad escalar.

Conforme una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector velocidad instantánea cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{v}}_f$ en el tiempo t_f. Conocer la velocidad en dichos puntos permite determinar la aceleración promedio de la partícula. La **aceleración promedio** $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}$ de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \quad (4.4)$$

◄ Aceleración promedio

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}$ es la relación de una cantidad vectorial $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ y una cantidad escalar positiva Δt, se concluye que la aceleración promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$. Como se indica en la figura 4.3, la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ se encuentra al sumar el vector $-\vec{\mathbf{v}}_i$ (el negativo de $\vec{\mathbf{v}}_i$) al vector $\vec{\mathbf{v}}_f$ porque, por definición, $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i$.

Cuando la aceleración promedio de una partícula cambia en el transcurso de diferentes intervalos de tiempo, es útil definir su aceleración instantánea. La **aceleración instantánea** $\vec{\mathbf{a}}$ se define como el valor límite de la proporción $\Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \quad (4.5)$$

◄ Aceleración instantánea

En otras palabras, la aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad respecto del tiempo.

Cuando una partícula acelera ocurren varios cambios. Primero, la magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo como en movimiento en línea recta (unidimensional). Segundo, la dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo incluso si su magnitud (rapidez) permanece constante como en movimiento bidimensional a lo largo de una trayectoria curva. Por último, tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad pueden cambiar simultáneamente.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.1
Suma vectorial

Aunque la suma vectorial discutida en el capítulo 3 involucra vectores *desplazamiento*, la suma vectorial se puede aplicar a *cualquier tipo* de cantidad vectorial. Por ejemplo, la figura 4.3 muestra la suma de vectores *velocidad* con el uso del enfoque gráfico.

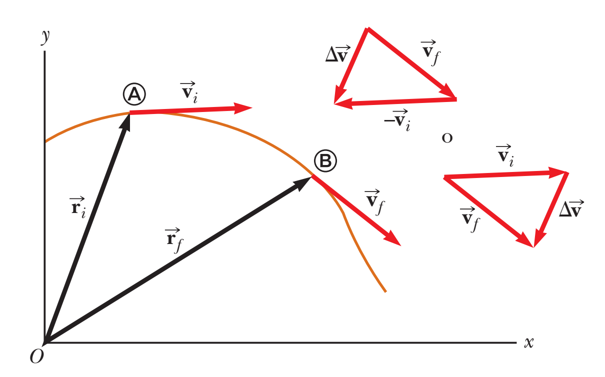


Figura 4.3 Una partícula se mueve de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ. Su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. Los diagramas vectoriales arriba a la derecha muestran dos formas de determinar el vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ de las velocidades inicial y final.

Pregunta rápida 4.1 Considere los siguientes controles en un automóvil: acelerador, freno, volante. ¿En esta lista cuáles son los controles que provocan una aceleración en el automóvil? a) los tres controles, b) el acelerador y el freno, c) sólo el freno, d) sólo el acelerador.

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

En la sección 2.5 se investigó el movimiento unidimensional de una partícula bajo aceleración constante. Ahora considere el movimiento bidimensional durante el cual la aceleración de una partícula permanece constante tanto en magnitud como en dirección. Como se verá, este enfoque es útil para analizar algunos tipos comunes de movimiento.

Antes de embarcarse en esta investigación, es necesario enfatizar un punto importante en cuanto al movimiento bidimensional. Imagine un disco de hockey de aire que se mueve en línea recta a lo largo de una superficie perfectamente a nivel y libre de fricción de una mesa de hockey de aire. La figura 4.4a muestra un diagrama de movimiento desde arriba de este disco. Recuerde que en la sección 2.4 se vinculó la aceleración de un objeto con una fuerza sobre el objeto. Puesto que no hay fuerzas sobre el disco en el plano horizontal, se mueve con velocidad constante en la dirección x. Ahora suponga que sopla sobre el disco cuando pasa por su posición, con la fuerza de su soplido *exactamente* hacia la dirección y. Puesto que la fuerza de este soplido no tiene componente en la dirección x, no causa aceleración en la dirección x. Sólo una aceleración momentánea en la dirección y, lo que imprime al disco una componente de velocidad y constante una vez que la fuerza del soplido cesa. Después de soplar sobre el disco, su componente de velocidad en la dirección x no cambia, como se muestra en la figura 4.4b. La idea general de este experimento simple es que **el movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos *independientes* en cada una de las dos direcciones perpendiculares asociadas con los ejes x y y. Esto es: cualquier influencia en la dirección y no afecta el movimiento en la dirección x y viceversa.**

El vector de posición para una partícula que se mueve en el plano xy se puede escribir

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.6}$$

donde x, y y $\vec{\mathbf{r}}$ cambian con el tiempo a medida que la partícula se mueve mientras los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ permanecen constantes. Si se conoce el vector de posición, la velocidad de la partícula se puede obtener a partir de las ecuaciones 4.3 y 4.6, que dan

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.7}$$

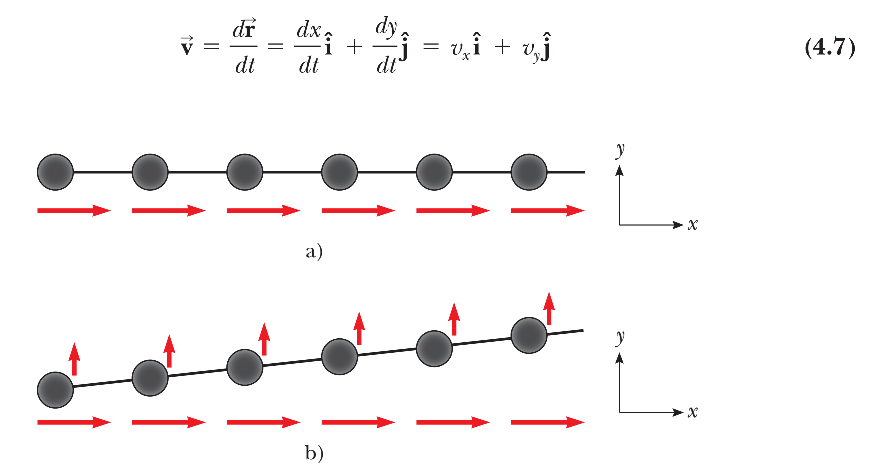


Figura 4.4 a) Un disco se mueve a través de una mesa de hockey de aire horizontal con velocidad constante en la dirección x. b) Después de aplicar al disco un soplido en la dirección y, el disco gana una componente y de velocidad, pero la componente x no es afectada por la fuerza en la dirección perpendicular. Observe que los vectores rojos horizontales, que representan la componente x de la velocidad, tienen la misma longitud en ambas partes de la figura, lo que demuestra que el movimiento en dos dimensiones se puede modelar como dos movimientos independientes en direcciones perpendiculares.

Puesto que la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de la partícula se supone constante en esta discusión, sus componentes a_x y a_y también son constantes. Por lo tanto, se le puede representar como una partícula bajo aceleración constante independiente en cada una de las dos direcciones y aplicar las ecuaciones de cinemática por separado a las componentes x y y del vector velocidad. Al sustituir, de la ecuación 2.13, $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ y $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ en la ecuación 4.7 para determinar la velocidad final en cualquier tiempo t, se obtiene

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}} = (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \qquad \textbf{(4.8)}$$

◀ Vector velocidad como función del tiempo

Este resultado establece que la velocidad de una partícula en algún tiempo t es igual a la suma vectorial de su velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ en el tiempo $t = 0$ y la velocidad adicional $\vec{\mathbf{a}}t$ adquirida en el tiempo t como resultado de aceleración constante. La ecuación 4.8 es la versión vectorial de la ecuación 2.13.

De igual modo, de la ecuación 2.16 se sabe que las coordenadas x y y de una partícula que se mueve con aceleración constante son

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 4.6 (y etiquetar el vector de posición final $\vec{\mathbf{r}}_f$) se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_f &= (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}} \\ &= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \tfrac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \qquad \textbf{(4.9)}$$

◀ Vector de posición como función del tiempo

que es la versión vectorial de la ecuación 2.16. La ecuación 4.9 dice que el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$ de una partícula es la suma vectorial de la posición original $\vec{\mathbf{r}}_i$, un desplazamiento $\vec{\mathbf{v}}_i t$ que surge de la velocidad inicial de la partícula y un desplazamiento $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$ que resulta de la aceleración constante de la partícula.

En la figura 4.5 se muestran representaciones gráficas de las ecuaciones 4.8 y 4.9. Las componentes de los vectores de posición y velocidad también se ilustran en la figura. Note en la figura 4.5a que $\vec{\mathbf{v}}_f$ por lo general no está a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_i$ o de $\vec{\mathbf{a}}$ porque la correspondencia entre dichas cantidades es una expresión vectorial. Por la misma justificación, de la figura 4.5b, se ve que $\vec{\mathbf{r}}_f$ por lo general no está a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_i$ o de $\vec{\mathbf{a}}$. Por último, observe que $\vec{\mathbf{v}}_f$ y $\vec{\mathbf{r}}_f$ por lo común no están en la misma dirección.

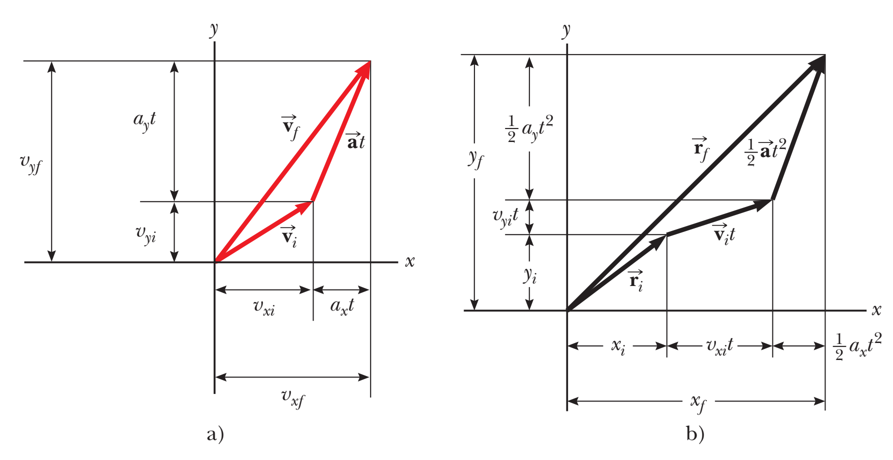


Figura 4.5 Representaciones y componentes vectoriales de a) la velocidad y b) la posición de una partícula que se mueve con una aceleración constante $\vec{\mathbf{a}}$.

EJEMPLO 4.1 Movimiento en un plano

Una partícula parte del origen en $t = 0$ con una velocidad inicial que tiene una componente x de 20 m/s y otra componente y de -15 m/s. La partícula se mueve en el plano xy sólo con una componente x de aceleración, dada por $a_x = 4.0 \text{ m/s}^2$.

A) Determine el vector velocidad total en cualquier tiempo.

SOLUCIÓN

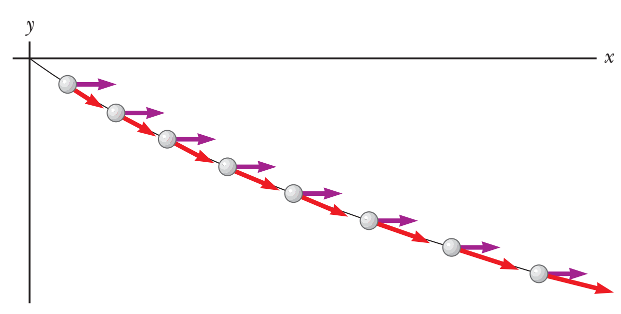


Figura 4.6 (Ejemplo 4.1) Diagrama de movimiento para la partícula.

Conceptualizar Las componentes de la velocidad inicial dicen que la partícula inicia su movimiento hacia la derecha y abajo. La componente x de velocidad comienza en 20 m/s y aumenta en 4.0 m/s cada segundo. La componente y de velocidad nunca cambia de su valor inicial de -15 m/s. En la figura 4.6 se bosqueja un diagrama de movimiento de la situación. Puesto que la partícula acelera en la dirección $+x$, su componente de velocidad en esta dirección aumenta y la trayectoria se curva como se muestra en el diagrama. Note que el espaciamiento entre imágenes sucesivas aumenta conforme pasa el tiempo, porque la rapidez aumenta. La colocación de los vectores aceleración y velocidad en la figura 4.6 ayuda a conceptualizar aún más la situación.

Categorizar Puesto que la velocidad inicial tiene componentes en las direcciones x y y, este problema se clasifica como uno que supone una partícula que se mueve en dos dimensiones. Dado que la partícula sólo tiene una componente x de aceleración, se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección x y una partícula bajo velocidad constante en la dirección y.

Analizar Para comenzar el análisis matemático, se hace $v_{xi} = 20$ m/s, $v_{yi} = -15$ m/s, $a_x = 4.0 \text{ m/s}^2$ y $a_y = 0$.

Aplique la ecuación 4.8 para el vector velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [20 \text{ m/s} + (4.0 \text{ m/s}^2)t]\hat{\mathbf{i}} + [-15 \text{ m/s} + (0)t]\hat{\mathbf{j}}$$

$$(1)\quad \vec{\mathbf{v}}_f = \boxed{[(20 + 4.0t)\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}] \text{ m/s}}$$

Finalizar Note que la componente x de velocidad aumenta en el tiempo mientras la componente y permanece constante; este resultado es consistente con lo predicho.

B) Calcule la velocidad y la rapidez de la partícula en $t = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

Analizar

Evalúe el resultado de la ecuación (1) en $t = 5.0$ s:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0(5.0))\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}] \text{ m/s} = \boxed{(40\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}}$$

Determine el ángulo θ que $\vec{\mathbf{v}}_f$ forma con el eje x en $t = 5.0$ s:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}}\right) = \boxed{-21°}$$

Evalúe la rapidez de la partícula como la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$v_f = |\vec{\mathbf{v}}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \text{ m/s} = \boxed{43 \text{ m/s}}$$

Finalizar El signo negativo para el ángulo θ indica que el vector velocidad se dirige a un ángulo de 21° abajo del eje x positivo. Note que, si se calcula v_i a partir de las componentes x y y de $\vec{\mathbf{v}}_i$, se encuentra que $v_f > v_i$. ¿Esto es consistente con la predicción?

C) Determine las coordenadas x y y de la partícula en cualquier tiempo t y su vector de posición en este tiempo.

SOLUCIÓN

Analizar

Aplique las componentes de la ecuación 4.9 con $x_i = y_i = 0$ en $t = 0$:

$$x_f = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \boxed{(20t + 2.0t^2) \text{ m}}$$

$$y_f = v_{yi}t = \boxed{(-15t) \text{ m}}$$

Exprese el vector de posición de la partícula en cualquier tiempo t: $\vec{\mathbf{r}}_f = x_f\hat{\mathbf{i}} + y_f\hat{\mathbf{j}} = [(20t + 2.0t^2)\hat{\mathbf{i}} - 15t\hat{\mathbf{j}}]$ m

Finalizar Considere ahora un caso límite para valores muy grandes de t.

¿Y si...? ¿Qué ocurriría si se espera un tiempo considerable y después se observa el movimiento de la partícula? ¿Cómo describiría el movimiento de la partícula para valores considerables de tiempo?

Respuesta Al observar la figura 4.6 es claro que la trayectoria de la partícula se curva hacia el eje x. No hay razón para suponer que esta tendencia cambiará, lo que sugiere que la trayectoria se volverá más y más paralela al eje x conforme crezca el tiempo. En términos matemáticos, la ecuación 1) muestra que la componente y de velocidad permanece constante mientras la componente x crece linealmente con t. Por lo tanto, cuando t es muy grande, la componente x de velocidad será mucho mayor que la componente y, lo que sugiere que el vector velocidad se volverá cada vez más paralelo al eje x. Tanto x_f como y_f continúa creciendo con el tiempo, aunque x_f crece mucho más rápido.

4.3 Movimiento de proyectil

Quien haya observado una pelota de beisbol en movimiento observó movimiento de proyectil. La bola se mueve en una trayectoria curva y regresa al suelo. El **movimiento de proyectil** de un objeto es simple de analizar a partir de dos suposiciones: 1) la aceleración de caída libre es constante en el intervalo de movimiento y se dirige hacia abajo[1] y 2) el efecto de la resistencia del aire es despreciable.[2] Con estas suposiciones, se encuentra que la *trayectoria* de un proyectil *siempre* es una parábola, como se muestra en la figura 4.7. **A lo largo de este capítulo se usan estas suposiciones.**

La expresión para el vector de posición del proyectil como función del tiempo se sigue directamente de la ecuación 4.9, con $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2 \qquad \textbf{(4.10)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.2
Aceleración en el punto más alto

Como se discutió en la prevención de riesgos ocultos 2.8, muchas personas afirman que la aceleración de un proyectil en el punto más alto de su trayectoria es cero. Este error surge de la confusión entre velocidad vertical cero y aceleración cero. Si el proyectil experimentara aceleración cero en el punto más alto, su velocidad en dicho punto no cambiaría; sucedería que, ¡desde ese momento el proyectil se movería horizontalmente con rapidez constante! Sin embargo, esto no ocurre, porque la aceleración *no* es cero en parte alguna de la trayectoria.

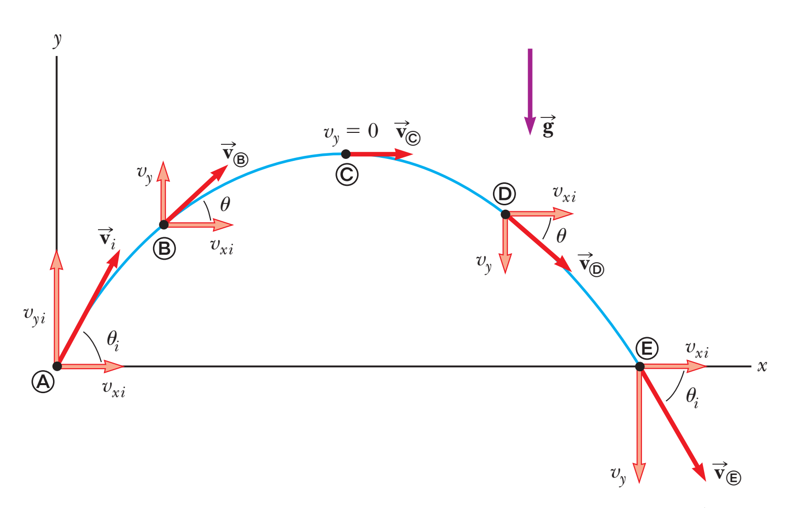


Figura 4.7 Trayectoria parabólica de un proyectil que sale del origen con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$. El vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración en la dirección y negativa. La componente x de velocidad permanece constante en el tiempo porque no hay aceleración a lo largo de la dirección horizontal. La componente y de velocidad es cero en el pico de la trayectoria.

[1] Esta suposición es razonable en tanto el alcance del movimiento sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra (6.4×10^6 m). En efecto, esto equivale a suponer que la Tierra es plana en el intervalo considerado del movimiento.

[2] Dicha suposición, por lo general, *no* está justificada, en especial a velocidades altas. Además, cualquier giro impartido a un proyectil, como el que se aplica cuando un pitcher lanza una bola curva, origina algunos efectos muy interesantes asociados con fuerzas aerodinámicas, que se discutirán en el capítulo 14.



Un soldador perfora hoyos en una pesada viga de construcción con un soplete. Las chispas generadas en el proceso siguen trayectorias parabólicas.

donde las componentes x y y de la velocidad inicial del proyectil son:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i \qquad v_{yi} = v_i \operatorname{sen} \theta_i \tag{4.11}$$

La expresión en la ecuación 4.10 se grafica en la figura 4.8, para un proyectil lanzado desde el origen, de modo que $\vec{\mathbf{r}}_i = 0$. La posición final de una partícula se considera como la superposición de su posición inicial $\vec{\mathbf{r}}_i$, el término $\vec{\mathbf{v}}_i t$, que es su desplazamiento si no hubiese aceleración presente; y el término $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ que surge de su aceleración debida a la gravedad. En otras palabras, si no hubiera aceleración gravitacional, la partícula continuaría moviéndose a lo largo de una ruta recta en la dirección $\vec{\mathbf{v}}_i$. En consecuencia, la distancia vertical $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ desde la que "cae" la partícula en línea recta, es la misma distancia desde la que caería un objeto que se deja caer desde el reposo durante el mismo intervalo de tiempo.

En la sección 4.2 se estableció que el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante se puede analizar como una combinación de dos movimientos independientes en las direcciones x y y, con aceleraciones a_x y a_y. El movimiento de proyectiles también se maneja de esta forma, con aceleración cero en la dirección x y una aceleración constante en la dirección y, $a_y = -g$. Por lo tanto, **cuando se analice el movimiento de un proyectil, debe representarlo como la sobreposición de dos movimientos: 1) movimiento de una partícula bajo velocidad constante en la dirección horizontal y 2) movimiento de una partícula bajo aceleración constante (caída libre) en la dirección vertical.** Las componentes horizontal y vertical del movimiento de un proyectil son completamente independientes una de otra y se manejan por separado, con el tiempo t como la variable común para ambas componentes.

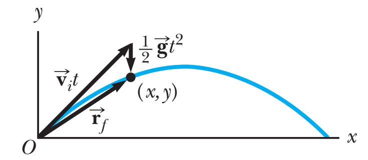


Figura 4.8 Vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$ de un proyectil lanzado desde el origen, cuya velocidad inicial en el origen es $\vec{\mathbf{v}}_i$. El vector $\vec{\mathbf{v}}_i t$ sería el desplazamiento del proyectil si no hubiera gravedad, y el vector $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ es su desplazamiento vertical de una trayectoria recta debido a su aceleración gravitacional descendente.

Pregunta rápida 4.2 **i)** A medida que un proyectil lanzado hacia arriba se mueve en su trayectoria parabólica (como en la figura 4.8), ¿en qué punto a lo largo de su trayectoria los vectores velocidad y aceleración del proyectil son mutuamente perpendiculares? a) en ninguna parte, b) en el punto más alto, c) en el punto de lanzamiento. **ii)** Con las mismas opciones, ¿en qué punto son paralelos los vectores velocidad y aceleración del proyectil?

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

Considere que un proyectil es lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con una componente v_{yi} positiva, como se muestra en la figura 4.9, y regresa al mismo nivel horizontal. Dos puntos son de especial interés para analizar: el punto máximo Ⓐ, que tiene coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, y el punto Ⓑ, que tiene coordenadas $(R, 0)$. La distancia R se llama *alcance horizontal* del proyectil, y la distancia h es su *altura máxima*. Encuentre h y R matemáticamente a partir de v_i, θ_i y g.

Se puede determinar h al notar que, en el máximo, $v_{y\text{Ⓐ}} = 0$. Debido a esto, se puede usar la componente y de la ecuación 4.8 para determinar el tiempo $t_{\text{Ⓐ}}$ en que el proyectil alcanza el pico:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$
$$0 = v_i \operatorname{sen} \theta_i - g t_{\text{Ⓐ}}$$
$$t_{\text{Ⓐ}} = \frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}$$

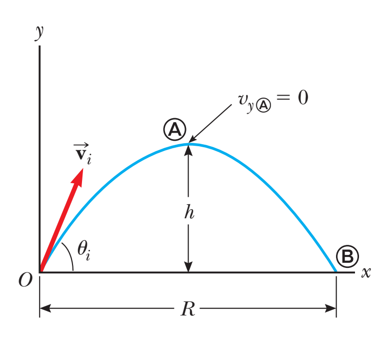


Figura 4.9 Proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen en $t_i = 0$ con una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$. La altura máxima del proyectil es h y el alcance horizontal es R. En Ⓐ, el máximo de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas $(R/2, h)$.

Al sustituir esta expresión para $t_{\text{Ⓐ}}$ en la componente y de la ecuación 4.9 y sustituir $y = y_{\text{Ⓐ}}$ con h, se obtiene una expresión para h en términos de la magnitud y dirección del vector velocidad inicial:

$$h = (v_i \operatorname{sen} \theta_i)\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} - \frac{1}{2} g\left(\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} \tag{4.12}$$

El alcance R es la posición horizontal del proyectil en el tiempo que es el doble del tiempo en el que alcanza su máximo, esto es, un tiempo $t_{\text{Ⓑ}} = 2t_{\text{Ⓐ}}$. Al usar la componente x

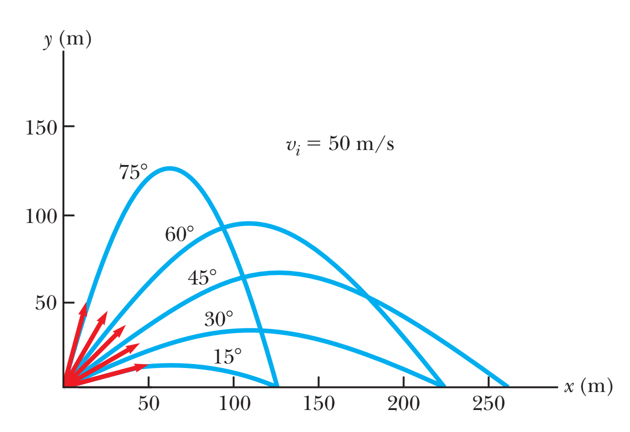


Figura 4.10 Un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en varios ángulos de proyección. Note que valores complementarios de θ_i resultan en el mismo valor de R (alcance del proyectil).

de la ecuación 4.9, note que $v_{xi} = v_{x\text{Ⓑ}} = v_i \cos \theta_i$ y establezca $x_{\text{Ⓑ}} = R$ en $t = 2t_{\text{Ⓐ}}$, se encuentra que

$$R = v_{xi}t_{\text{Ⓑ}} = (v_i \cos \theta_i)2t_{\text{Ⓐ}}$$

$$= (v_i \cos \theta_i)\frac{2v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \operatorname{sen} \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

Al aplicar la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ (véase el apéndice B.4) se puede escribir R en la forma más compacta

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} \qquad \textbf{(4.13)}$$

El valor máximo de R a partir de la ecuación 4.13 es $R_{\text{máx}} = v_i^2/g$. Este resultado tiene sentido porque el valor máximo de $\operatorname{sen} 2\theta_i$ es 1, lo que ocurre cuando $2\theta_i = 90°$. Debido a esto, R es un máximo cuando $\theta_i = 45°$.

La figura 4.10 ilustra varias trayectorias para un proyectil que tiene una rapidez inicial dada, pero se lanza a diferentes ángulos. Como puede ver, el alcance es máximo para $\theta_i = 45°$. Además, para cualquier θ_i distinto de 45°, se alcanza un punto con coordenadas cartesianas (R, 0) al usar cualesquier valores complementarios de θ_i, como 75° y 15°. Desde luego, la altura máxima y el tiempo de vuelo para uno de estos valores de θ_i son diferentes a causa de la altura máxima y el tiempo de vuelo para el valor complementario.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.3

Las ecuaciones de altura y alcance

La ecuación 4.13 es útil para calcular R sólo para una trayectoria simétrica, como se muestra en la figura 4.10. Si la trayectoria no es simétrica, *no aplique esta ecuación*. Las expresiones generales conocidas por las ecuaciones 4.8 y 4.9 son los resultados *más importantes* porque proporcionan las componentes de posición y velocidad de *cualquier* partícula que se mueve en dos dimensiones en *cualquier* tiempo t.

Pregunta rápida 4.3 Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura 4.10 respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Movimiento de proyectil**

Cuando resuelva problemas de movimiento de proyectil, se sugiere el siguiente planteamiento:

1. *Conceptualizar.* Piense en lo que ocurre físicamente en el problema. Establezca la representación mental al imaginar el movimiento del proyectil a lo largo de su trayectoria.

2. *Categorizar.* Confirme que el problema supone una partícula en caída libre y que la resistencia del aire es despreciable. Seleccione un sistema coordenado con x en la dirección horizontal y y en la dirección vertical.

3. *Analizar.* Si se conoce el vector velocidad inicial, descompóngalo en componentes x y y. Trate el movimiento horizontal y movimiento vertical de manera independiente.

Analice el movimiento horizontal del proyectil como una partícula bajo velocidad constante. Examine el movimiento vertical del proyectil como una partícula bajo aceleración constante.

4. *Finalizar.* Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mentales y gráficas y que sus resultados son realistas.

EJEMPLO 4.2 Salto de longitud

Un atleta que participa en salto de longitud (figura 4.11) deja el suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y con una rapidez de 11.0 m/s.



Mike Powell/Allsport/Getty Images

Figura 4.11 (Ejemplo 4.2) Mike Powell, actual poseedor del récord mundial de salto de longitud de 8.95 m.

A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los brazos y piernas de un atleta de salto de longitud se mueven en una forma compleja, pero este movimiento se ignorará. El movimiento del atleta se conceptualiza como equivalente al de un proyectil simple.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. Puesto que se conocen la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento, y ya que la altura final es la misma que la altura inicial, se confirma que el problema satisface las condiciones para aplicar las ecuaciones 4.12 y 4.13. Este planteamiento es la forma más directa de analizar este problema, aunque los métodos generales descritos siempre darán la respuesta correcta.

Analizar

Aplique la ecuación 4.13 para encontrar el alcance del saltador:

$$R = \frac{v_i^2 \text{ sen } 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 \text{ sen } 2(20.0°)}{9.80 \text{ m/s}^2} = \boxed{7.94 \text{ m}}$$

B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

SOLUCIÓN

Analizar

Encuentre la altura máxima alcanzada mediante la ecuación 4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \text{ sen}^2 \theta_i}{2g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2(\text{sen } 20.0°)^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = \boxed{0.722 \text{ m}}$$

Finalizar Encuentre las respuestas a los incisos A) y B) con el uso del método general. Los resultados deben concordar. Tratar al atleta como partícula es una simplificación. No obstante, los valores obtenidos son consistentes con la experiencia en los deportes. Un sistema complicado, como el del atleta en salto de longitud, se puede representar como una partícula y aun así obtener resultados razonables.

EJEMPLO 4.3 Tiro que da en el objetivo en cada ocasión

En una popular demostración, se dispara un proyectil a un objetivo en tal forma que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el objetivo se suelta del reposo. Demuestre que, si el cañón se apunta inicialmente al objetivo fijo, el proyectil golpea al objetivo que cae como se muestra en la figura 4.12a.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se forman conceptos del problema al estudiar la figura 4.12a. Note que el problema no pide valores numéricos. El resultado esperado debe involucrar un argumento algebraico.

a) b)

Figura 4.12 (Ejemplo 4.3) a) Fotografía estroboscópica de la demostración proyectil–objetivo. Si el cañón se apunta directamente al objetivo y se dispara en el mismo instante cuando el objetivo comienza a caer, el proyectil golpeará el objetivo. Advierta que la velocidad del proyectil (flechas rojas) cambia en dirección y magnitud, mientras su aceleración descendente (flechas violetas) permanece constante. b) Diagrama esquemático de la demostración proyectil–objetivo.

Categorizar Porque ambos objetos sólo están subordinados a la gravedad, este problema se clasifica como uno que supone dos objetos en caída libre, el blanco en movimiento en una dimensión y el proyectil que se mueve en dos.

Analizar El objetivo T se representa como una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. La figura 4.12b muestra que la coordenada y inicial y_{iT} del objetivo es $x_T \tan \theta_i$ y su velocidad inicial es cero. Cae con aceleración $a_y = -g$. El proyectil P se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección y y una partícula bajo velocidad constante en la dirección x.

Escriba una expresión para la coordenada y del objetivo en cualquier momento después de liberarse y observe que su velocidad inicial es cero:

$$1)\quad y_T = y_{iT} + (0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada y del proyectil en cualquier momento:

$$2)\quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada x del proyectil en cualquier momento:

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = 0 + (v_{iP} \cos \theta_i)t = (v_{iP} \cos \theta_i)t$$

Resuelva esta expresión para el tiempo como función de la posición horizontal del proyectil:

$$t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 2):

$$3)\quad y_P = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)\left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Compare las ecuaciones 1) y 3). Se ve que, cuando las coordenadas x del proyectil y el objetivo son las mismas (esto es, cuando $x_T = x_P$), sus coordenadas y conocidas por las ecuaciones 1) y 3) son las mismas y resulta una colisión.

Finalizar Note que una colisión sólo resulta cuando $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i \geq \sqrt{gd/2}$, donde d es la elevación inicial del objetivo arriba del suelo. Si $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i$ es menor que este valor, el proyectil golpea el suelo antes de alcanzar el objetivo.

EJEMPLO 4.4 ¡Vaya brazo!

Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio, a un ángulo de 30.0° con la horizontal, y con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 4.13. La altura del edificio es de 45.0 m.

A) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 4.13, en la que se indican la trayectoria y varios parámetros del movimiento de la piedra.

Categorizar Este problema se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. La piedra se modela como una partícula bajo aceleración constante en la dirección y y una partícula bajo velocidad constante en la dirección x.

Analizar Se tiene la información $x_i = y_i = 0$, $y_f = -45.0$ m, $a_y = -g$ y $v_i = 20.0$ m/s (el valor numérico de y_f es negativo porque se eligió lo alto del edificio como el origen).

Figura 4.13 (Ejemplo 4.4) Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio.

Encuentre las componentes x y y iniciales de velocidad de la piedra:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20.0 \text{ m/s})\cos 30.0° = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \operatorname{sen} \theta_i = (20.0 \text{ m/s})\operatorname{sen} 30.0° = 10.0 \text{ m/s}$$

Exprese la posición vertical de la piedra a partir de la componente vertical de la ecuación 4.9:

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Resuelva la ecuación cuadrática para t:

$$t = \boxed{4.22 \text{ s}}$$

B) ¿Cuál es la rapidez de la piedra justo antes de golpear el suelo?

SOLUCIÓN

Use la componente y de la ecuación 4.8 con $t = 4.22$ s para obtener la componente y de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.3 \text{ m/s}$$

Use esta componente con la componente horizontal $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s para encontrar la rapidez de la piedra en $t = 4.22$ s:

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3 \text{ m/s})^2 + (-31.3 \text{ m/s})^2} = \boxed{35.8 \text{ m/s}}$$

Finalizar ¿Es razonable que la componente y de la velocidad final sea negativa? ¿Es razonable que la rapidez final sea mayor que la rapidez inicial de 20.0 m/s?

¿Y si...? ¿Qué sucedería si un viento horizontal sopla en la misma dirección en la que se lanza la piedra y hace que ésta tenga una componente de aceleración horizontal $a_x = 0.500$ m/s^2? ¿Cuál inciso de este ejemplo, A) o B), tendrá una respuesta diferente?

Respuesta Recuerde que los movimientos en las direcciones x y y son independientes. Por lo tanto, el viento horizontal no puede afectar el movimiento vertical. El movimiento vertical determina el tiempo del proyectil en el aire, así que la respuesta al inciso A) no cambia. El viento hace que la componente de velocidad horizontal aumente con el tiempo, de modo que la rapidez final será mayor en el inciso B). Al tomar $a_x = 0.500$ m/s^2, se encuentra $v_{xf} = 19.4$ m/s y $v_f = 36.9$ m/s.

EJEMPLO 4.5 El final del salto con esquíes

Una esquiadora deja la rampa y se desliza en la dirección horizontal con una rapidez de 25.0 m/s, como se muestra en la figura 4.14. El plano de aterrizaje bajo ella cae con una pendiente de 35.0°. ¿Dónde aterrizará en el plano?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este problema permite formar ideas a partir de los recuerdos de las competencias de esquí en los juegos olímpicos de invierno. Se estima que la esquiadora está en el aire durante alrededor de 4 s y recorre una distancia horizontal

de casi 100 m. Se espera que el valor de d, la distancia recorrida a lo largo del plano, sea del mismo orden de magnitud.

Categorizar El problema se clasifica como el de una partícula en movimiento de proyectil.

Analizar Es conveniente seleccionar el comienzo del salto como el origen. Las componentes de velocidad inicial son $v_{xi} = 25.0$ m/s y $v_{yi} = 0$. Del triángulo rectángulo de la figura 4.14, se ve que las coordenadas x y y de la esquiadora en el punto de aterrizaje se conocen mediante $x_f = d\cos 35.0°$ y $y_f = -d \operatorname{sen} 35.0°$.

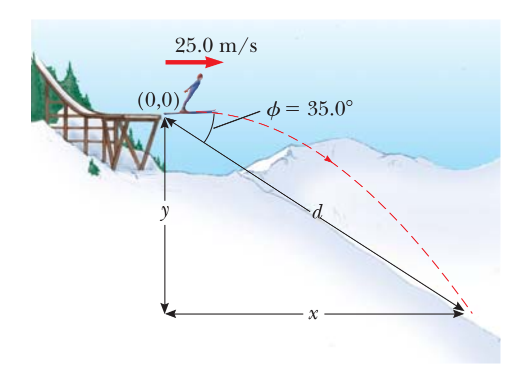


Figura 4.14 (Ejemplo 4.5) Una saltadora deja la rampa con movimiento en dirección horizontal.

Exprese las coordenadas de la saltadora como función del tiempo:

1) $x_f = v_{xi}t = (25.0 \text{ m/s})t$

2) $y_f = v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$

Sustituya los valores x_f y y_f en el punto de aterrizaje:

3) $d\cos 35.0° = (25.0 \text{ m/s})t$

4) $-d \operatorname{sen} 35.0° = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$

Resuelva la ecuación 3) para t y sustituya el resultado en la ecuación 4):

$$-d \operatorname{sen} 35.0° = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)\left(\frac{d\cos 35.0°}{25.0 \text{ m/s}}\right)^2$$

Resuelva para d:

$$d = 109 \text{ m}$$

Evalúe las coordenadas x y y del punto en el que aterriza la esquiadora:

$$x_f = d\cos 35.0° = (109 \text{ m})\cos 35.0° = 89.3 \text{ m}$$

$$y_f = -d \operatorname{sen} 35.0° = -(109 \text{ m})\operatorname{sen} 35.0° = -62.5 \text{ m}$$

Finalizar Compare estos resultados con las expectativas. Se esperaba que la distancia horizontal estuviera en el orden de 100 m, y el resultado de 89.3 m de hecho está en este orden de magnitud. Puede ser útil calcular el intervalo de tiempo que la esquiadora está en el aire y compararlo con la estimación de aproximadamente 4 s.

¿Y si...? Suponga que todo en este ejemplo es igual, excepto que la rampa se curva de modo que la esquiadora se proyecta hacia arriba en un ángulo desde el extremo de la pista. ¿Este diseño es mejor en términos de maximizar la longitud del salto?

Respuesta Si la velocidad inicial tiene una componente hacia arriba, la esquiadora estará en el aire más tiempo y, debido a esto, deberá viajar más. Sin embargo, inclinar el vector velocidad inicial hacia arriba reducirá la componente horizontal de la velocidad inicial. En consecuencia, angular hacia arriba el extremo de la pista a un ángulo *más prolongado* en realidad puede *reducir* la distancia. Considere el caso extremo: ¡la esquiadora se proyecta a 90° con la horizontal y simplemente va arriba y abajo en el extremo de la pista! Este argumento sugiere que debe haber un ángulo óptimo entre 0° y 90° que represente un equilibrio entre hacer el tiempo de vuelo más largo y la componente de velocidad horizontal más pequeña.

Encuentre matemáticamente este ángulo óptimo. Las ecuaciones de la 1) a la 4) se modifican de la forma siguiente, si supone que la esquiadora se proyecta a un ángulo θ respecto a la horizontal sobre un plano de aterrizaje con pendiente con un ángulo arbitrario ϕ:

1) y 3) $\rightarrow$ $x_f = (v_i \cos\theta)t = d\cos\phi$

2) y 4) $\rightarrow$ $y_f = (v_i \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = -d\operatorname{sen}\phi$

Al eliminar el tiempo t entre estas ecuaciones y aplicando derivación para maximizar d en términos de θ, se llega (después de varias etapas; véase el problema 62) a la siguiente ecuación para el ángulo θ que da el valor máximo de d:

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

Para el ángulo de pendiente en la figura 4.14, $\phi = 35.0°$; esta ecuación resulta en un ángulo de lanzamiento óptimo de $\phi = 27.5°$. Para un ángulo de pendiente de $\phi = 0°$, que representa un plano horizontal, esta ecuación da un ángulo de lanzamiento óptimo de $\theta = 45°$, como se esperaría (véase la figura 4.10).

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.4
Aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme

Recuerde que en física la aceleración se define como un cambio en la *velocidad*, no un cambio en la *rapidez* (contrario a la interpretación cotidiana). En el movimiento circular, el vector velocidad cambia en dirección, de modo que de hecho hay una aceleración.

4.4 Partícula en movimiento circular uniforme

La figura 4.15a muestra un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con *rapidez constante* v. Tal movimiento, llamado **movimiento circular uniforme**, ocurre en muchas situaciones. Puesto que ocurre con tanta frecuencia, este tipo de movimiento se reconoce como un modelo de análisis llamado **partícula en movimiento circular uniforme**. En esta sección se analiza dicho modelo.

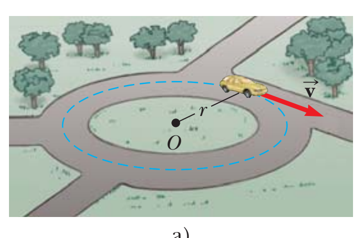
Con frecuencia sorprende a los estudiantes encontrar que **aun cuando un objeto se mueva con rapidez constante en una trayectoria circular, todavía tiene una aceleración**. Para ver por qué, considere la ecuación que define la aceleración, $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ (ecuación 4.5). Note que la aceleración depende del cambio en la *velocidad*. Puesto que la velocidad es una cantidad vectorial, una aceleración puede ocurrir en dos formas, como se mencionó en la sección 4.1: por un cambio en la *magnitud* de la velocidad y por un cambio en la *dirección* de la velocidad. La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular.

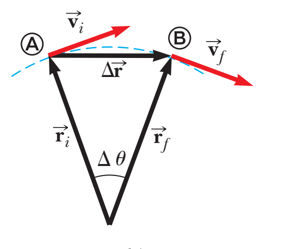
Ahora se muestra que el vector aceleración en movimiento circular uniforme siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo. Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria y, debido a eso, paralela al vector velocidad. Tal componente de aceleración conduciría a un cambio en la rapidez de la partícula a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, esta situación es inconsistente con la configuración de la situación: la partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria. En consecuencia, para movimiento circular *uniforme*, el vector aceleración sólo puede tener una componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del círculo.

Ahora encuentre la magnitud de la aceleración de la partícula. Considere el diagrama de los vectores de posición y velocidad de la figura 4.15b. La figura también muestra el vector que representa el cambio en posición $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para un intervalo de tiempo arbitrario. La partícula sigue una trayectoria circular de radio r, de la que se muestra una parte mediante la curva discontinua. La partícula está en Ⓐ en el tiempo t_i y su velocidad en dicho tiempo es $\vec{\mathbf{v}}_i$; está en Ⓑ a algún tiempo ulterior t_f y su velocidad en dicho tiempo es $\vec{\mathbf{v}}_f$. Suponga también que $\vec{\mathbf{v}}_i$ y $\vec{\mathbf{v}}_f$ difieren sólo en dirección; sus magnitudes son las mismas (esto es, $v_i = v_f = v$ porque es movimiento circular *uniforme*).

En la figura 4.15c, los vectores velocidad de la figura 4.15b se volvieron a dibujar en un solo origen. El vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ conecta las puntas de los vectores, que representa la suma vectorial $\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$. En las figuras 4.15b y 4.15c se identifican los triángulos que ayudan a analizar el movimiento. El ángulo $\Delta\theta$ entre los dos vectores de posición de la figura 4.15b es el mismo que el ángulo entre los vectores velocidad en la figura 4.15c, porque el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es perpendicular al vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$. Por lo tanto, los dos triángulos son *similares*. (Dos triángulos son similares si el ángulo entre cualquiera de los dos lados es el mismo para ambos triángulos y si la relación de las longitudes de dichos lados es la misma.) Ahora se puede escribir una correspondencia entre las longitudes de los lados para los dos triángulos de las figuras 4.15b y 4.15c:

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$





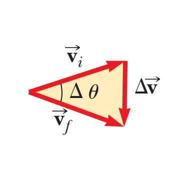


Figura 4.15 a) Un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante experimenta movimiento circular uniforme. b) Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. c) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta\vec{\mathbf{v}}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ pequeños.

donde $v = v_i = v_f$ y $r = r_i = r_f$. Esta ecuación se resuelve para $|\Delta\vec{\mathbf{v}}|$ y la expresión obtenida se sustituye en la ecuación 4.4, $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$, para dar la magnitud de la aceleración promedio sobre el intervalo de tiempo para que la partícula se mueva de Ⓐ a Ⓑ:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}$$

Ahora considere que los puntos Ⓐ y Ⓑ en la figura 4.15b se hacen extremadamente cercanos entre sí. Conforme Ⓐ y Ⓑ se aproximan uno a otro, Δt tiende a cero, $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ se aproxima a la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular y la relación $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|/\Delta t$ se aproxima a la rapidez v. Además, la aceleración promedio se convierte en la aceleración instantánea en el punto Ⓐ. Por tanto, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, la magnitud de la aceleración es

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(4.14)}$$

◀ Aceleración centrípeta

Una aceleración de esta naturaleza se llama **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa *hacia el centro*). El subíndice en el símbolo de aceleración recuerda que la aceleración es centrípeta.

En muchas situaciones es conveniente describir el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante en un círculo de radio r en términos del **periodo** T, que se define como el intervalo de tiempo requerido para una revolución completa de la partícula. En el intervalo de tiempo T, la partícula se mueve una distancia de $2\pi r$, que es igual a la circunferencia de la trayectoria circular de la partícula. En consecuencia, puesto que su rapidez es igual a la circunferencia de la trayectoria circular dividida entre el periodo, o $v = 2\pi r/T$, se sigue que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \textbf{(4.15)}$$

◀ Periodo de movimiento circular

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.5

La aceleración centrípeta no es constante

Al deducir la magnitud del vector aceleración centrípeta se encontró que es constante para el movimiento circular uniforme, pero *el vector aceleración centrípeta no es constante*. Siempre apunta hacia el centro del círculo, pero continuamente cambia de dirección conforme el objeto se mueve alrededor de la trayectoria circular.

Pregunta rápida 4.4 Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez v. Luego aumenta su rapidez a $2v$ mientras viaja a lo largo de la misma trayectoria circular. **i)** ¿En qué factor cambió la aceleración centrípeta de la partícula (elija una)? a) 0.25, b) 0.5, c) 2, d) 4, e) imposible de determinar. **ii)** De las mismas opciones, ¿en qué factor cambió el periodo de la partícula?

EJEMPLO 4.6 Aceleración centrípeta de la Tierra

¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en una imagen mental de la Tierra en una órbita circular alrededor del Sol. La Tierra se representará como una partícula y su órbita se aproximará como circular (en realidad es ligeramente elíptica, como se explicará en el capítulo 13).

Categorizar El paso de formar ideas permite clasificar este problema como el de una partícula en movimiento circular uniforme.

Analizar No se conoce la rapidez orbital de la Tierra para sustituirla en la ecuación 4.14. Sin embargo, con ayuda de la ecuación 4.15, se da nueva forma a la ecuación 4.14 en términos del periodo de la órbita de la Tierra, que se sabe es un año, y el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que es 1.496×10^{11} m.

Combine las ecuaciones 4.14 y 4.15:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\text{ m})}{(1\text{ año})^2}\left(\frac{1\text{ año}}{3.156 \times 10^7\text{ s}}\right)^2 = 5.93 \times 10^{-3}\text{ m/s}^2$$

Finalizar Esta aceleración es mucho más pequeña que la aceleración en caída libre sobre la superficie de la Tierra. Una cosa importante aprendida aquí es la técnica para sustituir la rapidez v en la ecuación 4.14 en términos del periodo T del movimiento.

4.5 Aceleraciones tangencial y radial

Considere el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva uniforme, donde la velocidad cambia tanto en dirección como en magnitud, como se describe en la figura 4.16. En esta situación, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria; sin embargo, el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ está a cierto ángulo con la trayectoria. En cada uno de los tres puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ en la figura 4.16, se dibujaron círculos discontinuos que representan la curvatura de la trayectoria real en cada punto. El radio de los círculos es igual al radio de curvatura de la trayectoria en cada punto.

Conforme la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria curva en la figura 4.16, la dirección del vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ cambia de punto a punto. En cualquier instante, este vector se puede descomponer en dos componentes respecto a un origen en el centro del círculo discontinuo correspondiente a dicho instante: una componente radial a_r a lo largo del radio del círculo y una componente tangencial a_t perpendicular a este radio. El vector aceleración *total* $\vec{\mathbf{a}}$ se puede escribir como la suma vectorial de las componentes de los vectores:

Aceleración total ▶

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t \qquad \textbf{(4.16)}$$

La componente de aceleración tangencial causa un cambio en la rapidez *v* de la partícula. Esta componente es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud se conoce por

Aceleración tangencial ▶

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad \textbf{(4.17)}$$

La componente de aceleración radial surge de un cambio en dirección del vector velocidad y se proporciona por

Aceleración radial ▶

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(4.18)}$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. La componente radial de la aceleración se reconoce como la aceleración centrípeta discutida en la sección 4.4. El signo negativo en la ecuación 4.18 indica que la dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo que representa el radio de curvatura. La dirección es opuesta a la del vector unitario radial $\hat{\mathbf{r}}$, que siempre apunta alejándose del origen en el centro del círculo.

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_r$ y $\vec{\mathbf{a}}_t$ son vectores componentes perpendiculares de $\vec{\mathbf{a}}$, se sigue que la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ es $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. En una rapidez conocida, a_r es grande cuando el radio de curvatura es pequeño (como en los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 4.16) y pequeña cuando r es grande (en el punto Ⓒ). La dirección de $\vec{\mathbf{a}}$ es en la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}$ (si v aumenta) u opuesta a $\vec{\mathbf{v}}$ (si v disminuye).

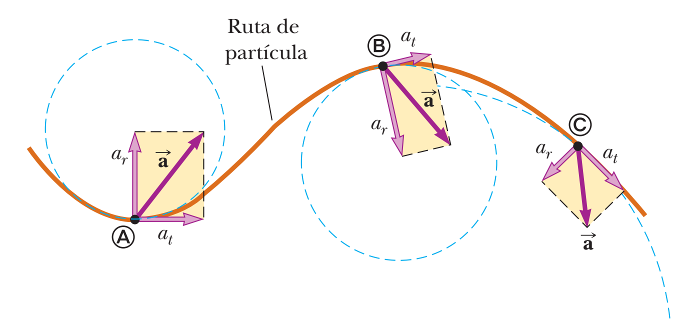


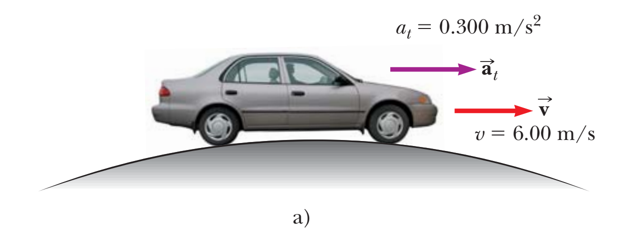
Figura 4.16 El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano *xy*. Si el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, las componentes de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ son una componente tangencial a_t y otra componente radial a_r.

En el movimiento circular uniforme, v es constante, $a_t = 0$ y la aceleración siempre es completamente radial, como se describe en la sección 4.4. En otras palabras, el movimiento circular uniforme es un caso especial de movimiento a lo largo de una trayectoria curva general. Además, si la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ no cambia, no existe aceleración radial y el movimiento es en una dimensión (en este caso, $a_r = 0$, pero a_t puede no ser cero.)

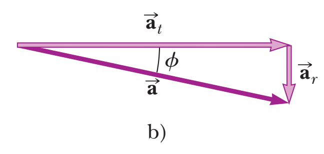
Pregunta rápida 4.5 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria y su rapidez aumenta con el tiempo. **i)** ¿En cuál de los siguientes casos sus vectores aceleración y velocidad son paralelos? a) cuando la trayectoria es circular, b) cuando la trayectoria es recta, c) cuando la trayectoria es una parábola, d) nunca. **ii)** De las mismas opciones, ¿en cuál caso sus vectores aceleración y velocidad son perpendiculares en cualquier parte de la trayectoria?

EJEMPLO 4.7 En la cumbre

Un automóvil muestra una aceleración constante de 0.300 m/s² paralela a la autopista. El automóvil pasa sobre una elevación en el camino tal que lo alto de la elevación tiene forma de círculo con 500 m de radio. En el momento en que el automóvil está en lo alto de la elevación, su vector velocidad es horizontal y tiene un magnitud de 6.00 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración total para el automóvil en este instante?



a)



b)

Figura 4.17 (Ejemplo 4.7) a) Un automóvil pasa sobre una elevación que tiene forma de círculo. b) El vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ es la suma de los vectores aceleración tangencial y radial $\vec{\mathbf{a}}_t$ y $\vec{\mathbf{a}}_r$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Forme ideas de la situación con la figura 4.17a y cualquier experiencia que haya tenido al conducir sobre elevaciones en el camino.

Categorizar Puesto que el automóvil que acelera se mueve a lo largo de una trayectoria curva, este problema se clasifica como uno que involucra una partícula que experimenta aceleraciones tangencial y radial. Se reconoce que es un problema de sustitución relativamente simple.

La aceleración radial está dada por la ecuación 4.18, con $v = 6.00$ m/s y $r = 500$ m. El vector aceleración radial se dirige recto hacia abajo y el vector aceleración tangencial tiene magnitud de 0.300 m/s² y es horizontal.

Evalúe la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00 \text{ m/s})^2}{500 \text{ m}} = -0.072\,0 \text{ m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$:

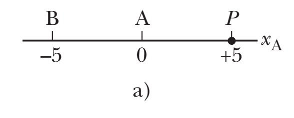
$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072\,0 \text{ m/s}^2)^2 + (0.300 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0.309 \text{ m/s}^2$$

Encuentre el ángulo ϕ (véase la figura 4.17b) entre $\vec{\mathbf{a}}$ y la horizontal:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072\,0 \text{ m/s}^2}{0.300 \text{ m/s}^2}\right) = -13.5°$$

4.6 Velocidad y aceleración relativas

En esta sección se describe cómo se relacionan las observaciones realizadas por diferentes observadores en distintos marcos de referencia. Un marco de referencia se describe mediante un sistema coordenado cartesiano para el cual un observador está en reposo en relación con el origen.



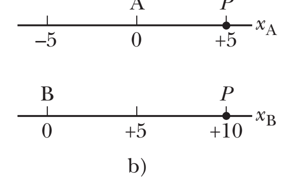


Figura 4.18 Diferentes observadores realizan distintas mediciones. a) El observador A se ubica en el origen y el observador B está en una posición de −5. Ambos observadores miden la posición de una partícula en *P*. b) Si ambos observadores se ven ellos mismos en el origen de su propio sistema coordenado, no estarán de acuerdo con el valor de la posición de la partícula en *P*.

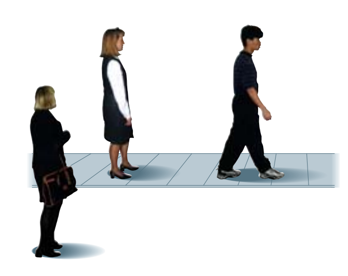


Figura 4.19 Dos observadoras miden la rapidez de un hombre que camina sobre una banda transportadora. La mujer que está de pie sobre la banda ve al hombre moverse con una rapidez más lenta que la mujer que lo observa desde una posición fija.

Establezca conceptos de una situación modelo en la que habrá distintas observaciones para diferentes observadores. Considere a los dos observadores A y B a lo largo de la recta numérica de la figura 4.18a. El observador A se ubica en el origen de un eje x_A unidimensional, mientras que el observador B está en la posición $x_A = -5$. La variable de posición se indica como x_A porque el observador A está en el origen de este eje. Ambos observadores miden la posición del punto *P*, que se ubica en $x_A = +5$. Suponga que el observador B decide que él se ubica en el origen de un eje x_B como en la figura 4.18b. Advierta que los dos observadores discrepan acerca del valor de la posición del punto *P*. El observador A afirma que el punto *P* se ubica en una posición con un valor de +5, mientras que el observador B afirma que se ubica en una posición con un valor de +10. Ambos observadores están en lo correcto, aun cuando hagan diferentes mediciones. Sus observaciones difieren porque realizan las mediciones desde diferentes marcos de referencia.

Imagine ahora que el observador B en la figura 4.18b se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x_B. Ahora las dos mediciones son incluso más diferentes. El observador A afirma que el punto *P* permanece en reposo en una posición con un valor de +5, mientras que el observador B afirma que la posición de *P* cambia continuamente con el tiempo, ¡que incluso lo pasa a él y se mueve más allá de donde él está! De nuevo, ambos observadores están en lo correcto, y la diferencia en sus observaciones surge de sus diferentes marcos de referencia.

Este fenómeno se explora aún más al considerar dos observadoras que miran a un hombre caminar sobre una banda transportadora en un aeropuerto en la figura 4.19. La mujer que está de pie en la banda transportadora ve que el hombre anda con una rapidez normal. La mujer que observa desde una posición fija ve al hombre moverse con una rapidez mayor, porque la rapidez de la banda transportadora se combina con su rapidez al andar. Ambas observadoras miran al mismo hombre y llegan a diferentes valores para su rapidez. Ambas están en lo correcto; la diferencia en sus observaciones resulta de la velocidad relativa de sus marcos de referencia.

En una situación más general, considere una partícula ubicada en el punto *P* de la figura 4.20. Imagine que el movimiento de esta partícula lo describen dos observadores, A en un marco de referencia S_A fijo en relación con la Tierra y un segundo B en un marco de referencia S_B que se mueve hacia la derecha en relación con S_A (y debido a eso en relación con la Tierra) con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. En esta discusión de velocidad relativa, se usa una notación de doble subíndice: el primer subíndice representa lo que se observa y el segundo representa quién realiza la observación. En consecuencia, la notación $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ significa la velocidad del observador B (y el marco unido S_B) medido por el observador A. Con esta notación, el observador B mide a A como si estuviera en movimiento hacia la izquierda con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{AB} = -\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Para propósitos de esta discusión, coloque a cada observador en su respectivo origen.

El tiempo $t = 0$ se define como el instante en que los orígenes de los dos marcos de referencia coinciden en el espacio. Por lo tanto, en el tiempo *t*, los orígenes de los marcos de referencia estarán separados una distancia $v_{BA}t$. La posición *P* de la partícula en relación con el observador A se marca con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y en relación con el observador B con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$, ambos en el tiempo *t*. A partir de la figura 4.20 se ve que los vectores $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ se relacionan mutuamente a partir de la expresión

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}t \tag{4.19}$$

Al derivar la ecuación 4.19 respecto del tiempo, y notar que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, se obtiene

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PB}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

Transformación de velocidad galileana ▶

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \tag{4.20}$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ es la velocidad de la partícula en *P* medida por el observador A y $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ es su velocidad medida por B. (El símbolo $\vec{\mathbf{u}}$ se usa para velocidad de partícula en lugar de $\vec{\mathbf{v}}$, que se usa para velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Las ecuaciones 4.19 y 4.20 se conocen como **ecuaciones de transformación galileanas**. Relacionan la posición y veloci-

dad de una partícula según las miden los observadores en movimiento relativo. Advierta el patrón de los subíndices en la ecuación 4.20. Cuando se suman velocidades relativas, los subíndices internos (B) son lo mismos y los exteriores (*P*, A) igualan los subíndices de la velocidad en el lado izquierdo de la ecuación.

Aunque los observadores en dos marcos miden diferentes velocidades para la partícula, miden la *misma aceleración* cuando $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante. Se puede verificar que, al tomar la derivada en el tiempo de la ecuación 4.20,

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{BA}}{dt}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, $d\vec{\mathbf{v}}_{BA}/dt = 0$. Por tanto, se concluye que $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = \vec{\mathbf{a}}_{PB}$ porque $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = d\vec{\mathbf{u}}_{PA}/dt$ y $\vec{\mathbf{a}}_{PB} = d\vec{\mathbf{u}}_{PB}/dt$. Esto es, **la aceleración de la partícula medida por un observador en un marco de referencia es la misma que la medida por cualquier otro observador que se mueva con velocidad constante en relación con el primer marco.**

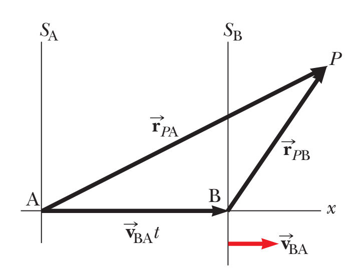


Figura 4.20 Una partícula ubicada en *P* es descrita por dos observadores, uno en el marco de referencia fija S_A y el otro en el marco S_B, que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. El vector $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ es el vector de posición de la partícula en relación con S_A y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ es su vector de posición en relación con S_B.

EJEMPLO 4.8 Un bote que cruza un río

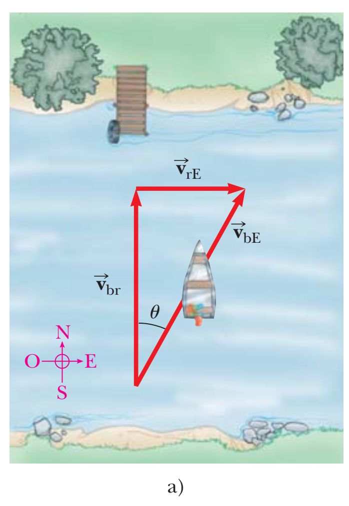
Un bote que cruza un río ancho se mueve con una rapidez de 10.0 km/h en relación con el agua. El agua en el río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h hacia el este en relación con la Tierra.

A) Si el bote se dirige hacia el norte, determine la velocidad del bote en relación con un observador que está de pie en cualquier orilla.

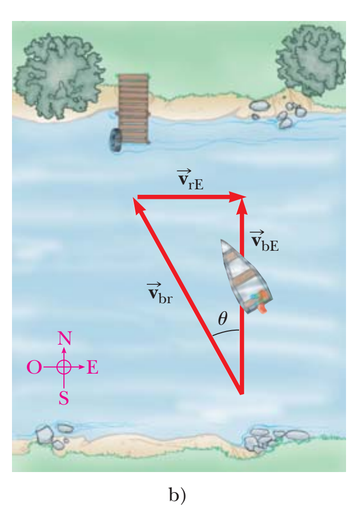
SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que se mueve a través de un río mientras lo empuja la corriente. No será capaz de moverse directamente a través del río, sino que terminará corriente abajo, como muestra la figura 4.21a.

Categorizar Debido a las velocidades independientes de usted y el río, es posible clasificar este problema como uno que involucra velocidades relativas.



a)



b)

Figura 4.21 (Ejemplo 4.8) a) Un bote se dirige directamente a través de un río y termina corriente abajo. b) Para moverse directamente a través del río, el bote debe dirigirse corriente arriba.

Analizar Se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{br}$, la velocidad del *bote* en relación con el *río*, y $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ la velocidad del *río* en relación con la *Tierra*. Lo que se debe encontrar es $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, la velocidad del *bote* respecto de la *Tierra*. La relación entre estas tres cantidades es $\vec{\mathbf{v}}_{bE} = \vec{\mathbf{v}}_{br} + \vec{\mathbf{v}}_{rE}$. Los términos en la ecuación se deben manipular como cantidades vectoriales; los vectores se muestran en la figura 4.21. La cantidad $\vec{\mathbf{v}}_{br}$ es hacia el norte; $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ es hacia el este; y la suma vectorial de los dos, $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, está a un ángulo θ como se define en la figura 4.21a.

Encuentre la rapidez v_{bE} del bote en relación con la Tierra mediante el teorema de Pitágoras:

$$v_{bE} = \sqrt{{v_{br}}^2 + {v_{rE}}^2} = \sqrt{(10.0\text{ km/h})^2 + (5.00\text{ km/h})^2}$$
$$= 11.2\text{ km/h}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = 26.6°$$

Finalizar El bote se mueve con una rapidez de 11.2 km/h en la dirección 26.6° noreste en relación con la Tierra. Note que la rapidez de 11.2 km/h es más rápida que la rapidez del bote de 10.0 km/h. La velocidad de la corriente se suma a la suya para darle una mayor rapidez. Observe en la figura 4.21a que su velocidad resultante está a un ángulo con la dirección recta a través del río, así que terminará corriente abajo, como se predijo.

B) Si el bote viaja con la misma rapidez de 10.0 km/h en relación con el río y debe viajar al norte, como se muestra en la figura 4.21b, ¿hacia dónde se debe dirigir?

SOLUCIÓN

Conceptualizar/categorizar Esta pregunta es una extensión del inciso A), así que ya se tienen ideas y ya se clasificó el problema. Una característica nueva de la formación de conceptos es que ahora el bote se debe dirigir corriente arriba para ir recto a través del río.

Analizar Ahora el análisis involucra el nuevo triángulo que se muestra en la figura 4.21b. Como en el inciso A), se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ y la magnitud del vector $\vec{\mathbf{v}}_{br}$ y se quiere que $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$ se dirija a través del río. Note la diferencia entre el triángulo de la figura 4.21a y el de la figura 4.21b: la hipotenusa de la figura 4.21b ya no es $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$.

Aplique el teorema de Pitágoras para hallar $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 - (5.00 \text{ km/h})^2} = 8.66 \text{ km/h}$$

Encuentre la dirección en la que se dirige el bote:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0°$$

Finalizar El bote se debe dirigir corriente arriba de modo que viaje directamente hacia el norte a través del río. Para la situación que se conoce, el bote debe dirigirse 30.0° al noroeste. Para corrientes más rápidas, el bote se debe dirigir corriente arriba en ángulos mayores.

¿Y si...? Considere que los dos botes de los incisos A) y B) compiten al cruzar el río. ¿Cuál bote llega primero a la orilla opuesta?

Respuesta En el inciso A), la velocidad de 10 km/h se dirige directamente a través del río. En el inciso B), la velocidad que se dirige a través del río tiene una magnitud de sólo 8.66 km/h. Por lo tanto, el bote del inciso A) tiene una componente de velocidad mayor directamente a través del río y llega primero.

Resumen

DEFINICIONES

El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula es la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \qquad \textbf{(4.1)}$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \qquad \textbf{(4.2)}$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la velocidad promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \qquad \textbf{(4.3)}$$

La **aceleración promedio** de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \qquad \textbf{(4.4)}$$

La **aceleración instantánea** de una partícula se define como el valor límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \qquad \textbf{(4.5)}$$

El **movimiento de proyectil** es una clase de movimiento en dos dimensiones bajo aceleración constante, donde $a_x = 0$ y $a_y = -g$.

Una partícula que se mueve en un círculo de radio r con rapidez constante v es un **movimiento circular uniforme**. Para tal partícula, el **periodo** de su movimiento es

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \textbf{(4.15)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Si una partícula se mueve con aceleración *constante* $\vec{\mathbf{a}}$ y tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$ y posición $\vec{\mathbf{r}}_i$ en $t = 0$, sus vectores velocidad y de posición en algún tiempo posterior t son

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \qquad \textbf{(4.8)}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \qquad \textbf{(4.9)}$$

Para movimiento en dos dimensiones en el plano xy bajo aceleración constante, cada una de estas expresiones vectoriales es equivalente a dos expresiones componentes: una para el movimiento en la dirección x y otra para el movimiento en la dirección y.

Es útil pensar en el movimiento de proyectil en términos de una combinación de dos modelos de análisis: 1) la partícula bajo modelo de velocidad constante en la dirección x y 2) el modelo de partícula bajo aceleración constante en la dirección vertical con una aceleración descendente de magnitud $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

Una partícula en movimiento circular uniforme experimenta una aceleración radial $\vec{\mathbf{a}}$ puesto que la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cambia en el tiempo. Esta aceleración se llama **aceleración centrípeta** y su dirección siempre es hacia el centro del círculo.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva en tal forma que tanto la magnitud como la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cambian en el tiempo, la partícula tiene un vector aceleración que se puede describir mediante dos vectores componentes: 1) una componente del vector radial $\vec{\mathbf{a}}_r$ que causa el cambio en dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ y 2) una componente del vector tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$ que causa el cambio en la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$. La magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_r$ es v^2/r y la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_t$ es $|dv/dt|$.

La velocidad $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ de una partícula medida en un marco de referencia fijo S_A se puede relacionar con la velocidad $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ de la misma partícula medida en un marco de referencia móvil S_B mediante

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \qquad \textbf{(4.20)}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es la velocidad de S_B en relación con S_A.

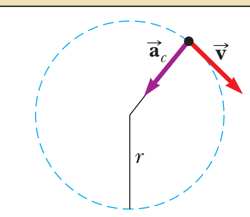
MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula en movimiento circular uniforme. Si una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con una rapidez constante v, la magnitud de su aceleración centrípeta está dada por

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(4.14)}$$

y el periodo del movimiento de la partícula está dado por la ecuación 4.15.





Preguntas

O denota pregunta objetiva.

1. **O** La figura P4.1 muestra una imagen desde el aire de un automóvil que entra a la curva de una autopista. Conforme el automóvil se mueve del punto 1 al punto 2, su rapidez se duplica. ¿Cuál vector, del a) al g), muestra la dirección de la aceleración promedio del automóvil entre estos dos puntos?
2. Si usted conoce los vectores de posición de una partícula en dos puntos, a lo largo de su trayectoria, y también conoce el intervalo de tiempo durante el que se mueve de un punto al otro, ¿puede determinar la velocidad instantánea de la partícula? ¿Su velocidad promedio? Explique.
3. Construya diagramas de movimiento que muestren la velocidad y la aceleración de un proyectil en varios puntos a lo largo de su trayectoria, si supone que a) el proyectil se lanza horizontalmente y b) el proyectil se lanza en un ángulo θ con la horizontal.

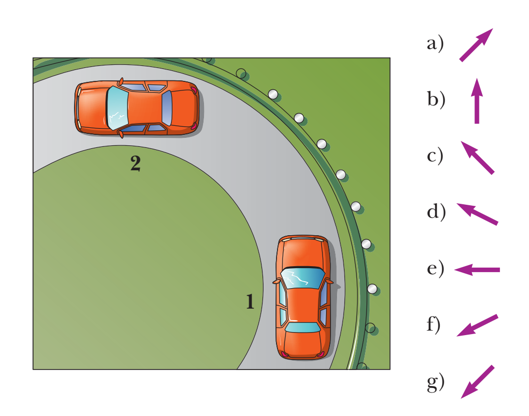


Figura P4.1

4. O Al entrar a su dormitorio, un estudiante lanza su mochila hacia arriba a la derecha con un ángulo de 45° con la horizontal. La resistencia del aire no afecta la mochila. Se mueve del punto Ⓐ inmediatamente después de dejar su mano, al punto Ⓑ en lo alto de su vuelo y al punto Ⓒ inmediatamente antes de aterrizar en su cama. **i)** Ordene las siguientes componentes de velocidad horizontal y vertical del más grande al más pequeño. Note que cero es más grande que un número negativo. Si dos cantidades son iguales, muéstrelas como iguales en su lista. Si cualquier cantidad es igual que cero, muestre ese hecho en su lista. a) $v_{Ⓐx}$, b) $v_{Ⓐy}$, c) $v_{Ⓑx}$, d) $v_{Ⓑy}$, e) $v_{Ⓒx}$, f) $v_{Ⓒy}$. **ii)** De igual modo, ordene las siguientes componentes de aceleración. a) $a_{Ⓐx}$, b) $a_{Ⓐy}$, c) $a_{Ⓑx}$, d) $a_{Ⓑy}$, e) $a_{Ⓒx}$, f) $a_{Ⓒy}$.

5. Una nave espacial se desplaza en el espacio con una velocidad constante. De súbito, una fuga de gas lateral de la nave le da una aceleración constante en una dirección perpendicular a la velocidad inicial. La orientación de la nave no cambia, así que la aceleración permanece perpendicular a la dirección original de la velocidad. ¿Cuál es la forma de la trayectoria seguida por la nave en esta situación?

6. O ¿En cuál de las siguientes situaciones el objeto en movimiento se representa como un proyectil? Elija todas las respuestas correctas. a) Un zapato se lanza en una dirección arbitraria. b) Un avión jet que cruza el cielo con sus motores impulsando al avión hacia adelante. c) Un cohete que deja la plataforma de lanzamiento. d) Un cohete que se mueve a través del cielo, a mucho menos que la rapidez del sonido, después de que su combustible se agotó. e) Un buzo que lanza una piedra bajo el agua.

7. Un proyectil es lanzado a cierto ángulo de la horizontal con una rapidez inicial v_i y resistencia del aire despreciable. ¿El proyectil es un cuerpo en caída libre? ¿Cuál es su aceleración en la dirección vertical? ¿Cuál es su aceleración en la dirección horizontal?

8. O Establezca cuáles de las siguientes cantidades, si alguna, permanece constante conforme un proyectil se mueve a través de su trayectoria parabólica: a) rapidez, b) aceleración, c) componente horizontal de velocidad, d) componente vertical de velocidad.

9. O Un proyectil se lanza sobre la Tierra con cierta velocidad inicial y se mueve sin resistencia del aire. Otro proyectil se lanza con la misma velocidad inicial en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1/6. **i)** ¿Cuál es el alcance del proyectil en la Luna en relación con el del proyectil en la Tierra? a) 1/6, b) el mismo, c) $\sqrt{6}$ veces, d) 6 veces, e) 36 veces. **ii)** ¿Cómo se compara la altitud máxima del proyectil en la Luna con la del proyectil en la Tierra? Elija entre las mismas posibilidades, de la a) a la e).

10. Explique si las siguientes partículas tienen o no una aceleración: a) una partícula que se mueve en línea recta con rapidez constante y b) una partícula que se mueve alrededor de una curva con rapidez constante.

11. Describa cómo un conductor puede dirigir un automóvil que viaja con rapidez constante de modo que a) la aceleración sea cero o b) la magnitud de la aceleración permanezca constante.

12. O Un tapón de goma en el extremo de una cuerda se balancea de manera estable en un círculo horizontal. En un intento, se mueve con rapidez v en un círculo de radio r. En una segundo intento, se mueve con una mayor rapidez $3v$ en un círculo de radio $3r$. **i)** En este segundo intento, su aceleración es (elija una) a) la misma que en el primer intento, b) tres veces mayor, c) un tercio, d) nueve veces mayor, e) un sexto. **ii)** En el segundo intento, ¿cómo se compara el periodo con el del primer intento? Elija sus respuestas de las mismas posibilidades de la a) a la e).

13. Una patinadora sobre hielo ejecuta una figura ocho, que consiste en dos trayectorias circulares iguales y tangentes. A lo largo de la primera trayectoria aumenta su rapidez uniformemente, y durante la segunda se mueve con una rapidez constante. Dibuje un diagrama de movimiento que muestre sus vectores velocidad y aceleración en varios puntos a lo largo de la trayectoria de movimiento.

14. O Un camión ligero entra a una curva que tiene un radio de 150 m con una rapidez máxima de 32.0 m/s. Para tener la misma aceleración, ¿a qué rapidez máxima puede ir alrededor de una curva que tiene un radio de 75.0 m? a) 64 m/s, b) 45 m/s, c) 32 m/s, d) 23 m/s, e) 16 m/s, f) 8 m/s.

15. O Galileo sugirió la idea para esta pregunta: un marinero suelta una llave desde lo alto de un mástil vertical del bote mientras éste tiene un movimiento rápido y estable en línea recta hacia adelante. ¿Dónde golpea la llave en la cubierta? a) adelante de la base del mástil, b) en la base del mástil, c) detrás de la base del mástil, d) en el lado desde donde sopla el viento de la base del mástil.

16. O Una niña, que se mueve a 8 m/s sobre patines de ruedas, rebasa a un niño que se mueve a 5 m/s conforme ambos patinan en línea recta. El niño lanza una bola hacia atrás, hacia la niña, y le da una rapidez de 12 m/s en relación con él. ¿Cuál es la rapidez de la bola en relación con la niña quien la atrapa? a) $(8 + 5 + 12)$ m/s, b) $(8 - 5 - 12)$ m/s, c) $(8 + 5 - 12)$ m/s, d) $(8 - 5 + 12)$ m/s, e) $(-8 + 5 + 12)$ m/s.

Problemas

Sección 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

1. Un motociclista se dirige al sur a 20.0 m/s durante 3.00 min, luego da vuelta al oeste y viaja a 25.0 m/s durante 2.00 min y finalmente viaja al noroeste a 30.0 m/s durante 1.00 min. Para este viaje de 6.00 min, encuentre a) el desplazamiento vectorial total, b) la rapidez promedio y c) la velocidad promedio. Sea el eje x positivo que apunta al este.

2. Una bola de golf es golpeada desde un tee en el borde de un risco. Sus coordenadas x y y como funciones del tiempo se conocen por las expresiones siguientes:

$$x = (18.0 \text{ m/s})t$$

$$y = (4.00 \text{ m/s})t - (4.90 \text{ m/s}^2)t^2$$

a) Escriba una expresión vectorial para la posición de la bola como función del tiempo, con los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Al tomar derivadas, obtenga expresiones para b) el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ como función del tiempo y c) el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ como función del tiempo. A continuación use la notación de vector unitario para escribir expresiones para d) la posición, e) la velocidad y f) la aceleración de la bola de golf, todos en $t = 3.00$ s.

3. Cuando el Sol está directamente arriba, un halcón se clava hacia el suelo con una velocidad constante de 5.00 m/s a 60.0° bajo la horizontal. Calcule la rapidez de su sombra a nivel del suelo.

4. ● Las coordenadas de un objeto que se mueve en el plano xy varían con el tiempo de acuerdo con $x = -(5.00 \text{ m}) \operatorname{sen}(\omega t)$ y $y = (4.00 \text{ m}) - (5.00 \text{ m})\cos(\omega t)$, donde ω es una constante y t está en segundos. a) Determine las componentes de velocidad y las componentes de aceleración del objeto en $t = 0$. b) Escriba expresiones para el vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración del objeto en cualquier tiempo $t > 0$. c) Describa la trayectoria del objeto en una gráfica xy.

Sección 4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

5. Un pez que nada en un plano horizontal tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 1.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s en un punto en el océano donde la posición relativa a cierta roca es $\vec{\mathbf{r}}_i = (10.0\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Después de que el pez nada con aceleración constante durante 20.0 s, su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}_i = (20.0\hat{\mathbf{i}} - 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración? b) ¿Cuál es la dirección de la aceleración respecto del vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$? c) Si el pez mantiene aceleración constante, ¿dónde está en $t = 25.0$ s y en qué dirección se mueve?

6. El vector de posición de una partícula varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $\vec{\mathbf{r}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00t^2\hat{\mathbf{j}})$ m. a) Encuentre expresiones para la velocidad y aceleración de la partícula como funciones del tiempo. b) Determine la posición y velocidad de la partícula en $t = 1.00$ s.

7. *¿Y si la aceleración no es constante?* Una partícula parte del origen con velocidad $5\hat{\mathbf{i}}$ m/s en $t = 0$ y se mueve en el plano xy con una aceleración variable conocida por $\vec{\mathbf{a}} = (6\sqrt{t}\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2, donde t está en s. a) Determine el vector velocidad de la partícula como función del tiempo. b) Determine la posición de la partícula como función del tiempo.

8. Una partícula que inicialmente se ubica en el origen tiene una aceleración de $\vec{\mathbf{a}} = 3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2 y una velocidad inicial de $\vec{\mathbf{v}}_i = 5.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Encuentre a) el vector de posición y de velocidad de la partícula en cualquier tiempo t y b) las coordenadas y rapidez de la partícula en $t = 2.00$ s.

Sección 4.3 Movimiento de proyectil

Nota: Ignore la resistencia del aire en todos los problemas. Considere $g = 9.80$ m/s^2 en la superficie de la Tierra.

9. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que se desliza de la barra y golpea el suelo a 1.40 m de la base de la barra. Si la altura de la barra es de 0.860 m, a) ¿con qué velocidad el tarro dejó la barra? b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

10. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. El cantinero acaba de decidir ir a casa y repensar su vida, de modo que no ve el tarro. El tarro se desliza de la barra y golpea el suelo a una distancia d de la base de la barra. La altura de la barra es h. a) ¿Con qué velocidad el tarro dejó la barra? b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

11. Para iniciar una avalancha en una pendiente de la montaña, un obús de artillería es disparado con una velocidad inicial de 300 m/s a 55.0° sobre la horizontal. Explota en la ladera 42.0 s después de ser disparado. ¿Cuáles son las coordenadas x y y donde explota el obús, en relación con su punto de disparo?

12. ● Una roca se lanza hacia arriba desde el suelo en tal forma que la altura máxima de su vuelo es igual a su alcance horizontal d. a) ¿A qué ángulo θ se lanza la roca? b) **¿Y si...?** ¿Su respuesta al inciso a) cambiaría en un planeta diferente? Explique. c) ¿Cuál es el alcance $d_{\text{máx}}$ que puede lograr la roca si se lanza a la misma rapidez pero en ángulo óptimo para alcance máximo?

13. Un proyectil se dispara en tal forma que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección?

14. Un bombero, a una distancia d de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua desde una manguera en un ángulo θ_i sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.14. Si la rapidez inicial del chorro es v_i, ¿en qué altura h el agua golpea al edificio?

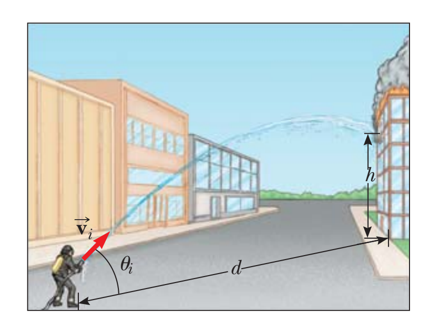


Figura P4.14

15. Una bola se lanza desde una ventana en un piso superior de un edificio. A la bola se le da una velocidad inicial de 8.00 m/s a un ángulo de 20.0° bajo la horizontal. Golpea el suelo 3.00 s después. a) ¿A qué distancia, horizontalmente, desde la

base del edificio, la bola golpea el suelo? b) Encuentre la altura desde la que se lanzó la bola. c) ¿Cuánto tarda la bola en llegar a un punto 10.0 m abajo del nivel de lanzamiento?

16. Un arquitecto que diseña jardines programa una cascada artificial en un parque de la ciudad. El agua fluirá a 1.70 m/s y dejará el extremo de un canal horizontal en lo alto de una pared vertical de 2.35 m de altura, y desde ahí caerá en una piscina. a) ¿El espacio detrás de la cascada será suficientemente ancho para un pasillo de peatones? b) Para vender su plan al concejo de la ciudad, el arquitecto quiere construir un modelo a escala estándar, a un doceavo del tamaño real. ¿Qué tan rápido debe fluir el agua en el canal del modelo?

17. Un pateador debe hacer un gol de campo desde un punto a 36.0 m (casi de 40 yardas) de la zona de gol, y la mitad de los espectadores espera que la bola libre la barra transversal, que tiene 3.05 m de alto. Cuando se patea, la bola deja el suelo con una rapidez de 20.0 m/s en un ángulo de 53.0° de la horizontal. a) ¿Por cuánto resulta insuficiente para librar la barra? b) ¿La bola se aproxima a la barra transversal mientras aún se eleva o mientras va de caída?

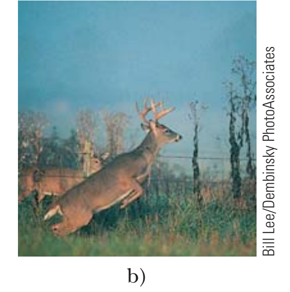
18. Un bombardero en picada tiene una velocidad de 280 m/s a un ángulo θ bajo la horizontal. Cuando la altitud de la aeronave es 2.15 km, libera una bomba, que golpea un objetivo en el suelo. La magnitud del desplazamiento desde el punto de liberación de la bomba al objetivo es 3.25 km. Encuentre el ángulo θ.

19. Un patio de juego está en el techo plano de una escuela, 6.00 m arriba del nivel de la calle. La pared vertical del edificio tiene 7.00 m de alto y forma una barda de 1 m de alto alrededor del patio. Una bola cae en la calle y un peatón la regresa lanzándola en un ángulo de 53.0° sobre la horizontal a un punto 24.0 m desde la base de la pared del edificio. La bola tarda 2.20 s en llegar a un punto vertical sobre la pared. a) Encuentre la rapidez a la que se lanzó la bola. b) Encuentre la distancia vertical sobre la que libra la pared. c) Encuentre la distancia desde la pared al punto en el techo donde aterriza la bola.

20. Una estrella de basquetbol cubre 2.80 m en la horizontal en un salto para encestar la bola (figura P4.20a). Su movimiento a través del espacio se representa igual que el de una partícula en su *centro de masa*, que se definirá en el capítulo 9. Su centro de masa está a una altura de 1.02 m cuando deja el suelo. Llega a una altura máxima de 1.85 m sobre el suelo y está a una elevación de 0.900 m cuando toca el suelo de nuevo. Determine: a) su tiempo de vuelo (su "tiempo colgado"), b) sus componentes de velocidad horizontal y c) vertical en el instante de despegar y d) su ángulo de despegue. e) Por comparación, determine el tiempo colgado de una ciervo cola blanca que da un salto (figura P4.20b) con elevaciones de centro de masa $y_i = 1.20$ m, $y_{\text{máx}} = 2.50$ m y $y_f = 0.700$ m.



a)



b)

Figura P4.20

21. Un jugador de futbol patea una roca horizontalmente de un montículo de 40.0 m de alto en un estanque. Si el jugador escucha el sonido del chapoteo 3.00 s después, ¿cuál fue la rapidez inicial dada a la roca? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es 343 m/s.

22. ● El movimiento de un cuerpo humano a través del espacio se representa como el movimiento de una partícula en el centro de masa del cuerpo, como se estudiará en el capítulo 9. Las componentes de la posición del centro de masa de un atleta desde el principio hasta el fin de cierto salto se describen por las dos ecuaciones

$$x_f = 0 + (11.2 \text{ m/s})(\cos 18.5°)t$$

$$0.360 \text{ m} = 0.84 \text{ m} + (11.2 \text{ m/s})(\text{sen } 18.5°)t - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

donde t es el tiempo cuando el atleta aterriza después de despegar en $t = 0$. Identifique a) su vector de posición y b) su vector velocidad en el punto de despegue. c) El récord mundial de salto largo es 8.95 m. ¿Qué distancia saltó el atleta en este problema? d) Describa la forma de la trayectoria de su centro de masa.

23. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura h, el máximo de su trayectoria vertical. Lanza fragmentos ardientes en todas direcciones, pero todas con la misma rapidez v. Gránulos de metal solidificado caen al suelo sin resistencia del aire. Encuentre el ángulo más pequeño que forma con la horizontal la velocidad final de un fragmento.

Sección 4.4 Partícula en movimiento circular uniforme

Nota: Los problemas 10 y 12 del capítulo 6 también se pueden asignar a esta sección y la siguiente.

24. A partir de la información de la parte final del libro, calcule la aceleración radial de un punto en la superficie de la Tierra, en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje.

25. El atleta que se muestra en la figura P4.25 rota un disco de 1.00 kg a lo largo de una trayectoria circular de 1.06 m de radio. La rapidez máxima del disco es 20.0 m/s. Determine la magnitud de la aceleración radial máxima del disco.

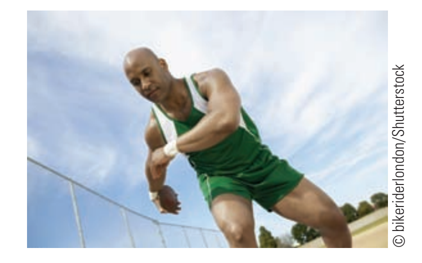


Figura P4.25

26. Conforme se separan los cohetes propulsores, los astronautas del trasbordador espacial sienten una aceleración de hasta $3g$, donde $g = 9.80$ m/s^2. En su entrenamiento, los astronautas montan un dispositivo en el que experimentan tal aceleración como una aceleración centrípeta. En específico, el astronauta se sujeta con firmeza al extremo de un brazo mecánico que luego gira con rapidez constante en un círculo horizontal. De-

termine la rapidez de rotación, en revoluciones por segundo, requerida para dar a un astronauta una aceleración centrípeta de $3.00g$ mientras está en movimiento circular con radio de 9.45 m.

27. El joven David, quien mató a Goliat, experimentó con hondas antes de derribar al gigante. Encontró que podía hacer girar una honda de 0.600 m de longitud con una relación de 8.00 rev/s. Si aumentaba la longitud a 0.900 m, podía girar la honda sólo 6.00 veces por segundo. a) ¿Qué relación de rotación da la mayor rapidez a la piedra en el extremo de la honda? b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la piedra a 8.00 rev/s? c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta a 6.00 rev/s?

Sección 4.5 Aceleraciones tangencial y radial

28. ● a) ¿Una partícula, que se mueve con rapidez instantánea de 3.00 m/s en una trayectoria con 2.00 m de radio de curvatura, podría tener una aceleración de 6.00 m/s^2 de magnitud? b) ¿Podría tener $|\vec{\mathbf{a}}| = 4.00$ m/s^2? En cada caso, si la respuesta es sí, explique cómo puede ocurrir; si la respuesta es no, explique por qué.

29. Un tren frena mientras entra a una curva horizontal cerrada, y frena de 90.0 km/h a 50.0 km/h en los 15.0 s que tarda en cubrir la curva. El radio de la curva es de 150 m. Calcule la aceleración en el momento en que la rapidez del tren alcanza 50.0 km/h. Suponga que continúa frenando a este tiempo con la misma relación.

30. Una bola se balancea en un círculo vertical en el extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. Cuando la bola está a 36.9° después del punto más bajo en su viaje hacia arriba, su aceleración total es $(-22.5\hat{\mathbf{i}} + 20.2\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. En ese instante, a) bosqueje un diagrama vectorial que muestre las componentes de su aceleración, b) determine la magnitud de su aceleración radial y c) determine la rapidez y velocidad de la bola.

31. La figura P4.31 representa la aceleración total de una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj en un círculo de 2.50 m de radio en cierto instante de tiempo. En este instante, encuentre a) la aceleración radial, b) la rapidez de la partícula y c) su aceleración tangencial.

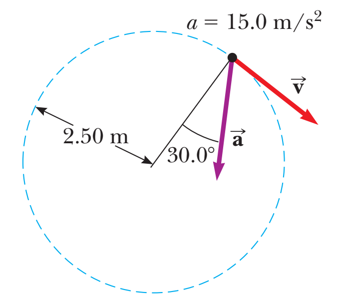


Figura P4.31

32. Un automóvil de carreras parte del reposo en una pista circular; aumenta su rapidez a una cantidad constante a_t conforme da una vuelta a la pista. Encuentre el ángulo que forma la aceleración total del automóvil, con el radio que conecta el centro de la pista y el auto, en el momento en que el automóvil completa el círculo.

Sección 4.6 Velocidad y aceleración relativas

33. Un automóvil viaja hacia el este con una rapidez de 50.0 km/h. Gotas de lluvia caen con una rapidez constante en vertical respecto de la Tierra. Las trazas de la lluvia en las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60.0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la lluvia en relación con a) el automóvil y b) la Tierra.

34. Antonio en su Corvette acelera de acuerdo a $(300\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2 mientras Jill en su Jaguar acelera a $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. Ambos parten del reposo en el origen de un sistema coordenado *xy*. Después de 5.00 s, a) ¿cuál es la rapidez de Antonio respecto de Jill?, b) ¿qué distancia los separa?, y c) ¿cuál es la aceleración de Antonio en relación con Jill?

35. Un río tiene una rapidez estable de 0.500 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1.00 km y de regreso al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de 1.20 m/s en aguas tranquilas, ¿cuánto tarda el viaje? Compare esta respuesta con el intervalo de tiempo requerido para el viaje si el agua estuviese tranquila.

36. ¿Cuánto tarda un automóvil en rebasar a 60.0 km/h, por el carril izquierdo, a un automóvil que viaja en la misma dirección en el carril derecho a 40.0 km/h, si las defensas frontales de los automóviles están separadas 100 m?

37. Dos nadadores, Alan y Camillé, parten desde el mismo punto en la orilla de una corriente ancha que circula con una rapidez v. Ambos se mueven con la misma rapidez c (donde $c > v$) en relación con el agua. Alan nada corriente abajo una distancia L y luego corriente arriba la misma distancia. Camillé nada de modo que su movimiento en relación con la Tierra es perpendicular a las orillas de la corriente. Ella nada la distancia L y luego de vuelta la misma distancia, de modo que ambos nadadores regresan al punto de partida. ¿Cuál nadador regresa primero? *Nota:* Primero suponga la respuesta.

38. ● Un camión de granja se dirige al norte con una velocidad constante de 9.50 m/s en un tramo horizontal ilimitado del camino. Un niño se monta en la parte trasera del camión y lanza una lata de refresco hacia arriba y atrapa el proyectil en el mismo punto, pero 16.0 m más lejos en el camino. a) En el marco de referencia el camión, ¿a qué ángulo con la vertical el niño lanza la lata? b) ¿Cuál es la rapidez inicial de la lata en relación con el camión? c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la lata como la ve el niño? d) Un observador en el suelo observa al niño lanzar la lata y atraparla. En este marco de referencia del observador en el suelo, describa la forma de la trayectoria de la lata y determine su velocidad inicial.

39. Un estudiante de ciencias monta en un vagón plataforma de un tren que viaja a lo largo de una pista horizontal recta con una rapidez constante de 10.0 m/s. El estudiante lanza una bola en el aire a lo largo de una trayectoria que él juzga con un ángulo inicial de 60.0° sobre la horizontal y está en línea con la vía. La profesora del estudiante, que está de pie en el suelo cerca de ahí, observa que la bola se eleva verticalmente. ¿Qué tan alto ve elevarse la bola?

40. ● Un tornillo cae desde el techo de un vagón de ferrocarril en movimiento que acelera hacia el norte en una relación de 2.50 m/s^2. a) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con el vagón de ferrocarril? b) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con la Tierra? c) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador dentro del vagón. d) Describa la

trayectoria del tornillo como la ve un observador fijo en la Tierra.

41. Un guardacostas detecta un barco no identificado a una distancia de 20.0 km en la dirección 15.0° al noreste. El barco viaja a 26.0 km/h en un curso a 40.0° al noreste. El guardacostas quiere enviar una lancha rápida para interceptar la nave e investigarla. Si la lancha rápida viaja a 50.0 km/h, ¿en qué dirección debe dirigirse? Exprese la dirección como una brújula que se orienta con el norte.

Problemas adicionales

42. *El "cometa vómito"*. Para el entrenamiento de astronautas y la prueba de equipo en gravedad cero, la NASA vuela un KC135A a lo largo de una ruta de vuelo parabólica. Como se muestra en la figura P4.42, la nave asciende desde 24 000 pies a 31 000 pies, donde entra a la parábola de cero g con una velocidad de 143 m/s y nariz alta a 45.0° y sale con velocidad de 143 m/s a 45.0° nariz baja. Durante esta porción del vuelo, la nave y los objetos dentro de su cabina acolchonada están en caída libre; se han vuelto balísticos. Entonces la nave sale del clavado con una aceleración ascendente de $0.800g$ y se mueve en un círculo vertical de 4.13 km de radio. (Durante esta porción del vuelo, los ocupantes de la nave perciben una aceleración de $1.8g$.) ¿Cuáles son a) la rapidez y b) la altitud de la nave en lo alto de la maniobra? c) ¿Cuál es el intervalo de tiempo que pasa en gravedad cero? d) ¿Cuál es la rapidez de la nave en el fondo de la ruta de vuelo?

43. Un atleta lanza un balón de basquetbol hacia arriba desde el suelo y le da una rapidez de 10.6 m/s a un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. a) ¿Cuál es la aceleración del balón en el punto más alto de su trayectoria? b) En su camino hacia abajo, el balón golpea el aro de la canasta, a 3.05 m sobre el suelo. Rebota recto hacia arriba con la mitad de la rapidez con la que golpea el aro. ¿Qué altura sobre el suelo alcanza el balón en este rebote?

44. ● a) Un atleta lanza un balón hacia el este, con rapidez inicial de 10.6 m/s a un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. Justo cuando el balón alcanza el punto más alto de su trayectoria, golpea un águila (la mascota del equipo contrario) que vuela horizontalmente al oeste. El balón rebota de vuelta horizontalmente al oeste con 1.50 veces la rapidez que tenía justo antes de su colisión. ¿A qué distancia cae el balón detrás del jugador que lo lanzó? b) Esta situación no está considerada en el libro de reglas, así que los oficiales regresan el reloj para repetir esta parte del juego. El jugador lanza el balón en la misma forma. El águila está totalmente atolondrada y esta vez intercepta el balón de modo que, en el mismo punto en su trayectoria, el balón nuevamente rebota del pico del ave con 1.50 veces su rapidez de impacto, y se mueve al oeste el mismo ángulo distinto de cero con la horizontal. Ahora el balón golpea la cabeza del jugador, en la misma ubicación donde sus manos lo liberaron. ¿El ángulo es necesariamente positivo (es decir, sobre la horizontal), necesariamente negativo (bajo la horizontal) o podría ser cualquiera? Dé un argumento convincente, matemático o conceptual, de su respuesta.

45. Manny Ramírez batea un cuadrangular de modo que la pelota apenas libra la fila superior de gradas, de 21.0 m de alto, ubicada a 130 m de la placa de bateo. La pelota se golpea en un ángulo de 35.0° de la horizontal y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre a) la rapidez inicial de la pelota, b) el intervalo de tiempo requerido para que la pelota alcance las gradas y c) las componentes de velocidad y la rapidez de la pelota cuando pasa sobre la fila superior. Suponga que la pelota se golpea en una altura de 1.00 m sobre el suelo.

46. Mientras algún metal fundido salpica, una gota vuela hacia el este con velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i sobre la horizontal y otra gota vuela hacia el oeste con la misma rapidez al mismo ángulo sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.46. En términos de v_i y θ_i, encuentre la distancia entre las gotas como función del tiempo.

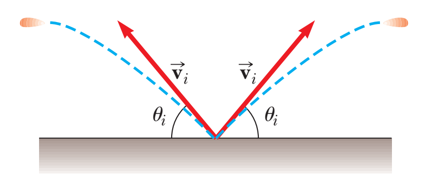
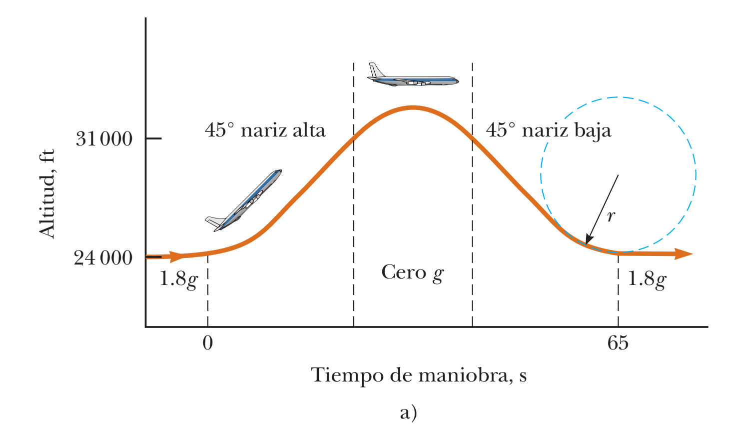
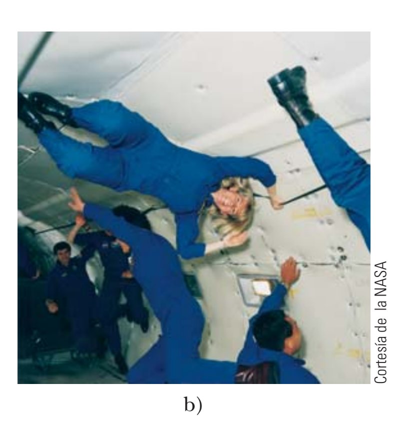


Figura P4.46

47. Un péndulo con un cordón de longitud $r = 1.00$ m se balancea en un plano vertical (figura P4.47). Cuando el péndulo está en las dos posiciones horizontales $\theta = 90.0°$ y $\theta = 270°$, su rapidez es 5.00 m/s. a) Encuentre la magnitud de la aceleración radial y la aceleración tangencial para estas posiciones. b) Dibuje diagramas vectoriales para determinar la dirección de la aceleración total para estas dos posiciones. c) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración total.



a)



b)

Figura P4.42

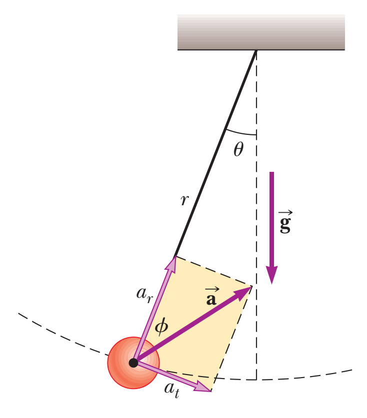


Figura P4.47

48. Un astronauta en la superficie de la Luna dispara un cañón para lanzar un paquete experimental, que deja el barril con movimiento horizontal. a) ¿Cuál debe ser la rapidez de boquilla del paquete de modo que viaje completamente alrededor de la Luna y regrese a su ubicación original? b) ¿Cuánto tarda este viaje alrededor de la Luna? Suponga que la aceleración de caída libre en la Luna es un sexto de la propia de la Tierra.

49. ● Se lanza un proyectil desde el punto ($x = 0$, $y = 0$) con velocidad $(12.0\hat{\mathbf{i}} + 49.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s en $t = 0$. a) Tabule la distancia del proyectil $|\vec{\mathbf{r}}|$ desde el origen al final de cada segundo de allí en adelante, para $0 \leq t \leq 10$ s. También puede ser útil tabular las coordenadas x y y y las componentes de velocidad v_x y v_y. b) Observe que la distancia del proyectil desde su punto de partida aumenta con el tiempo, llega a un máximo y comienza a disminuir. Pruebe que la distancia es un máximo cuando el vector de posición es perpendicular a la velocidad. *Sugerencia:* Argumente que si $\vec{\mathbf{v}}$ no es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$, después $|\vec{\mathbf{r}}|$ debe aumentar o disminuir. c) Determine la magnitud de la distancia máxima. Explique su método.

50. ● Un cañón de resorte se ubica en el borde de una mesa que está a 1.20 m sobre el suelo. Una bola de acero se lanza desde el cañón con rapidez v_0 a 35.0° sobre la horizontal. a) Encuentre la componente de desplazamiento horizontal de la bola al punto donde aterriza en el suelo como función de v_0. Esta función se escribe como $x(v_0)$. Evalúe x para b) $v_0 = 0.100$ m/s y para c) $v_0 = 100$ m/s. d) Suponga que v_0 está cerca de cero pero no es igual a cero. Muestre que un término en la respuesta al inciso a) domina de modo que la función $x(v_0)$ se reduce a una forma más simple. e) Si v_0 es muy grande, ¿cuál es la forma aproximada de $x(v_0)$? f) Describa la forma global de la gráfica de la función $x(v_0)$. *Sugerencia:* Como práctica, podría hacer el inciso b) antes de hacer el inciso a).

51. Cuando los jugadores de beisbol lanzan la pelota desde los jardines, los receptores dejan que rebote una vez antes de llegar al cuadro bajo la teoría de que la pelota llega más rápido de esa forma. Suponga que el ángulo al que una pelota rebotada deja el suelo es el mismo que el ángulo al que el jardinero la lanzó, como se muestra en la figura P4.51, pero la rapidez de la pelota después del rebote es un medio de la que tenía antes del rebote. a) Suponga que la pelota siempre se lanza con la misma rapidez inicial. ¿A qué ángulo θ el jardinero debe lanzar la pelota para hacer que recorra la misma distancia D con un rebote (trayectoria azul) que una bola lanzada hacia arriba a 45.0° sin rebote (trayectoria verde)? b) Determine la relación del intervalo de tiempo para el lanzamiento de un rebote al tiempo de vuelo para el lanzamiento sin rebote.

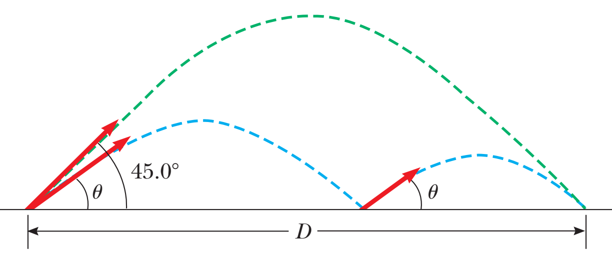


Figura P4.51

52. Una camioneta cargada con melones se detiene súbitamente para evitar caer por el borde de un puente derrumbado (figura P4.52). El repentino frenado hace que algunos melones salgan volando de la camioneta. Un melón rueda sobre el borde con una rapidez inicial de $v_i = 10.0$ m/s en la dirección horizontal. Una sección transversal de la orilla tiene la forma de la mitad inferior de una parábola con su vértice en el extremo del camino y con la ecuación $y^2 = 16x$, donde x y y se miden en metros. ¿Cuáles son las coordenadas x y y del melón cuando revienta en la orilla?

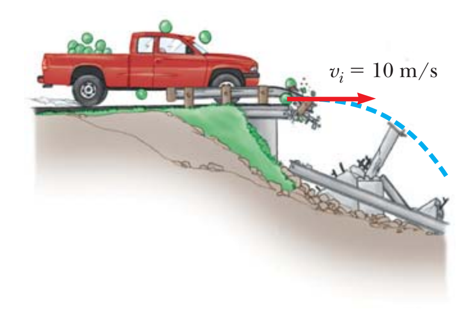


Figura P4.52

53. Su abuelo es copiloto de un bombardero que vuela horizontalmente sobre el nivel del terreno con una rapidez de 275 m/s en relación con el suelo, a una altitud de 3 000 m. a) El bombardero libera una bomba. ¿Cuánto viajará horizontalmente la bomba entre su liberación y su impacto en el suelo? Ignore los efectos de la resistencia del aire. b) Disparos de personas en la tierra incapacitan súbitamente al bombardero antes de que pueda decir "¡Bombas fuera!", en consecuencia, el piloto mantiene el curso original, altitud y rapidez del avión a través de una tormenta de fuego antiaéreo. ¿Dónde estará el avión cuando la bomba golpee el suelo? c) El avión tiene una mira telescópica de bomba de modo que la bomba golpea el blanco visto en la mira en el momento de liberación. ¿A qué ángulo con la vertical estaba el elemento de mira de bomba?

54. Una persona de pie en lo alto de una roca hemisférica de radio R patea una bola (al inicio en reposo en lo alto de la roca) para darle velocidad horizontal $\vec{\mathbf{v}}_i$, como se muestra en la figura P4.54. a) ¿Cuál debe ser su rapidez inicial mínima si la bola nunca debe golpear la roca después de que se patea? b) Con esta rapidez inicial, ¿a qué distancia de la base de la roca la bola golpea el suelo?

Figura P4.54

55. Un halcón vuela horizontalmente a 10.0 m/s en línea recta, a 200 m sobre el suelo. Un ratón que llevaba en sus garras se libera después de luchar. El halcón continúa en su ruta con la misma rapidez durante 2.00 s antes de intentar recuperar su presa, se clava en línea recta con rapidez constante y recaptura al ratón 3.00 m sobre el suelo. a) Si supone que la resistencia del aire no actúa sobre el ratón, encuentre la rapidez en picada del halcón. b) ¿Qué ángulo formó el halcón con la horizontal durante su descenso? c) ¿Durante cuánto tiempo el ratón "disfrutó" la caída libre?

56. Un decidido coyote está nuevamente en persecución del elusivo correcaminos. El coyote usa un par de patines con ruedas de propulsión, que proporcionan una aceleración horizontal constante de 15.0 m/s^2 (figura P4.56). El coyote parte del reposo a 70.0 m de la orilla de un risco en el instante en que el correcaminos lo pasa en la dirección del risco. a) Si supone que el correcaminos se mueve con rapidez constante, determine la rapidez mínima que debe tener para alcanzar el risco antes que el coyote. En el borde del risco, el correcaminos escapa al hacer un giro repentino, mientras el coyote continúa de frente. Los patines del coyote permanecen horizontales y continúan funcionando mientras el coyote está en vuelo, de modo que su aceleración mientras está en el aire es $(15.0\hat{\mathbf{i}} - 9.80\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. b) El risco está a 100 m sobre el suelo plano de un cañón. Determine dónde aterriza el coyote en el cañón. c) Determine las componentes de la velocidad de impacto del coyote.

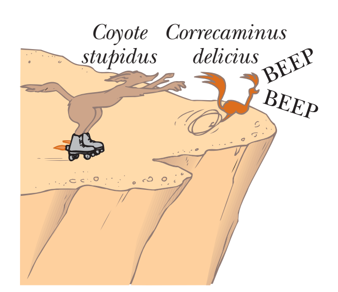


Figura P4.56

57. Un automóvil estacionado en una pendiente pronunciada tiene vista hacia el océano, con un ángulo de 37.0° bajo la horizontal. El negligente conductor deja el automóvil en neutral y el freno de mano está defectuoso. Desde el reposo en $t = 0$, el automóvil rueda por la pendiente con una aceleración constante de 4.00 m/s^2 y recorre 50.0 m hasta el borde de un risco vertical. El risco está 30.0 m arriba del océano. Encuentre: a) la rapidez del automóvil cuando llega al borde del risco y el intervalo de tiempo transcurrido cuando llega ahí, b) la velocidad del automóvil cuando amariza en el océano, c) el intervalo de tiempo total que el automóvil está en movimiento y d) la posición del automóvil cuando cae en el océano, en relación con la base del risco.

58. ● No se lastime; no golpee su mano contra algo. Dentro de estas limitaciones, describa lo que hace para dar a su mano una gran aceleración. Calcule una estimación del orden de magnitud de esta aceleración y establezca las cantidades que mide o estime y sus valores.

59. ● Un esquiador deja una rampa de salto con una velocidad de 10.0 m/s, 15.0° sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.59. La pendiente está inclinada a 50.0° y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre a) la distancia desde la rampa hasta donde aterriza el esquiador y b) las componentes de velocidad justo antes de aterrizar. (¿Cómo cree que afectan los resultados si se incluye resistencia del aire? Observe que los esquiadores se inclinan hacia adelante en la forma de un plano aerodinámico, con las manos a los lados, para aumentar su distancia. ¿Por qué funciona este método?)

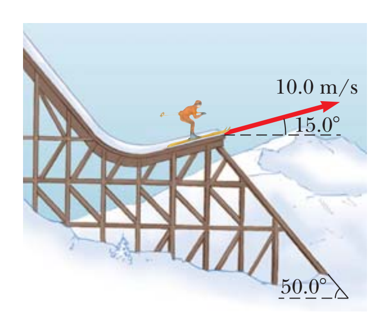


Figura P4.59

60. Un pescador emprende el viaje a contracorriente desde las cascadas Metaline en el río Pend Oreille al noroeste del estado de Washington. Su pequeño bote, impulsado por un motor fuera de borda, viaja con rapidez constante v en aguas tranquilas. El agua circula con rapidez constante v_w menor. Recorre 2.00 km a contracorriente cuando su hielera cae del bote. Se da cuenta de la falta de la hielera sólo después de otros 15 minutos de ir a contracorriente. En ese punto, regresa río abajo, todo el tiempo viajando con la misma rapidez respecto al agua. Alcanza a la hielera justo cuando está próxima a la cascada en el punto de partida. ¿Con qué rapidez se mueven en las aguas del río? Resuelva este problema en dos formas. a) Primero, use la Tierra como marco de referencia. Respecto de la Tierra, el bote viaja a contracorriente con rapidez $v - v_w$ y río abajo a $v + v_w$. b) Una segunda solución mucho más simple y más elegante se obtiene al usar el agua como marco de referencia. Este planteamiento tiene importantes aplicaciones en problemas mucho más complicados; por ejemplo, el cálculo del movimiento de cohetes y satélites y el análisis de la dispersión de partículas subatómicas de objetivos de gran masa.

61. Un barco enemigo está en el lado este de una isla montañosa, como se muestra en la figura P4.61. El barco enemigo maniobra a 2 500 m del pico de una montaña de 1 800 m de alto y dispara proyectiles con una rapidez inicial de 250 m/s. Si la playa oeste está horizontalmente a 300 m del pico, ¿cuáles son las distancias desde la playa oeste a la que un barco puede estar seguro del bombardeo del barco enemigo?

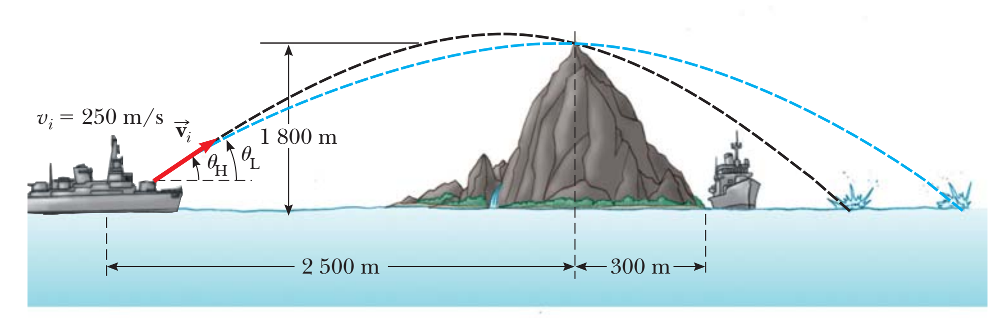


Figura P4.61

62. En la sección **¿Y si...?** del ejemplo 4.5, se afirmó que el intervalo máximo de un esquiador se presenta para un ángulo de lanzamiento θ dado por

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

donde ϕ es el ángulo que la colina forma con la horizontal en la figura 4.14. Compruebe esta afirmación al derivar esta ecuación.

Respuestas a las preguntas rápidas

4.1 a). Puesto que la aceleración se presenta siempre que la velocidad cambia en cualquier forma (con un aumento o reducción en rapidez, un cambio en dirección o ambos) los tres controles son aceleradores. El acelerador hace que el automóvil aumente rapidez; el freno hace que el auto reduzca rapidez. El volante cambia la dirección del vector velocidad.

4.2 **i)**, b). Sólo en un punto, el pico de la trayectoria, los vectores velocidad y aceleración son mutuamente perpendiculares. El vector velocidad es horizontal en dicho punto, y el vector aceleración es descendente. **ii)**, a). El vector aceleración siempre se dirige hacia abajo. El vector velocidad nunca es vertical y paralelo al vector aceleración si el objeto sigue una trayectoria como la de la figura 4.8.

4.3 15°, 30°, 45°, 60°, 75°. Mientras mayor sea la altura máxima, más tardará el proyectil en alcanzar dicha altitud y luego cae de vuelta desde ella. De este modo, conforme aumenta el ángulo de lanzamiento, el tiempo de vuelo aumenta.

4.4 **i)**, d). Puesto que la aceleración centrípeta es proporcional al cuadrado de la rapidez de la partícula, duplicar la rapidez aumenta la aceleración por un factor de 4. **ii)**, b). El periodo es inversamente proporcional a la rapidez de la partícula.

4.5 **i)**, b). El vector velocidad es tangente a la trayectoria. Si el vector aceleración debe ser paralelo al vector velocidad, también debe ser tangente a la trayectoria, lo que requiere que el vector aceleración no tenga componente perpendicular a la trayectoria. Si la trayectoria no cambia de dirección, el vector aceleración tendrá una componente radial, perpendicular a la trayectoria. En consecuencia, la trayectoria debe permanecer recta. **ii)**, d). Si el vector aceleración debe ser perpendicular al vector velocidad, no debe tener componente tangente a la trayectoria. Por otra parte, si la rapidez está cambiando, *debe* haber una componente de la aceleración tangente a la trayectoria. Por lo tanto, los vectores velocidad y aceleración nunca son perpendiculares en esta situación. Sólo pueden ser perpendiculares si no hay cambio en la rapidez.



Un pequeño remolcador ejerce una fuerza sobre un gran barco y hace que se mueva. ¿Cómo un bote tan pequeño puede hacer que se mueva un objeto tan grande? (Steve Raymer/CORBIS)

5.1 Concepto de fuerza
5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales
5.3 Masa
5.4 Segunda ley de Newton
5.5 Fuerza gravitacional y peso
5.6 Tercera ley de Newton
5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton
5.8 Fuerzas de fricción

5 Las leyes del movimiento

En los capítulos 2 y 4 se describió el movimiento de un objeto en términos de su posición, velocidad y aceleración sin tener en cuenta qué impulsa dicho movimiento. Ahora se considera la influencia externa: ¿qué hace a un objeto permanecer en reposo y que otro objeto acelere? Los dos factores principales en los que es necesario reflexionar son las fuerzas que actúan sobre un objeto y la masa del objeto. En este capítulo comienza el estudio de la *dinámica* al discutir las tres leyes de movimiento básicas, las cuales se relacionan con fuerzas y masas y que formuló hace más de tres siglos Isaac Newton.

5.1 Concepto de fuerza

Cada uno tiene una comprensión básica del concepto de fuerza a partir de la experiencia cotidiana. Cuando aleja un plato de comida vacío, ejerce una fuerza sobre él. De igual modo, cuando se lanza o patea una pelota se ejerce una fuerza sobre ella. En estos ejemplos, la palabra *fuerza* se refiere a una interacción con un objeto mediante actividad muscular y algún cambio en la velocidad del objeto. Sin embargo, las fuerzas no siempre causan movimiento. Por ejemplo, cuando está sentado, sobre su cuerpo actúa una fuerza gravitacional y aún así usted permanece fijo. Como segundo ejemplo, puede empujar (en otras palabras, ejercer una fuerza) sobre una gran roca y no ser capaz de moverla.

¿Qué fuerza (si alguna) hace que la Luna orbite la Tierra? Newton respondió ésta y otras preguntas relacionadas al afirmar que las fuerzas son lo que causa cualquier cambio en la velocidad de un objeto. La velocidad de la Luna no es constante porque se mueve en una órbita casi circular en torno a la Tierra. Este cambio en velocidad lo causa la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre la Luna.

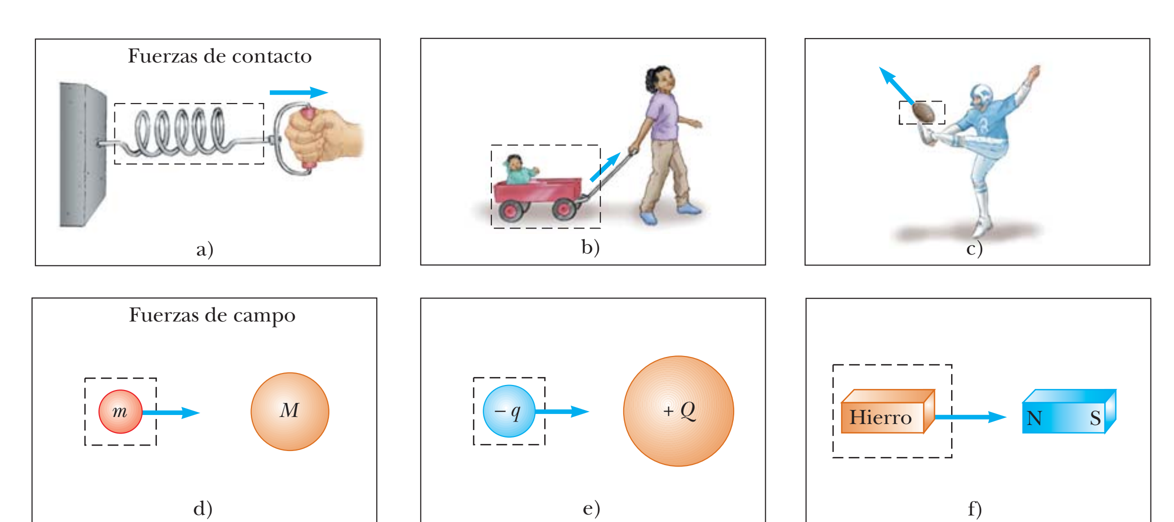


Figura 5.1 Algunos ejemplos de fuerzas aplicadas. En cada caso, sobre el objeto dentro del área limitada por líneas discontinuas se ejerce una fuerza. Algún agente en el ambiente exterior al área del recuadro ejerce una fuerza sobre el objeto.

Cuando un resorte se jala, como en la figura 5.1a, el resorte se estira. Cuando se jala un carrito estacionario, como en la figura 5.1b, el carrito se mueve. Cuando se patea un balón, como en la figura 5.1c, se deforma y se pone en movimiento. Estas situaciones son ejemplos de una clase de fuerzas llamadas *fuerzas de contacto*. Esto es, implican contacto físico entre dos objetos. Otras fuerzas de contacto son la fuerza que ejercen las moléculas de gas sobre las paredes de un contenedor y la fuerza que ejerce su pie sobre el suelo.

Otra clase de fuerzas, conocidas como *fuerzas de campo*, no involucran contacto físico entre dos ejemplos. Estas fuerzas actúan a través del espacio vacío. La fuerza gravitacional de atracción entre dos objetos con masa, que se ilustra en la figura 5.1d, es un ejemplo de esta clase de fuerza. La fuerza gravitacional mantiene a los objetos ligados a la Tierra y a los planetas en órbita alrededor del Sol. Otra fuerza de campo común es la fuerza eléctrica que una carga eléctrica ejerce sobre otra (figura 5.1e). Como ejemplo, estas cargas pueden ser las del electrón y el protón que forman un átomo de hidrógeno. Un tercer ejemplo de fuerza de campo es la fuerza que un imán de barra ejerce sobre un trozo de hierro (figura 5.1f).

La distinción entre fuerzas de contacto y fuerzas de campo no es tan clara como se podría pensar a partir de la discusión anterior. Cuando se examinan a nivel atómico, todas las fuerzas que se clasifican como fuerzas de contacto resultan ser causadas por fuerzas (de campo) eléctricas del tipo que se ilustra en la figura 5.1e. No obstante, al desarrollar modelos para fenómenos macroscópicos, es conveniente usar ambas clasificaciones de fuerzas. Las únicas fuerzas *fundamentales* conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo: 1) *fuerzas gravitacionales* entre objetos, 2) *fuerzas electromagnéticas* entre cargas eléctricas, 3) *fuerzas fuertes* entre partículas subatómicas y 4) *fuerzas débiles* que surgen en ciertos procesos de decaimiento radiactivo. En la física clásica sólo interesan las fuerzas gravitacional y electromagnética. Las fuerzas fuerte y débil se discutirán en el capítulo 46.



Giraudon/Art Resource

ISAAC NEWTON
Físico y matemático inglés (1642–1727)
Isaac Newton fue uno de los más brillantes científicos de la historia. Antes de cumplir 30 años, formuló los conceptos básicos y leyes de la mecánica, descubrió la ley de gravitación universal e inventó los métodos matemáticos del cálculo. Como consecuencia de sus teorías, Newton fue capaz de explicar los movimientos de los planetas, la baja y el flujo de las mareas y muchas características especiales de los movimientos de la Luna y la Tierra. También interpretó muchas observaciones fundamentales concernientes a la naturaleza de la luz. Sus aportaciones a las teorías físicas dominaron el pensamiento científico durante dos siglos y siguen siendo importantes en la actualidad.

La naturaleza vectorial de la fuerza

Es posible usar la deformación de un resorte para medir fuerza. Suponga que una fuerza vertical se aplica a una balanza de resorte que tiene un extremo superior fijo, como se muestra en la figura 5.2a (página 102). El resorte se estira cuando la fuerza se aplica, y un puntero en la escala lee el valor de la fuerza aplicada. El resorte se puede calibrar al definir una fuerza de referencia $\vec{\mathbf{F}}_1$ como la fuerza que produce una lectura de 1.00 cm. Si ahora se aplica una fuerza hacia abajo diferente $\vec{\mathbf{F}}_2$ cuya magnitud es el doble de la fuerza de referencia $\vec{\mathbf{F}}_1$, como se ve en la figura 5.2b, el puntero se mueve 2.00 cm. La figura 5.2c muestra que el efecto combinado de las dos fuerzas colineales es la suma de los efectos de las fuerzas individuales.

Ahora suponga que la aplicación de las dos fuerzas es simultánea con $\vec{\mathbf{F}}_1$ descendente y $\vec{\mathbf{F}}_2$ horizontal, como se ilustra en la figura 5.2d. En este caso, el puntero lee 2.24 cm.

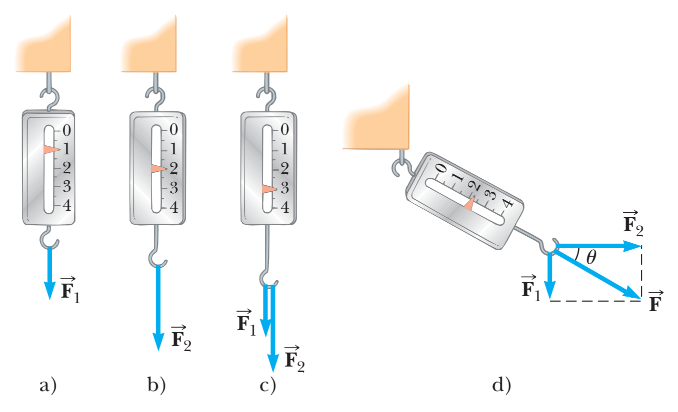


Figura 5.2 La naturaleza vectorial de una fuerza se prueba con una balanza de resorte. a) Una fuerza descendente $\vec{\mathbf{F}}_1$ estira el resorte 1.00 cm. b) Una fuerza descendente $\vec{\mathbf{F}}_2$ estira el resorte 2.00 cm. c) Cuando $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ son simultáneas, el resorte se estira 3.00 cm. d) Cuando $\vec{\mathbf{F}}_1$ es descendente y $\vec{\mathbf{F}}_2$ es horizontal, la combinación de las dos fuerzas estira el resorte 2.24 cm.

La fuerza sola $\vec{\mathbf{F}}$ que produciría esta misma lectura es la suma de los dos vectores $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$, como se describe en la figura 5.2d. Esto es, $|\vec{\mathbf{F}}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 2.24$ unidades, y su dirección es $\theta = \tan^{-1}(-0.500) = -26.6°$. **Puesto que se ha comprobado experimentalmente que las fuerzas se comportan como vectores, debe aplicar las reglas de suma vectorial para obtener la fuerza neta sobre un objeto**.

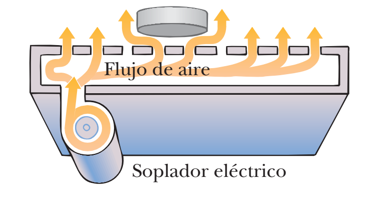


Figura 5.3 En una mesa de hockey de aire, el aire que sopla a través de los hoyos en la superficie permite que el disco se mueva casi sin fricción. Si la mesa no acelera, un disco colocado sobre la mesa permanecerá en reposo.

5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

El estudio de las fuerzas comienza al formar imágenes de algunas situaciones físicas que involucran un disco sobre una mesa de hockey de aire perfectamente a nivel (figura 5.3). Se espera que el disco permanezca donde se coloca. Ahora piense que su mesa de hockey de aire se ubica en un tren que se mueve con velocidad constante a lo largo de una pista perfectamente uniforme. Si el disco se coloca en la mesa, de nuevo permanece donde se le coloca. Sin embargo, si el tren acelera, el disco comenzaría a moverse a lo largo de la mesa en dirección opuesta a la de la aceleración del tren, igual como un conjunto de papeles en el tablero de su automóvil cae en el asiento delantero cuando pisa el acelerador.

Como se vio en la sección 4.6, es posible observar un objeto en movimiento desde muchos marcos de referencia. La **primera ley del movimiento de Newton**, a veces llamada *ley de la inercia*, define un conjunto especial de marcos de referencia llamados *marcos inerciales*. Esta ley se puede establecer del modo siguiente:

Primera ley de Newton ▶

Si un objeto no interactúa con otros objetos, es posible identificar un marco de referencia en el que el objeto tiene aceleración cero.

Marco de referencia inercial ▶

Tal marco de referencia se llama **marco de referencia inercial**. Cuando el disco está en la mesa de hockey de aire ubicada en el suelo, usted lo observa desde un marco de referencia inercial; no hay interacciones horizontales del disco con cualquier otro objeto y observa que tiene aceleración cero en dicha dirección. Cuando usted está en el tren en movimiento con velocidad constante, también observa el disco desde un marco de referencia inercial. **Cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad constante en relación con un marco inercial es, en sí mismo, un marco inercial**. Sin embargo, cuando usted y el tren aceleran, usted observa el disco desde un **marco de referencia no inercial** porque el tren acelera en relación con el marco de referencia inercial de la superficie de la Tierra. Mientras el disco parece acelerar de acuerdo con sus observaciones, se puede identificar un marco de referencia en el cual el disco tiene aceleración cero. Por ejemplo, un observador que está fuera del tren en el suelo ve el disco que se mueve con la misma velocidad que tiene el tren antes de comenzar a acelerar (porque casi no hay fricción para "amarrar"

el disco y el tren). Debido a eso, todavía se satisface la primera ley de Newton, aun cuando sus observaciones como pasajero del tren muestren una aceleración aparente en relación con usted.

Un marco de referencia que se mueve con velocidad constante en relación con las estrellas distantes es la mejor aproximación de un marco inercial y, para propósitos de estudio, se considera a la Tierra como tal marco. En realidad la Tierra no es un marco inercial debido a su movimiento orbital en torno al Sol y su movimiento rotacional alrededor de su propio eje, y ambos involucran aceleraciones centrípetas. Sin embargo, estas aceleraciones son pequeñas comparadas con g, y con frecuencia se pueden despreciar. Por esta razón, la Tierra representa un marco inercial, junto con cualquier otro marco unido a él.

Suponga que observa un objeto desde un marco de referencia inercial. (En la sección 6.3 se regresará a observaciones hechas en marcos de referencia no inerciales.) Muy próximos a 1600, los científicos creían que el estado natural de la materia era el estado de reposo. Las observaciones mostraron que los objetos en movimiento finalmente dejaban de moverse. Galileo fue el primero en considerar un planteamiento diferente del movimiento y del estado natural de la materia. Diseñó experimentos mentales y concluyó que no es la naturaleza de un objeto detenerse una vez que se pone en movimiento: más bien, su naturaleza es *resistir el cambio en su movimiento*. En sus palabras: "cualquier velocidad una vez impartida a un cuerpo móvil se mantendrá firme siempre y cuando se retiren las causas externas de retardo". Por ejemplo, una nave espacial que navega a través del espacio vacío con su motor apagado seguirá moviéndose para siempre. *No* buscaría un "estado natural" de reposo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.1

Primera ley de Newton

La primera ley de Newton *no* explica lo que sucede con un objeto con *fuerza neta cero*, esto es, múltiples fuerzas que se cancelan; expresa lo que ocurre *en ausencia de fuerzas externas*. Esta diferencia sutil pero importante permite definir la fuerza como la causa de un cambio en el movimiento. La descripción de un objeto bajo el efecto de fuerzas que se equilibran la cubre la segunda ley de Newton.

Dada la discusión de las observaciones realizadas acerca de los marcos de referencia inerciales, se puede plantear un enunciado más práctico de la primera ley del movimiento de Newton:

◀ Otro enunciado de la primera ley de Newton

En ausencia de fuerzas externas, y cuando se ve desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante (esto es, con una rapidez constante en una línea recta).

En otras palabras, **cuando ninguna fuerza actúa sobre un objeto, la aceleración del objeto es cero**. Una conclusión a partir de la primera ley, es que cualquier *objeto aislado* (uno que no interactúa con su entorno) está en reposo o en movimiento con velocidad constante. La tendencia de un objeto a resistir cualquier intento por cambiar su velocidad se llama **inercia**. Dado el enunciado anterior de la primera ley, se puede concluir que un objeto que acelera debe experimentar una fuerza. A su vez, de la primera ley, se puede definir **fuerza** como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto**.

Pregunta rápida 5.1 ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto? a) Es posible que un objeto tenga movimiento en ausencia de fuerzas sobre el objeto. b) Es posible tener fuerzas sobre un objeto en ausencia de movimiento del objeto. c) Ni a) ni b) son correctos. d) Tanto a) como b) son correctos.

5.3 Masa

Piense que quiere atrapar ya sea un balón de basquetbol o una bola de boliche. ¿Cuál es más probable que siga moviéndose cuando intenta capturarla? ¿Cuál requiere más esfuerzo para lanzarla? La bola de boliche requiere más esfuerzo. En el lenguaje de la física, se dice que la bola de boliche es más resistente al cambio en su velocidad que la de basquetbol. ¿Cómo se puede cuantificar este concepto?

◀ Definición de masa

La **masa** es la propiedad de un objeto que especifica cuánta resistencia muestra un objeto para cambiar su velocidad y, como se aprendió en la sección 1.1, la unidad del SI de masa es el kilogramo. Los experimentos muestran que mientras más grande sea la masa de un objeto, menos acelera el objeto bajo la acción de una fuerza aplicada conocida.

Para describir la masa en unidades cuantitativas, se realizan experimentos en los que se comparan las aceleraciones que produce una fuerza conocida sobre diferentes objetos. Suponga que una fuerza que actúa sobre un objeto de masa m_1 produce una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$,

y la *misma fuerza* que actúa sobre un objeto de masa m_2 produce una aceleración $\vec{\mathbf{a}}_2$. La relación de las dos masas se define como la relación *inversa* de las magnitudes de las aceleraciones producidas por la fuerza:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1} \tag{5.1}$$

Por ejemplo, si una fuerza conocida que actúa sobre un objeto de 3 kg produce una aceleración de 4 m/s^2, la misma fuerza aplicada a un objeto de 6 kg produce una aceleración de 2 m/s^2. De acuerdo con un cúmulo de observaciones similares, se concluye que **la magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa cuando sobre él actúa una fuerza conocida**. Si un objeto tiene una masa conocida, la masa del otro objeto se obtiene a partir de mediciones de aceleración.

La masa es una propiedad inherente de un objeto y es independiente de los alrededores del objeto y del método que se aplica para medirla. Además, la **masa es una cantidad escalar** y, en estos términos, obedece las reglas de la aritmética ordinaria. Por ejemplo, si combina una masa de 3 kg con una masa de 5 kg, la masa total es 8 kg. Este resultado se puede verificar experimentalmente al comparar la aceleración que una fuerza conocida proporciona a diferentes objetos por separado con la aceleración que la misma fuerza proporciona a los mismos objetos combinados como una unidad.

Masa y peso son cantidades diferentes ▶

La masa no se debe confundir con el peso. La **masa y el peso son dos cantidades diferentes**. El peso de un objeto es igual a la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el objeto y varía con la posición (véase la sección 5.5). Por ejemplo, una persona que pesa 180 lb sobre la Tierra pesa sólo aproximadamente 30 lb sobre la Luna. Por otra parte, la masa de un objeto por dondequiera es la misma: un objeto que tiene una masa de 2 kg sobre la Tierra también tiene una masa de 2 kg sobre la Luna.

5.4 Segunda ley de Newton

La primera ley de Newton explica lo que sucede a un objeto cuando sobre él no actúan fuerzas: permanece en reposo o se mueve en línea recta con rapidez constante. La segunda ley de Newton responde la pregunta de qué acontece a un objeto que tiene una o más fuerzas que actúan sobre él.

Imagine realizar un experimento en el que empuja un bloque de masa fija a través de una superficie horizontal sin fricción. Cuando ejerce alguna fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el bloque, éste se mueve con cierta aceleración $\vec{\mathbf{a}}$. Si aplica al doble una fuerza sobre el mismo bloque, la aceleración del bloque se duplica. Si aumenta la fuerza aplicada a $3\vec{\mathbf{F}}$, la aceleración se triplica, etcétera. A partir de tales observaciones, se concluye que **la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él: $\vec{\mathbf{F}} \propto \vec{\mathbf{a}}$**. Esta idea se introdujo por primera ocasión en la sección 2.4, cuando se discutió la dirección de la aceleración de un objeto. La magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa, como se afirmó en la sección anterior: $|\vec{\mathbf{a}}| \propto 1/m$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.2

La fuerza es la causa de cambios en el movimiento

La fuerza *no* causa movimiento. Se puede tener movimiento en ausencia de fuerzas, como describe la primera ley de Newton. La fuerza es la causa de los *cambios* en el movimiento, como se mide por la aceleración.

Estas observaciones experimentales se resumen en la **segunda ley de Newton**:

> Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:
>
> $$\vec{\mathbf{a}} \propto \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m}$$

Si se elige una constante de proporcionalidad 1, se relaciona masa, aceleración y fuerza a través del siguiente enunciado matemático de la segunda ley de Newton:[1]

Segunda ley de Newton ▶

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{5.2}$$

[1] La ecuación 5.2 es válida sólo cuando la rapidez del objeto es mucho menor que la rapidez de la luz. La situación relativista se trata en el capítulo 39.

Tanto en el enunciado textual como en el matemático de la segunda ley de Newton se indicó que la aceleración se debe a la *fuerza neta* $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto. La **fuerza neta** sobre un objeto es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. (A veces a la fuerza neta se le referirá como *fuerza total*, *fuerza resultante* o *fuerza desequilibrada*.) Al resolver un problema con la segunda ley de Newton, es imperativo determinar la fuerza neta correcta sobre un objeto. Muchas fuerzas pueden actuar sobre un objeto, pero sólo hay una aceleración.

La ecuación 5.2 es una expresión vectorial y por tanto es equivalente a tres ecuaciones componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{5.3}$$

◀ Segunda ley de Newton: forma de componentes

Pregunta rápida 5.2 Un objeto no experimenta aceleración. ¿Cuál de los siguientes *no puede* ser cierto para el objeto? a) Una sola fuerza actúa sobre el objeto. b) No actúan fuerzas sobre el objeto. c) Sobre el objeto actúan fuerzas, pero éstas se cancelan.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.3

***$m\vec{\mathbf{a}}$* no es una fuerza**

La ecuación 5.2 *no* indica que el producto $m\vec{\mathbf{a}}$ sea una fuerza. Todas las fuerzas sobre un objeto se suman como vectores para generar la fuerza neta en el lado izquierdo de la ecuación. En tal caso esta fuerza neta se iguala con el producto de la masa del objeto y la aceleración que resulta de la fuerza neta. *No* incluya una "fuerza $m\vec{\mathbf{a}}$" en su análisis de las fuerzas sobre un objeto.

Pregunta rápida 5.3 Usted empuja un objeto, al inicio en reposo, a través de un piso sin fricción con una fuerza constante durante un intervalo de tiempo Δt, lo que resulta en una rapidez final de v para el objeto. Luego repite el experimento, pero con una fuerza que es el doble de grande. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere ahora para alcanzar la misma rapidez final v? a) $4\Delta t$, b) $2\Delta t$, c) Δt, d) $\Delta t/2$, e) $\Delta t/4$.

La unidad del SI de fuerza es el **newton** (N). Una fuerza de 1 N es la fuerza que, cuando actúa sobre un objeto de 1 kg de masa, produce una aceleración de 1 m/s^2. A partir de esta definición y de la segunda ley de Newton, es claro que el newton se puede expresar en términos de las siguientes unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo:

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \tag{5.4}$$

◀ Definición de newton

En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la **libra** (lb). Una fuerza de 1 lb es la fuerza que, cuando actúa sobre una masa de 1 slug,[2] produce una aceleración de 1 ft/s^2:

$$1 \text{ lb} \equiv 1 \text{ slug} \cdot \text{ft/s}^2 \tag{5.5}$$

Una aproximación conveniente es 1 N ≈ ¼ lb.

EJEMPLO 5.1 Un disco de hockey que acelera

Un disco de hockey que tiene una masa de 0.30 kg se desliza sobre la superficie horizontal sin fricción de una pista de patinaje. Dos bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y ejercen las fuerzas sobre el disco que se muestran en la figura 5.4. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiene una magnitud de 0.5 N y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiene una magnitud de 8.0 N. Determine tanto la magnitud como la dirección de la aceleración del disco.

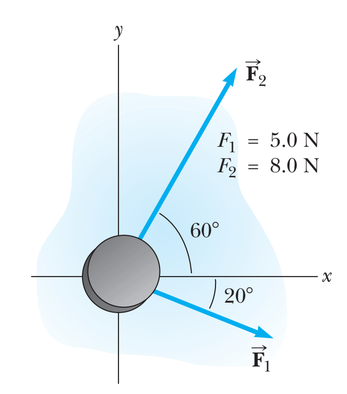


Figura 5.4 (Ejemplo 5.1) Un disco de hockey que se mueve sobre una superficie sin fricción está sujeto a dos fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 5.4. Use su experiencia en suma vectorial del capítulo 3 y prediga la dirección aproximada del vector de fuerza neta sobre el disco. La aceleración del disco estará en la misma dirección.

Categorizar Puesto que es posible determinar una fuerza neta y se quiere una aceleración, este problema se clasifica como uno que se puede resolver aplicando la segunda ley de Newton.

[2] El *slug* es la unidad de masa en el sistema usual estadounidense y es la contraparte de la unidad del SI de *kilogramo* en dicho sistema. Puesto que la mayoría de los cálculos en el estudio de la mecánica clásica están en unidades del SI, el slug se usa rara vez en este texto.

Analizar Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección x:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos(-20°) + F_2 \cos 60°$$
$$= (5.0 \text{ N})(0.940) + (8.0 \text{ N})(0.500) = 8.7 \text{ N}$$

Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección y:

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \text{ sen } (-20°) + F_2 \text{ sen } 60°$$
$$= (5.0 \text{ N})(-0.342) + (8.0 \text{ N})(0.866) = 5.2 \text{ N}$$

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes (ecuación 5.3) para encontrar las componentes x y y de la aceleración del disco:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7 \text{ N}}{0.30 \text{ kg}} = 29 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2 \text{ N}}{0.30 \text{ kg}} = 17 \text{ m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de la aceleración:

$$a = \sqrt{(29 \text{ m/s}^2)^2 + (17 \text{ m/s}^2)^2} = 34 \text{ m/s}^2$$

Localice la dirección de la aceleración en relación con el eje positivo x:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 30°$$

Finalizar Los vectores de la figura 5.4 se pueden sumar gráficamente para verificar lo razonable de la respuesta. Puesto que el vector aceleración es a lo largo de la dirección de la fuerza resultante, un dibujo que muestra el vector fuerza resultante ayuda a comprobar la validez de la respuesta. (¡Inténtelo!)

¿Qué pasaría si? Suponga que tres bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y dos de ellos ejercen las fuerzas que se muestran en la figura 5.4. El resultado de las tres fuerzas es que el disco de hockey *no* muestra aceleración. ¿Cuáles deben ser las componentes de la tercera fuerza?

Respuesta Si hay aceleración cero, la fuerza neta que actúa sobre el disco debe ser cero. En consecuencia, las tres fuerzas se deben cancelar. Se encontraron las componentes de la combinación de las primeras dos fuerzas. Las componentes de la tercera fuerza deben ser de igual magnitud y signo opuesto de modo que todas las componentes sumen cero. Por lo tanto, $F_{3x} = -8.7$ N, $F_{3y} = -5.2$ N.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.4
"Peso de un objeto"

Es familiar la frase cotidiana "el peso de un objeto". Sin embargo, el peso no es una propiedad inherente de un objeto; más bien, es una medida de la fuerza gravitacional entre el objeto y la Tierra (u otro planeta). Por lo tanto, el peso es una propiedad de un *sistema* de artículos: el objeto y la Tierra.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.5
El kilogramo no es una unidad de peso

Es posible que haya visto la "conversión" 1 kg = 2.2 lb. A pesar de las afirmaciones populares de peso expresadas en kilogramos, el kilogramo no es una unidad de *peso*, es una unidad de *masa*. El enunciado de conversión no es una igualdad; es una *equivalencia* que es válida sólo en la superficie de la Tierra.

5.5 Fuerza gravitacional y peso

Todos los objetos son atraídos hacia la Tierra. La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto se llama **fuerza gravitacional** $\vec{\mathbf{F}}_g$. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra[3] y su magnitud se llama **peso** del objeto.

En la sección 2.6 se vio que un objeto en caída libre experimenta una aceleración $\vec{\mathbf{g}}$ que actúa hacia el centro de la Tierra. Al aplicar la segunda ley de Newton $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ a un objeto en caída libre de masa m, con $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ y $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_g$ se obtiene

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$$

Por lo tanto, el peso de un objeto, al definirse como la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_g$ es igual a mg:

$$F_g = mg \qquad \textbf{(5.6)}$$

Puesto que depende de g, el peso varía con la ubicación geográfica. Dado que g disminuye a medida que crece la distancia al centro de la Tierra, los objetos pesan menos a mayores altitudes que a nivel del mar. Por ejemplo, un bloque de ladrillos de 1 000 kg utilizado en la construcción del Empire State en Nueva York pesaba 9 800 N a nivel de la calle, pero pesaba alrededor de 1 N menos cuando se levantó del nivel de la acera hasta lo alto del edificio. Como otro ejemplo, suponga que un estudiante tiene una masa de 70.0 kg. El peso del estudiante en una ubicación donde $g = 9.80$ m/s^2 es 686 N (aproximadamente 150 lb). Sin embargo, en lo alto de una montaña, donde $g = 9.77$ m/s^2, el

[3] Este enunciado ignora que la distribución de masa de la Tierra no es perfectamente esférica.

peso del estudiante sólo es 684 N. En tal caso, si quiere perder peso sin someterse a dieta, ¡ascienda una montaña o pésese a 30 000 ft durante el vuelo de un avión!

La ecuación 5.6 cuantifica la fuerza gravitacional sobre el objeto, pero advierta que esta ecuación no requiere que el objeto se mueva. Incluso para un objeto fijo o para un objeto sobre el que actúan varias fuerzas, la ecuación 5.6 se puede aplicar para calcular la magnitud de la fuerza gravitacional. El resultado es un cambio sutil en la interpretación de m en la ecuación. La masa m en la ecuación 5.6 establece la intensidad de la atracción gravitacional entre el objeto y la Tierra. Este papel es por completo diferente del descrito antes para la masa: medir la resistencia al cambio en movimiento como respuesta a una fuerza externa. Por ende, la m en la ecuación 5.6 se llama **masa gravitacional**. Aun cuando esta cantidad sea diferente en comportamiento de la masa inercial, una de las conclusiones experimentales de la dinámica newtoniana es que la masa gravitacional y la masa inercial tienen el mismo valor.

Aunque esta discusión se enfocó en la fuerza gravitacional sobre un objeto debida a la Tierra, el concepto generalmente es válido en cualquier planeta. El valor de g variará de un planeta a otro, pero la magnitud de la fuerza gravitacional siempre será conocida por el valor de mg.


NASA

La unidad de sustentación de vida que lleva en la espalda el astronauta Edwin Aldrin pesaba 300 lb en la Tierra. Durante su entrenamiento, usó una mochila de 50 lb. Aunque esta estrategia simuló efectivamente el peso reducido que la unidad tendría en la Luna, no imitó correctamente la masa invariable. Fue difícil acelerar la unidad (acaso al saltar o dar vuelta súbitamente) en la Luna como en la Tierra.

Pregunta rápida 5.4 Suponga que habla por un teléfono interplanetario a un amigo que vive en la Luna. Él le dice que acaba de ganar un newton de oro en un concurso. Con excitación, ¡usted le dice que entró a la versión terrícola del mismo concurso y que también ganó un newton de oro! ¿Quién es más rico? a) Usted. b) Su amigo. c) Ambos son igualmente ricos.

EJEMPLO CONCEPTUAL 5.2 **¿Cuánto pesa en un elevador?**

Es muy que probable que usted haya estado en un elevador que acelera hacia arriba mientras se mueve a pisos superiores. En este caso, se siente más pesado. De hecho, si se para en una báscula en ese momento, la báscula mide una fuerza que tiene una magnitud mayor que su peso. Por lo tanto, tiene evidencia sensorial y medida que lo lleva a creer que es más pesado en esta situación. ¿*Es usted* más pesado?

SOLUCIÓN

No; su peso no cambia. Sus experiencias se deben al hecho de que está en un marco de referencia no inercial. Para proporcionar la aceleración ascendente, el suelo o la báscula deben ejercer sobre sus pies una fuerza hacia arriba que sea mayor en magnitud que su peso. Esta fuerza más grande que siente es la que interpreta como sentirse más pesado. La báscula lee esta fuerza ascendente, no su peso, y por eso su lectura aumenta.

5.6 Tercera ley de Newton

Si usted presiona contra una esquina de este libro con la yema de los dedos, el libro lo empuja de vuelta y forma una pequeña marca en su piel. Si empuja más fuerte, el libro hace lo mismo y la marca en su piel es un poco más profunda. Esta simple actividad ilustra que las fuerzas son *interacciones* entre dos objetos: cuando su dedo empuja sobre el libro, el libro empuja de vuelta sobre su dedo. Este importante principio se conoce como **tercera ley de Newton**:

◄ Tercera ley de Newton

Si dos objetos interactúan, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} \tag{5.7}$$

Cuando sea importante designar fuerzas como interacciones entre dos objetos, se usará esta notación de subíndices, donde $\vec{\mathbf{F}}_{ab}$ significa "la fuerza que se ejerce *por* a *sobre* b": la tercera ley se ilustra en la figura 5.5a. La fuerza que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2 se llama popularmente *fuerza de acción*, y la fuerza del objeto 2 sobre el objeto 1 se llama

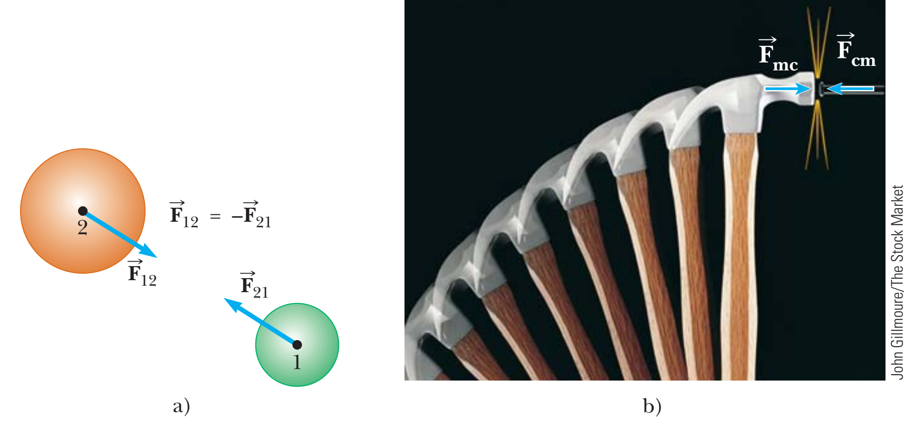


Figura 5.5 Tercera ley de Newton. a) La fuerza $\vec{F}_{12}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{F}_{21}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1. b) La fuerza $\vec{F}_{mc}$ que ejerce el martillo sobre el clavo es igual en magnitud y opuesta a la fuerza $\vec{F}_{cm}$ que ejerce el clavo sobre el martillo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.6
n no siempre es igual a *mg*

En la situación que se muestra en la figura 5.6 y en muchas otras, se encuentra que $n = mg$ (la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional). Sin embargo, este resultado generalmente *no* es cierto. Si un objeto está en un plano inclinado, si hay fuerzas aplicadas con componentes verticales o si hay una aceleración vertical del sistema, por lo tanto $n \neq mg$. *Siempre* aplique la segunda ley de Newton para encontrar la relación entre n y mg.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.7
Tercera ley de Newton

Recuerde que las fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton actúan sobre objetos *diferentes*. Por ejemplo, en la figura 5.6, $\vec{n} = \vec{F}_{mm} = -m\vec{g} = -\vec{F}_{Tm}$. Las fuerzas $\vec{n}$ y $m\vec{g}$ son iguales en magnitud y opuestas en dirección, pero no representan un par acción-reacción porque ambas fuerzas actúan sobre el *mismo* objeto, el monitor.

fuerza de reacción. Estos términos en cursivas no son términos científicos; además, cualquier fuerza se puede etiquetar como fuerza de acción o reacción. Estos términos se usarán por conveniencia. **En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos *diferentes* y deben ser del mismo tipo (gravitacional, eléctrica, etcétera).** Por ejemplo, la fuerza que actúa sobre un proyectil en caída libre es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el proyectil $\vec{F}_g = \vec{F}_{Tp}$ (T = Tierra, p = proyectil), y la magnitud de esta fuerza es mg. La reacción a esta fuerza es la fuerza gravitacional que ejerce el proyectil sobre la Tierra $\vec{F}_{pE} = -\vec{F}_{Tp}$. La fuerza de reacción $\vec{F}_{pT}$ debe acelerar a la Tierra hacia el proyectil tal como la fuerza de acción $\vec{F}_{Tp}$ acelera al proyectil hacia la Tierra. No obstante, puesto que la Tierra tiene una masa tan grande, su aceleración debida a esta fuerza de reacción es despreciablemente pequeña.

Otro ejemplo de la tercera ley de Newton se muestra en la figura 5.5b. La fuerza $\vec{F}_{mc}$ que ejerce el martillo sobre el clavo es igual en magnitud y opuesta a la fuerza $\vec{F}_{cm}$ que ejerce el clavo sobre el martillo. Esta última fuerza detiene el movimiento hacia adelante del martillo cuando golpea el clavo.

Considere un monitor de computadora en reposo sobre una mesa, como en la figura 5.6a. La fuerza de reacción a la fuerza gravitacional $\vec{F}_g = \vec{F}_{Tm}$ sobre el monitor es la fuerza $\vec{F}_{mT} = -\vec{F}_{Tm}$ que ejerce el monitor sobre la Tierra. El monitor no acelera porque lo sostiene la mesa. La mesa ejerce sobre el monitor una fuerza hacia arriba $\vec{n} = \vec{F}_{mm}$ llamada **fuerza normal**.[4] Esta fuerza, que evita que el monitor caiga a través de la mesa, puede tener cualquier valor necesario, hasta el punto de romper la mesa. Puesto que el monitor tiene aceleración cero, la segunda ley de Newton aplicada al monitor produce $\sum \vec{F} = \vec{n} + m\vec{g} = 0$, de modo que $n\hat{\mathbf{j}} - mg\hat{\mathbf{j}} = 0$, o $n = mg$. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el monitor, de modo que la fuerza neta sobre el monitor es cero. La fuerza de reacción a $\vec{n}$ es la fuerza que ejerce el monitor hacia abajo sobre la mesa, $\vec{F}_{mm} = -\vec{F}_{mm} = -\vec{n}$.

Fuerza normal ▶

Observe que las fuerzas que actúan sobre el monitor son $\vec{F}_g$ y $\vec{n}$, como se muestra en la figura 5.6b. Las dos fuerzas $\vec{F}_{mT}$ y $\vec{F}_{mm}$ se ejercen sobre objetos distintos del monitor.

La figura 5.6 ilustra un paso de suma importancia en la resolución de problemas que involucran fuerzas. La figura 5.6a muestra muchas de las fuerzas actuantes en la situación: las que actúan sobre el monitor, una que actúa sobre la mesa y otra que actúa sobre la Tierra. La figura 5.6b, en contraste, muestra sólo las fuerzas que actúan sobre *un objeto*, el monitor. Esta importante representación pictórica de la figura 5.6b se llama **diagrama de cuerpo libre**. Cuando se analiza un objeto sujeto a fuerzas, se tiene interés en la fuerza neta que actúa sobre un objeto, que se representarán como partícula. En consecuencia, un diagrama de cuerpo libre ayuda a aislar sólo aquellas fuerzas sobre el objeto y elimina

[4] *Normal* en este contexto significa *perpendicular*.

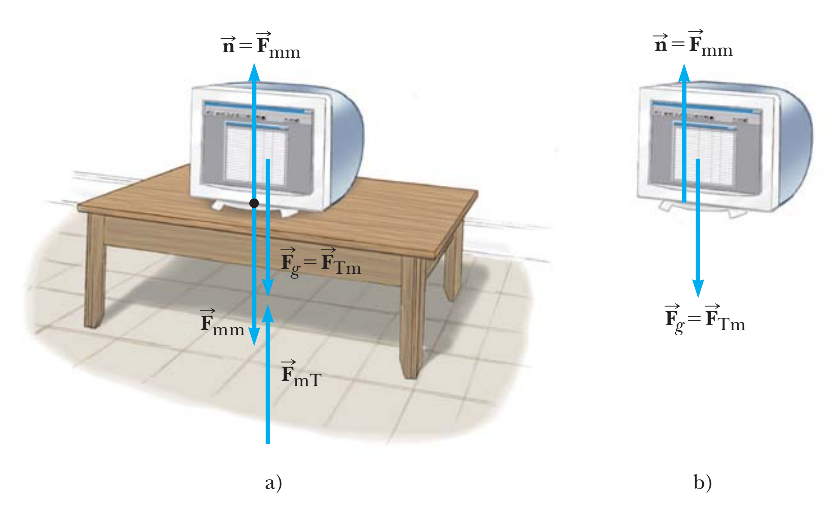


Figura 5.6 a) Cuando un monitor de computadora está en reposo sobre una mesa, las fuerzas que actúan sobre el monitor son la fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$. La reacción a $\vec{n}$ es la fuerza $\vec{F}_{mm}$ que ejerce el monitor sobre la mesa. La reacción a $\vec{F}_g$ es la fuerza $\vec{F}_{Tm}$ que ejerce el monitor sobre la Tierra. b) Diagrama de cuerpo libre para el monitor.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.8
Diagrama de cuerpo libre

La etapa *más importante* en la resolución de un problema que utiliza las leyes de Newton es dibujar un bosquejo adecuado, el diagrama de cuerpo libre. Asegúrese de dibujar sólo aquellas fuerzas que actúan sobre el objeto que aísla. Dibuje *todas* las fuerzas que actúan sobre el objeto, incluida cualesquier fuerza de campo, como la fuerza gravitacional.

las otras fuerzas del análisis. Es posible simplificar este diagrama todavía más al representar el objeto (como el monitor) como una partícula al dibujar simplemente un punto.

Pregunta rápida 5.5 **i)** Si una mosca choca contra el parabrisas de un autobús moviéndose rápidamente, ¿cuál de los dos experimenta una fuerza de impacto con mayor magnitud? a) La mosca. b) El autobús. c) Ambos experimentan la misma fuerza. **ii)** ¿Cuál de los dos experimenta mayor aceleración? a) La mosca. b) El autobús. c) Ambos experimentan la misma aceleración.

EJEMPLO CONCEPTUAL 5.3 **Tú me empujas y yo te empujo**

Un hombre grande y un niño pequeño están de pie, uno frente al otro sobre hielo sin fricción. Juntan sus manos y se empujan mutuamente de modo que se separan.

A) ¿Quién se aleja con mayor rapidez?

SOLUCIÓN

Esta situación es similar a la que se vio en la pregunta rápida 5.5. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce el hombre sobre el niño y la fuerza que ejerce el niño sobre el hombre son un par de fuerzas de la tercera ley, de modo que deben ser iguales en magnitud. (Una báscula colocada entre sus manos leería lo mismo, sin importar de cuál lado esté.) En consecuencia, el niño, que tiene la masa más pequeña, experimenta mayor aceleración. Ambos individuos aceleran durante la misma cantidad de tiempo, pero la mayor aceleración del niño en este intervalo de tiempo resulta en que su movimiento de alejamiento de la interacción es con mayor rapidez.

B) ¿Quién se aleja más mientras sus manos están en contacto?

SOLUCIÓN

Puesto que el niño tiene la mayor aceleración y en consecuencia la mayor velocidad promedio, se aleja más que el hombre durante el intervalo de tiempo mientras que sus manos están en contacto.

5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

En esta sección se discuten dos modelos de análisis para resolver problemas en que los objetos están en equilibrio ($\vec{a} = 0$) o aceleran a lo largo de una línea recta bajo la acción de fuerzas externas constantes. Recuerde que, **cuando las leyes de Newton se aplican a un objeto, se tiene interés sólo en las fuerzas externas que actúan sobre el objeto**. Si se representan los objetos como partículas, no necesita preocuparse por el movimiento rota-

cional. Por ahora, también se desprecian los efectos de la fricción en aquellos problemas que involucran movimiento, que es equivalente a afirmar que la superficie *no tiene fricción*. (La fuerza de fricción se discute en la sección 5.8.)

Por lo general se ignora la masa de cualquier soga, cuerda o cable involucrado. En esta aproximación, la magnitud de la fuerza que ejerce cualquier elemento de la soga sobre el elemento adyacente es la misma para todos los elementos a lo largo de la soga. En los enunciados de problema, los términos sinónimos *ligero* o *de masa despreciable* se usan para indicar que una masa se ignorará cuando trabaje los problemas. Cuando una soga unida a un objeto jala sobre el objeto, la soga ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ sobre el objeto en una dirección que se aleja del objeto, paralela a la soga. La magnitud T de dicha fuerza se llama **tensión** en la soga. Puesto que es la magnitud de una cantidad vectorial, la tensión es una cantidad escalar.



Los escaladores en reposo están en equilibrio y para su seguridad dependen de las fuerzas de tensión sobre las cuerdas.

Partícula en equilibrio

Si la aceleración de un objeto representado como partícula es cero, el objeto se considera con el modelo de **partícula en equilibrio**. En este modelo, la fuerza neta sobre el objeto es cero:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad \textbf{(5.8)}$$

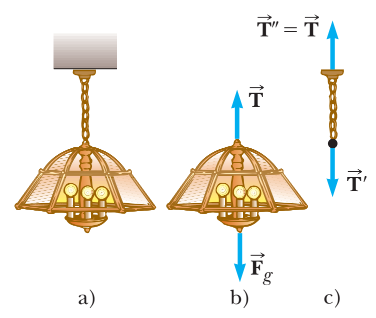


Figura 5.7 a) Una lámpara suspendida del techo mediante una cadena de masa despreciable. b) Las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cadena. c) Las fuerzas que actúan sobre la cadena son la fuerza $\vec{\mathbf{T}}'$ que ejerce la lámpara y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}''$ que ejerce el techo.

Considere una lámpara suspendida de una cadena ligera unida al techo, como en la figura 5.7a. El diagrama de cuerpo libre para la lámpara (figura 5.7b) muestra que las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cadena. Puesto que no hay fuerzas en la dirección x, $\Sigma F_x = 0$ no proporciona información útil. La condición $\Sigma F_y = 0$ produce

$$\sum F_y = T - F_g = 0 \quad \text{o} \quad T = F_g$$

De nuevo, advierta que $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_g$ *no* son un par acción–reacción porque actúan sobre el mismo objeto, la lámpara. La fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{T}}$ es $\vec{\mathbf{T}}'$, la fuerza hacia abajo que ejerce la lámpara sobre la cadena, como se muestra en la figura 5.7c. Dado que la cadena es una partícula en equilibrio, el techo debe ejercer sobre la cadena una fuerza $\vec{\mathbf{T}}''$ que es igual en magnitud a la magnitud de $\vec{\mathbf{T}}'$ y apunta en la dirección opuesta.

Partícula bajo una fuerza neta

Si un objeto experimenta una aceleración, su movimiento se puede analizar con el modelo de **partícula bajo una fuerza neta**. La ecuación apropiada para este modelo es la segunda ley de Newton, ecuación 5.2. Considere una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.8a. Suponga que quiere encontrar la aceleración de la caja y la fuerza que el suelo ejerce sobre ella. Las fuerzas que actúan sobre la caja se ilustran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5.8b. Note que la fuerza horizontal $\vec{\mathbf{T}}$ que se aplica a la caja actúa a través de la soga. La magnitud de $\vec{\mathbf{T}}$ es igual a la tensión en la soga. Además de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$, el diagrama de cuerpo libre para la caja incluye la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que ejerce el suelo sobre la caja.

Ahora se puede aplicar la segunda ley de Newton en forma de componentes para la caja. La única fuerza que actúa en la dirección x es $\vec{\mathbf{T}}$. Al aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al movimiento horizontal se obtiene

$$\sum F_x = T = ma_x \quad \text{o} \quad a_x = \frac{T}{m}$$

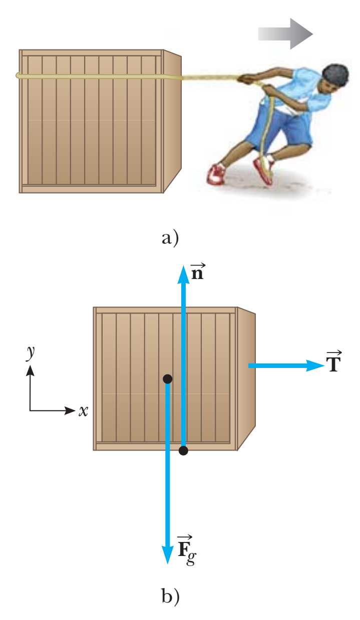


Figura 5.8 a) Una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre que representa las fuerzas externas que actúan sobre la caja.

En la dirección y no se presenta aceleración porque la caja sólo se mueve horizontalmente. En consecuencia, se usa el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y. Al aplicar la componente y de la ecuación 5.8 se produce

$$\sum F_y = n + (-F_g) = 0 \quad \text{o} \quad n = F_g$$

Esto es, la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional pero actúa en la dirección opuesta.

Si $\vec{\mathbf{T}}$ es una fuerza constante, la aceleración $a_x = T/m$ también es constante. Por tanto, la caja también se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección x, y se puede aplicar la ecuación de cinemática del capítulo 2 para obtener la posición x y velocidad v_x de la caja como funciones del tiempo.

En la situación recién descrita, la magnitud de la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_g$, pero esto no siempre es el caso. Por ejemplo, suponga que un libro se encuentra sobre una mesa y usted empuja hacia abajo sobre el libro con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$, como en la figura 5.9. Ya que el libro está en reposo y debido a eso no acelera, $\Sigma F_y = 0$, lo que da $n - F_g - F = 0$ o $n = F_g + F$. En esta situación, la fuerza normal es *mayor* que la fuerza gravitacional. Más adelante se presentan otros ejemplos en los que $n \neq F_g$.

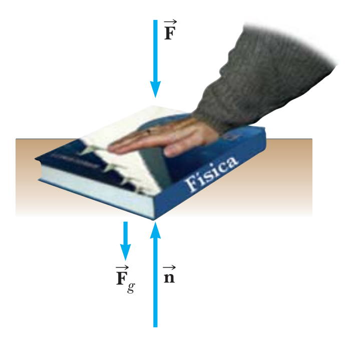


Figura 5.9 Cuando una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ empuja verticalmente hacia abajo sobre otro objeto, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ sobre el objeto es mayor que la fuerza gravitacional: $n = F_g + F$.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Aplicación de las leyes de Newton**

Se propone el procedimiento que sigue cuando se relaciona con problemas que involucran leyes de Newton:

1. *Conceptualizar*. Dibuje un diagrama simple y nítido del sistema. El diagrama ayuda a constituir la representación mental. Para cada objeto en el sistema establecer ejes coordenados convenientes.
2. *Categorizar.* Si un componente de aceleración para un objeto es cero, el objeto se representa como una partícula en equilibrio en esta dirección y $\Sigma F = 0$. Si no, el objeto se representa como una partícula bajo una fuerza neta en esta dirección y $\Sigma F = ma$.
3. *Analizar.* Aísle el objeto cuyo movimiento se analizará. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para este objeto. Para sistemas que contengan más de un objeto, dibuje *por separado* diagramas de cuerpo libre para cada objeto. En el diagrama de cuerpo libre *no* incluya fuerzas que el objeto ejerce sobre su entorno.

   Encuentre las componentes de las fuerzas a lo largo de los ejes coordenados. Aplique el modelo apropiado de la etapa Categorizar para cada dirección. Compruebe sus dimensiones para asegurarse de que todos los términos tienen unidades de fuerza.

   Resuelva las ecuaciones por componentes para las incógnitas. Recuerde que debe tener tantas ecuaciones independientes como incógnitas para obtener una solución completa.
4. *Finalizar.* Confirme que sus resultados sean consistentes con el diagrama de cuerpo libre. También compruebe las predicciones de sus soluciones para valores extremos de las variables. Al hacerlo, con frecuencia puede detectar errores en sus resultados.

EJEMPLO 5.4 **Un semáforo en reposo**

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos a un soporte como en la figura 5.10a. Los cables superiores forman ángulos de 37.0° y 53.0° con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación, o alguno de los cables se romperá?

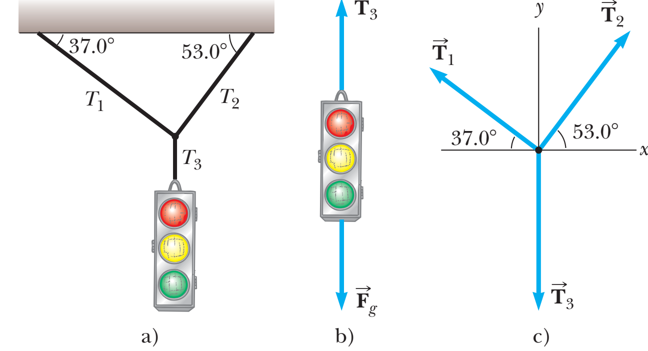


Figura 5.10 (Ejemplo 5.4) a) Un semáforo suspendido por cables. b) Diagrama de cuerpo libre del semáforo. c) Diagrama de cuerpo libre del nudo donde se juntan los tres cables.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine el dibujo de la figura 5.10a. Suponga que los cables no se rompen y que nada se mueve.

Categorizar Si nada se mueve, ninguna parte del sistema acelera. Ahora puede representar el semáforo como una partícula en equilibrio sobre la que se ejerce una fuerza neta de cero. De igual modo, la fuerza neta sobre el nudo (figura 5.10c) es cero.

Analizar Construya dos diagramas de cuerpo libre: uno para el semáforo, que se muestra en la figura 5.10b, y otro para el nudo que mantiene juntos los tres cables, que se muestra en la figura 5.10c. Este nudo es un objeto conveniente a elegir porque todas las fuerzas de interés actúan a lo largo de líneas que pasan a través del nudo.

Aplique la ecuación 5.8 para el semáforo en la dirección y:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad T_3 - F_g = 0$$

$$T_3 = F_g = 122 \text{ N}$$

Elija los ejes coordenados como se muestra en la figura 5.10c y descomponer en sus componentes las fuerzas que actúan en el nudo:

Fuerza	Componente x	Componente y
$\vec{\mathbf{T}}_1$	$-T_1 \cos 37.0°$	$T_1 \text{ sen } 37.0°$
$\vec{\mathbf{T}}_2$	$T_2 \cos 53.0°$	$T_2 \text{ sen } 53.0°$
$\vec{\mathbf{T}}_3$	0	-122 N

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al nudo:

$$1)\quad \sum F_x = -T_1 \cos 37.0° + T_2 \cos 53.0° = 0$$

$$2)\quad \sum F_y = T_1 \text{ sen } 37.0° + T_2 \text{ sen } 53.0° + (-122 \text{ N}) = 0$$

La ecuación 1) muestra que las componentes horizontales de $\vec{\mathbf{T}}_1$ y $\vec{\mathbf{T}}_2$ deben ser iguales en magnitud, y la ecuación 2) indica que la suma de las componentes verticales de $\vec{\mathbf{T}}_1$ y $\vec{\mathbf{T}}_2$ deben equilibrar la fuerza hacia abajo $\vec{\mathbf{T}}_3$, que es igual en magnitud al peso del semáforo.

Resuelva la ecuación 1) para T_2 en términos de T_1:

$$3)\quad T_2 = T_1\left(\frac{\cos 37.0°}{\cos 53.0°}\right) = 1.33T_1$$

Sustituya este valor para T_2 en la ecuación 2):

$$T_1 \text{ sen } 37.0° + (1.33T_1)(\text{sen } 53.0°) - 122 \text{ N} = 0$$

$$T_1 = 73.4 \text{ N}$$

$$T_2 = 1.33T_1 = 97.4 \text{ N}$$

Ambos valores son menores que 100 N (apenas para T_2), de modo que los cables no se romperán.

Finalizar Finalice este problema al imaginar un cambio en el sistema, como el siguiente **¿Qué pasaría si?**

¿Qué pasaría si? Suponga que los dos ángulos de la figura 5.10a son iguales. ¿Cuál sería la correspondencia entre T_1 y T_2?

Respuesta Se puede argumentar a partir de la simetría del problema que las dos tensiones T_1 y T_2 serían iguales entre sí. Matemáticamente, si los ángulos iguales se llaman θ, la ecuación 3) se convierte en

$$T_2 = T_1\left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta}\right) = T_1$$

que también dice que las tensiones son iguales. Sin saber el valor específico de θ, no se pueden encontrar los valores de T_1 y T_2. Sin embargo, las tensiones serán iguales entre sí, sin importar el valor de θ.

EJEMPLO CONCEPTUAL 5.5 Fuerzas entre vagones en un tren

Los vagones de tren se conectan mediante *enganches*, que están bajo tensión conforme la locomotora jala el tren. Imagine que usted está en un tren que aumenta velocidad con aceleración constante. A medida que se mueve a lo largo del tren desde la locomotora hacia el último vagón, midiendo la tensión en cada conjunto de enganches, ¿la tensión aumenta, disminuye o permanece igual? Cuando el ingeniero aplica los frenos, los enganches están bajo compresión. ¿Cómo varía esta fuerza de compresión desde la locomotora hasta el último vagón? (Suponga que sólo se aplican los frenos en las ruedas de la máquina.)

SOLUCIÓN

Conforme el tren aumenta la velocidad, la tensión disminuye desde el frente del tren hasta la parte trasera. El enganche entre la locomotora y el primer vagón debe aplicar suficiente fuerza para acelerar el resto de los vagones. A medida que se mueve a lo largo del tren, cada enganche acelera menos masa detrás de él. El último enganche tiene que acelerar sólo al último vagón y por lo tanto está bajo menos tensión. Cuando se aplican los frenos, la fuerza nuevamente disminuye desde el frente a la parte trasera. El enganche que conecta la locomotora con el primer vagón debe aplicar una gran fuerza para frenar el resto de los vagones, pero el enganche final debe aplicar una fuerza suficientemente grande para frenar sólo al último vagón.

EJEMPLO 5.6 El auto que escapa

Un automóvil de masa *m* está sobre un camino cubierto con hielo inclinada en un ángulo θ, como en la figura 5.11a.

A) Encuentre la aceleración del automóvil, si supone que la pista no tiene fricción.

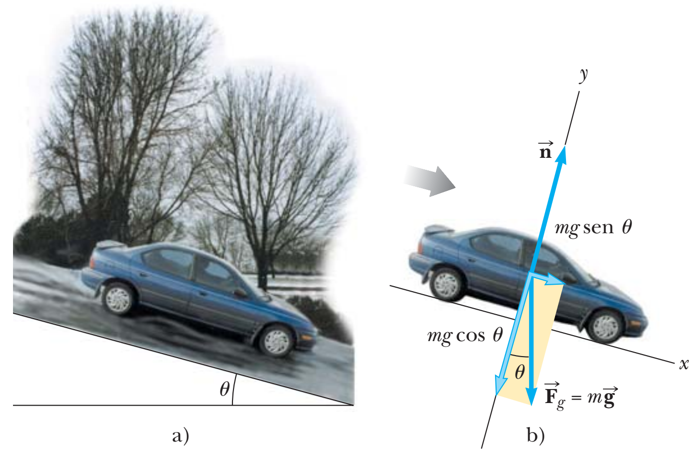


Figura 5.11 (Ejemplo 5.6) a) Un automóvil de masa *m* sobre un plano inclinado sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 5.11a para formar ideas de la situación. A partir de la experiencia cotidiana, se sabe que un automóvil sobre un plano inclinado cubierto con hielo acelerará hacia abajo por el plano. (Lo mismo le sucede a un automóvil sin frenos en una colina.)

Categorizar El automóvil se clasifica como una partícula bajo una fuerza neta. Además, este problema pertenece a una categoría de problemas muy común en la que un objeto se mueve bajo la influencia de la gravedad sobre un plano inclinado.

Analizar La figura 5.11b muestra el diagrama de cuerpo libre del automóvil. Las únicas fuerzas que actúan sobre el automóvil son la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que ejerce el plano inclinado, que actúa perpendicular al plano, y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$, que actúa verticalmente hacia abajo. Para problemas que involucran planos inclinados, es conveniente elegir los ejes coordenados con *x* a lo largo del plano *y* y perpendicular a él, como en la figura 5.11b. (Es posible, aunque inconveniente, resolver el problema con ejes horizontal y vertical "normal". Tal vez quiera intentarlo, sólo para practicar.) Con estos ejes, represente la fuerza gravitacional mediante una componente de magnitud mg sen θ a lo largo del eje *x* positivo y otra de magnitud $mg \cos \theta$ a lo largo del eje *y* negativo.

Al aplicar la segunda ley de Newton al automóvil en forma de componentes, y notar que $a_y = 0$:

$$1)\quad \sum F_x = mg \operatorname{sen} \theta = ma_x$$

$$2)\quad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

Resuelva la ecuación 1) para a_x:

$$3)\quad a_x = g \operatorname{sen} \theta$$

Finalizar La elección de ejes que resulta en el automóvil se representa como una partícula bajo una fuerza neta en la dirección *x* y una partícula en equilibrio en la dirección *y*. Además, ¡la componente aceleración a_x es independiente de la masa del automóvil! Sólo depende del ángulo de inclinación y de *g*.

De la ecuación 2) se concluye que la componente de $\vec{\mathbf{F}}_g$ perpendicular al plano se equilibra mediante la fuerza normal; esto es, $n = mg\cos\theta$. Esta situación es otro caso en el que la fuerza normal *no* es igual en magnitud al peso del objeto.

B) Considere que el automóvil se libera desde el reposo en lo alto del plano y que la distancia desde la defensa frontal del automóvil hasta el fondo del plano inclinado es *d*. ¿Cuánto tarda la defensa frontal en llegar al fondo de la colina, y cuál es la rapidez del automóvil cuando llega ahí?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el automóvil se desliza por la colina y que usa un cronómetro para medir todo el intervalo de tiempo hasta que llega al fondo.

Categorizar Esta parte del problema pertenece a cinemática más que a dinámica, y la ecuación 3) muestra que la aceleración a_x es constante. Por lo tanto, debe clasificar al automóvil en este inciso del problema como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Al definir la posición inicial de la defensa frontal como $x_i = 0$ y su posición final como $x_f = d$, y reconocer que $v_{xi} = 0$, aplique la ecuación 2.16, $x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$:

$$d = \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

Resuelva para t:

$$4) \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} = \boxed{\sqrt{\frac{2d}{g \operatorname{sen} \theta}}}$$

Aplique la ecuación 2.17, con $v_{xi} = 0$ para encontrar la velocidad final del automóvil:

$$v_{xf}^2 = 2a_x d$$

$$5) \quad v_{xf} = \sqrt{2a_x d} = \boxed{\sqrt{2gd \operatorname{sen} \theta}}$$

Finalizar De las ecuaciones 4) y 5) se ve que el tiempo t al que el automóvil alcanza el fondo y su rapidez final v_{xf} son independientes de la masa del automóvil, como lo fue su aceleración. Note que, en este ejemplo, se combinaron técnicas del capítulo 2 con nuevas técnicas de este capítulo. A medida que aprenda más técnicas en capítulos posteriores, este proceso de combinar información proveniente de varias partes del libro ocurrirá con más frecuencia. En estos casos, use la *Estrategia general para resolver problemas* para auxiliarse a identificar qué modelos de análisis necesitará.

¿Qué pasaría si? ¿En qué problema resuelto anteriormente se convierte esta situación si $\theta = 90°$?

Respuesta Imagine que θ va a 90° en la figura 5.11. El plano inclinado se vuelve vertical, ¡y el automóvil es un objeto en caída libre! La ecuación 3) se convierte en

$$a_x = g \operatorname{sen} \theta = g \operatorname{sen} 90° = g$$

que de hecho es la aceleración de caída libre. (Se encuentra $a_x = g$ en lugar de $a_x = -g$ porque la x positiva se eligió hacia abajo en la figura 5.11.) Note también que la condición $n = mg \cos \theta$ produce $n = mg \cos 90° = 0$. Esto es consistente con el automóvil que cae *junto al* plano vertical, en cuyo caso no hay fuerza de contacto entre el automóvil y el plano.

EJEMPLO 5.7 Un bloque empuja a otro

Dos bloques de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$, se colocan en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.12a. Una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a m_1 como se muestra.

A) Encuentre la magnitud de la aceleración del sistema.

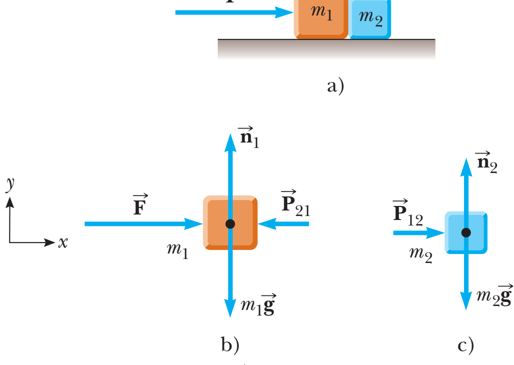


Figura 5.12 (Ejemplo 5.7). a) Se aplica una fuerza se a un bloque de masa m_1, que empuja a un segundo bloque de masa m_2. b) Diagrama de cuerpo libre para m_1. c) Diagrama de cuerpo libre para m_2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Elabore ideas de la situación mediante la figura 5.12a y observe que ambos bloques deben experimentar la *misma* aceleración porque están en contacto mutuo y permanecen en contacto por todo el movimiento.

Categorizar Este problema se clasifica como una partícula bajo una fuerza neta porque se aplica una fuerza a un sistema de bloques y se busca la aceleración del sistema.

Analizar Primero represente la combinación de los dos bloques como una sola partícula. Aplique la segunda ley de Newton a la combinación:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$1) \quad a_x = \boxed{\frac{F}{m_1 + m_2}}$$

Finalizar La aceleración conocida por la ecuación 1) es la misma que la de un solo objeto de masa $m_1 + m_2$ y sometida a la misma fuerza.

B) Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La fuerza de contacto es interna al sistema de los dos bloques. Por lo tanto, no es posible hallar la fuerza al representar el sistema como un todo (los dos bloques) en una sola partícula.

Categorizar Considere ahora cada uno de los dos bloques de manera individual al clasificar cada uno como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar Construya primero un diagrama de cuerpo libre para cada bloque, como se muestra en las figuras 5.12b y 5.12c, donde la fuerza de contacto se denota $\vec{\mathbf{P}}$. A partir de la figura 5.12c se ve que la única fuerza horizontal que actúa sobre m_2 es la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ (la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2), que se dirige hacia la derecha.

Aplique la segunda ley de Newton a m_2:

$$2)\quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Sustituya el valor de la aceleración a_x que proporciona la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$3)\quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Finalizar Este resultado muestra que la fuerza de contacto P_{12} es *menor* que la fuerza aplicada F. La fuerza que se requiere para acelerar el bloque 2 debe ser menor que la fuerza requerida para producir la misma aceleración para el sistema de dos bloques.

Para finalizar, compruebe esta expresión para P_{12} al considerar las fuerzas que actúan sobre m_1, que se muestran en la figura 5.12b. Las fuerzas que actúan horizontales sobre m_1 son la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ hacia la derecha y la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ hacia la izquierda (la fuerza que ejerce m_2 sobre m_1). A partir de la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ es la fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{P}}_{12}$, de modo que $P_{21} = P_{12}$.

Aplique la segunda ley de Newton a m_1:

$$4)\quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Resuelva para P_{12} y sustituya el valor de a_x de la ecuación 1):

$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Este resultado concuerda con la ecuación 3), como debe ser.

¿Qué pasaría si? Imagine que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 5.12 se aplica hacia la izquierda en el bloque derecho de masa m_2. ¿La magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ es la misma que cuando la fuerza se aplicó hacia la derecha sobre m_1?

Respuesta Cuando la fuerza se aplica hacia la izquierda sobre m_2, la fuerza de contacto debe acelerar m_1. En la situación original, la fuerza de contacto acelera m_2. Puesto que $m_1 > m_2$, se requiere más fuerza, de modo que la magnitud de $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ es mayor que en la situación original.

EJEMPLO 5.8 Peso de un pescado en un elevador

Una persona pesa un pescado de masa m en una balanza de resorte unida al techo de un elevador, como se ilustra en la figura 5.13.

A) Muestre que, si el elevador acelera ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza de resorte da una lectura que es diferente del peso del pescado.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La lectura en la balanza se relaciona con la extensión del resorte en la balanza, que depende de la fuerza en el extremo del resorte, como en la figura 5.2. Imagine que el pescado cuelga de una cuerda unida al extremo del resorte. En este caso, la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el resorte es igual a la tensión T en la cuerda.

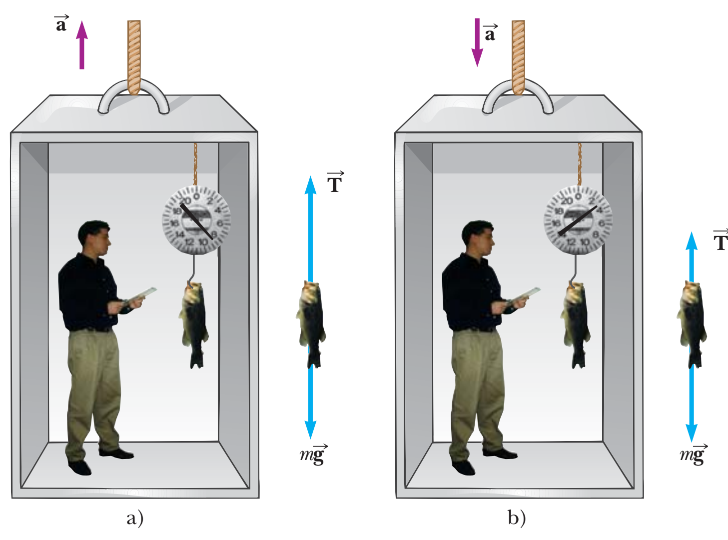


Figura 5.13 (Ejemplo 5.8) Peso aparente contra peso real. a) Cuando el elevador acelera hacia arriba, la lectura en la balanza de resorte proporciona un valor mayor que el peso del pescado. b) Cuando el elevador acelera hacia abajo, la lectura en la balanza de resorte proporciona un valor menor que el peso del pescado.

Por lo tanto, se busca T. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ jala hacia abajo en la cuerda y hacia arriba en el pescado.

Categorizar Este problema se clasifica al considerar al pescado como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar Inspeccione los diagramas de cuerpo libre para el pescado en la figura 5.13 y advierta que las fuerzas externas que actúan sobre el pescado son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda. Si el elevador está en reposo o moviéndose con velocidad constante, el pescado es una partícula en equilibrio, de modo que $\sum F_y = T - F_g = 0$ o $T = F_g = mg$. (Recuerde que el escalar mg es el peso del pescado.)

Ahora suponga que el elevador se mueve con una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ en relación con un observador que está de pie afuera del elevador en un marco inercial (véase la figura 5.13). Ahora el pescado es una partícula bajo una fuerza neta.

Aplique la segunda ley de Newton al pescado:

$$\sum F_y = T - mg = ma_y$$

Resuelva para T:

$$1) \quad T = ma_y + mg = mg\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right)$$

donde se eligió hacia arriba como la dirección y positiva. Se concluye de la ecuación 1) que la lectura en la balanza de T es mayor que el peso del pescado mg si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia arriba, de modo que a_y es positiva, y que la lectura es menor que mg si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia abajo, de modo que a_y es negativa.

B) Evalúe las lecturas en la balanza para un pescado de 40.0 N si el elevador se traslada con una aceleración $a_y = \pm 2.00 \text{ m/s}^2$.

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación 1) si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia arriba:

$$T = (40.0 \text{ N})\left(\frac{2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1\right) = \boxed{48.2 \text{ N}}$$

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación 1) si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia abajo:

$$T = (40.0 \text{ N})\left(\frac{-2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1\right) = \boxed{31.8 \text{ N}}$$

Finalizar Considere esta opinión: si compra un pescado en un elevador, ¡asegúrese de que el pescado se pesa mientras el elevador está en reposo o en aceleración hacia abajo! Además, note que, a partir de la información que se proporciona en este caso, uno no puede determinar la dirección de movimiento del elevador.

¿Qué pasaría si? Suponga que el cable del elevador se rompe y el elevador y su contenido están en caída libre. ¿Qué sucede con la lectura de la balanza?

Respuesta Si el elevador está en caída libre, su aceleración es $a_y = -g$. De la ecuación 1) se ve que la lectura de la balanza de T en este caso es cero; esto es; el pescado *parece* no tener peso.

EJEMPLO 5.9 **La máquina de Atwood**

Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura 5.14a, el dispositivo se llama *máquina de Atwood*. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de g. Determine la magnitud de la aceleración de dos objetos y la tensión en la cuerda sin peso.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine en acción la situación que se muestra en la figura 5.14a: conforme un objeto se mueve hacia arriba, el otro objeto se mueve hacia abajo. Puesto que los objetos están conectados mediante una cuerda inextensible, sus aceleraciones son de igual magnitud.

Categorizar Los objetos en la máquina de Atwood están sometidos a la fuerza gravitacional, así como a las fuerzas que se ejercen mediante las cuerdas conectadas a ellos. Por lo tanto, este problema se clasifica como uno que involucra dos partículas bajo una fuerza neta.

Analizar En la figura 5.14b se muestran los diagramas de cuerpo libre para los dos objetos. En cada objeto actúan dos fuerzas: la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional hacia abajo. En problemas como éste, con una polea se representa sin masa y sin fricción, la tensión en la cuerda sobre ambos lados de la polea es la misma. Si la polea tiene masa o es dependiente de la fricción, las tensiones en cualquier lado no son las mismas y la situación requiere técnicas que se aprenderán en el capítulo 10.

Figura 5.14 (Ejemplo 5.9) La máquina de Atwood. a) Dos objetos conectados mediante una cuerda inextensible sin masa sobre una polea sin fricción. b) Diagramas de cuerpo libre para los dos objetos.

Debe tener mucho cuidado con los signos en problemas como éste. En la figura 5.14a, note que, si el objeto 1 acelera hacia arriba, el objeto 2 acelera hacia abajo. Por lo tanto, por consistencia con los signos, si se define la dirección hacia arriba como positiva para el objeto 1, se debe definir la dirección hacia abajo como positiva para el objeto 2. Con esta convención de signos, ambos objetos aceleran en la misma dirección, que se define por la elección de signo. Además, de acuerdo con esta convención de signos, la componente y de la fuerza neta que se ejerce sobre el objeto 1 es $T - m_1g$, y la componente y de la fuerza neta que se ejerce sobre el objeto 2 es $m_2g - T$.

Aplique la segunda ley de Newton al objeto 1:

$$1)\quad \sum F_y = T - m_1g = m_1a_y$$

Ahora al objeto 2:

$$2)\quad \sum F_y = m_2g - T = m_2a_y$$

Sume la ecuación 2) con la ecuación 1) y advierta que T se cancela:

$$-m_1g + m_2g = m_1a_y + m_2a_y$$

Resuelva para la aceleración:

$$3)\quad a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g$$

Sustituya la ecuación 3) en la ecuación 1) para encontrar T:

$$4)\quad T = m_1(g + a_y) = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

Finalizar La aceleración conocida por la ecuación 3) se interpreta como la relación de la magnitud de la fuerza desequilibrada en el sistema $(m_2 - m_1)g$ a la masa total del sistema $(m_1 + m_2)$, como se espera de la segunda ley de Newton. Note que el signo de la aceleración depende de las masas relativas de los dos objetos.

¿Qué pasaría si? Describa el movimiento del sistema si los objetos tienen masas iguales, es decir, $m_1 = m_2$.

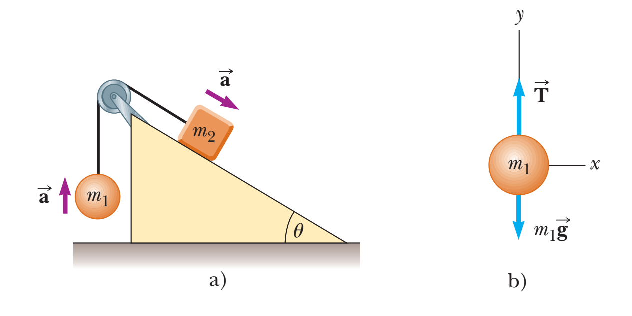
Respuesta Si se tiene la misma masa en ambos lados, el sistema está en equilibrio y no debe acelerar. Matemáticamente, se ve que, si $m_1 = m_2$, la ecuación 3) produce $a_y = 0$.

¿Qué pasaría si? ¿Si una de las masas es mucho más grande que la otra: $m_1 >> m_2$?

Respuesta En el caso en el que una masa es infinitamente mayor que la otra, se puede ignorar el efecto de la masa más pequeña. En tal caso, la masa mayor simplemente debe caer como si la masa más pequeña no estuviese ahí. Es claro que, si $m_1 >> m_2$, la ecuación 3) produce $a_y = -g$.

EJEMPLO 5.10 Aceleración de dos objetos conectados mediante una cuerda

Una bola de masa m_1 y un bloque de masa m_2 se unen mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura 5.15a. El bloque se encuentra sobre un plano inclinado sin fricción de ángulo θ. Encuentre la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda.



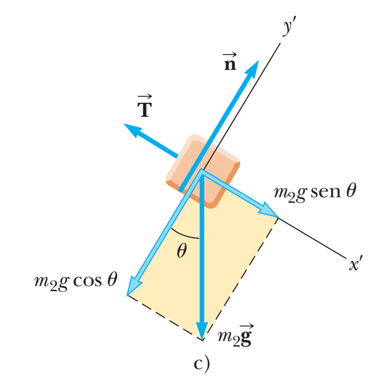


Figura 5.15 (Ejemplo 5.10). a) Dos objetos conectados mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para la bola. c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque. (El plano inclinado no tiene fricción.)

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los objetos de la figura 5.15 están en movimiento. Si m_2 se mueve hacia abajo del plano, m_1 se mueve hacia arriba. Puesto que los objetos están conectados mediante una cuerda (la cual se supone que no se estira), sus aceleraciones tienen la misma magnitud.

Categorizar Es posible identificar las fuerzas en cada uno de los dos objetos y se busca una aceleración, de modo que los objetos se clasifican como partículas bajo una fuerza neta.

Analizar Considere los diagramas de cuerpo libre que se muestran en las figuras 5.15b y 5.15c.

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes a la bola, y elija la dirección hacia arriba como positiva:

$$1)\quad \sum F_x = 0$$

$$2)\quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Para que la bola acelere hacia arriba, es necesario que $T > m_1 g$. En la ecuación 2), sustituya a_y con a porque la aceleración sólo tiene un componente y.

Para el bloque es conveniente elegir el eje x' positivo a lo largo del plano inclinado, como en la figura 5.15c. Por consistencia con la elección para la bola, se elige la dirección positiva hacia abajo en el plano.

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes al bloque:

$$3)\quad \sum F_{x'} = m_2 g \operatorname{sen} \theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$4)\quad \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos \theta = 0$$

En la ecuación 3), sustituya $a_{x'}$ con a porque los dos objetos tienen aceleraciones de igual magnitud a.

Resuelva la ecuación 2) para T:

$$5)\quad T = m_1(g + a)$$

Sustituya esta expresión para T en la ecuación 3):

$$m_2 g \operatorname{sen} \theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

Resuelva para a:

$$6)\quad a = \frac{m_2 g \operatorname{sen} \theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Sustituya esta expresión para a en la ecuación 5) para encontrar T:

$$7)\quad T = \frac{m_1 m_2 g (\operatorname{sen} \theta + 1)}{m_1 + m_2}$$

Finalizar El bloque acelera hacia abajo en el plano sólo si m_2 sen $\theta > m_1$. Si $m_1 > m_2$ sen θ, la aceleración es hacia arriba del plano para el bloque y hacia abajo para la bola. Note también que el resultado para la aceleración, ecuación 6), se puede interpretar como la magnitud de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema bola–bloque dividido entre la masa total del sistema; este resultado es consistente con la segunda ley de Newton.

¿Qué pasaría si? ¿Qué ocurre en esta situación si $\theta = 90°$?

Respuesta Si $\theta = 90°$, el plano inclinado se vuelve vertical y no hay interacción entre su superficie y m_2. En consecuencia, este problema se convierte en la máquina de Atwood del ejemplo 5.9. Si en las ecuaciones 6) y 7) se deja que $\theta \rightarrow 90°$, ¡ello hace que se reduzcan a las ecuaciones 3) y 4) del ejemplo 5.9!

¿Qué pasaría si? ¿Y si $m_1 = 0$?

Respuesta Si $m_1 = 0$, en tal caso m_2 simplemente se desliza hacia abajo por el plano sin interactuar con m_1 a través de la cuerda. En consecuencia, este problema se convierte en el problema del automóvil que se desliza en el ejemplo 5.6. Si en la ecuación 6) se deja que $m_1 \rightarrow 0$, ¡ello causa que se reduzca a la ecuación 3) del ejemplo 5.6!

5.8 Fuerzas de fricción

Cuando un objeto está en movimiento ya sea sobre una superficie o en un medio viscoso como aire o agua, existe resistencia al movimiento porque el objeto interactúa con su entorno. A tal resistencia se le llama **fuerza de fricción**. Las fuerzas de fricción son muy importantes en la vida cotidiana. Permiten que uno camine o corra y son necesarias para el movimiento de los vehículos con ruedas.

Imagine que trabaja en su jardín y llena un bote de basura con desechos de hojas. Luego intenta arrastrar el bote a través de la superficie de concreto de su patio, como en la figura 5.16a. Esta superficie es *real*, no una superficie idealizada sin fricción.

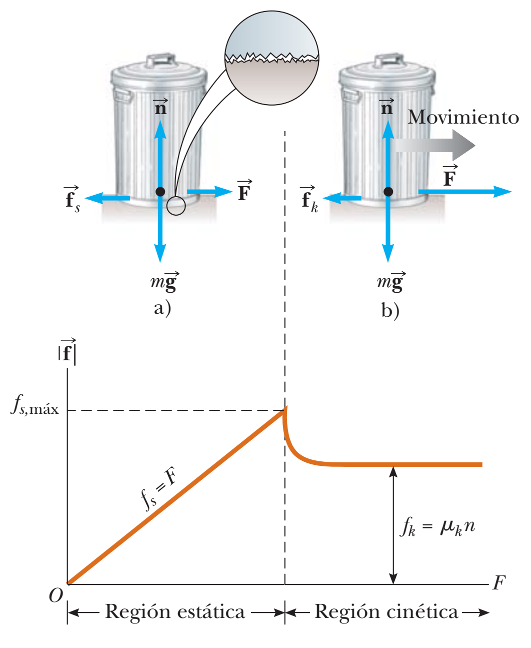


Figura 5.16 Cuando jala un bote de basura, la dirección de la fuerza de fricción $\vec{f}$ entre el bote y una superficie rugosa es opuesta a la dirección de la fuerza aplicada $\vec{F}$. Puesto que ambas superficies son rugosas, el contacto sólo se realiza en algunos puntos, como se ilustra en la vista “amplificada”. a) Para pequeñas fuerzas aplicadas, la magnitud de la fuerza de fricción estática es igual a la magnitud de la fuerza aplicada. b) Cuando la magnitud de la fuerza aplicada supera la magnitud de la fuerza máxima de fricción estática, el bote de basura queda libre. La fuerza aplicada ahora es mayor que la fuerza de fricción cinética y el bote puede acelerar hacia la derecha. c) Gráfica de fuerza de fricción en función de la fuerza aplicada. Note que $f_{s,\text{máx}} > f_k$.

Si se aplica una fuerza horizontal externa $\vec{\mathbf{F}}$ al bote de basura, que actúa hacia la derecha, el bote de basura permanece fijo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ es pequeña. La fuerza sobre el bote de basura que contraataca $\vec{\mathbf{F}}$ y evita que se mueva actúa hacia la izquierda y se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{\mathbf{f}}_s$. En tanto el bote de basura no se mueva, $f_s = F$. Por lo tanto, si $\vec{\mathbf{F}}$ aumenta, $\vec{\mathbf{f}}_s$ también aumenta. Del mismo modo, si $\vec{\mathbf{F}}$ disminuye, $\vec{\mathbf{f}}_s$ también disminuye. Los experimentos muestran que la fuerza de fricción surge de la naturaleza de las dos superficies: debido a su rugosidad, el contacto se realiza sólo en unas cuantas posiciones donde se tocan los picos del material, como se muestra en la vista amplificada de la superficie en la figura 5.16a.

Fuerza de fricción estática ▶

En dichas posiciones, la fuerza de fricción surge en parte porque un pico físicamente bloquea el movimiento de un pico de la superficie opuesta y en parte por el enlace químico ("punto de soldadura") de picos opuestos conforme entran en contacto. Aunque los detalles de la fricción son muy complejos al nivel atómico, esta fuerza involucra, a final de cuentas, una interacción eléctrica entre átomos o moléculas.

Si se aumenta la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$ como en la figura 5.16b, el bote de basura al final se desliza. Cuando el bote de basura está a punto de deslizarse, f_s tiene su valor máximo $f_{s,\text{máx}}$, como se muestra en la figura 5.16c. Cuando F supera $f_{s,\text{máx}}$, el bote de basura se mueve y acelera hacia la derecha. A la fuerza de fricción para un objeto en movimiento se le llama **fuerza de fricción cinética** $\vec{\mathbf{f}}_k$. Cuando el bote de basura está en movimiento, la fuerza de fricción cinética en el bote es menor que $f_{s,\text{máx}}$ (figura 5.16c). La fuerza neta $F - f_k$ en la dirección x produce una aceleración hacia la derecha, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Si $F = f_k$, la aceleración es cero y el bote de basura se mueve hacia la derecha con rapidez constante. Si la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ se elimina del bote en movimiento, la fuerza de fricción $\vec{\mathbf{f}}_k$ que actúa hacia la izquierda proporciona una aceleración del bote de basura en la dirección $-x$ y al final lo lleva al reposo, lo que, de nuevo, es consistente con la segunda ley de Newton.

Fuerza de fricción cinética ▶

En términos experimentales, se encuentra que, a una buena aproximación, tanto $f_{s,\text{máx}}$ como f_k son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal que se ejerce sobre un objeto por la superficie. Las siguientes descripciones de la fuerza de fricción están en función de las observaciones experimentales y sirven como el modelo que usará para fuerzas de fricción en resolución de problemas:

- La magnitud de la fuerza de fricción estática entre cualesquiera dos superficies cualesquiera en contacto tiene los valores

$$f_s \leq \mu_s n \quad \textbf{(5.9)}$$

  donde la constante adimensional μ_s se llama **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal que ejerce una superficie sobre la otra. La igualdad en la ecuación 5.9 se cumple cuando las superficies están a punto de deslizarse, esto es, cuando $f_s = f_{s,\text{máx}} \equiv \mu_s n$. Esta situación se llama *movimiento inminente*. La desigualdad se cumple cuando las superficies no están a punto de deslizarse.
- La magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa entre dos superficies es

$$f_k = \mu_k n \quad \textbf{(5.10)}$$

  donde μ_k se llama **coeficiente de fricción cinética**. Aunque el coeficiente de fricción cinética varía con la rapidez, por lo general en este texto se despreciará cualquiera de tales variaciones.
- Los valores de μ_k y μ_s dependen de la naturaleza de las superficies, pero μ_k por lo general es menor que μ_s. El intervalo de los valores típicos fluctúan de 0.03 a 1.0. La tabla 5.1 indica algunos valores reportados.
- La dirección de la fuerza de fricción sobre un objeto es paralela a la superficie con la que el objeto está en contacto y opuesta al movimiento real (fricción cinética) o al movimiento inminente (fricción estática) del objeto en relación con la superficie.
- Los coeficientes de fricción son casi independientes del área de contacto entre las superficies. Es de esperar que al colocar un objeto en el lado que tiene más área aumente la fuerza de fricción. Aunque este método proporciona más puntos de contacto como en la figura 5.16a, el peso del objeto se dispersa sobre un área más

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.9

El signo igual se usa en situaciones limitadas

En la ecuación 5.9 el signo igual se usa *sólo* en caso de que las superficies estén a punto de liberarse y comiencen a deslizarse. No caiga en la trampa común de usar $f_s = \mu_s n$ en *cualquier* situación estática.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.10

Ecuaciones de fricción

Las ecuaciones 5.9 y 5.10 *no* son ecuaciones vectoriales. Son correspondencias entre las *magnitudes* de los vectores que representan las fuerzas de fricción y normal. Puesto que las fuerzas de fricción y normal son mutuamente perpendiculares, los vectores no se pueden relacionar mediante una constante multiplicativa.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.11

La dirección de la fuerza de fricción

En ocasiones se hace un enunciado incorrecto acerca de la fuerza de fricción entre un objeto y una superficie ("la fuerza de fricción en un objeto es opuesta a su movimiento o al movimiento inminente") en lugar de la frase correcta: "la fuerza de fricción en un objeto es opuesta a su movimiento o al movimiento inminente *en relación con la superficie*".

TABLA 5.1

Coeficientes de fricción

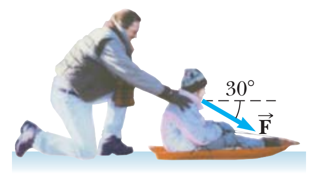
	μ_s	μ_k
Hule sobre concreto	1.0	0.8
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Madera sobre madera	0.25–0.5	0.2
Madera encerada sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Madera encerada sobre nieve seca	—	0.04
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.06
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Articulación sinovial en humanos	0.01	0.003

Nota: Todos los valores son aproximados. En algunos casos el coeficiente de fricción puede superar 1.0.

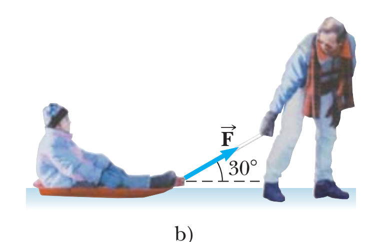
grande y los puntos individuales no se oprimen tan estrechamente entre sí. Ya que estos efectos se compensan, aproximadamente, uno con otro, la fuerza de fricción es independiente del área.

Pregunta rápida 5.6 Usted presiona con su mano su libro de física plano contra una pared vertical. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción que ejerce la pared sobre el libro? a) hacia abajo, b) hacia arriba, c) afuera desde la pared, d) hacia dentro de la pared.

Pregunta rápida 5.7 Usted juega con su hija en la nieve. Ella se sienta sobre un trineo y le pide que la deslice sobre un campo horizontal plano. Usted tiene la opción de a) empujarla desde atrás al aplicar una fuerza hacia abajo sobre sus hombros a 30° bajo la horizontal (figura 5.17a) o b) unir una cuerda al frente del trineo y jalar con una fuerza a 30° sobre la horizontal (figura 5.17b). ¿Cuál sería más fácil para usted y por qué?



a)



b)

Figura 5.17 (Pregunta rápida 5.7) Un padre desliza a su hija sobre un trineo mediante a) empujar sobre sus hombros o b) jalar con una cuerda.

EJEMPLO 5.11 Determinación experimental de μ_s y μ_k

El siguiente es un método simple de medir coeficientes de fricción. Suponga que se coloca un bloque sobre una superficie rugosa inclinada en relación con la horizontal, como se muestra en la figura 5.18. El ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque comienza a moverse. Demuestre que puede obtener μ_s al medir el ángulo crítico θ_c al que comienza a ocurrir este deslizamiento.

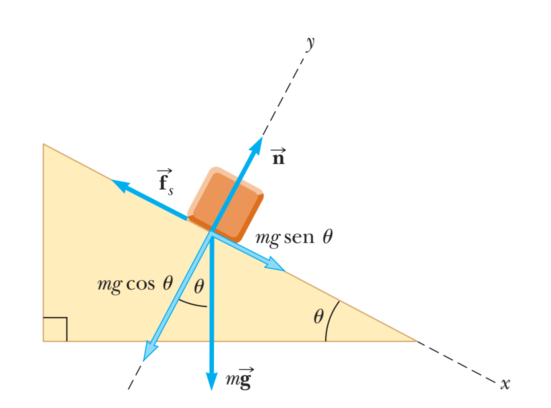


Figura 5.18 (Ejemplo 5.11) Las fuerzas externas que se ejercen sobre un bloque que se encuentra sobre un plano inclinado rugoso son la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, la fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza de fricción $\mathbf{f}_s$. Por conveniencia, la fuerza gravitacional se descompone en una componente mg sen θ a lo largo del plano y una componente $mg \cos \theta$ perpendicular al plano.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere el diagrama de cuerpo libre en la figura 5.18 e imagine que el bloque tiende a deslizarse por el plano debido a la fuerza gravitacional. Para simular la situación, coloque una moneda sobre la cubierta de este libro e incline el libro hasta que la moneda comience a deslizarse.

Categorizar El bloque está sometido a diferentes fuerzas. Puesto que el plano se eleva al ángulo en que el bloque está listo para comenzar a moverse pero no se mueve, el bloque se clasifica como una partícula en equilibrio.

Analizar Las fuerzas que actúan en el bloque son la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción estática $\vec{\mathbf{f}}_s$. Se elige x paralelo al plano y y perpendicular a él.

Aplique la ecuación 5.8 al bloque:

$$1)\quad \sum F_x = mg \text{ sen } \theta - f_s = 0$$

$$2)\quad \sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$$

Sustituya $mg = n/\cos\theta$ de la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$3)\quad f_s = mg \text{ sen } \theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right) \text{sen } \theta = n \tan\theta$$

Cuando el ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática alcanza su valor máximo $\mu_s n$. El ángulo θ en esta situación es el ángulo crítico θ_c. Haga estas sustituciones en la ecuación 3):

$$\mu_s n = n \tan \theta_c$$

$$\mu_s = \tan \theta_c$$

Por ejemplo, si el bloque apenas se desliza en $\theta_c = 20.0°$, se encuentra que $\mu_s = \tan 20.0° = 0.364$.

Finalizar Una vez que el bloque comienza a moverse en $\theta \geq \theta_c$, acelera hacia abajo por el plano y la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n$. Sin embargo, si θ se reduce a un valor menor que θ_c, puede ser posible encontrar un ángulo θ'_c tal que el bloque se mueve hacia abajo por el plano con rapidez constante de nuevo como una partícula en equilibrio ($a_x = 0$). En este caso, use las ecuaciones 1) y 2) con f_s en lugar de f_k para encontrar μ_k: $\mu_k = \tan\theta'_c$, donde $\theta'_c < \theta_c$.

EJEMPLO 5.12 Disco de hockey deslizante

A un disco de hockey sobre un estanque congelado se le da una rapidez inicial de 20.0 m/s. Si el disco siempre permanece sobre el hielo y se desliza 115 m antes de llegar al reposo, determine el coeficiente de fricción cinética entre el disco y el hielo.

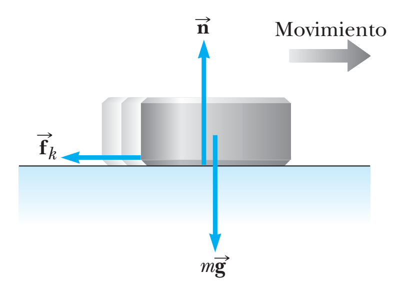


Figura 5.19 (Ejemplo 5.12) Después de que al disco se le da una velocidad inicial hacia la derecha, las únicas fuerzas externas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción cinética $\vec{\mathbf{f}}_k$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el disco de la figura 5.19 se desliza hacia la derecha y al final llega al reposo debido a la fuerza de fricción cinética.

Categorizar Las fuerzas que actúan sobre el disco se identifican en la figura 5.19, pero el texto del problema proporciona variables cinemáticas. Por lo tanto, el problema se clasifica en dos formas. Primero, el problema involucra una partícula bajo una fuerza neta: la fricción cinética ocasiona que el disco acelere. Y, ya que la fuerza de fricción cinética se representa como independiente de la rapidez, la aceleración del disco es constante. Así que este problema también se clasifica como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Primero, encuentre la aceleración algebraicamente en términos del coeficiente de fricción cinética, con la segunda ley de Newton. Una vez que conozca la aceleración del disco y la distancia que recorre, encuentre las ecuaciones de cinemática para encontrar el valor numérico del coeficiente de fricción cinética.

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta en la dirección x del disco:

$$1)\quad \sum F_x = -f_k = ma_x$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y del disco:

$$2)\quad \sum F_y = n - mg = 0$$

Sustituya $n = mg$ de la ecuación 2) y $f_k = \mu_k n$ en la ecuación 1):

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$

$$a_x = -\mu_k g$$

El signo negativo significa que la aceleración es hacia la izquierda en la figura 5.19. Ya que la velocidad del disco es hacia la derecha, el disco frena. La aceleración es independiente de la masa del disco y es constante porque se supone que μ_k permanece constante.

Aplique el modelo de partícula bajo aceleración constante al disco, con la ecuación 2.17, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, con $x_i = 0$ y $v_f = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2gx_f}$$

$$\mu_k = \frac{(20.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)(115 \text{ m})} = 0.117$$

Finalizar Observe que μ_k es adimensional, cual debe ser, y que tiene un valor menor, consistente con un objeto que se desliza en hielo.

EJEMPLO 5.13 Aceleración de dos objetos conectados cuando la fricción está presente

Un bloque de masa m_1 sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una bola de masa m_2 mediante una cuerda ligera sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura 5.20a. Al bloque se aplica una fuerza de magnitud F en un ángulo θ con la horizontal como se muestra, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

Figura 5.20 (Ejemplo 5.13) a) La fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada como se muestra puede hacer que el bloque acelere hacia la derecha. b) y c) Diagramas de cuerpo libre que suponen que el bloque acelera hacia la derecha y la bola acelera hacia arriba. La magnitud de la fuerza de fricción cinética en este caso está dada por $f_k = \mu_k n = \mu_k (m_1 g - F \text{ sen } \theta)$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que ocurre conforme se aplica $\vec{\mathbf{F}}$ al bloque. Si supone que $\vec{\mathbf{F}}$ no es suficientemente grande como para levantar el bloque, éste se desliza hacia la derecha y la bola sube.

Categorizar Se pueden identificar las fuerzas y se quiere una aceleración, así que este problema se clasifica como dos partículas bajo una fuerza neta, la bola y el bloque.

Analizar Primero dibuje diagramas de cuerpo libre para los dos objetos, como se muestra en las figuras 5.20b y 5.20c. La fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ tiene componentes x y y $F \cos \theta$ y $F \text{ sen } \theta$, respectivamente. Ya que los dos objetos están conectados, se pueden igualar las magnitudes de la componente x de la aceleración del bloque y la componente y de la aceleración de la bola y llamar a ambas a. Suponga que el movimiento del bloque es hacia la derecha.

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta al bloque en la dirección horizontal:

$$1) \quad \sum F_x = F \cos \theta - f_k - T = m_1 a_x = m_1 a$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al bloque en la dirección vertical:

$$2) \quad \sum F_y = n + F \text{ sen } \theta - m_1 g = 0$$

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta a la bola en la dirección vertical:

$$3) \quad \sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = m_2 a$$

Resuelva la ecuación 2) para n:

$$n = m_1 g - F \operatorname{sen} \theta$$

Sustituya n en $f_k = \mu_k n$ de la ecuación 5.10:

$$4) \quad f_k = \mu_k (m_1 g - F \operatorname{sen} \theta)$$

Sustituya la ecuación 4) y el valor de T de la ecuación 3) en la ecuación 1):

$$F \cos \theta - \mu_k (m_1 g - F \operatorname{sen} \theta) - m_2 (a + g) = m_1 a$$

Resuelva para a:

$$5) \quad a = \frac{F(\cos \theta + \mu_k \operatorname{sen} \theta) - (m_2 + \mu_k m_1) g}{m_1 + m_2}$$

Finalizar La aceleración del bloque puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda, depende del signo del numerador en la ecuación 5). Si el movimiento es hacia la izquierda, se debe invertir el signo de f_k en la ecuación 1) porque la fuerza de fricción cinética se debe oponer al movimiento del bloque en relación con la superficie. En este caso, el valor de a es el mismo que en la ecuación 5), con los dos signos más en el numerador cambiados a signos menos.

Resumen

DEFINICIONES

Un **marco de referencia inercial** es un marco en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero. Cualquier marco que se mueva con velocidad constante en relación con un marco inercial también es un marco inercial.

La **fuerza** se define como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto.**

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **primera ley de Newton** establece que es posible encontrar un marco inercial en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero o, de manera equivalente, en ausencia de una fuerza externa, cuando se observa desde un marco inercial, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento uniforme en línea recta mantiene dicho movimiento.

La **segunda ley de Newton** afirma que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

La **tercera ley de Newton** postula que, si dos objetos interactúan, la fuerza que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1.

La **fuerza gravitacional** que se ejerce sobre un objeto es igual al producto de su masa (una cantidad escalar) y la aceleración de caída libre: $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$.

El **peso** de un objeto es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto.

La **máxima fuerza de fricción estática** $\vec{\mathbf{f}}_{s,\text{máx}}$ entre un objeto y una superficie es proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el objeto. En general, $f_s \leq \mu_s n$, donde μ_s es el **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal. Cuando un objeto se desliza sobre una superficie, la magnitud de la **fuerza de fricción cinética** $\vec{\mathbf{f}}_k$ está dada por $f_k = \mu_k n$, donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**. La dirección de la fuerza de fricción es opuesta a la dirección del movimiento o movimiento inminente del objeto en relación con la superficie.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula bajo fuerza neta Si una partícula de masa m experimenta una fuerza neta distinta de cero, su aceleración se relaciona con la fuerza neta mediante la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad \textbf{(5.2)}$$

m $\vec{\mathbf{a}}$ $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$

Partícula en equilibrio Si una partícula mantiene una velocidad constante (de modo que $\vec{\mathbf{a}} = 0$), que podría incluir una velocidad de cero, las fuerzas sobre la partícula se equilibran y la segunda ley de Newton se reduce a

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad \textbf{(5.8)}$$

$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ m $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Una bola se sostiene en la mano de una persona. a) Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la bola y la reacción a cada una. b) Si la bola se suelta, ¿qué fuerza se ejerce sobre ella mientras cae? Identifique la fuerza de reacción en este caso. (Ignore la resistencia del aire.)
2. Si un automóvil viaja hacia el oeste con una rapidez constante de 20 m/s, ¿cuál es la fuerza resultante que actúa sobre él?
3. **O** Un experimento se realiza sobre un disco en una mesa de hockey de aire, donde la fricción es despreciable. Se aplica una fuerza horizontal constante al disco y se mide su aceleración. Ahora el mismo disco se transporta hacia el espacio exterior, donde tanto la fricción como la gravedad son despreciables. Al disco se le aplica la misma fuerza constante (a través de una balanza de resorte que estira la misma cantidad) y se mide la aceleración del disco (en relación con las estrellas distantes). ¿Cuál es la aceleración del disco en el espacio exterior? a) un poco mayor que su aceleración en la Tierra, b) la misma que su aceleración en la Tierra, c) menor que su aceleración en la Tierra, d) infinita porque ni la fricción ni la gravedad la restringen, e) muy grande porque la aceleración es inversamente proporcional al peso y el peso del disco es muy pequeño pero no cero.
4. En la película *It Happened One Night* (Columbia Pictures, 1934), Clark Gable está de pie adentro de un autobús estacionado en frente de Claudette Colbert, quien está sentada. De pronto el autobús comienza a moverse hacia adelante y Clark cae en el regazo de Claudette. ¿Por qué ocurrió esto?
5. Sus manos están húmedas y el dispensador de toallas del baño está vacío. ¿Qué hace para quitar las gotas de agua de sus manos? ¿Cómo su acción ejemplifica una de las leyes de Newton? ¿Cuál de ellas?
6. Una pasajera sentada en la parte trasera de un autobús afirma que se lesionó cuando el conductor frenó bruscamente, lo que hizo que una maleta saliera volando hacia ella desde la parte delantera del autobús. Si usted fuese el juez en este caso, ¿qué sentencia haría? ¿Por qué?
7. Un globo esférico de hule inflado con aire se mantiene fijo y su abertura, en el lado oeste, se aprieta firmemente. a) Describa las fuerzas que ejerce el aire sobre secciones del hule. b) Después de que el globo se libera, despega hacia el este y pronto gana mucha rapidez. Explique este movimiento en términos de las fuerzas que ahora actúan sobre el hule. c) Explique el movimiento de un cohete que despega desde su plataforma de lanzamiento.
8. Si usted sostiene una barra metálica horizontal varios centímetros arriba del suelo y la mueve a través del pasto, cada hoja de pasto se dobla en el camino. Si aumenta la rapidez de la barra, cada hoja de pasto se doblará más rápidamente. En tal caso, ¿cómo una podadora rotatoria corta el pasto? ¿Cómo ejerce suficiente fuerza sobre una hoja de pasto para cortarla?
9. Una bola de hule se suelta en el suelo. ¿Qué fuerza hace que la bola rebote?
10. Una niña lanza una bola hacia arriba. Ella dice que la bola se mueve alejándose de su mano porque la bola siente una “fuerza de lanzamiento” hacia arriba así como la fuerza gravitacional. a) ¿La “fuerza de lanzamiento” supera la fuerza gravitacional? ¿Cómo se movería la bola si lo hiciera? b) ¿La “fuerza de lanzamiento” es igual en magnitud a la fuerza gravitacional? Explique. c) ¿Qué intensidad se puede atribuir con precisión a la fuerza de lanzamiento? Explique. d) ¿Por qué la bola se aleja de la mano de la niña?
11. **O** Los alumnos de tercer año están en un lado del patio de la escuela y los de cuarto año están en el otro. Los grupos lanzan bolas de nieve uno a otro. Entre ellos, bolas de nieve de diversas masas se mueven con diferentes velocidades, como se muestra en la figura P5.11. Clasifique las bolas de nieve de la a) a la e) de acuerdo con la magnitud de la fuerza total que se ejerce sobre cada una. Ignore la resistencia del aire. Si dos bolas de nieve se clasifican juntas, aclare el hecho.

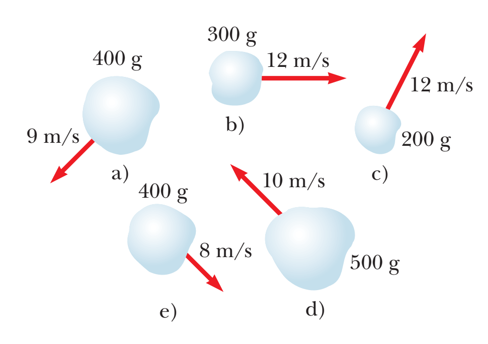


Figura P5.11

12. El alcalde de una ciudad decide despedir a algunos empleados porque no corrigen los obvios pandeos de los cables que sostienen los semáforos de la ciudad. Si fuera abogado, ¿qué defensa daría en favor de los empleados? ¿Qué lado cree que ganaría el caso en la corte?

13. Un segmento de *America's Funniest Home Videos*. Equilibrándose con cuidado, tres chicos avanzan lentamente en la rama horizontal de un árbol sobre un estanque, donde cada uno planea echarse un clavado. El más joven e inteligente de los chicos nota que la rama es apenas suficientemente fuerte como para sostenerlos. Decide saltar recto hacia arriba y aterrizar de nuevo sobre la rama para romperla, lo que hará que los tres caigan juntos en el estanque. Cuando comienza a realizar su plan, ¿en qué momento preciso se rompe la rama? Explique. *Sugerencia:* Pretenda ser el chico inteligente e imite lo que hace en cámara lenta. Si todavía no está seguro, párese en una báscula de baño y repita la sugerencia.

14. Cuando empuja sobre una caja con una fuerza de 200 N en lugar de una fuerza de 50 N, puede sentir que hace un mayor esfuerzo. Cuando una mesa ejerce una fuerza normal hacia arriba de 200 N en lugar de una de magnitud más pequeña, ¿la mesa realmente hace algo de modo diferente?

15. Un levantador de pesas está de pie sobre una báscula. Sube y baja una barra con pesas. ¿Qué ocurre con la lectura de la báscula mientras lo hace? **¿Qué pasaría si?** ¿Qué sucedería si en efecto él es lo suficientemente fuerte para lanzar la barra hacia arriba? ¿Ahora cómo variaría la lectura en la balanza?

16. a) ¿Una fuerza normal puede ser horizontal? b) ¿Una fuerza normal puede dirigirse verticalmente hacia abajo? c) Considere una pelota de tenis en contacto con un suelo fijo y con nada más. ¿La fuerza normal puede ser diferente en magnitud de la fuerza gravitacional que se ejerce sobre la pelota? d) ¿La fuerza que ejerce el suelo sobre la bola puede ser diferente en magnitud de la fuerza que la bola ejerce sobre el suelo? Explique cada una de sus respuestas.

17. Suponga que un camión cargado con arena acelera a lo largo de una autopista. Si la fuerza impulsora que se ejerce sobre el camión permanece constante, ¿qué ocurre con la aceleración del camión si su remolque tiene una fuga de arena con una rapidez constante a través de un orificio en su fondo?

18. **O** En la figura P5.18, la cuerda B, inextensible, tensa y ligera une el bloque 1 y el bloque 2 de mayor masa. La cuerda A ejerce una fuerza sobre el bloque 1 para hacerlo acelerar hacia adelante. a) ¿Cómo se compara la magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda A sobre el bloque 1, con la magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda B sobre el bloque 2? ¿Es mayor, menor o igual? b) ¿Cómo se compara la aceleración del bloque 1 con la aceleración (si la hay) del bloque 2? c) ¿La cuerda B ejerce una fuerza sobre el bloque 1? Si es así, ¿es hacia adelante o hacia atrás? ¿Es mayor, menor o igual en magnitud a la fuerza que ejerce la cuerda B sobre el bloque 2?

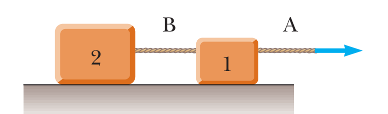


Figura P5.18

19. Identifique los pares acción–reacción en las situaciones siguientes: un hombre da un paso, una bola de nieve golpea a una niña en la espalda, un jugador de beisbol atrapa una bola, una ráfaga de viento golpea una ventana.

20. **O** En una máquina de Atwood, que se ilustra en la figura 5.14, una cuerda ligera que no se estira pasa sobre una polea ligera sin fricción. En un lado, el bloque 1 cuelga de la cuerda vertical. En el otro lado, el bloque 2 de mayor masa cuelga de la cuerda vertical. a) Los bloques se liberan desde el reposo. ¿La magnitud de la aceleración del bloque 2 más pesado es mayor, menor o igual que la aceleración en caída libre g? b) ¿La magnitud de la aceleración del bloque 2 es mayor, menor o igual que la aceleración del bloque 1? c) ¿La magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda sobre el bloque 2 es mayor, menor o igual que la fuerza de la cuerda sobre el bloque 1?

21. Veinte personas participan en un concurso de jalar la cuerda. Los dos equipos de 10 personas están tan igualmente distribuidos que ningún equipo gana. Después del juego, los participantes notan que un automóvil está atorado en el lodo. Unen la soga del juego a la defensa del automóvil y todas las personas jalan la soga. El pesado automóvil apenas se mueve un par de decímetros cuando la soga se rompe. ¿Por qué se rompe en esta situación, pero no cuando las mismas 20 personas jalaban sobre ella durante el juego?

22. **O** En la figura P5.22, una locomotora cae a través de la pared de una estación ferroviaria. Por como lo hizo, ¿qué puede decir acerca de la fuerza que ejerce la locomotora sobre la pared? a) La fuerza que ejerció la locomotora sobre la pared fue mayor que la fuerza que la pared podía ejercer sobre la locomotora. b) La fuerza que ejerció la locomotora sobre la pared fue de igual magnitud que la fuerza que ejerció la pared sobre la locomotora. c) La fuerza que ejerció la locomotora sobre la pared fue menor que la fuerza que ejerció la pared sobre la locomotora. d) No se puede decir que la pared "ejerció" una fuerza; después de todo, se rompió.



Roger Viollet, Mill Valley, CA, University Science Books, 1982

Figura P5.22

23. Un atleta sujeta una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción unida al techo de un gimnasio. Al otro extremo de la cuerda se amarra un saco de arena precisamente igual en peso al atleta. Tanto el saco como el atleta al inicio están en reposo. El atleta escala la cuerda, a veces acelerando y frenando mientras lo hace. ¿Qué ocurre con el saco de arena? Explique.

24. **O** Un pequeño insecto está anidado entre un bloque de 1 kg y un bloque de 2 kg sobre una mesa sin fricción. Sobre cualquier bloque se puede aplicar una fuerza horizontal, como se muestra en la figura P5.24. **i)** ¿En cuál situación ilustrada en la figura, a) o b), el insecto tiene una mejor oportunidad de sobrevivir, o c) no hay diferencia? **ii)** Considere el enunciado "La fuerza que ejerce el bloque más grande sobre el más pequeño es mayor en magnitud que la fuerza que ejerce el

bloque más pequeño sobre el mayor". ¿El enunciado es verdadero sólo en la situación a)? ¿Sólo en la situación b)? ¿En c) ambas situaciones o d) en ninguna? **iii)** Considere el enunciado "mientras los bloques se mueven, la fuerza que ejerce el bloque trasero sobre el bloque delantero es mayor que la fuerza que ejerce el bloque delantero sobre el trasero". ¿Este enunciado es verdadero sólo en la situación a), sólo en la situación b), c) en ambas situaciones o d) en ninguna?

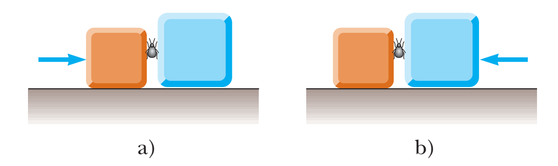


Figura P5.24

25. ¿Un objeto puede ejercer una fuerza sobre sí mismo? Argumente su respuesta.

26. **O** El molesto gerente de una tienda departamental empuja horizontalmente con una fuerza de 200 N de magnitud sobre una caja de camisas. La caja se desliza a través del suelo horizontal con una aceleración hacia adelante. Nada más toca la caja. ¿Qué debe ser verdadero acerca de la magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre la caja (elija una)? a) Es mayor que 200 N. b) Es menor que 200 N. c) Es igual a 200 N. d) Ninguno de estos enunciados necesariamente es verdadero.

27. Un automóvil se mueve hacia adelante lentamente y aumenta su rapidez. Un estudiante afirma "el automóvil ejerce una fuerza sobre sí mismo" o "el motor del automóvil ejerce una fuerza en el automóvil". Argumente que esta idea no puede ser exacta y que la fricción que ejerce el camino es la fuerza propulsora sobre el automóvil. Haga su evidencia y razonamiento tan persuasivo como sea posible. ¿Es fricción estática o cinética? *Sugerencia:* Considere un camino cubierto con grava ligera. Considere una impresión clara de la huella de la llanta sobre un camino de asfalto, obtenida al recubrir la huella con polvo.

28. **O** El conductor de un camión vacío que viaja con gran rapidez aplica los frenos y derrapa hasta detenerse a través de una distancia d. **i)** Si el camión ahora lleva una carga que duplica su masa, ¿cuál será la "distancia de derrape" del camión? a) $4d$, b) $2d$, c) $\sqrt{2}d$, d) d, e) $d/\sqrt{2}$, f) $d/2$, g) $d/4$. **ii)** Si la rapidez inicial del camión vacío se redujera a la mitad, ¿cuál sería la distancia de derrape del camión? Elija de las mismas posibilidades de la a) a la g).

29. **O** Un objeto de masa m se desliza con rapidez v_0 en cierto instante a través de una mesa a nivel, con la que su coeficiente de fricción cinética es μ. Luego se mueve a través de una distancia d y llega al reposo. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones para la rapidez v_0 es razonable (elija una)? a) $v_0 = \sqrt{-2\mu mgd}$, b) $v_0 = \sqrt{2\mu mgd}$, c) $v_0 = \sqrt{-2\mu gd}$, d) $v_0 = \sqrt{2\mu gd}$, e) $v_0 = \sqrt{2gd/\mu}$, f) $v_0 = \sqrt{2\mu md}$, g) $v_0 = \sqrt{2\mu d}$.

30. **O** Un caja permanece fija después de que se coloca sobre una rampa inclinada a un ángulo con la horizontal. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto acerca de la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre la caja? Elija todos los que sean verdaderos. a) Es mayor que el peso de la caja. b) Es casi igual al peso de la caja. c) Es igual a $\mu_s n$. d) Es mayor que la componente de la fuerza gravitacional que actúa a lo largo de la rampa. e) Es igual la componente de la fuerza gravitacional que actúa a lo largo de la rampa. f) Es menor que la componente de la fuerza gravitacional que actúa hacia abajo de la rampa.

31. Suponga que usted maneja un auto clásico. ¿Por qué debe evitar pisar fuertemente los frenos cuando quiera detenerse en la menor distancia posible? (Muchos automóviles modernos tienen frenos antibloqueo que evitan este problema.)

32. Describa algunos ejemplos en que la fuerza de fricción que se ejerce sobre un objeto está en la dirección de movimiento del objeto.

33. **O** Como se muestra en la figura P5.33, el estudiante A, una niña de 55 kg, se sienta en una silla con patas metálicas, en reposo en el suelo del salón de clase. El estudiante B, un niño de 80 kg, se sienta en una silla idéntica. Ambos estudiantes mantienen sus pies alejados del suelo. Una cuerda corre de las manos de la estudiante A alrededor de una polea ligera hacia las manos del profesor que está de pie en el suelo junto a ella. El eje de baja fricción de la polea se une a una segunda cuerda que sostiene el estudiante B. Todas las cuerdas corren paralelas a las patas de las sillas. a) Si la estudiante A jala sobre su extremo de la cuerda, ¿su silla o la de B se deslizará sobre el suelo? b) Si en vez de ello el profesor jala sobre su extremo de cuerda, ¿cuál silla se desliza? c) Si el estudiante B jala su cuerda, ¿cuál silla se desliza? d) Ahora el profesor ata su extremo de cuerda a la silla de la estudiante A. La estudiante A jala el extremo de cuerda en sus manos. ¿Cuál silla se desliza? (Vern Rockcastle sugirió la idea para esta pregunta.)

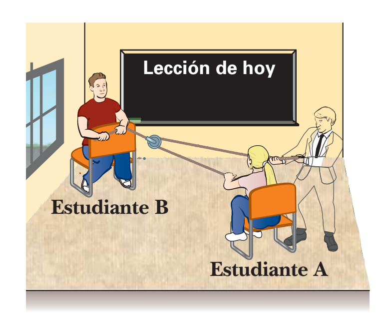


Figura P5.33

Problemas

Secciones de la 5.1 a la 5.6

1. Un objeto de 3.00 kg se somete a una aceleración conocida por $\vec{\mathbf{a}} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. Encuentre la fuerza resultante que actúa sobre él y la magnitud de la fuerza resultante.

2. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3.00 m/s^2. La misma fuerza aplicada a un segundo objeto de masa m_2 produce una aceleración de 1.00 m/s^2. a) ¿Cuál es el valor de la relación m_1/m_2? b) Si m_1 y m_2 se combinan en un objeto, ¿cuál es su aceleración bajo la acción de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$?

3. Para modelar una nave espacial, el motor de un cohete de juguete se sujeta firmemente a un gran disco que puede deslizar con fricción despreciable sobre una superficie horizontal, que se toma como plano *xy*. El disco de 4.00 kg tiene una velocidad de (3.00$\hat{\mathbf{i}}$ m/s en un instante. Ocho segundos después, su velocidad es $(8.00\hat{\mathbf{i}} + 10.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Si supone que el motor de cohete ejerce una fuerza horizontal constante, encuentre a) las componentes de la fuerza y b) su magnitud.

4. La rapidez promedio de una molécula de nitrógeno en el aire es aproximadamente 6.70×10^2 m/s y su masa es 4.68×10^{-26} kg. a) Si una molécula de nitrógeno tarda 3.00×10^{-13} s en golpear una pared y rebotar con la misma rapidez pero moviéndose en la dirección opuesta, ¿cuál es la aceleración promedio de la molécula durante este intervalo de tiempo? b) ¿Qué fuerza promedio ejerce la molécula sobre la pared?

5. Un electrón de 9.11×10^{-31} kg de masa tiene una rapidez inicial de 3.00×10^5 m/s. Viaja en línea recta y su rapidez aumenta a 7.00×10^5 m/s en una distancia de 5.00 cm. Si supone que su aceleración es constante, a) determine la fuerza que se ejerce sobre el electrón y b) compare esta fuerza con el peso del electrón, que se ignoró.

6. Una mujer pesa 120 lb. Determine a) su peso en newtons y b) su masa en kilogramos.

7. La distinción entre masa y peso se descubrió después de que Jean Richer transportara relojes de péndulo de Francia a la Guayana Francesa en 1671. Encontró que sistemáticamente los relojes se mueven más lentos ahí. El efecto se invertía cuando los relojes regresaban a Francia. ¿Cuánto peso perdería usted cuando viajara de París, Francia, donde $g = 9.809\ 5$ m/s^2, a Cayena, Guayana Francesa, donde $g = 9.780\ 8$ m/s^2?

8. Además de su peso, un objeto de 2.80 kg está sometido a otra fuerza constante. El objeto parte del reposo y en 1.20 s experimenta un desplazamiento de $(4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.30\hat{\mathbf{j}})$ m/s, donde la dirección de $\hat{\mathbf{j}}$ es la dirección vertical hacia arriba. Determine la otra fuerza.

9. Dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ actúan sobre un objeto de 5.00 kg. Si toma $F_1 = 20.0$ N y $F_2 = 15.0$ N, encuentre las aceleraciones en a) y b) de la figura P5.9.

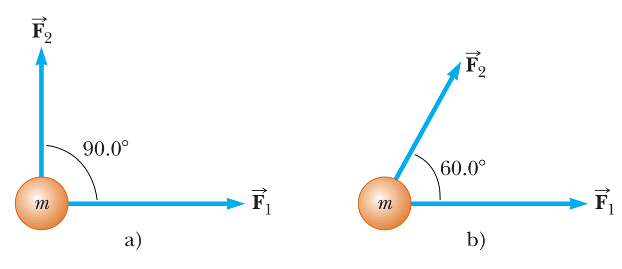


Figura P5.9

10. Se ejercen una o más fuerzas externas sobre cada objeto encerrado en un recuadro con líneas discontinuas en la figura 5.1. Identifique la reacción a cada una de dichas fuerzas.

11. Usted está de pie en el asiento de una silla y luego salta. a) Durante el intervalo de tiempo en el que está en vuelo hacia el suelo, la Tierra se tambalea hacia usted con una aceleración ¿de qué orden de magnitud? En su solución, explique su lógica. Represente a la Tierra como un objeto perfectamente sólido. b) La Tierra se mueve hacia arriba a través de una distancia ¿de qué orden de magnitud?

12. Un ladrillo de masa *M* está sobre una almohadilla de hule de masa *m*. Juntos se deslizan hacia la derecha con velocidad constante sobre un estacionamiento cubierto de hielo. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del ladrillo e identifique cada fuerza que actúa sobre él. b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la almohadilla e identifique cada fuerza que actúa sobre ella. c) Identifique todos los pares de fuerzas acción–reacción en el sistema ladrillo–almohadilla–planeta.

13. Un bloque de 15.0 lb descansa sobre el suelo. a) ¿Qué fuerza ejerce el suelo sobre el bloque? b) Una cuerda se ata al bloque y se mueve verticalmente sobre una polea. El otro extremo de la cuerda se une a un objeto de 10.0 lb que cuelga libre. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el suelo sobre el bloque de 15.0 lb? c) Si se sustituye el objeto de 10.0 lb del inciso b) con un objeto de 20.0 lb, ¿cuál es la fuerza que ejerce el suelo sobre el bloque de 15.0 lb?

14. Tres fuerzas que actúan sobre un objeto se proporcionan por $\vec{\mathbf{F}}_1 = (-2.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_2 = (5.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ N y $\vec{\mathbf{F}}_3$ (−45.0 $\hat{\mathbf{i}}$) N. El objeto experimenta una aceleración de 3.75 m/s^2 de magnitud. a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración? b) ¿Cuál es la masa del objeto? c) Si el objeto inicialmente está en reposo, ¿cuál es su rapidez después de 10.0 s? d) ¿Cuáles son las componentes de velocidad del objeto después de 10.0 s?

Sección 5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

15. La figura P5.15 muestra un trabajador que empuja un bote, un modo de transporte muy eficiente, a través de un lago tranquilo. Empuja paralelo a la longitud de la pértiga ligera y ejerce sobre el fondo del lago una fuerza de 240 N. Suponga que la pértiga se encuentra en el plano vertical que contiene la quilla del bote. En algún momento, la pértiga forma un ángulo de 35.0° con la vertical y el agua ejerce una fuerza de arrastre horizontal de 47.5 N sobre el bote, opuesta a su velocidad hacia adelante de 0.857 m/s de magnitud. La masa del bote, que incluye su carga y al trabajador es de 370 kg. a) El agua ejerce una fuerza de flotación vertical hacia arriba sobre el bote. Encuentre la magnitud de esta fuerza. b) Modele las fuerzas como constantes en un intervalo corto de tiempo para encontrar la velocidad del bote 0.450 s después del momento descrito.



Figura P5.15

16. Un objeto de 3.00 kg es móvil en un plano, con sus coordenadas x y y conocidas mediante $x = 5t^2 - 1$ y $y = 3t^3 + 2$, donde x y y están en metros y t en segundos. Encuentre la magnitud de la fuerza neta que actúa en este objeto en $t = 2.00$ s.

17. La distancia entre dos postes de teléfono es de 50.0 m. Cuando un ave de 1.00 kg se posa sobre el alambre del teléfono a la mitad entre los postes, el alambre se comba 0.200 m. Dibuje un diagrama de cuerpo libre del ave. ¿Cuánta tensión produce el ave en el alambre? Ignore el peso del alambre.

18. Un tornillo de hierro de 65.0 g de masa cuelga de una cuerda de 35.7 cm de largo. El extremo superior de la cuerda está fijo. Sin tocarlo, un imán atrae el tornillo de modo que permanece fijo, desplazado horizontalmente 28.0 cm a la derecha desde la línea vertical previa de la cuerda. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del tornillo. b) Encuentre la tensión en la cuerda. c) Encuentre la fuerza magnética sobre el tornillo.

19. ● La figura P5.19 muestra las fuerzas horizontales que actúan sobre un bote de vela que se mueve al norte con velocidad constante, visto desde un punto justo arriba de su mástil. A esta rapidez particular, el agua ejerce una fuerza de arrastre de 220 N sobre el casco del bote. a) Elija la dirección x como este y la dirección y como norte. Escriba dos ecuaciones que representen la segunda ley de Newton en componentes. Resuelva las ecuaciones para P (la fuerza que ejerce el viento sobre la vela) y para n (la fuerza que ejerce el agua sobre la quilla). b) Elija la dirección x como 40.0° al noreste y la dirección y como 40.0° al noroeste. Escriba la segunda ley de Newton como dos ecuaciones en la forma componentes y resuelva para n y P. c) Compare sus soluciones. ¿Los resultados concuerdan? ¿Un cálculo es significativamente más sencillo?

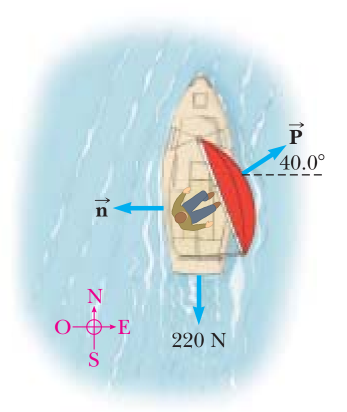


Figura P5.19

20. Un saco de cemento de 325 N de peso cuelga en equilibrio de tres alambres, como se muestra en la figura P5.20. Dos de los alambres forman ángulos $\theta_1 = 60.0°$ y $\theta_2 = 25.0°$ con la horizontal. Si supone que el sistema está en equilibrio, encuentre las tensiones T_1, T_2 y T_3 en los alambres.

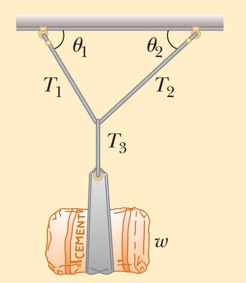


Figura P5.20 Problemas 20 y 21.

21. Un saco de cemento de peso F_g cuelga en equilibrio de tres alambres, como se muestra en la figura P5.20. Dos de los alambres forman ángulos θ_1 y θ_2 con la horizontal. Si supone que el sistema está en equilibrio, demuestre que la tensión en el alambre izquierdo es

$$T_1 = \frac{F_g \cos \theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}$$

22. ● Usted es juez en un torneo infantil de volar papalotes, donde dos niños ganarán premios, uno para la cuerda del papalote que jale con más intensidad y el otro para el que jale con menos intensidad. Para medir las tensiones en las cuerdas, pide prestado a su profesor de física un soporte para colgar contrapeso, algunas pesas ranuradas y un transportador, y aplica el siguiente protocolo, como se ilustra en la figura P5.22. Espera a que un niño tenga bien controlado su papalote, coloca el soporte en la cuerda del papalote aproximadamente a 30 cm de la mano del niño, apila las pesas ranuradas hasta que la sección de cuerda esté horizontal, registra las pesas requeridas y el ángulo entre la horizontal y la cuerda que va al papalote. a) Explique cómo funciona este método. Mientras construye su explicación, imagine que los padres del niño le preguntan acerca de su método, al parecer tienen falsas conjeturas acerca de su habilidad sin evidencias concretas, y su explicación es una oportunidad para darles confianza en su técnica de evaluación. b) Encuentre la tensión de la cuerda si la masa es 132 g y el ángulo de la cuerda del papalote es 46.3°.



Figura P5.22

23. Los sistemas que se muestran en la figura P5.23 están en equilibrio. Si las balanzas de resorte se calibran en newtons, ¿qué lectura indica en cada caso? Ignore las masas de las poleas y cuerdas, y suponga que las poleas y el plano inclinado en el inciso d) no tienen fricción.

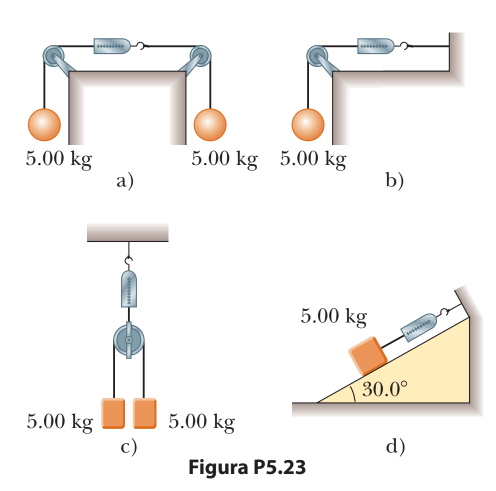


Figura P5.23

24. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de un bloque que se desliza hacia abajo por un plano sin fricción que tiene una inclinación $\theta = 15.0°$. El bloque parte del reposo en lo alto, y la longitud del plano es 2.00 m. Encuentre a) la aceleración del bloque y b) su rapidez cuando llega al fondo del plano inclinado.

25. Se observa que un objeto de 1.00 kg tiene una aceleración de 10.0 m/s^2 en una dirección a 60.0° al noreste (figura P5.25). La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ que se ejerce sobre el objeto tiene una magnitud de 5.00 N y se dirige al norte. Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ que actúa sobre el objeto.

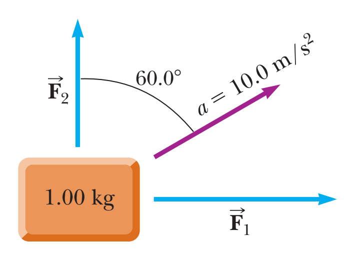


Figura P5.25

26. Un objeto de 5.00 kg colocado sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a una cuerda que pasa sobre una polea y después se une a un objeto colgante de 9.00 kg, como se muestra en la figura P5.26. Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos objetos. Encuentre la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda.

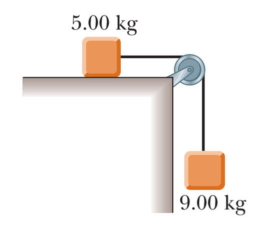


Figura P5.26 Problemas 26 y 41.

27. La figura P5.27 muestra la rapidez del cuerpo de una persona mientras hace unas barras. Suponga que el movimiento es vertical y que la masa del cuerpo de la persona es 64.0 kg. Determine la fuerza que ejerce la barra sobre cuerpo en el tiempo a) cero, b) 0.5 s, c) 1.1 s y d) 1.6 s.

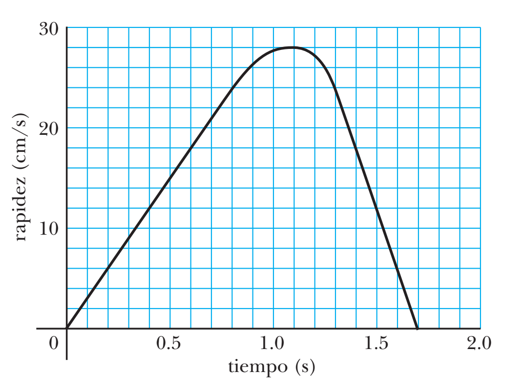


Figura P5.27

28. Dos objetos se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se muestra en la figura P5.28. Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos objetos. Si supone que el plano no tiene fricción, $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 6.00$ kg y $\theta = 55.0°$, encuentre a) las aceleraciones de los objetos, b) la tensión en la cuerda y c) la rapidez de cada objeto 2.00 s después de que se liberan desde el reposo.

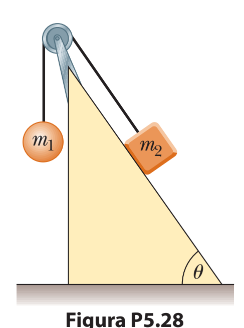


Figura P5.28

29. A un bloque se le da una velocidad inicial de 5.00 m/s hacia arriba de un plano inclinado de 20.0° sin fricción. ¿Hasta donde se desliza el bloque hacia arriba del plano antes de llegar al reposo?

30. En la figura P5.30, el hombre y la plataforma juntos pesan 950 N. La polea se puede modelar sin fricción. Determine cuán fuerte tiene que jalar de la cuerda el hombre para elevarse a sí mismo de manera estable hacia arriba sobre el suelo. (¿O es imposible? Si es así, explique por qué.)


Figura P5.30

31. En el sistema que se muestra en la figura P5.31, una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}_x$ actúa sobre el objeto de 8.00 kg. La superficie horizontal no tiene fricción. Examine la aceleración del objeto deslizante como una función de F_x. a) ¿Para qué valores de F_x el objeto de 2.00 kg acelera hacia arriba? b) ¿Para qué valores de F_x la tensión en la cuerda es cero? c) Grafique la aceleración del objeto de 8.00 kg en función de F_x. Incluya valores de F_x desde −100 N hasta +100 N.

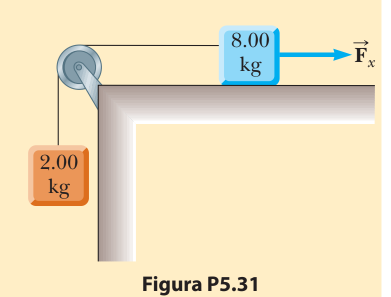


Figura P5.31

32. Un objeto de masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a un objeto de masa m_2 por medio de una polea muy ligera P_1 y una polea fija ligera P_2, como se muestra en la figura P5.32. a) Si a_1 y a_2 son las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente, ¿cuál es la relación entre dichas aceleraciones? Exprese b) las tensiones en las cuerdas y c) las aceleraciones a_1 y a_2 en términos de g y de las masas m_1 y m_2.

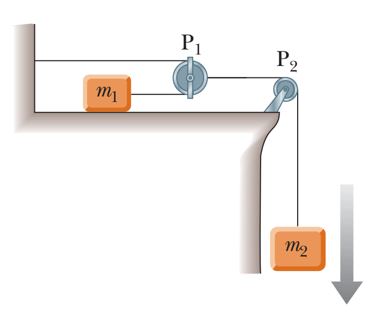


Figura P5.32

33. Un hombre de 72.0 kg está de pie sobre una báscula de resorte en un elevador. A partir del reposo, el elevador asciende y logra su rapidez máxima de 1.20 m/s en 0.800 s. Viaja con esta rapidez constante durante los siguientes 5.00 s. En tal caso el elevador se somete a una aceleración uniforme en la dirección y negativa durante 1.50 s y llega al reposo. ¿Qué registra la báscula a) antes de que el elevador comience a moverse, b) durante los primeros 0.800 s, c) mientras el elevador viaja con rapidez constante y d) durante el intervalo de tiempo que disminuye su velocidad?

34. En la máquina de Atwood que se muestra en la figura 5.14a, m_1 = 2.00 kg y m_2 = 7.00 kg. Las masas de la polea y la cuerda son despreciables si se les compara. La polea gira sin fricción y la cuerda no se estira. El objeto más ligero se libera con un empujón rápido que lo pone en movimiento a v_i = 2.40 m/s hacia abajo. a) ¿Qué distancia descenderá m_1 abajo de su nivel inicial? b) Encuentre la velocidad de m_1 después de 1.80 segundos.

Sección 5.8 Fuerzas de fricción

35. Un automóvil viaja a 50.0 mi/h en una autopista. a) Si el coeficiente de fricción estática entre camino y llantas en un día lluvioso es 0.100, ¿cuál es la distancia mínima en la que el automóvil se detendrá? b) ¿Cuál es la distancia de frenado cuando la superficie está seca y μ_s = 0.600?

36. Un bloque de 25.0 kg al inicio está en reposo sobre una superficie horizontal. Se requiere una fuerza horizontal de 75.0 N para poner al bloque en movimiento, después de la cual se requiere una fuerza horizontal de 60.0 N para mantener al bloque en movimiento con rapidez constante. Hallar los coeficientes de fricción estática y cinética a partir de esta información.

37. Su libro de física de 3.80 kg está junto a usted sobre el asiento horizontal de su automóvil. El coeficiente de fricción estática entre el libro y el asiento es 0.650, y el coeficiente de fricción cinética es 0.550. Suponga que viaja a 72.0 km/h = 20.0 m/s y frena hasta detenerse sobre una distancia de 45.0 m. a) ¿El libro comenzará a deslizarse sobre el asiento? b) ¿Qué fuerza ejerce el asiento sobre el libro en este proceso?

38. ● Antes de 1960, se creía que el máximo coeficiente de fricción estática alcanzable para la llanta de un automóvil era menor que 1. Después, alrededor de 1962, tres compañías desarrollaron, cada una, llantas de carreras con coeficientes de 1.6. Desde aquella ocasión, las llantas se han mejorado, como se ilustra en este problema. De acuerdo con el *Libro de récords Guinness* de 1990, el intervalo de tiempo más rápido para un automóvil con motor de pistones inicialmente en reposo para cubrir una distancia de un cuarto de milla es 4.96 s. Shirley Muldowney estableció este récord en septiembre de 1989. a) Suponga que las llantas traseras levantaron las delanteras del pavimento, como se muestra en la figura P5.38. ¿Qué valor mínimo de μ_s es necesario para lograr el intervalo de tiempo récord? b) Suponga que Muldowney tenía posibilidad de duplicar la potencia de su motor, y mantener otras cosas iguales. ¿Cómo afectaría este cambio al intervalo de tiempo?



Jaime Squire/Allsport/Getty Images

Figura P5.38

39. Un bloque de 3.00 kg parte del reposo en lo alto de un plano inclinado 30.0° y se desliza una distancia de 2.00 m hacia abajo por el plano en 1.50 s. Encuentre a) la magnitud de la aceleración del bloque, b) el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano, c) la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque y d) la rapidez del bloque después de deslizar 2.00 m.

40. Una mujer en un aeropuerto jala su maleta de 20.0 kg con rapidez constante al jalar de una correa en un ángulo θ sobre la horizontal (figura P5.40). Ella jala de la correa con una fuerza de 35.0 N. La fuerza de fricción sobre la maleta es 20.0 N. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la maleta. a) ¿Qué ángulo forma la correa con la horizontal? b) ¿Qué fuerza normal ejerce el suelo sobre la maleta?



Figura P5.40

41. Un objeto suspendido de 9.00 kg se conecta, mediante una cuerda ligera inextensible sobre una polea ligera sin fricción, a un bloque de 5.00 kg que se desliza sobre una mesa plana (figura P5.26). Si toma el coeficiente de fricción cinética como 0.200, encuentre la tensión en la cuerda.

42. Tres objetos se conectan sobre una mesa como se muestra en la figura P5.42. La mesa rugosa tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.350. Los objetos tienen masas de 4.00 kg, 1.00 kg y 2.00 kg, como se muestra, y las poleas no tienen fricción. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada objeto. a) Determine la aceleración de cada objeto y sus direcciones. b) Determine las tensiones en las dos cuerdas.

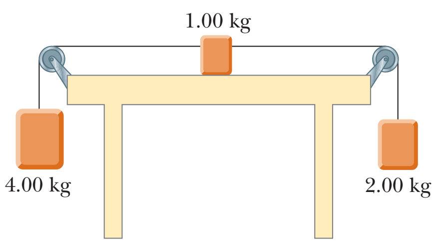


Figura P5.42

43. Dos bloques unidos mediante una cuerda de masa despreciable se arrastran mediante una fuerza horizontal (figura P5.43). Suponga que $F = 68.0$ N, $m_1 = 12.0$ kg, $m_2 = 18.0$ kg y el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es 0.100. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. b) Determine la tensión T y la magnitud de la aceleración del sistema.

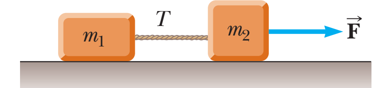


Figura P5.43

44. ● Un bloque de 3.00 kg de masa es empujado contra una pared mediante una fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ que forma un ángulo $\theta = 50.0°$ con la horizontal, como se muestra en la figura P5.44. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es 0.250. a) Determine los valores posibles para la magnitud de $\vec{\mathbf{P}}$ que permiten al bloque permanecer fijo. b) Describa qué sucede si $|\vec{\mathbf{P}}|$ tiene un valor mayor y qué ocurre si es más pequeño. c) Repita los incisos a) y b) suponiendo que la fuerza forma un ángulo $\theta = 13.0°$ con la horizontal.

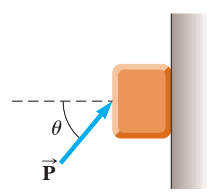


Figura P5.44

45. ● Un bloque de 420 kg está en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie es 0.720, y el coeficiente de fricción cinética es 0.340. Una fuerza de magnitud P empuja el bloque hacia adelante y abajo como se muestra en la figura P5.45. Suponga que la fuerza se aplica a un ángulo de 37.0° bajo la horizontal. a) Encuentre la aceleración del bloque como función de P. b) Si $P = 5.00$ N, encuentre la aceleración y la fuerza de fricción que se ejerce sobre el bloque. c) Si $P = 10.0$ N, encuentre la aceleración y la fuerza de fricción que se ejerce sobre el bloque. d) De palabra describa cómo depende la aceleración relacionada con P. ¿Existe una aceleración mínima definida para el bloque? Si es así, ¿cuál es? ¿Existe un máximo definido?

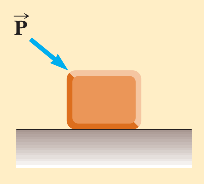


Figura P5.45

46. **Problema de repaso.** Un lado del techo de un edificio se eleva a 37.0°. Un estudiante lanza un frisbee hacia el techo. Golpea con una rapidez de 15.0 m/s, no rebota y luego se desliza en línea recta hacia arriba del plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre el plástico y el techo es 0.400. El frisbee se desliza 10.0 m hacia arriba del techo hasta su pico, donde entra en caída libre siguiendo una trayectoria parabólica con resistencia de aire despreciable. Determine la altura máxima que el frisbee alcanza arriba del punto donde golpeó al techo.

47. La tabla entre otras dos tablas en la figura P5.47 pesa 95.5 N. Si el coeficiente de fricción entre los tableros es 0.663, ¿cuál debe ser la magnitud de las fuerzas de compresión (supuestas horizontales) que actúan sobre ambos lados del tablero central para evitar que se deslice?

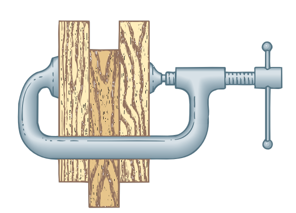


Figura P5.47

48. Un mago jala un mantel de abajo de una taza de 200 g ubicada a 30.0 cm del borde de la mesa. El mantel ejerce una fuerza de fricción de 0.100 N sobre la taza y el mantel se jala con una aceleración constante de 3.00 m/s^2. ¿Cuánto se mueve la taza en relación con la mesa horizontal antes de que el mantel esté completamente afuera debajo de ella? Note que el mantel debe moverse más de 30 cm en relación con la mesa durante el proceso.

49. ● Un paquete de platos (60.0 kg de masa) se asienta en la plataforma de una camioneta pickup con una compuerta abierta. El coeficiente de fricción estática entre el paquete y la plataforma de la camioneta es 0.300, y el coeficiente de fricción cinética es 0.250. a) La camioneta acelera hacia adelante sobre suelo a nivel. ¿Cuál es la aceleración máxima que puede tener la camioneta de modo que el paquete no se deslice en relación con la plataforma de la camioneta? b) Apenas la camioneta supera esta aceleración y enseguida se mueve con aceleración constante, con el paquete deslizándose a lo largo de su plataforma. ¿Cuál es la aceleración del paquete en relación con el suelo? c) El conductor limpia los fragmentos de platos y comienza de nuevo con un paquete idéntico con la camioneta en reposo. La camioneta acelera sobre una colina inclinada a

10.0° con la horizontal. ¿Ahora cuál es la aceleración máxima que puede tener la camioneta tal que el paquete no se deslice en relación con la plataforma? d) Cuando la camioneta supera esta aceleración, ¿cuál es la aceleración del paquete en relación con el suelo? e) Para la camioneta estacionada en reposo sobre una colina, ¿cuál es la pendiente máxima que puede tener la colina tal que el paquete no se deslice? f) ¿Alguna pieza de datos es innecesaria para la solución en todas los incisos de este problema? Explique.

Problemas adicionales

50. Las siguientes ecuaciones describen el movimiento de un sistema de dos objetos:

$$+n - (6.50 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)\cos 13.0° = 0$$

$$f_k = 0.360n$$

$$+T + (6.50 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 13.0° - f_k = (6.50 \text{ kg})a$$

$$-T + (3.80 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = (3.80 \text{ kg})a$$

a) Resuelva las ecuaciones para a y T. b) Describa una situación a la que se apliquen estas ecuaciones. Dibuje diagramas de cuerpo libre para ambos objetos.

51. Un niño inventivo llamado Niels quiere alcanzar una manzana pendiente en un árbol sin escalar. Sentado en una silla unida a una soga que pasa sobre una polea sin fricción (figura P5.51), Niels jala sobre el extremo suelto de la soga con tal fuerza que la balanza de resorte lee 250 N. El verdadero peso de Niels es 320 N y la silla pesa 160 N. a) Dibuje diagramas de cuerpo libre para Niels y la silla considerada como sistemas separados, y otro diagrama para Niels y la silla considerados como un sistema. b) Muestre que la aceleración del sistema es *hacia arriba* y encuentre su magnitud. c) Encuentre la fuerza que Niels ejerce sobre la silla.



Figura P5.51 Problemas 51 y 52.

52. ● En la situación descrita en el problema 51 y la figura P5.51, las masas de la soga, balanza y polea son despreciables. Los pies de Niels no tocan el suelo. a) Suponga que Niels está momentáneamente en reposo cuando deja de jalar la soga hacia abajo y pasa el extremo de la soga a otro niño, de 440 N de peso, que está de pie en el suelo junto a él. La soga no se rompe. Describa el movimiento resultante. b) En vez de ello, suponga que Niels está momentáneamente en reposo cuando amarra el extremo de la soga a una saliente en forma de gancho resistente que se deriva del tronco del árbol. Explique por qué esta acción puede hacer que la cuerda se rompa.

53. Una fuerza dependiente del tiempo, $\vec{\mathbf{F}} = (8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00t\hat{\mathbf{j}})$ N, donde t está en segundos, se ejerce sobre un objeto de 2.00 kg inicialmente en reposo. a) ¿En qué tiempo el objeto se moverá con una rapidez de 15.0 m/s? b) ¿A qué distancia está el objeto de su posición inicial cuando su rapidez es 15.0 m/s? c) ¿A través de qué desplazamiento total el objeto viajó en este momento?

54. ● Tres bloques están en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P5.54. A m_1 se le aplica una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$. Tome $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 3.00$ kg, $m_3 = 4.00$ kg y $F = 18.0$ N. Dibuje un diagrama de cuerpo libre por separado para cada bloque y encuentre a) la aceleración de los bloques, b) la fuerza *resultante* sobre cada bloque y c) las magnitudes de las fuerzas de contacto entre los bloques. d) Usted trabaja en un proyecto de construcción. Un colaborador clava cartón–yeso en un lado de un separador ligero y usted está en el lado opuesto, proporcionando "respaldo" al apoyarse contra la pared con su espalda, empujando sobre ella. Cada golpe de martillo hace que su espalda sufra un pinchazo. El supervisor lo ayuda al poner un pesado bloque de madera entre la pared y su espalda. Use la situación analizada en los incisos a), b) y c) como modelo, y explique cómo este cambio funciona para hacer su trabajo más confortable.

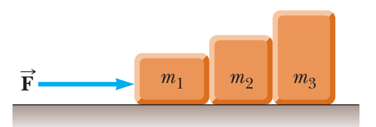


Figura P5.54

55. ● Una soga con masa m_1 se une al borde frontal inferior de un bloque con 4.00 kg de masa. Tanto la soga como el bloque están en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. La soga no se estira. El extremo libre de la soga se jala con una fuerza horizontal de 12.0 N. a) Encuentre la aceleración del sistema, como dependiente de m_1. b) Encuentre la magnitud de la fuerza que ejerce la soga sobre el bloque, como dependiente de m_1. c) Evalúe la aceleración y la fuerza sobre el bloque para $m_1 = 0.800$ kg. *Sugerencia:* Puede encontrar más fácil hacer el inciso c) antes que los incisos a) y b).

¿Qué pasaría si? d) ¿Qué ocurre a la fuerza sobre el bloque mientras la masa de la soga crece más allá de todo límite? e) ¿Qué ocurre a la fuerza sobre el bloque conforme la masa de la soga tiende a cero? f) ¿Qué teorema puede establecer acerca de la tensión en una cuerda *ligera* que une un par de objetos en movimiento?

56. Un deslizador de aluminio negro flota sobre una película de aire en una pista de aire de aluminio a nivel. En esencia, el aluminio no siente fuerza en un campo magnético y la resistencia del aire es despreciable. Un imán intenso se une a lo alto del deslizador y forma una masa total de 240 g. Un trozo de chatarra de hierro unido a un tope en la pista atrae al imán con una fuerza de 0.823 N cuando el hierro y el imán están separados 2.50 cm. a) Encuentre la aceleración del deslizador en este instante. b) La chatarra de hierro ahora se une a otro deslizador verde y forma una masa total de 120 g. Encuentre la aceleración de cada deslizador cuando se liberan simultáneamente a 2.50 cm de separación.

57. Un objeto de masa M se mantiene en lugar mediante una fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ y un sistema de polea como se muestra en la figura P5.57. Las poleas no tienen masa ni fricción. Encuentre a) la tensión en cada sección de cuerda, T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 y b) la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$. *Sugerencia:* Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada polea.

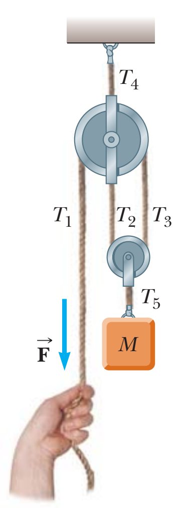


Figura P5.57

58. ● Un bloque de 2.20 kg de masa se acelera a través de una superficie rugosa mediante una cuerda ligera que pasa sobre una pequeña polea, como se muestra en la figura P5.58. La tensión T en la cuerda se mantiene en 10.0 N y la polea está a 0.100 m sobre la cara superior del bloque. El coeficiente de fricción cinética es 0.400. a) Determine la aceleración del bloque cuando $x = 0.400$ m. b) Describa el comportamiento general de la aceleración conforme el bloque se desliza desde una posición donde x es mayor que $x = 0$. c) Encuentre el valor máximo de la aceleración y la posición x para la que ocurre. d) Encuentre el valor de x para el que la aceleración es cero.

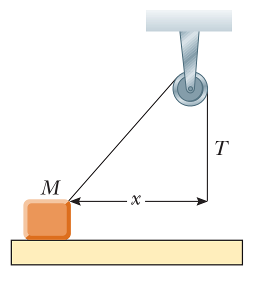


Figura P5.58

59. ● Estudiantes de física universitarios quedaron en primero y segundo lugares en un concurso y están en los muelles, observando cómo descargan sus premios de un contenedor. En un solo cable vertical ligero que no se estira, una grúa levanta un Ferrari de 1 207 kg y, bajo él, un BMW Z8 rojo de 1 461 kg. El Ferrari se mueve hacia arriba con 3.50 m/s de rapidez y 1.25 m/s^2 de aceleración. a) ¿Cómo se comparan la velocidad y la aceleración del BMW con las del Ferrari? b) Encuentre la tensión en el cable entre el BMW y el Ferrari. c) Encuentre la tensión en el cable sobre el Ferrari. d) En el modelo, ¿cuál es la fuerza total que se ejerce sobre la sección de cable entre los autos? ¿Qué velocidad predice para ella 0.01 s en lo sucesivo? Explique el movimiento de esta sección de cable en términos de causa y efecto.

60. Un bloque de aluminio de 2.00 kg y un bloque de cobre de 6.00 kg se conectan mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. Se asientan sobre una superficie de acero, como se muestra en la figura P5.60, donde $\theta = 30.0°$. Cuando se liberan desde el reposo, ¿comenzarán a moverse? Si es así, determine a) su aceleración y b) la tensión en la cuerda. Si no, determine la suma de las magnitudes de las fuerzas de fricción que actúan sobre los bloques.

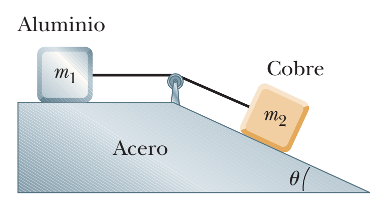


Figura P5.60

61. Una caja de peso F_g es empujada mediante una fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ sobre un piso horizontal. a) El coeficiente de fricción estática es μ_s, y $\vec{\mathbf{P}}$ se dirige a un ángulo θ bajo la horizontal. Muestre que el valor mínimo de P que moverá la caja está dado por

$$P = \frac{\mu_s F_g \sec \theta}{1 - \mu_s \tan \theta}$$

b) Encuentre el valor mínimo de P que puede producir movimiento cuando $\mu_s = 0.400$, $F_g = 100$ N y $\theta = 0°$, 15.0°, 30.0°, 45.0° y 60.0°.

62. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $m = 2.00$ kg se libera desde el reposo en $h = 0.500$ m sobre la superficie de una mesa, en lo alto de un plano inclinado de $\theta = 30.0°$, como se muestra en la figura P5.62. El plano sin fricción está fijo sobre una mesa de altura $H = 2.00$ m. a) Determine la aceleración del bloque mientras se desliza por el plano. b) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando deja el plano? c) ¿A qué distancia de la mesa el bloque golpeará el suelo? d) ¿Qué intervalo de tiempo transcurre entre la liberación del bloque y su golpe en el suelo? e) ¿La masa del bloque afecta alguno de los cálculos anteriores?

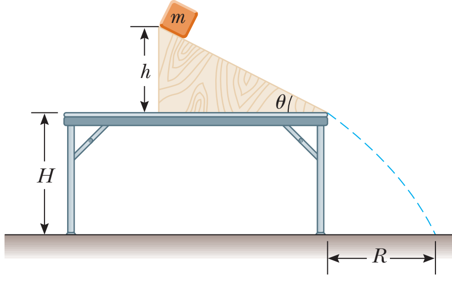


Figura P5.62 Problemas 62 y 68.

63. ● Un cojín neumático de masa m se libera desde el reposo en lo alto de un edificio que tiene altura h. Un viento que sopla a lo largo del lado del edificio ejerce una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre el cojín conforme cae, como se muestra en la figura P5.63. El aire no ejerce fuerza vertical. a) Demuestre que la trayectoria del cojín es una línea recta. b) ¿El cojín cae con velocidad constante? Explique. c) Si $m = 1.20$ kg,

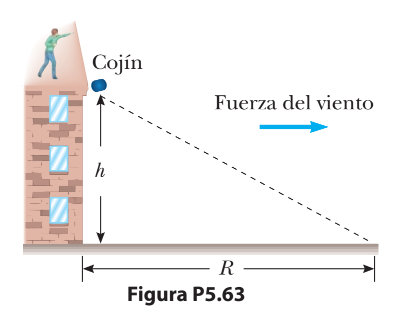


Figura P5.63

$h = 8.00$ m y $F = 2.40$ N, ¿a qué distancia del edificio el cojín golpeará el nivel del suelo? **¿Qué sucedería...?** d) Si el cojín se lanza hacia abajo con una rapidez distinta de cero, desde lo alto del edificio, ¿cuál será la forma de su trayectoria? Explique.

64. A un estudiante se le pide medir la aceleración de un carretón sobre un plano inclinado "sin fricción", como se muestra en la figura 5.11, con el uso de una pista de aire, un cronómetro y una regleta graduada. La altura del plano se mide en 1.774 cm, y la longitud total del plano se mide en $d = 127.1$ cm. Por tanto, el ángulo de inclinación θ se determina a partir de la relación sen $\theta = 1.774/127.1$. El carretón se libera desde el reposo en lo alto del plano y su posición x a lo largo del plano se mide como función del tiempo, donde $x = 0$ se refiere a la posición inicial del automóvil. Para valores x de 10.0 cm, 20.0 cm, 35.0 cm, 50.0 cm, 75.0 cm y 100 cm, los tiempos medidos a los que se alcanzan estas posiciones (promediados sobre cinco corridas) son 1.02 s, 1.53 s, 2.01 s, 2.64 s, 3.30 s y 3.75 s, respectivamente. Construya una gráfica de x contra t^2 y realice a los datos un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Determine la aceleración del carretón a partir de la pendiente de esta gráfica y compárela con el valor que obtendría al usar $a = g$ sen θ, donde $g = 9.80$ m/s^2.

65. Una tostadora de 1.30 kg no está conectada. El coeficiente de fricción estática entre la tostadora y un mostrador horizontal es 0.350. Para hacer que la tostadora comience a moverse, usted jala descuidadamente su cordón eléctrico. a) para que la tensión en el cordón sea tan pequeña como sea posible, ¿en qué ángulo sobre la horizontal debe jalar? b) Con este ángulo, ¿qué tan grande debe ser la tensión?

66. ● En la figura P5.66, las poleas y las cuerdas son ligeras, todas las superficies son sin fricción y las cuerdas no se estiran. a) ¿Cómo se compara la aceleración del bloque 1 con la aceleración del bloque 2? Explique su razonamiento. b) La masa del bloque 2 es 1.30 kg. Encuentre su aceleración dependiente de la masa m_1 del bloque 1. c) Evalúe su respuesta para $m_1 = 0.550$ kg. *Sugerencia:* Puede encontrar más fácil hacer el inciso c) antes que el inciso b). **¿Qué sucedería...?** d) ¿Qué predice el resultado del inciso b) si m_1 es mucho menor que 1.30 kg? e) ¿Qué predice el resultado del inciso b) si m_1 tiende a infinito? f) ¿Cuál es la tensión en la cuerda larga en este último caso? g) ¿Podría anticipar las respuestas d), e) y f) sin hacer primero el inciso b)? Explique.

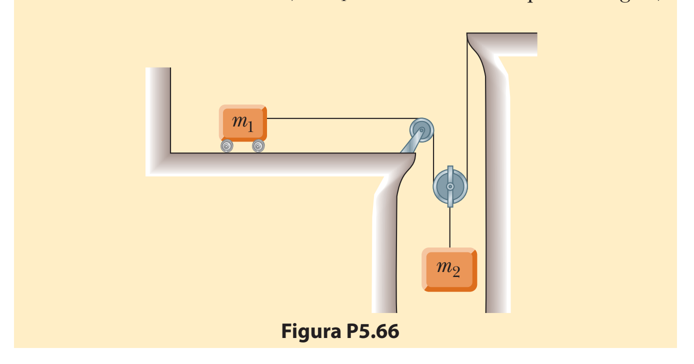


Figura P5.66

67. ¿Qué fuerza horizontal se debe aplicar al automóvil que se muestra en la figura P5.67 de modo que los bloques permanezcan fijos en relación con el carretón? Suponga que todas las superficies, ruedas y poleas no tienen fricción. Observe que la fuerza que ejerce la cuerda acelera m_1.

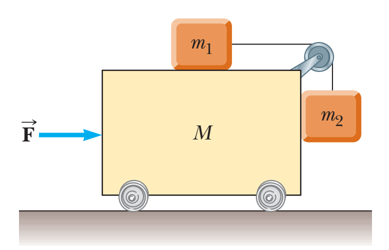


Figura P5.67

68. En la figura P5.62, el plano inclinado tiene masa M y se une a la mesa horizontal fija. El bloque de masa m se coloca cerca del fondo del plano y se libera con un rápido empujón que lo hace deslizar hacia arriba. El bloque se detiene cerca de lo alto del plano, como se muestra en la figura, y luego se desliza hacia abajo de nuevo, siempre sin fricción. Encuentre la fuerza que la mesa ejerce sobre el plano a lo largo de este movimiento.

69. Una van acelera hacia bajo de una colina (figura P5.69), y va desde el reposo a 30.0 m/s en 6.00 s. Durante la aceleración, un juguete ($m = 0.100$ kg) cuelga mediante una cuerda del techo de la van. La aceleración es tal que la cuerda permanece perpendicular al techo. Determine a) el ángulo θ y b) la tensión en la cuerda.

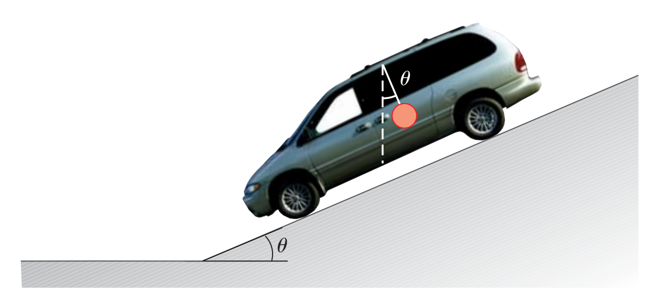


Figura P5.69

70. Un objeto de 8.40 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado fijo sin fricción. Use una computadora para determinar y tabular la fuerza normal que se ejerce sobre el objeto y su aceleración para una serie de ángulos de inclinación (medidos desde la horizontal) que varían de 0° a 90° en incrementos de 5°. Trace una gráfica de la fuerza normal y la aceleración como funciones del ángulo de inclinación. En los casos límite de 0° y 90°, ¿sus resultados son consistentes con el comportamiento conocido?

71. Un móvil se forma al soportar cuatro mariposas metálicas de igual masa m de una cuerda de longitud L. Los puntos de soporte están igualmente espaciados una distancia ℓ, como se muestra en la figura P5.71. La cuerda forma un ángulo θ_1 con

el techo en cada punto final. La sección central de la cuerda es horizontal. a) Encuentre la tensión en cada sección de cuerda en términos de θ_1, m y g. b) Encuentre el ángulo θ_2, en términos de θ_1, que las secciones de cuerda entre las mariposas exteriores y las mariposas interiores forman con la horizontal. c) Demuestre que la distancia D entre los puntos extremos de la cuerda es

$$D = \frac{L}{5}\left(2\cos\theta_1 + 2\cos\left[\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\tan\theta_1\right)\right] + 1\right)$$

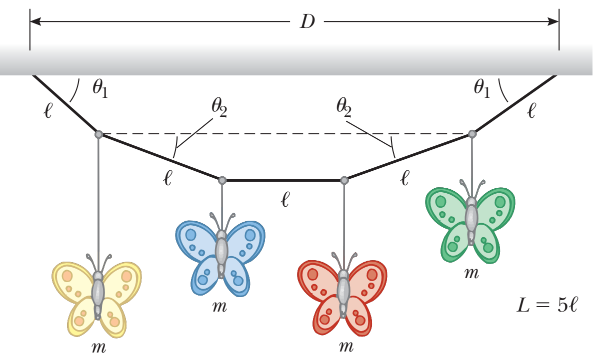


Figura P5.71

Respuestas a las preguntas rápidas

5.1 d). La opción a) es verdadera. La primera ley de Newton dice que el movimiento no requiere fuerza: un objeto en movimiento continúa moviéndose a velocidad constante en ausencia de fuerzas externas. La opción b) también es verdadera. Un objeto fijo puede tener muchas fuerzas actuando sobre él, pero si la suma vectorial de todas estas fuerzas externas es cero, no hay fuerza neta y el objeto permanece fijo.

5.2 a). Si actúa una sola fuerza, esta fuerza constituye la fuerza neta y existe una aceleración de acuerdo con la segunda ley de Newton.

5.3 d). Con el doble de fuerza, el objeto experimentará el doble de aceleración. Puesto que la fuerza es constante, la aceleración es constante, y la rapidez del objeto (que parte del reposo) está dada por $v = at$. Con el doble de aceleración, el objeto llegará a la rapidez v en la mitad de tiempo.

5.4 b). Puesto que el valor de g es más pequeño en la Luna que en la Tierra, se requeriría más masa de oro para representar 1 newton de peso en la Luna. Por lo tanto, su amigo en la Luna es más rico, ¡por un factor aproximado de 6!

5.5 **i)**, c). En concordancia con la tercera ley de Newton, la mosca y el autobús experimentan fuerzas que son iguales en magnitud pero opuestas en dirección. **ii)**, a). Puesto que la mosca tiene una masa mucho muy pequeña, la segunda ley de Newton dice que experimenta una aceleración muy grande. La gran masa del autobús significa que resiste más efectivamente cualquier cambio en su movimiento y muestra una aceleración pequeña.

5.6 b). La fuerza de fricción actúa opuesta a la fuerza gravitacional sobre el libro para mantenerlo en equilibrio. Puesto que la fuerza gravitacional es hacia abajo, la fuerza de fricción debe ser hacia arriba.

5.7 b). Cuando se jala con la soga, hay una componente de su fuerza aplicada que es hacia arriba, lo que reduce la fuerza normal entre el trineo y la nieve. A su vez, la fuerza de fricción entre el trineo y la nieve se reduce, lo que hace que el trineo sea más fácil de mover. Si usted empuja por detrás con una fuerza con un componente hacia abajo, la fuerza normal es mayor, la fuerza de fricción es más grande y el trineo es más difícil de mover.



Los pasajeros en una montaña rusa "serpenteante" experimentan una fuerza radial hacia el centro de la pista circular y una fuerza hacia abajo debida a la gravedad. (Robin Smith/Getty Images)

6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton

En el capítulo anterior se presentaron y se aplicaron las leyes de movimiento de Newton a situaciones que suponen movimiento lineal. Ahora se analiza un movimiento que es un poco más complejo. Se aplicarán las leyes de Newton a objetos que viajan en trayectorias circulares. También se discutirá el movimiento que se observa desde un marco de referencia acelerado y el movimiento de un objeto a través de un medio viscoso. En mayor medida, este capítulo consiste en una serie de ejemplos seleccionados para ilustrar la aplicación de las leyes de Newton a varias circunstancias.

6.1 Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme

En la sección 4.4 se discutió el modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, en el que una partícula se traslada con una rapidez constante v en una trayectoria circular de radio r. La partícula experimenta una aceleración que tiene una magnitud

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

La aceleración se llama *aceleración centrípeta* porque $\vec{\mathbf{a}}_c$ se dirige hacia el centro del círculo. Además, $\vec{\mathbf{a}}_c$ *siempre* es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$. (Si hubiera un componente de aceleración paralelo a $\vec{\mathbf{v}}$, la rapidez de la partícula cambiaría.)

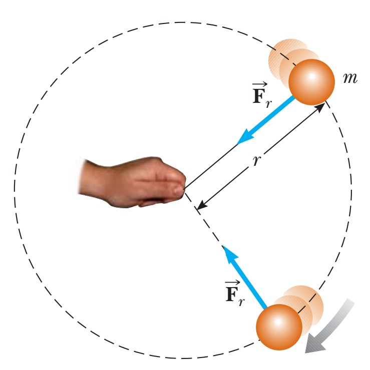


Figura 6.1 Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_r$ dirigida hacia el centro del círculo mantiene a la bola móvil en su trayectoria circular.

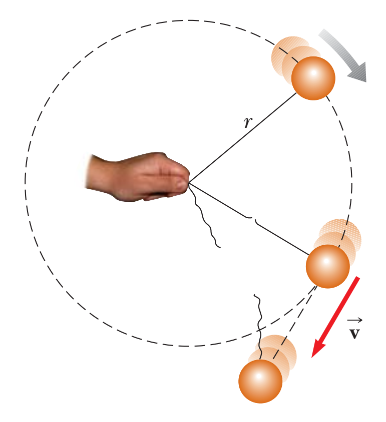


Figura 6.2 Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Cuando la cuerda se rompe, la bola se traslada en dirección tangente al círculo.

Ahora se incorpora el concepto de fuerza en la partícula en el modelo de movimiento circular uniforme. Examine una bola de masa m que se amarra a una cuerda de longitud r para hacerla girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, como se ilustra en la figura 6.1. Su peso se sostiene mediante una mesa sin fricción. ¿Por qué la bola se traslada en un círculo? De acuerdo con la primera ley de Newton, la bola se movería en una línea recta si no hubiese fuerza en ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer en la bola una fuerza radial $\vec{\mathbf{F}}_r$ que la hace seguir la trayectoria circular. Esta fuerza se dirige a lo largo de la cuerda hacia el centro del círculo, como se muestra en la figura 6.1.

Si se aplica la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta se relaciona con la aceleración del modo siguiente:

Fuerza que causa aceleración centrípeta ▶

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \tag{6.1}$$

Una fuerza que causa una aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad. Si dicha fuerza desapareciera, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular; en vez de ello, se movería a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo. Esta idea se ilustra en la figura 6.2 para la bola que gira al final de una cuerda en un plano horizontal. Si la cuerda se rompe en algún instante, la bola se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición de la bola en ese instante.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 6.1

Dirección de viaje cuando la cuerda se corta

Estudie la figura 6.2 con atención. Muchos estudiantes (de manera errónea) piensan que la bola se moverá *radialmente*, alejándose del centro del círculo cuando la cuerda se corte. La velocidad de la bola es *tangente* al círculo. Por la primera ley de Newton, la bola continúa móvil en la misma dirección en la que se movía justo cuando desaparece la fuerza de la cuerda.

Pregunta rápida 6.1 Usted viaja en una rueda de la fortuna que gira con rapidez constante. La cabina en la que viaja siempre mantiene su orientación correcta hacia arriba; no se invierte. **i)** ¿Cuál es la dirección de la fuerza normal sobre usted desde el asiento cuando está en lo alto de la rueda? a) hacia arriba, b) hacia abajo, c) imposible de determinar. **ii)** De las mismas opciones, ¿cuál es la dirección de la fuerza neta sobre usted cuando está en lo alto de la rueda?

EJEMPLO 6.1 El péndulo cónico

Una pequeña bola de masa m se suspende de una cuerda de longitud L. La bola da vueltas con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r, como se muestra en la figura 6.3. (Puesto que la cuerda hace un recorrido de la superficie en forma de cono, el sistema se conoce como *péndulo cónico*.) Encuentre una expresión para v.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine el movimiento de la bola en la figura 6.3a y observe que la cuerda hace un recorrido en cono y que la bola se mueve en círculo.

Categorizar La bola en la figura 6.3 no tiene aceleración vertical. Debido a eso, se le modela como una partícula en equilibrio respecto de la dirección vertical. Experimenta una aceleración centrípeta en la dirección horizontal, de modo que se le modela como una partícula en movimiento circular uniforme en esta dirección.

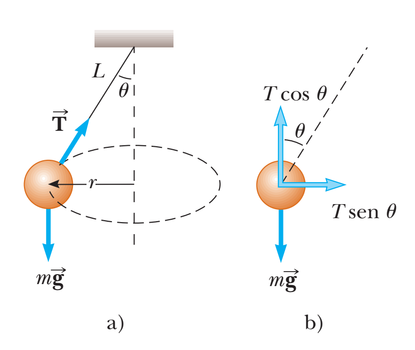


Figura 6.3 (Ejemplo 6.1) a) Péndulo cónico. La trayectoria del objeto es un círculo horizontal. b) Diagrama de cuerpo libre para el objeto.

Analizar Sea θ la representación del ángulo entre la cuerda y la vertical. En el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 6.3b, la fuerza $\vec{T}$ que ejerce la cuerda se resuelve en una componente vertical $T\cos\theta$ y una componente horizontal $T\,\text{sen}\,\theta$ que actúa hacia el centro de la trayectoria circular.

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical:

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

$$1)\quad T\cos\theta = mg$$

Use la ecuación 6.1 para expresar la fuerza que proporciona la aceleración centrípeta en la dirección horizontal:

$$2)\quad \sum F_x = T\,\text{sen}\,\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) y use $\text{sen}\,\theta/\cos\theta = \tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para v:

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Incorpore $r = L\,\text{sen}\,\theta$ a partir de la geometría a la figura 6.3a:

$$v = \boxed{\sqrt{Lg\,\text{sen}\,\theta\tan\theta}}$$

Finalizar Note que la rapidez es independiente de la masa de la bola. Considere lo que ocurre cuando θ va a 90° de modo que la cuerda es horizontal. Puesto que la tangente de 90° es infinita, la rapidez v es infinita, lo que dice que la cuerda posiblemente no es horizontal. Si lo fuese, no habría componente vertical de la fuerza $\vec{T}$ para equilibrar la fuerza gravitacional en la bola. Por esta razón se mencionó en la figura 6.1 que el peso de la bola se sostiene mediante una mesa sin fricción.

EJEMPLO 6.2 ¿Qué tan rápido puede girar?

Una bola de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. La bola da vueltas en un círculo horizontal como se muestra en la figura 6.1. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la máxima rapidez a la que gira la bola antes de que se rompa la cuerda? Suponga que la cuerda permanece horizontal durante el movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Tiene sentido que, mientras más fuerte sea la cuerda, más rápido gira la bola antes de que la cuerda se rompa. Además, se espera que una bola con mayor masa rompa la cuerda a una rapidez más baja. (¡Imagine girar una bola de boliche en la cuerda!)

Categorizar Puesto que la bola se mueve en una trayectoria circular, se le modela como una partícula en movimiento circular uniforme.

Analizar Incorpore la tensión y la aceleración centrípeta en la segunda ley de Newton:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para v:

$$1)\quad v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Encuentre la rapidez máxima que puede tener la bola, que corresponde a la tensión máxima que la cuerda resiste:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{T_{\text{máx}}r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0\text{ N})(1.50\text{ m})}{0.500\text{ kg}}} = \boxed{12.2\text{ m/s}}$$

Finalizar La ecuación 1) muestra que v aumenta con T y disminuye con m más grande, como se espera de la conceptualización del problema.

¿Qué pasaría si? Suponga que la bola gira en un círculo de mayor radio a la misma rapidez v. ¿Es más o menos probable que la cuerda se rompa?

Respuesta El radio más grande significa que el cambio en la dirección del vector velocidad será más pequeño en un intervalo de tiempo dado. Por ende, la aceleración es más pequeña y la tensión requerida en la cuerda es más pequeña. Como resultado, es menos probable que la cuerda se rompa cuando la bola viaja en un círculo de radio más grande.

EJEMPLO 6.3 ¿Cuál es la máxima rapidez del automóvil?

Un automóvil de 1 500 kg, se traslada sobre una curva, plana horizontal como se muestra en la figura 6.4a. Si el radio de la curva es 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.523, encuentre la rapidez máxima que alcanza el automóvil y aún así da la vuelta exitosamente.

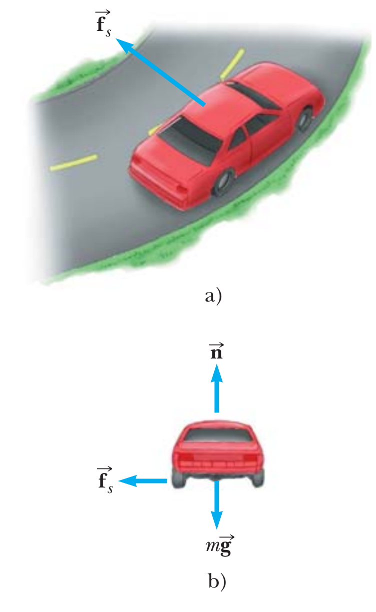


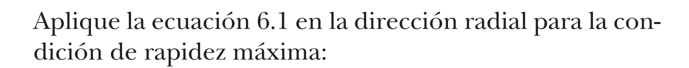
Figura 6.4 (Ejemplo 6.3) a) La fuerza de fricción estática dirigida hacia el centro de la curva mantiene al automóvil en movimiento en una trayectoria circular. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere que la autopista curva es parte de un gran círculo, de modo que el automóvil se traslada en una trayectoria circular.

Categorizar Respecto a la etapa conceptualizar del problema, el automóvil se modela como una partícula en movimiento circular uniforme en la dirección horizontal. El automóvil no acelera verticalmente, de modo que se modela como una partícula en equilibrio en la dirección vertical.

Analizar La fuerza que le permite al automóvil permanecer en su trayectoria circular es la fuerza de fricción estática. (Es *estática* porque no ocurre deslizamiento en el punto de contacto entre camino y llantas. Si esta fuerza de fricción estática fuese cero —por ejemplo, si el automóvil estuviese sobre un camino congelado— el automóvil continuaría en una línea recta y se deslizaría hasta salir del camino.) La rapidez máxima $v_{\text{máx}}$ que puede tener el automóvil alrededor de la curva es la rapidez a la que está a punto de derrapar hacia afuera. En este punto, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_{s,\text{ máx}} = \mu_s n$.



Aplique la ecuación 6.1 en la dirección radial para la condición de rapidez máxima:

$$1)\quad f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = m\frac{v_{\text{máx}}^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0 \quad\to\quad n - mg = 0 \quad\to\quad n = mg$$

Resuelva la ecuación 1) para la rapidez máxima y sustituya para n:

$$2)\quad v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_s nr}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s mgr}{m}} = \sqrt{\mu_s gr}$$

$$= \sqrt{(0.523)(9.80\text{ m/s}^2)(35.0\text{ m})} = \boxed{13.4\text{ m/s}}$$

Finalizar Esta rapidez es equivalente a 30.0 mi/h. Por lo tanto, este camino podría beneficiarse enormemente de cierto peralte, ¡como en el ejemplo siguiente! Advierta que la rapidez máxima no depende de la masa del automóvil, razón por la cual las autopistas curvas no requieren múltiples límites de rapidez para cubrir las varias masas de los vehículos que usan el camino.

¿Qué pasaría si? Suponga que un automóvil viaja por esta curva en un día húmedo y comienza a derrapar en la curva cuando su rapidez llega sólo a 8.00 m/s. ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de fricción estática en este caso?

Respuesta El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino húmedo debe ser menor que el existente entre las llantas y un camino seco. Esta expectativa concuerda con la experiencia de conducir, porque un derrape es más probable en un camino húmedo que en un camino seco.

Para comprobar la sospecha, se puede resolver la ecuación (2) para el coeficiente de fricción estática:

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{gr}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{gr} = \frac{(8.00 \text{ m/s})^2}{(9.80 \text{ m/s}^2)(35.0 \text{ m})} = 0.187$$

que de hecho es más pequeño que el coeficiente de 0.523 para el camino seco.

EJEMPLO 6.4 La autopista peraltada

Un ingeniero civil quiere rediseñar la curva de la autopista del ejemplo 6.3 en tal forma que un automóvil no tenga que depender de la fricción para circular la curva sin derrapar. En otras palabras, un automóvil que se traslada a la rapidez diseñada puede superar la curva incluso cuando el camino esté cubierto con hielo. Dicha rampa será *peraltada*, lo que significa que la carretera está inclinada hacia el interior de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s (30.0 mi/h) y el radio de la curva es 35.0 m. ¿Cuál es el ángulo de peralte?

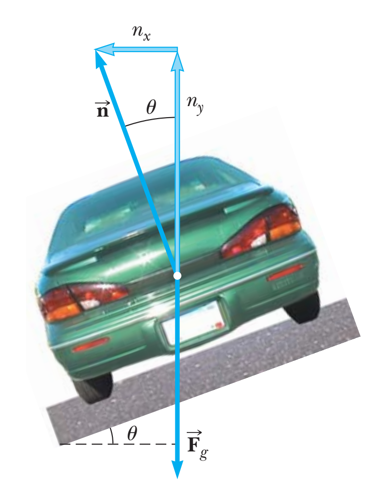


Figura 6.5 (Ejemplo 6.4) Un automóvil que recorre una curva sobre un camino peraltado a un ángulo θ con la horizontal. Cuando la fricción es despreciable, la fuerza que causa la aceleración centrípeta y mantiene al automóvil en movimiento en su trayectoria circular es la componente horizontal de la fuerza normal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La diferencia entre este ejemplo y el ejemplo 6.3 es que el automóvil ya no se mueve en una carretera plana. La figura 6.5 muestra la carretera peraltada, con el centro de la trayectoria circular del automóvil lejos hacia la izquierda de la figura. Observe que el componente horizontal de la fuerza normal participa en la generación de la aceleración centrípeta del automóvil.

Categorizar Como en el ejemplo 6.3, el automóvil se modela como una partícula en equilibrio en la dirección vertical y una partícula en movimiento circular uniforme en la dirección horizontal.

Analizar En un camino a nivel (sin peralte), la fuerza que causa la aceleración centrípeta es la fuerza de fricción estática entre el automóvil y el camino, como se vio en el ejemplo precedente. Sin embargo, si el camino está peraltado en un ángulo θ, como en la figura 6.5, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ tiene una componente horizontal hacia el centro de la curva. Puesto que la rampa se diseña de modo que la fuerza de fricción estática sea cero, sólo la componente $n_x = n \text{ sen } \theta$ causa la aceleración centrípeta.

Escriba la segunda ley de Newton para el automóvil en la dirección radial, que es la dirección x:

$$1) \quad \sum F_r = n \text{ sen } \theta = \frac{mv^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n \cos \theta - mg = 0$$

$$2) \quad n \cos \theta = mg$$

Divida la ecuación 1) entre la ecuación 2):

$$3) \quad \tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4 \text{ m/s})^2}{(35.0 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}\right) = 27.6°$$

Finalizar La ecuación 3) muestra que el ángulo de peralte es independiente de la masa del vehículo que entra a la curva. Si un automóvil recorre la curva con una rapidez menor que 13.4 m/s, se necesita fricción para evitar que se deslice por el peralte (hacia la izquierda en la figura 6.5). Un conductor que intente superar la curva a una rapidez mayor que 13.4 m/s tiene que depender de la fricción para evitar que derrape afuera del peralte (hacia la derecha en la figura 6.5).

¿Qué pasaría si? Imagine que en el futuro esta misma carretera se construye en Marte para conectar diferentes centros coloniales. ¿Es posible recorrerla con la misma rapidez?

Respuesta La reducida fuerza gravitacional de Marte significaría que el automóvil no presiona tan fuertemente con la carretera. La reducida fuerza normal da como resultado una componente más pequeña de la fuerza normal hacia el centro del círculo. Esta componente más pequeña no sería suficiente para proporcionar la aceleración centrípeta asociada con la rapidez original. La aceleración centrípeta se debe reducir, lo que se logra al reducir la rapidez v.

En términos matemáticos, advierta que la ecuación (3) muestra que la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de g para una carretera de radio fijo r peraltada en un ángulo fijo θ. Por lo tanto, si g es más pequeña, como lo es en Marte, la rapidez v con que la autopista se puede recorrer con seguridad también es más pequeña.

EJEMPLO 6.5 ¡A hacer el rizo!

Un piloto de masa m en un avión jet ejecuta un rizo, como se muestra en la figura 6.6a. En esta maniobra, el avión se mueve en un círculo vertical de 2.70 km de radio con una rapidez constante de 225 m/s.

A) Determine la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte inferior del rizo. Exprese su respuesta en términos del peso del piloto mg.

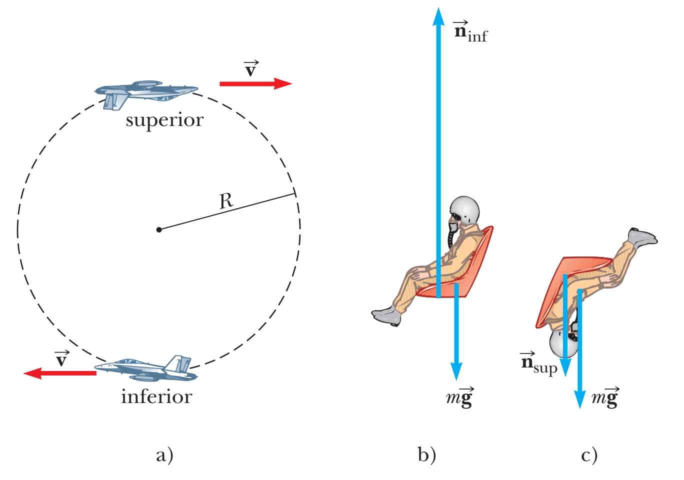


Figura 6.6 (Ejemplo 6.5) a) Un avión ejecuta un rizo mientras se mueve en un círculo vertical con rapidez constante. b) Diagrama de cuerpo libre del piloto en la parte inferior del rizo. En esta posición, el piloto experimenta un peso aparente mayor que su peso verdadero. c) Diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte superior del rizo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe con atención la figura 6.6a. En función con la experiencia al conducir sobre pequeñas colinas en el camino o al viajar en lo alto de una rueda de la fortuna, usted esperaría sentirse más ligero en lo alto de la trayectoria. De igual modo, esperaría sentirse más pesado en la parte inferior de la trayectoria. En la parte inferior del rizo, las fuerzas normal y gravitacional sobre el piloto actúan en direcciones *opuestas*, mientras que en la parte superior del rizo estas dos fuerzas actúan en la *misma* dirección. La suma vectorial de estas dos fuerzas proporciona una fuerza de magnitud constante que mantiene al piloto móvil en una trayectoria circular con una rapidez constante. Para producir vectores de fuerza neta con la misma magnitud, la fuerza normal en la parte inferior debe ser mayor que en la parte superior.

Categorizar Ya que la rapidez del avión es constante (¿cuán probable es esto?), se puede clasificar este problema como una partícula (el piloto) en movimiento circular uniforme, complicado por la fuerza gravitacional que actúa en todo momento sobre el avión.

Analizar Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte inferior del rizo, como se muestra en la figura 6.6b. Las únicas fuerzas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{n}}_{inf}$ que ejerce el asiento. La fuerza neta hacia arriba sobre el piloto, que proporciona su aceleración centrípeta, tiene una magnitud $n_{inf} - mg$.

Aplique la segunda ley de Newton al piloto en la dirección radial:

$$\sum F = n_{inf} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto:

$$n_{inf} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

Sustituya los valores dados para la rapidez y el radio:

$$n_{inf} = mg\left(1 + \frac{(225 \text{ m/s})^2}{(2.70 \times 10^3 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}\right)$$

$$= \boxed{2.91\,mg}$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{n}}_{inf}$ que ejerce el asiento sobre el piloto es *mayor* que el peso del piloto por un factor de 2.91. De este modo, el piloto experimenta un peso aparente que es mayor que su peso verdadero en un factor de 2.91.

B) Resolver para la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte superior del rizo.

SOLUCIÓN

Analizar En la figura 6.6c se muestra el diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte superior del rizo. Como ya se notó, tanto la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra como la fuerza $\vec{\mathbf{n}}_{sup}$ que ejerce el asiento sobre el piloto actúan hacia abajo, de modo que la fuerza neta hacia abajo que proporciona la aceleración centrípeta tiene una magnitud $n_{sup} + mg$.

Aplique la segunda ley de Newton al piloto en esta posición:

$$\sum F = n_{sup} + mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{sup} = m\frac{v^2}{r} - mg = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$

$$n_{sup} = mg\left(\frac{(225 \text{ m/s})^2}{(2.70 \times 10^3 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)} - 1\right)$$

$$= 0.913mg$$

En este caso, la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto es *menor* que su peso verdadero en un factor de 0.913, y el piloto se siente más ligero.

Finalizar Las variaciones en la fuerza normal son coherentes con la predicción en la etapa conceptualizar del problema.

6.2 Movimiento circular no uniforme

En el capítulo 4 se encontró que, si una partícula se mueve con rapidez variable en una trayectoria circular, existe, además de la componente radial de aceleración, una componente tangencial que tiene magnitud $|dv/dt|$. En consecuencia, la fuerza que actúa sobre la partícula también debe tener una componente tangencial y radial. Ya que la aceleración total es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t$, la fuerza total que se ejerce sobre la partícula es $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_r + \Sigma\vec{\mathbf{F}}_t$, como se muestra en la figura 6.7. (Las fuerzas radial y tangencial se expresan como fuerzas netas con la notación suma porque cada fuerza podría consistir en múltiples fuerzas que se combinan.) El vector $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_r$ se dirige hacia el centro del círculo y es responsable de la aceleración centrípeta. El vector $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_t$ tangente al círculo es responsable de la aceleración tangencial, que representa un cambio en la rapidez de la partícula con el tiempo.

Pregunta rápida 6.2 Una cuenta se desliza libremente, con rapidez constante, a lo largo de un alambre curvo que se encuentra sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura 6.8. a) Dibuje los vectores que representan la fuerza que ejerce el alambre sobre la cuenta en los puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ. b) Suponga que la cuenta de la figura 6.8 aumenta de velocidad con aceleración tangencial constante mientras se mueve hacia la derecha. Dibuje los vectores que representan la fuerza sobre la cuenta en los puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ.

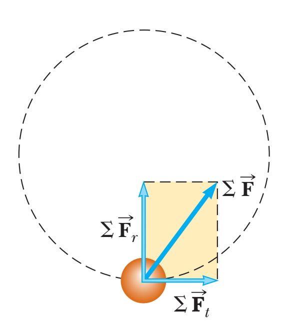


Figura 6.7 Cuando la fuerza neta que actúa sobre una partícula móvil en una trayectoria circular tiene una componente tangencial ΣF_t, la rapidez de la partícula cambia. La fuerza neta que se ejerce sobre la partícula en este caso es la suma vectorial de la fuerza radial y la fuerza tangencial. Esto es, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_r + \Sigma\vec{\mathbf{F}}_t$.

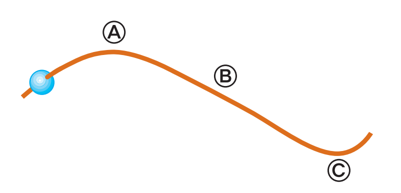


Figura 6.8 (Pregunta rápida 6.2) Una cuenta se desliza a lo largo de un alambre curvo.

EJEMPLO 6.6 Mantenga los ojos en la bola

Una pequeña esfera de masa m se une al extremo de una cuerda de longitud R y se pone en movimiento en un círculo *vertical* en torno a un punto fijo O, como se ilustra en la figura 6.9. Determine la tensión en la cuerda en cualquier instante cuando la rapidez de la esfera sea v y la cuerda forme un ángulo θ con la vertical.

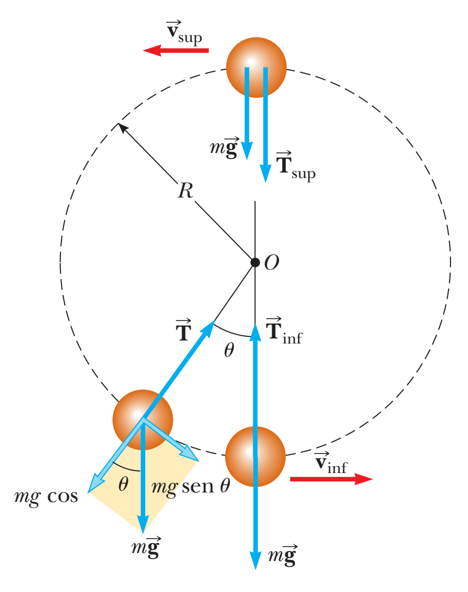


Figura 6.9 (Ejemplo 6.6) Fuerzas que actúan sobre una esfera de masa m conectada a una cuerda de longitud R y que gira en un círculo vertical con centro en O. Las fuerzas que actúan sobre la esfera se muestran cuando la esfera está en la parte superior e inferior del círculo y en una posición arbitraria.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare el movimiento de la esfera en la figura 6.9 con la del avión en la figura 6.6a asociada con el ejemplo 6.5. Ambos objetos viajan en una trayectoria circular. Sin embargo, a diferencia del avión en el ejemplo 6.5, la rapidez de la esfera *no* es uniforme en este ejemplo porque, en la mayoría de los puntos a lo largo de la trayectoria, la fuerza gravitacional que se ejerce sobre la esfera surge una componente tangencial de aceleración.

Categorizar La esfera se modela como una partícula bajo una fuerza neta y móvil en una trayectoria circular, pero no es una partícula en movimiento circular *uniforme*. Es necesario usar las técnicas contenidas en esta sección acerca del movimiento circular no uniforme.

Analizar A partir del diagrama de cuerpo libre en la figura 6.9, se ve que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ que ejerce la Tierra y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda. Se descompone $\vec{\mathbf{F}}_g$ en una componente tangencial mg sen θ y otra componente radial $mg \cos \theta$.

Aplique la segunda ley de Newton a la esfera en la dirección tangencial:

$$\sum F_t = mg \text{ sen } \theta = ma_t$$

$$a_t = g \text{ sen } \theta$$

Aplique la segunda ley de Newton a las fuerzas que actúan sobre la esfera en la dirección radial y note que tanto $\vec{\mathbf{T}}$ como $\vec{\mathbf{a}}_r$ se dirigen hacia O:

$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos \theta\right)$$

Finalizar Evalúe este resultado en las partes superior e inferior de la trayectoria circular (figura 6.9):

$$T_{sup} = mg\left(\frac{v_{sup}^2}{Rg} - 1\right) \qquad T_{inf} = mg\left(\frac{v_{inf}^2}{Rg} + 1\right)$$

Estos resultados tienen la misma forma matemática que las fuerzas normales n_{sup} y n_{inf} sobre el piloto en el ejemplo 6.5, que es consistente con la fuerza normal sobre el piloto, que juega el mismo papel físico en el ejemplo 6.5 que la tensión en la cuerda juega en este ejemplo. No obstante, tenga en mente que v en las expresiones anteriores varía para diferentes posiciones de la esfera, como se indica mediante los subíndices, mientras v en el ejemplo 6.5 es constante.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la bola se pone en movimiento con una rapidez menor? a) ¿Qué rapidez tendría la bola mientras pasa sobre la parte superior del círculo si la tensión en la cuerda tiende a cero instantáneamente en este punto?

Respuesta Sea la tensión igual a cero en la expresión para T_{sup}:

$$0 = mg\left(\frac{v_{sup}^2}{Rg} - 1\right) \quad \rightarrow \quad v_{sup} = \sqrt{gR}$$

¿Qué sucedería si la bola se pone en movimiento de tal modo que la rapidez en la parte superior sea menor que este valor? ¿Qué ocurre?

Respuesta En este caso, la bola nunca llega a la parte superior del círculo. En algún punto en el camino hacia arriba, la tensión en la cuerda va a cero y la bola se convierte en un proyectil. Sigue un segmento de una trayectoria parabólica sobre la parte superior de su movimiento, y se vuelve a incorporar a la trayectoria circular en el otro lado cuando la tensión se vuelve distinta de cero nuevamente.

6.3 Movimiento en marcos acelerados

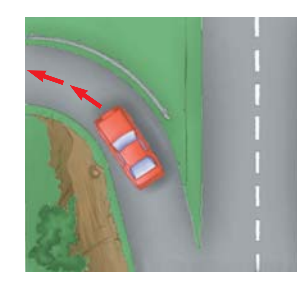
Las leyes de movimiento de Newton, que se presentaron en el capítulo 5, describen observaciones que se realizan en un marco de referencia inercial. En esta sección se analiza cómo son aplicadas las leyes de Newton por un observador en un marco de referencia inercial, es decir, en uno que acelera. Por ejemplo, recuerde la discusión de la mesa de hockey de aire en un tren en la sección 5.2. El tren móvil con velocidad constante representa un marco inercial. Un observador en el tren ve que el disco en reposo permanece en reposo, y parece obedecer la primera ley de Newton. El tren que acelera no es un marco inercial. De acuerdo con usted, como el observador en este tren, parece no haber fuerza sobre el disco, y sin embargo acelera desde el reposo hacia la parte trasera del tren, lo que parece violar la primera ley de Newton. Esta es una propiedad general de las observaciones realizadas en marcos no inerciales: parece haber aceleraciones no explicadas de los objetos que no están "amarrados" al marco. Desde luego, la primera ley de Newton no se viola. Sólo *parece* violarse debido a las observaciones hechas en un marco no inercial. En general, la dirección de la aceleración inexplicable es opuesta a la dirección de la aceleración del marco no inercial.

En el tren que acelera, mientras observa al disco acelerar hacia la parte trasera del tren, puede concluir, respecto a su creencia en la segunda ley de Newton, que una fuerza actuó sobre el disco para hacerlo acelerar. A una fuerza aparente como ésta se le llama **fuerza ficticia** porque se debe a un marco de referencia acelerado. Una fuerza ficticia parece actuar sobre un objeto de la misma manera que una fuerza real. Sin embargo, las fuerzas reales siempre interactúan entre dos objetos, y usted no puede identificar un segundo objeto para una fuerza ficticia. (¿Cuál segundo objeto interactúa con el disco para hacerlo acelerar?)

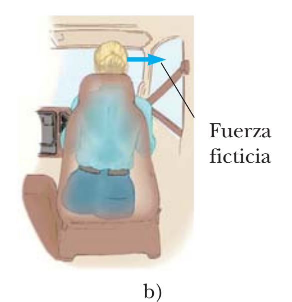
El ejemplo del tren describe una fuerza ficticia debido a un cambio en la rapidez del tren. Otra fuerza ficticia se debe al cambio en la *dirección* del vector velocidad. Para comprender el movimiento de un sistema que no es inercial debido a un cambio en dirección, examine un automóvil que viaja a lo largo de una autopista con gran rapidez y se aproxima a una rampa de salida curva, como se muestra en la figura 6.10a. A medida que el automóvil toma la cerrada curva izquierda en la rampa, una persona que se sienta en el lado del copiloto se desliza hacia la derecha y golpea la puerta. En dicho punto la fuerza que ejerce la puerta sobre la copiloto evita que salga expulsada del automóvil. ¿Qué la impulsa hacia la puerta? Una explicación popular, pero incorrecta, es que una fuerza que actúa hacia la derecha en la figura 6.10b la empuja hacia afuera desde el centro de la trayectoria circular. Aunque con frecuencia se le llama "fuerza centrífuga", es una fuerza ficticia debida a la aceleración centrípeta asociada con la dirección cambiante del vector velocidad del automóvil. (El conductor también experimenta este efecto pero sabiamente se sostiene del volante para evitar deslizarse hacia la derecha.)

La explicación correcta del fenómeno es la siguiente: antes de que el automóvil entre a la rampa, la copiloto es móvil en una trayectoria en línea recta. A medida que el automóvil entra a la rampa y recorre una trayectoria curva, la copiloto tiende a moverse a lo largo de la trayectoria recta original, lo que está en concordancia con la primera ley de Newton: la tendencia natural de un objeto es continuar móvil en una línea recta. No obstante, si una fuerza suficientemente grande (hacia el centro de curvatura) actúa sobre ella, como en la figura 6.10c, ella se mueve en una trayectoria curva junto con el automóvil. Esta es la fuerza de fricción entre ella y el asiento del automóvil. Si esta fuerza de fricción no es suficientemente grande, el asiento sigue una trayectoria curva mientras la pasajera continúa en la trayectoria en línea recta del automóvil antes de que el automóvil comience a girar. Por lo tanto, desde el punto de vista de un observador en el automóvil, la pasajera se desliza hacia la derecha en relación con el asiento. Al final, ella encuentra la puerta, que proporciona una fuerza suficientemente grande para permitirle seguir la misma trayectoria curva que el automóvil. Ella se desliza hacia la puerta no a causa de una fuerza exterior sino porque **la fuerza de fricción no es suficientemente grande para permitirle viajar a lo largo de la trayectoria circular seguida por el automóvil.**

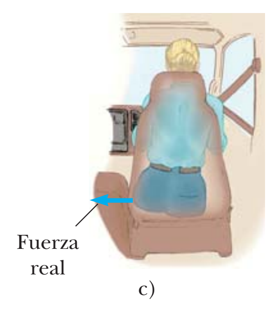
Otra interesante fuerza ficticia es la "fuerza de Coriolis". Es una fuerza aparente causada al cambiar la posición radial de un objeto en un sistema coordenado en rotación.



a)



b)



c)

Figura 6.10 a) Un automóvil se aproxima a una rampa de salida curva. ¿Qué hace que una pasajera en el asiento de adelante se mueva hacia la puerta derecha? b) Desde el marco de referencia de la pasajera, una fuerza parece empujarla hacia la puerta derecha, pero es una fuerza ficticia. c) En relación con el marco de referencia de la Tierra, el asiento aplica una fuerza real hacia la izquierda sobre la pasajera, lo que hace que ella cambie de dirección junto con el resto del automóvil.

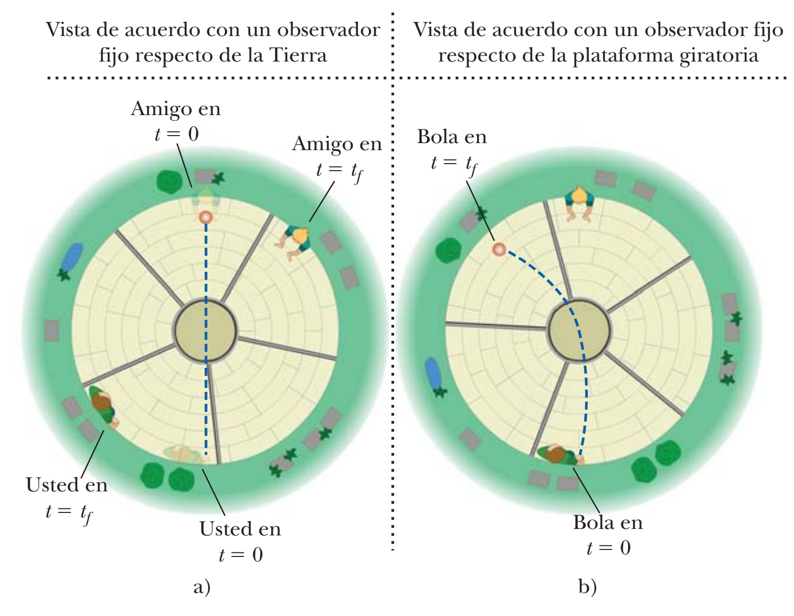


Figura 6.11 a) Usted y su amigo se sientan en el borde de una plataforma giratoria. En esta vista superior que observa alguien en un marco de referencia inercial unido a la Tierra, usted lanza la bola en $t = 0$ en la dirección de su amigo. En el tiempo t_f, cuando la bola llega al otro lado de la plataforma giratoria, su amigo ya no está ahí para atraparla. De acuerdo con este observador, la bola sigue una trayectoria en línea recta, consistente con las leyes de Newton. b) Desde el punto de vista de su amigo, la bola vira a un lado durante su vuelo. Su amigo introduce una fuerza ficticia que causa esta desviación de la trayectoria esperada. Esta fuerza ficticia se llama "fuerza de Coriolis".

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 6.2

Fuerza centrífuga

"Fuerza centrífuga" es un concepto comúnmente escuchado, que se describe como una fuerza que jala *hacia afuera* sobre un objeto móvil en una trayectoria circular. Si usted siente una "fuerza centrífuga" cuando está en un carrusel, ¿cuál es el otro objeto con el que interactúa? No es capaz de identificar otro objeto porque es una fuerza ficticia que ocurre debido a que usted está en un marco de referencia no inercial.

Por ejemplo, suponga que usted y un amigo están en lados opuestos de una plataforma circular giratoria y decide lanzar una bola de beisbol a su amigo. La figura 6.11a representa lo que un observador vería si contempla la bola mientras flota en el aire en reposo sobre la plataforma giratoria. De acuerdo con este observador, quien está en un marco inercial, la bola sigue una línea recta de acuerdo con la primera ley de Newton. En $t = 0$ usted lanza la bola hacia su amigo, pero en el tiempo t_f cuando la bola cruza la plataforma, su amigo se movió a una posición nueva. Sin embargo, ahora considere la situación desde el punto de vista de su amigo. Su amigo está en un marco de referencia no inercial porque experimenta una aceleración centrípeta en relación con el marco inercial de la superficie de la Tierra. Comienza a ver la bola que se aproxima hacia él pero, conforme cruza la plataforma, vira a un lado como se muestra en la figura 6.11b. Por lo tanto, su amigo en la plataforma giratoria afirma que la bola no obedece la primera ley de Newton y dice que una fuerza es la causante de que la bola siga una trayectoria curva. Esta fuerza ficticia se llama fuerza de Coriolis.

Las fuerzas ficticias pueden no ser fuerzas reales, pero tienen efectos reales. Un objeto en el tablero de su automóvil *realmente* se desliza si usted pisa el acelerador de su vehículo. Mientras viaja en un carrusel, siente que lo empujan hacia afuera como si se debiese a la ficticia "fuerza centrífuga". Es probable que usted caiga y se lesione debido a la fuerza de Coriolis si camina a lo largo de una línea radial mientras un carrusel gira. (Uno de los autores lo hizo y sufrió separación de ligamentos en las costillas cuando cayó.) La fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra es responsable de los giros de los huracanes y de las corrientes oceánicas a gran escala.

Pregunta rápida 6.3 Considere a la pasajera en el automóvil que da vuelta a la izquierda en la figura 6.10. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta en relación con las fuerzas en la dirección horizontal si ella hace contacto con la puerta derecha? a) La pasajera está en equilibrio entre fuerzas reales que actúan hacia la derecha y fuerzas reales que

actúan hacia la izquierda. b) La pasajera está expuesta sólo a fuerzas reales que actúan hacia la derecha. c) La pasajera está dependiente sólo a fuerzas reales que actúan hacia la izquierda. d) Ninguno de estos enunciados es verdadero.

EJEMPLO 6.7 Fuerzas ficticias en movimiento lineal

Una pequeña esfera de masa m cuelga mediante una cuerda del techo de un vagón que acelera hacia la derecha, como se muestra en la figura 6.12. El observador no inercial en la figura 6.12b afirma que una fuerza, que se sabe es ficticia, provoca la desviación de la cuerda de la vertical que observa. ¿Cómo se relaciona la magnitud de esta fuerza con la aceleración del vagón medida por la observadora inercial en la figura 6.12a?

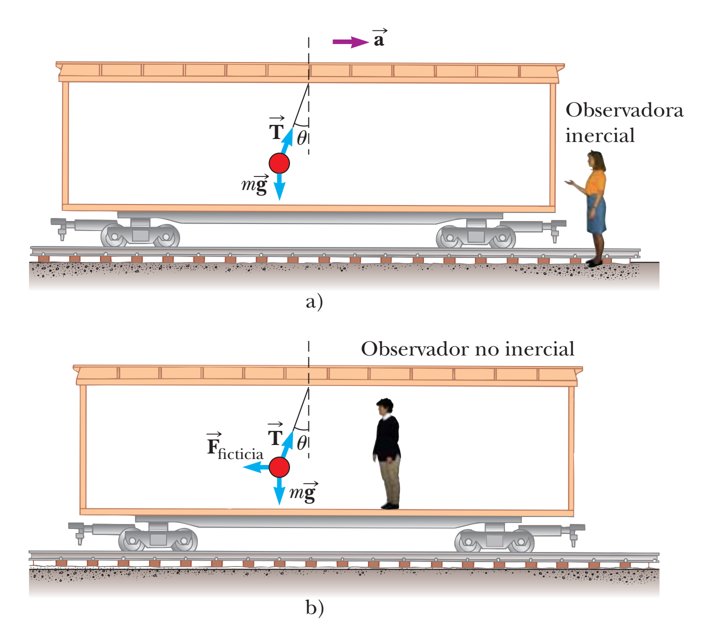


Figura 6.12 (Ejemplo 6.7) Una pequeña esfera suspendida del techo de un vagón que acelera hacia la derecha se desvía como se muestra. a) Una observadora inercial en reposo afuera del vagón afirma que la aceleración de la esfera es producto de la componente horizontal de $\vec{T}$. b) Un observador no inercial que viaja en el vagón dice que la fuerza neta sobre la esfera es cero y que la desviación de la cuerda de la vertical se debe a una fuerza ficticia $\vec{F}_{ficticia}$ que equilibra la componente horizontal de $\vec{T}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Identifíquese en el lugar de cada uno de los dos observadores de la figura 6.12. Como observador inercial en el suelo, usted ve que el vagón acelera y sabe que la desviación de la cuerda se debe a esta aceleración. Como observador no inercial en el vagón, imagine que ignora cualquier efecto del movimiento del carro de modo que no está al tanto de su aceleración. Puesto que no está al tanto de esta aceleración, usted afirma que una fuerza empuja hacia los lados la esfera para causar la desviación de la cuerda de la vertical. Para tener ideas más reales, intente correr desde el reposo mientras sostiene un objeto que cuelga de una cuerda y percibe que la cuerda está en un ángulo con la vertical mientras usted acelera, como si una fuerza empujara el objeto hacia atrás.

Categorizar Para la observadora inercial, la esfera se modela como una partícula bajo una fuerza neta en la dirección horizontal y una partícula en equilibrio en la dirección vertical. Para el observador no inercial, la esfera se modela como una partícula en equilibrio para la cual una de las fuerzas es ficticia.

Analizar De acuerdo con la observadora inercial en reposo (figura 6.12a), las fuerzas sobre la esfera son la fuerza $\vec{T}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional. La observadora inercial concluye que la aceleración de la esfera es la misma que la del vagón y que dicha aceleración la produce la componente horizontal de $\vec{T}$.

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes a la esfera, de acuerdo con la observadora inercial:

$$\text{Observadora inercial} \begin{cases} 1) \quad \sum F_x = T \operatorname{sen} \theta = ma \\ 2) \quad \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

De acuerdo con el observador no inercial que viaja en el vagón (figura 6.12b), la cuerda también forma un ángulo θ con la vertical; sin embargo, para dicho observador, la esfera está en reposo y de este modo su aceleración es cero. Por lo tanto, el observador no inercial introduce una fuerza ficticia en la dirección horizontal para equilibrar la componente horizontal de $\vec{T}$ y afirma que la fuerza neta sobre la esfera es cero.

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes a la esfera, de acuerdo con el observador no inercial:

$$\text{Observador no inercial} \begin{cases} \sum F'_x = T \operatorname{sen} \theta - F_{ficticia} = 0 \\ \sum F'_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

Estas expresiones son equivalentes a las ecuaciones 1) y 2) si $F_{ficticia} = ma$, donde a es la aceleración de acuerdo con el observador inercial.

Finalizar Si se tuviese que hacer esta sustitución en la ecuación para F'_x anterior, el observador no inercial obtiene los mismos resultados matemáticos que la observadora inercial. No obstante, la interpretación física de la desviación de la cuerda difiere en los dos marcos de referencia.

¿Qué pasaría si? Suponga que la observadora inercial quiere medir la aceleración del tren mediante el péndulo (la esfera que cuelga de la cuerda). ¿Cómo podría hacerlo?

Respuesta La intuición dice que el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical debe aumentar conforme aumenta la aceleración. Al resolver las ecuaciones 1) y 2) simultáneamente para a, la observadora inercial puede determinar la magnitud de la aceleración del vagón al medir el ángulo θ y usar la relación $a = g \tan \theta$. Puesto que la desviación de la cuerda de la vertical sirve como una medida de aceleración, *se puede usar un péndulo simple como acelerómetro.*

6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

En el capítulo 5 se describió la fuerza de fricción cinética que se ejerce sobre un objeto que se mueve sobre alguna superficie. Se ignoró por completo cualquier interacción entre el objeto y el medio a través del que se mueve. Ahora considere el efecto de dicho medio, que puede ser o un líquido o un gas. El medio ejerce una **fuerza resistiva** $\vec{\mathbf{R}}$ sobre el objeto móvil a través de él. Algunos ejemplos son la resistencia del aire asociada con los vehículos móviles (a veces llamado *arrastre de aire*) y las fuerzas viscosas que actúan sobre los objetos móviles a través de un líquido. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ depende de factores tales como la rapidez del objeto, y la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ siempre es opuesta a la dirección de movimiento del objeto en relación con el medio.

La magnitud de la fuerza resistiva depende de la rapidez en una forma compleja y aquí sólo se consideran dos modelos simplificados. En el primer modelo se supone que la fuerza resistiva es proporcional a la rapidez del objeto móvil; este modelo es válido para objetos que caen lentamente a través de un líquido y para objetos muy pequeños, como las partículas de polvo, que se mueven a través del aire. En el segundo modelo, se supone una fuerza resistiva que es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto móvil; los objetos grandes, como un paracaidista móvil en caída libre a través del aire, experimenta tal fuerza.

Modelo 1: Fuerza resistiva proporcional a la velocidad del objeto

Si la fuerza resistiva que actúa sobre un objeto móvil a través de un líquido o gas se modela como proporcional a la velocidad del objeto, la fuerza resistiva se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}} \tag{6.2}$$

donde b es una constante cuyo valor depende de las propiedades del medio y de la forma y dimensiones del objeto y $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad del objeto en relación con el medio. El signo negativo indica que $\vec{\mathbf{R}}$ está en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{v}}$.

Considere una pequeña esfera de masa m que se libera desde el reposo en un líquido, como en la figura 6.13a. Si supone que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza resistiva $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$, describa su movimiento.[1] Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento vertical, elegir la dirección hacia abajo como positiva y notar que $\Sigma F_y = mg - bv$, se obtiene

$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt} \tag{6.3}$$

donde la aceleración de la esfera es hacia abajo. Al resolver esta expresión para la aceleración dv/dt se obtiene

[1] Sobre un objeto sumergido también actúa una *fuerza de flotación*. Esta fuerza es constante y su magnitud es igual al peso del líquido desplazado. Esta fuerza cambia el peso aparente de la esfera en un factor constante, de modo que aquí se ignorará dicha fuerza. Las fuerzas de flotación se discuten en el capítulo 14.

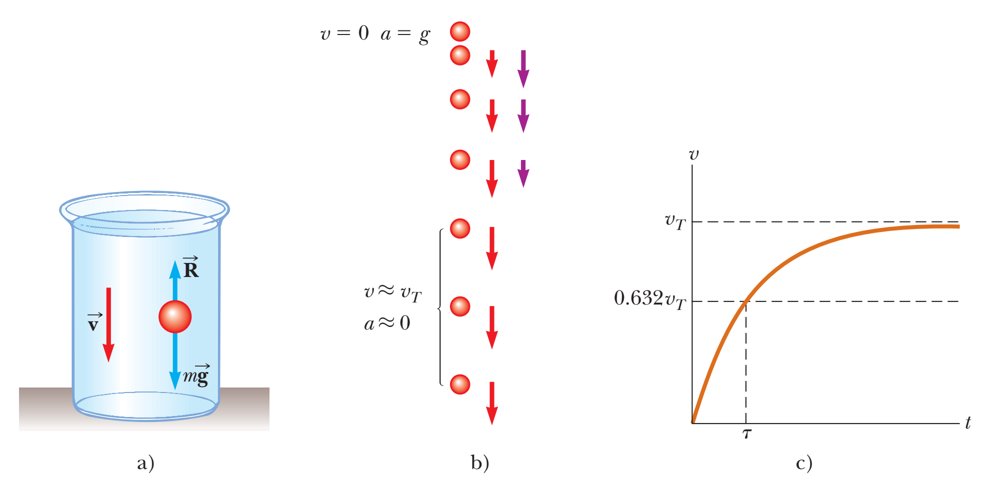


Figura 6.13 a) Una pequeña esfera que cae a través de un líquido. b) Diagrama de movimiento de la esfera mientras cae. Se muestran los vectores velocidad (rojo) y aceleración (violeta) para cada imagen después de la primera. c) Gráfica rapidez-tiempo para la esfera. La esfera se aproxima a una rapidez máxima (o terminal) v_T y la constante de tiempo τ es el tiempo en el que llega a una rapidez de $0.632v_T$.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \quad \textbf{(6.4)}$$

Esta ecuación se llama *ecuación diferencial* y los métodos para resolverla pueden no serle familiares todavía. No obstante, note que, inicialmente, cuando $v = 0$, la magnitud de la fuerza resistiva también es cero y la aceleración de la esfera es simplemente g. Conforme t aumenta, la magnitud de la fuerza resistiva aumenta y la aceleración disminuye. La aceleración tiende a cero cuando la magnitud de la fuerza resistiva se aproxima al peso de la esfera. En esta situación, la rapidez de la esfera tiende a su **rapidez terminal** v_T.

◀ Rapidez terminal

La rapidez terminal se obtiene de la ecuación 6.3 al hacer $a = dv/dt = 0$. Esto produce

$$mg - bv_T = 0 \quad \text{o} \quad v_T = \frac{mg}{b}$$

La expresión para v que satisface la ecuación 6.4 con $v = 0$ y $t = 0$ es

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) = v_T(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textbf{(6.5)}$$

Esta función se grafica en la figura 6.13c. El símbolo e representa la base del logaritmo natural y también se llama *número de Euler:* $e = 2.718\,28$. La **constante de tiempo** $\tau = m/b$ (letra griega tau) es el tiempo en el que la esfera liberada del reposo en $t = 0$ alcanza 63.2% de su rapidez terminal: cuando $t = \tau$, la ecuación 6.5 produce $v = 0.632v_T$.

Se puede comprobar que la ecuación 6.5 es una solución de la ecuación 6.4 mediante derivación directa:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m})\right] = \frac{mg}{b}\left(0 + \frac{b}{m}e^{-bt/m}\right) = ge^{-bt/m}$$

(Véase la tabla del apéndice B.4 para la derivada de e elevada a alguna potencia.) Al sustituir en la ecuación 6.4 estas dos expresiones para dv/dt y la expresión para v conocida por la ecuación 6.5 se demuestra que la solución satisface la ecuación diferencial.

EJEMPLO 6.8 **Esfera que cae en aceite**

Una pequeña esfera de 2.00 g de masa se libera desde el reposo en un gran contenedor lleno con aceite, donde experimenta una fuerza resistiva proporcional a su rapidez. La esfera alcanza una rapidez terminal de 5.00 cm/s. Examine la constante de tiempo τ y el tiempo en el que la esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 6.13, imagine soltar la esfera en aceite y observarla hundirse hasta el fondo del contenedor. Si tiene algo de champú denso, suelte una canica en él y observe el movimiento de la canica.

Categorizar La esfera se modela como una partícula bajo una fuerza neta, con una de las fuerzas como fuerza resistiva que depende de la rapidez de la esfera.

Analizar A partir de $v_T = mg/b$, evalúe el coeficiente b:

$$b = \frac{mg}{v_T} = \frac{(2.00 \text{ g})(980 \text{ cm/s}^2)}{5.00 \text{ cm/s}} = 392 \text{ g/s}$$

Evalúe la constante de tiempo τ:

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2.00 \text{ g}}{392 \text{ g/s}} = \boxed{5.10 \times 10^{-3} \text{ s}}$$

Encuentre el tiempo τ en el que la esfera alcanza una rapidez de $0.900v_T$ al hacer $v = 0.900v_T$ en la ecuación 6.5 y resuelva para t:

$$0.900v_T = v_T(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.900$$

$$e^{-t/\tau} = 0.100$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.100) = -2.30$$

$$t = 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3} \text{ s}) = 11.7 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$= \boxed{11.7 \text{ ms}}$$

Finalizar La esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal en un intervalo de tiempo muy breve. Además tiene que ver este comportamiento si realiza la actividad con la canica y el champú.

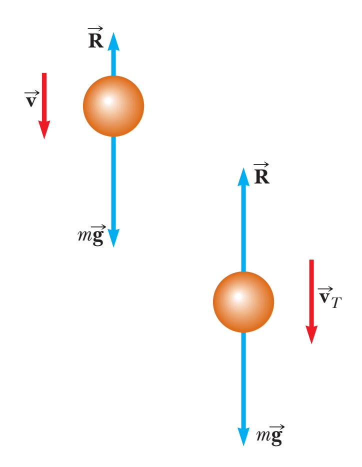


Figura 6.14 Un objeto que cae a través del aire experimenta una fuerza resistiva $\vec{R}$ y una fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$. El objeto logra la rapidez terminal (a la derecha) cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero; esto es: cuando $\vec{R} = -\vec{F}_g$ o $R = mg$. Antes de que se presente, la aceleración varía con la rapidez de acuerdo con la ecuación 6.8.

Modelo 2: Fuerza resistiva proporcional a la rapidez al cuadrado del objeto

Para objetos móviles con magnitudes de velocidad grandes a través del aire, como aviones, paracaidistas, automóviles y pelotas de beisbol, razonablemente la fuerza resistiva se representa con propiedad como proporcional al cuadrado de la rapidez. En estas situaciones, la magnitud de la fuerza resistiva se expresa como

$$R = \tfrac{1}{2} D\rho A v^2 \quad \textbf{(6.6)}$$

donde D es una cantidad empírica adimensional llamada *coeficiente de arrastre*, ρ es la densidad del aire y A es el área de sección transversal del objeto móvil observado en un plano perpendicular a su velocidad. El coeficiente de arrastre tiene un valor casi de 0.5 para objetos esféricos, pero puede tener un valor tan grande como 2 para objetos con forma irregular.

Analice el movimiento de un objeto en caída libre expuesto a una fuerza resistiva del aire hacia arriba de magnitud $R = \frac{1}{2} D\rho A v^2$. Suponga que un objeto de masa m se libera desde el reposo. Como muestra la figura 6.14, el objeto experimenta dos fuerzas externas:[2] la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{F}_g = m\vec{g}$ y la fuerza resistiva hacia arriba $\vec{R}$. En consecuencia, la magnitud de la fuerza neta es

$$\sum F = mg - \tfrac{1}{2} D\rho A v^2 \quad \textbf{(6.7)}$$

[2] Como con el modelo 1, también hay una fuerza de flotación hacia arriba que se ignora.

TABLA 6.1

Rapidez terminal para varios objetos que caen a través del aire

Objeto	Masa (kg)	Área de sección transversal (m^2)	v_T (m/s)
Paracaidista	75	0.70	60
Pelota de beisbol (3.7 cm de radio)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Pelota de golf (2.1 cm de radio)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Granizo (0.50 cm de radio)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Gota de lluvia (0.20 cm de radio)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

donde se toma hacia abajo como la dirección vertical positiva. Al usar la fuerza en la ecuación 6.7 en la segunda ley de Newton, se encuentra que el objeto tiene una aceleración hacia abajo de magnitud

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v^2 \tag{6.8}$$

La rapidez terminal v_T se puede calcular al notar que, cuando la fuerza gravitacional se equilibra mediante la fuerza resistiva, la fuerza neta sobre el objeto es cero y debido a eso su aceleración es cero. Al hacer $a = 0$ en la ecuación 6.8 se obtiene

$$g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right){v_T}^2 = 0$$

de modo que

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tag{6.9}$$

La tabla 6.1 menciona las magnitudes de velocidad terminal de diferentes objetos que caen a través del aire.

Pregunta rápida 6.4 Una pelota de beisbol y una de basquetbol, que tienen la misma masa, se dejan caer a través del aire desde el reposo, tal que sus partes inferiores están inicialmente a la misma altura sobre el suelo, en el orden de 1 m o más. ¿Cuál golpea el suelo primero? a) La pelota de beisbol golpea el suelo primero. b) El balón de basquetbol golpea el suelo primero. c) Ambas golpean el suelo al mismo tiempo.

EJEMPLO CONCEPTUAL 6.9 La *skysurfer*

Considere una *skysurfer* (figura 6.15) que salta desde un avión con los pies firmemente atados a su tabla de surf, hace algunos trucos y luego abre su paracaídas. Describa las fuerzas que actúan sobre ella durante dichas maniobras.

SOLUCIÓN

Cuando el surfista sale del avión, no tiene velocidad vertical. La fuerza gravitacional hacia abajo hace que ella acelere hacia el suelo. A medida que aumenta su rapidez hacia abajo, así lo hace la fuerza resistiva hacia arriba que ejerce el aire sobre su cuerpo y la tabla. Esta fuerza hacia arriba reduce su aceleración y por tanto su rapidez aumenta más lentamente. Al final, van tan rápido que la fuerza resistiva hacia arriba se iguala con la fuerza gravitacional hacia abajo. Ahora la fuerza neta es cero y ya no acelera, y en vez de ello llega a su rapidez terminal. En algún punto después de llegar a su rapidez terminal, abre su paracaídas, lo que resulta en un drástico aumento en la fuerza resistiva hacia arriba. La fuerza neta (y por tanto la aceleración) ahora es hacia arriba, en la dirección opuesta a la dirección de la velocidad. En consecuencia, la velocidad hacia abajo disminuye rápidamente, y la fuerza resistiva sobre el paracaídas también disminuye. Al final, la fuerza resistiva hacia



Jump Run Productions/Getty Images

Figura 6.15 (Ejemplo conceptual 6.9) Un *skysurfer*.

arriba y la fuerza gravitacional hacia abajo se equilibran mutuamente y se alcanza una rapidez terminal mucho más pequeña, lo que permite un aterrizaje seguro.

(Contrario a la creencia popular, el vector velocidad de un paracaidista nunca apunta hacia arriba. Usted debe haber visto una cinta de video en la que un paracaidista parece un "cohete" hacia arriba una vez que el paracaídas se abre. De hecho, lo que ocurre es que el paracaidista frena pero la persona que sostiene la cámara continúa cayendo a gran rapidez.)

EJEMPLO 6.10 Caída de filtros de café

La dependencia de la fuerza resistiva con el cuadrado de la rapidez es un modelo. Pruebe el modelo para una situación específica. Imagine un experimento en el que se deja caer una serie de filtros de café apilados y se mide su rapidez terminal. La tabla 6.2 presenta datos de rapidez terminal característicos de un experimento real que usa dichos filtros de café conforme caen a través del aire. La constante de tiempo τ es pequeña, así que un filtro que se deja caer alcanza prontamente la rapidez terminal. Cada filtro tiene una masa de 1.64 g. Cuando los filtros se apilan juntos el área de la superficie que ve al frente no aumenta. Determine la relación entre la fuerza resisti-va que ejerce el aire y la rapidez de los filtros que caen.

TABLA 6.2

Rapidez terminal y fuerza resistiva para filtros de café apilados

Número de filtros	v_T (m/s)[a]	R (N)
1	1.01	0.016 1
2	1.40	0.032 1
3	1.63	0.048 3
4	2.00	0.064 4
5	2.25	0.080 5
6	2.40	0.096 6
7	2.57	0.112 7
8	2.80	0.128 8
9	3.05	0.144 9
10	3.22	0.161 0

[a] Todos los valores de v_T son aproximados.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine soltar los filtros de café a través del aire. (Si tiene algunos filtros de café, intente soltarlos.) Debido a la masa relativamente pequeña del filtro de café, probablemente no notará el intervalo de tiempo durante el que hay una aceleración. Los filtros parecerán caer con velocidad constante de inmediato, al dejar su mano.

Categorizar Puesto que un filtro se mueve a velocidad constante, se le modela como partícula en equilibrio.

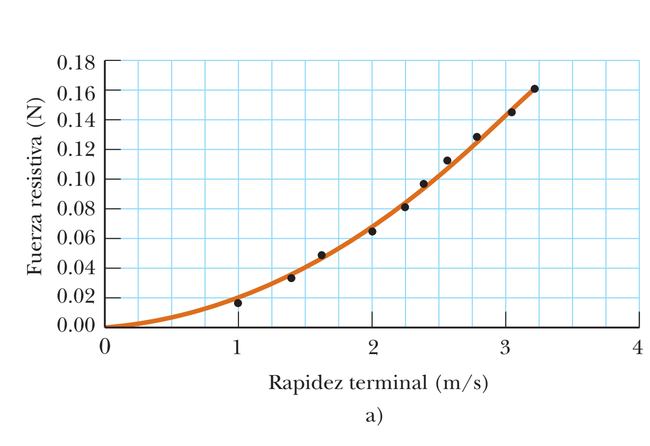
Analizar A rapidez terminal, la fuerza resistiva hacia arriba sobre el filtro equilibra la fuerza gravitacional hacia abajo de modo que $R = mg$.

Evalúe la magnitud de la fuerza resistiva:

$$R = mg = (1.64 \text{ g})\left(\frac{1 \text{ kg}}{1\,000 \text{ g}}\right)(9.80 \text{ m/s}^2) = 0.016\,1 \text{ N}$$

Del mismo modo, dos filtros apilados juntos experimentan 0.032 2 N de fuerza resistiva, etcétera. Dichos valores de fuerza resistiva se muestran en la columna de la extrema derecha en la tabla 6.2. En la figura 6.16a se muestra una gráfica de la fuerza resistiva sobre los filtros como función de la rapidez terminal. Una línea recta no es un buen ajuste, lo que indica que la fuerza resistiva *no* es proporcional a la rapidez. El comportamiento se ve más claramente en la figura 6.16b, ahí la fuerza resistiva se grafica como una función del cuadrado de la rapidez terminal. Esta gráfica indica que la fuerza resistiva es proporcional al *cuadrado* de la rapidez, como sugiere la ecuación 6.6.

Finalizar He aquí una buena oportunidad para que en casa tome algunos datos reales de filtros de café reales y vea si es capaz de reproducir los resultados que se muestran en la figura 6.16. Si tiene champú y una canica, como se mencionó en el ejemplo 6.8, también tome datos en dicho sistema y vea si la fuerza resistiva se modela adecuadamente como proporcional a la rapidez.



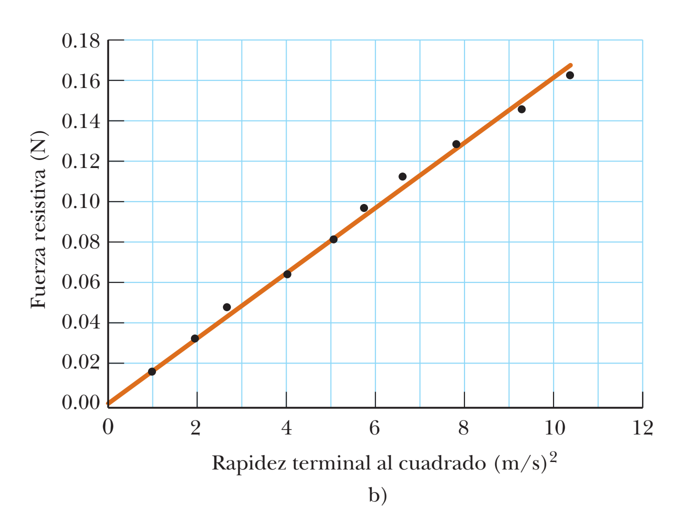


Figura 6.16 (Ejemplo 6.10) a) Correspondencia entre la fuerza resistiva que actúa sobre filtros de café que caen y su rapidez terminal. La línea curva es una ajuste polinomial de segundo orden. b) Gráfica que relaciona la fuerza resistiva con el cuadrado de la rapidez terminal. El ajuste de la línea recta a los puntos de información indica que la fuerza resistiva es proporcional al cuadrado de la rapidez terminal. ¿Puede encontrar la constante de proporcionalidad?

EJEMPLO 6.11 Fuerza resistiva ejercida sobre una pelota de beisbol

Un lanzador arroja una pelota de beisbol de 0.145 kg a un lado del bateador a 40.2 m/s (= 90 mi/h). Encuentre la fuerza resistiva que actúa sobre la pelota con esta rapidez.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo es diferente del anterior en que ahora el objeto es móvil horizontalmente a través del aire, en lugar de moverse de manera vertical bajo la influencia de la gravedad y la fuerza resistiva. La fuerza resistiva hace que la pelota disminuya su velocidad mientras la gravedad hace que su trayectoria se curve hacia abajo. La situación se simplifica al suponer que el vector velocidad es exactamente horizontal en el instante en que viaja a 40.2 m/s.

Categorizar En general, la pelota es una partícula bajo una fuerza neta. Sin embargo, ya que se considera sólo un instante de tiempo, no hay que preocuparse por la aceleración, de modo que el problema sólo implica encontrar el valor de una de las fuerzas.

Analizar Para determinar el coeficiente de arrastre D, imagine que suelta la pelota y la deja llegar a su rapidez terminal. Resuelva la ecuación 6.9 para D y sustituya los valores apropiados para m, v_T y A de la tabla 6.1, y considere la densidad del aire como 1.20 kg/m^3:

$$D = \frac{2mg}{v_T{}^2\rho A} = \frac{2(0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{(43 \text{ m/s})^2(1.20 \text{ kg/m}^3)(4.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}$$
$$= 0.305$$

Use este valor para D en la ecuación 6.6 para encontrar la magnitud de la fuerza resistiva:

$$R = \tfrac{1}{2} D\rho A v^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.305)(1.20 \text{ kg/m}^3)(4.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(40.2 \text{ m/s})^2$$
$$= 1.2 \text{ N}$$

Finalizar La magnitud de la fuerza resistiva es similar en magnitud al peso de la pelota de beisbol, que es casi 1.4 N. Por lo tanto, la resistencia del aire desempeña un papel importante en el movimiento de la pelota, como se manifiesta por la variedad de curvas, "de columpio" (hacia abajo), "dormilona" y demás que lanzan los pitchers.

Resumen

DEFINICIONES

Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una aceleración centrípeta; esta aceleración la proporciona una fuerza neta que se dirija hacia el centro de la trayectoria circular.

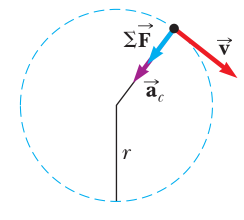
Un observador en un marco de referencia no inercial (acelerado) introduce **fuerzas ficticias** cuando aplica la segunda ley de Newton en dicho marco.

Un objeto móvil a través de un líquido o gas experimenta una **fuerza resistiva** dependiente de la rapidez. Esta fuerza resistiva está en dirección opuesta a la velocidad del objeto en relación con el medio y por lo general aumenta con la rapidez. La magnitud de la fuerza resistiva depende del tamaño y forma del objeto y de las propiedades del medio a través del que se mueve el objeto. En el caso límite para un objeto que cae, cuando la magnitud de la fuerza resistiva es igual al peso del objeto, éste alcanza su **rapidez terminal**.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula en movimiento circular uniforme Con el nuevo conocimiento de las fuerzas, se pueden hacer agregados al modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, que se introdujo en el capítulo 4. La segunda ley de Newton aplicada a una partícula en movimiento circular uniforme establece que la fuerza neta que permite a la partícula someterse a una aceleración centrípeta (ecuación 4.15) se relaciona con la aceleración de acuerdo con

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(6.1)}$$



Preguntas

O Indica pregunta complementaria.

1. **O** Una puerta en un hospital tiene un cierre neumático que empuja la puerta para cerrar de tal modo que la perilla se mueve con rapidez constante en la mayor parte de su trayectoria. En esta parte de su movimiento, a) ¿la perilla experimenta una aceleración centrípeta?, b) ¿Experimenta una aceleración tangencial? Apresurada por una emergencia, una enfermera proporciona un empujón repentino a la puerta cerrada. La puerta se abre contra el dispositivo neumático, frena y luego invierte su movimiento. En el momento en que la puerta está más abierta, c) ¿la perilla tiene una aceleración centrípeta?, d) ¿Tiene una aceleración tangencial?
2. Describa la trayectoria de un cuerpo móvil en el evento en que su aceleración sea constante en magnitud en todo momento y a) perpendicular a la velocidad; b) paralela a la velocidad.
3. Un objeto ejecuta movimiento circular con rapidez constante siempre que una fuerza neta de magnitud constante actúe perpendicular a la velocidad. ¿Qué le ocurre a la rapidez si la fuerza no es perpendicular a la velocidad?
4. **O** Un niño practica para una carrera de bicicletas a campo traviesa. Su rapidez permanece constante conforme avanza alrededor de una pista a nivel contra las manecillas del reloj, con dos secciones rectas y dos secciones casi semicirculares, como se muestra en la vista de helicóptero en la figura P6.4. a) Clasifique las magnitudes de su aceleración en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, de mayor a menor. Si su aceleración es del mismo tamaño en dos puntos, muestre tal hecho en su clasificación. Si su aceleración es cero, resalte este hecho. b) ¿Cuáles son las direcciones de su velocidad en los puntos *A*, *B* y *C*? Para cada punto elija uno: ¿norte, sur, este, oeste o no existe? c) ¿Cuáles son las direcciones de su aceleración en los puntos *A*, *B* y *C*?

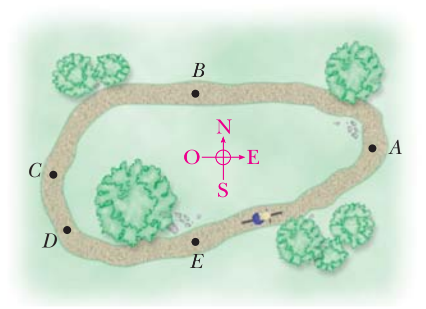


Figura P6.4

5. **O** Un péndulo consiste de un objeto pequeño llamado plomada que cuelga de una cuerda ligera de longitud fija, con el extremo superior de la cuerda fijo, como se representa en la figura P6.5. La plomada se mueve sin fricción, y se balancea con alturas iguales en ambos lados. Se mueve desde su punto de retorno *A* a través del punto *B* y llega a su rapidez máxima en el punto *C*. a) De estos puntos, ¿existe uno donde la plomada tenga aceleración radial distinta de cero y aceleración tangencial cero? Si es así, ¿cuál punto? ¿Cuál es la dirección de su aceleración total

en este punto? b) De estos puntos, ¿existe un punto donde la plomada tenga aceleración tangencial distinta de cero y aceleración radial cero? Si es así, ¿cuál punto? ¿Cuál es la dirección de su aceleración total en este punto? c) ¿Existe un punto donde la plomada no tenga aceleración? Si es así, ¿cuál punto? d) ¿Existe un punto donde la plomada tenga aceleraciones tangencial y radial distintas de cero? Si es así, ¿cuál punto? ¿Cuál es la dirección de su aceleración total en este punto?

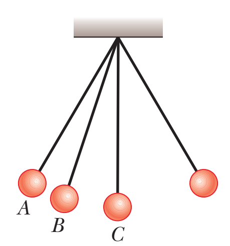


Figura P6.5

6. Si alguien le dijera que los astronautas no tienen peso en órbita porque están más allá de la atracción de la gravedad, ¿aceptaría la afirmación? Explique.

7. Se ha sugerido que cilindros giratorios de casi 20 km de largo y 8 km de diámetro se coloquen en el espacio y se usen como colonias. El propósito de la rotación es simular gravedad para los habitantes. Explique este concepto para producir una imitación efectiva de la gravedad.

8. Una cubeta de agua se puede girar en una trayectoria vertical tal que no se derrame agua. ¿Por qué el agua permanece en la cubeta, aun cuando la cubeta esté sobre su cabeza?

9. ¿Por qué un piloto tiende a desmayarse cuando sale de una pronunciada caída en picada?

10. **O** Antes de despegar en un avión, un inquisitivo estudiante en el avión toma un puñado de llaves y lo deja colgar de un cordón. Las llaves cuelgan justo hacia abajo mientras el avión está en reposo en espera del despegue. Luego el avión gana rapidez mientras se mueve por la pista. a) En relación con la mano del estudiante, ¿las llaves corren hacia el frente del avión, continúan colgando recto hacia abajo o se corren hacia la parte trasera del avión? b) La rapidez del avión aumenta en una proporción constante durante un intervalo de tiempo de varios segundos. Durante este intervalo, ¿el ángulo que el cordón forma con la vertical aumenta, permanece constante o disminuye?

11. El observador dentro del elevador en aceleración del ejemplo 5.8 diría que el "peso" del pescado es T, la lectura de la balanza. Es obvio que la respuesta es equivocada. ¿Por qué esta observación difiere de la de una persona fuera del elevador, en reposo respecto de la Tierra?

12. Un paracaidista que cae llega a rapidez terminal con su paracaídas cerrado. Después de que el paracaídas se abre, ¿qué parámetros cambian para disminuir su rapidez terminal?

13. ¿Qué fuerzas hacen que se mueva a) un automóvil, b) un avión impulsado por hélice y c) un bote de remos?

14. Considere que una pequeña gota de lluvia y una gran gota de lluvia caen a través de la atmósfera. Compare sus magnitudes de velocidad terminales. ¿Cuáles son sus aceleraciones cuando llegan a su rapidez terminal?

15. **O** Examine un paracaidista que salta de un helicóptero y cae a través del aire, antes de alcanzar su rapidez terminal y mucho antes de abrir su paracaídas. a) ¿Su rapidez aumenta, disminuye o permanece constante? b) ¿La magnitud de su aceleración aumenta, disminuye, permanece constante en cero, permanece constante a 9.80 m/s^2 o permanece constante a algún otro valor?

16. "Si la posición y velocidad actuales de toda partícula en el Universo fuesen conocidas, junto con las leyes que describen las fuerzas que las partículas ejercen unas sobre otras, en tal caso se podría calcular todo el futuro del Universo. El futuro es definido y predeterminado. El libre albedrío es una ilusión." ¿Está de acuerdo con esta tesis? Argumente a favor o en contra.

Problemas

Sección 6.1 Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme

1. Una cuerda ligera sostiene una carga fija colgante de 25.0 kg antes de romperse. Un objeto de 3.00 kg unido a la cuerda está girando sobre una mesa horizontal sin fricción en un círculo de 0.800 m de radio, y el otro extremo de la cuerda se mantiene fijo. ¿Qué intervalor de rapidez puede tener el objeto antes de que la cuerda se rompa?

2. Una curva en un camino forma parte de un círculo horizontal. Cuando la rapidez de un automóvil que circula por ella es de 14 m/s constante, la fuerza total sobre el conductor tiene 130 N de magnitud. ¿Cuál es la fuerza vectorial total sobre el conductor si la rapidez es 18.0 m/s?

3. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la rapidez del electrón es aproximadamente 2.20×10^{-6} m/s. Encuentre a) la fuerza que actúa sobre el electrón mientras da vueltas en una órbita circular de 0.530×10^{-10} m de radio y b) la aceleración centrípeta del electrón.

4. Mientras dos astronautas del *Apolo* estaban en la superficie de la Luna, un tercer astronauta orbitaba la Luna. Suponga que la órbita es circular y 100 km arriba de la superficie de la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1.52 m/s^2. El radio de la Luna es 1.70×10^6 m. Determine a) la rapidez orbital del astronauta y b) el periodo de la órbita.

5. Una moneda colocada a 30.0 cm del centro de una tornamesa horizontal giratoria se desliza cuando su rapidez es 50.0 cm/s. a) ¿Qué fuerza causa la aceleración centrípeta cuando la moneda está fija en relación con la tornamesa? b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la tornamesa?

6. En un ciclotrón (un acelerador de partículas), un deuterón (de 2.00 u de masa) alcanza una rapidez final de 10.0% la rapidez de la luz mientras se mueve en una trayectoria circular de 0.480 m de radio. El deuterón se mantiene en la trayectoria circular mediante una fuerza magnética. ¿Qué magnitud de fuerza se requiere?

7. Una estación espacial, en forma de rueda de 120 m de diámetro, rota para proporcionar una "gravedad artificial" de 3.00 m/s^2 para las personas que caminan alrededor de la pared interior del borde externo. Encuentre la proporción de rotación de la rueda (en revoluciones por minuto) que producirá este efecto.

8. Examine un péndulo cónico (figura 6.3) con una plomada de 80.0 kg en un alambre de 10.0 m que forma un ángulo $\theta = 5.00°$ con la vertical. Determine a) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el alambre en el péndulo y b) la aceleración radial de la plomada.

9. Una caja de huevos se ubica en la mitad de la plataforma de una camioneta pickup mientras la camioneta entra en una curva sin peralte en el camino. La curva se puede considerar como un arco de círculo de 35.0 m de radio. Si el coeficiente de fricción estática entre la caja y la camioneta es 0.600, ¿qué tan rápido se puede mover la camioneta sin que la caja se deslice?

10. Un automóvil viaja inicialmente hacia el este y da vuelta al norte al viajar en una trayectoria circular con rapidez uniforme, como se muestra en la figura P6.10. La longitud del arco *ABC* es 235 m y el automóvil completa la vuelta en 36.0 s. a) ¿Cuál es la aceleración cuando el automóvil está en *B*, ubicado a un ángulo de 35.0°? Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Determine b) la rapidez promedio del automóvil y c) su aceleración promedio durante el intervalo de 36.0 s.

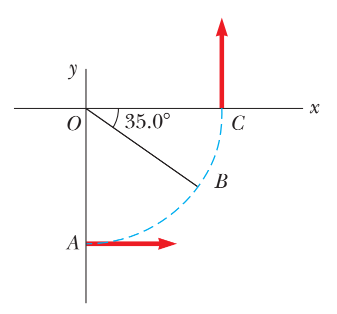


Figura P6.10

11. Un objeto de 4.00 kg se une a una barra vertical mediante dos cuerdas, como se muestra en la figura P6.11. El objeto gira en un círculo horizontal con rapidez constante de 6.00 m/s. Encuentre la tensión en a) la cuerda superior y b) la cuerda inferior.

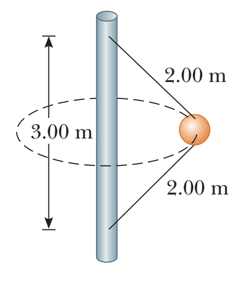


Figura P6.11

Sección 6.2 Movimiento circular no uniforme

12. Un halcón vuela en un arco horizontal de 12.0 m de radio con una rapidez constante de 4.00 m/s. a) Encuentre su aceleración centrípeta. b) El halcón continúa volando a lo largo del mismo arco horizontal pero aumenta su rapidez en una proporción de 1.20 m/s^2. Encuentre la aceleración (magnitud y dirección) bajo estas condiciones.

13. Un niño de 40.0 kg se mece en un columpio sostenido por dos cadenas, cada una de 3.00 m de largo. La tensión en cada cadena en el punto más bajo es 350 N. Encuentre a) la rapidez del niño en el punto más bajo y b) la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Ignore la masa del asiento.)

14. Un carro de montaña rusa (figura P6.14) tiene una masa de 500 kg cuando está completamente cargado con pasajeros. a) Si el vehículo tiene una rapidez de 20.0 m/s en el punto Ⓐ, ¿cuál es la fuerza que ejerce la pista sobre el carro en este punto? b) ¿Cuál es la rapidez máxima que puede tener el vehículo en el punto Ⓑ y todavía permanecer sobre la pista?

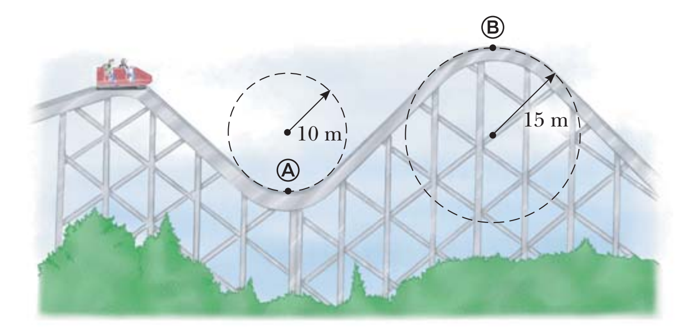


Figura P6.14

15. Tarzán (m = 85.0 kg) intenta cruzar un río al balancearse con una liana. La liana mide 10.0 m de largo y su rapidez en la parte baja del balanceo (mientras apenas libra el agua) será 8.00 m/s. Tarzán no sabe que la liana tiene una resistencia a la rotura de 1 000 N. ¿Logrará cruzar el río con seguridad?

16. ● Un extremo de una cuerda está fijo y un objeto pequeño de 0.500 kg se une al otro extremo, donde se balancea en una sección de un círculo vertical de 2.00 m de radio, como se muestra en la figura 6.9. Cuando $\theta = 20.0°$, la rapidez del objeto es 8.00 m/s. En este instante, encuentre a) la tensión en la cuerda, b) las componentes tangencial y radial de la aceleración y c) la aceleración total. d) ¿Su respuesta cambia si el objeto se balancea hacia arriba en lugar de hacia abajo? Explique.

17. Una cubeta con agua gira en un círculo vertical de 1.00 m de radio. ¿Cuál es la rapidez mínima de la cubeta en lo alto del círculo si no se debe derramar agua?

18. Una montaña rusa en el parque de diversiones Six Flags Great America en Gurnee, Illinois, incorpora cierta tecnología de diseño ingeniosa y algo de física básica. Cada bucle vertical, en lugar de ser circular, tiene forma de lágrima (figura P6.18). Los carros viajan en el interior del bucle en la parte superior, y las magnitudes de velocidad son lo suficientemente grandes para asegurar que los carros permanezcan en la pista. El bucle más grande tiene 40.0 m de alto, con una rapidez máxima de 31.0 m/s (casi 70 mi/h) en la parte inferior. Suponga que la rapidez en la parte superior es 13.0 m/s y la aceleración centrípeta correspondiente es $2g$. a) ¿Cuál es el radio del arco de la lágrima en la parte superior? b) Si la masa total de un carro

más los pasajeros es M, ¿qué fuerza ejerce el riel sobre el carro en la parte superior? c) Suponga que la montaña rusa tiene un bucle circular de 20.0 m de radio. Si los carros tienen la misma rapidez, 13.0 m/s en la parte superior, ¿cuál es la aceleración centrípeta en la parte superior? Comente acerca de la fuerza normal en la parte superior en esta situación.



Figura P6.18

Sección 6.3 Movimiento en marcos acelerados

19. ● Un objeto de 5.00 kg de masa, unido a una balanza de resorte, descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P6.19. La balanza de resorte, unida al extremo frontal de un vagón, tiene una lectura constante de 18.0 N cuando el carro está en movimiento. a) La lectura en la balanza es de cero cuando el vagón está en reposo. Determine la aceleración del vagón. b) ¿Qué lectura constante mostrará la balanza si el vagón se mueve con velocidad constante? c) Describa las fuerzas sobre el objeto como lo observa alguien en el vagón y alguien en reposo fuera del vagón.

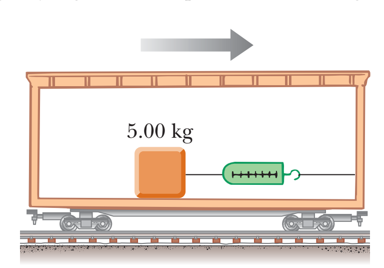


Figura P6.19

20. Un pequeño contenedor de agua se coloca sobre un carrusel dentro de un horno de microondas en un radio de 12.0 cm desde el centro. La tornamesa gira de manera uniforme y da una revolución cada 7.25 s. ¿Qué ángulo forma la superficie del agua con la horizontal?

21. Un objeto de 0.500 kg está suspendido del techo de un vagón que acelera, como se muestra en la figura 6.12. Tome $a = 3.00$ m/s^2 y encuentre a) el ángulo que forma la cuerda con la vertical y b) la tensión en la cuerda.

22. Un estudiante está de pie en un elevador que acelera continuamente hacia arriba con aceleración a. Su mochila está en el piso junto a la pared. El ancho del elevador es L. El estudiante da a su mochila una patada rápida en $t = 0$ y le imparte una rapidez v que la hace deslizar a través del piso del elevador. En el tiempo t, la mochila golpea la pared opuesta. Encuentre el coeficiente de fricción cinética μ_k entre la mochila y el piso del elevador.

23. Una persona está de pie sobre una báscula en un elevador. Mientras el elevador parte, la báscula tiene una lectura constante de 591 N. Más tarde, cuando el elevador se detiene, la lectura de la báscula es 391 N. Suponga que la magnitud de la aceleración es la misma durante la partida y el frenado. Determine: a) el peso de la persona, b) la masa de la persona y c) la aceleración del elevador.

24. Una niña en vacaciones se despierta. Se encuentra sobre su espalda. La tensión en los músculos en ambos lados de su cuello es 55.0 N mientras eleva su cabeza para mirar por encima de los dedos de sus pies hacia afuera por la ventana del hotel. ¡Finalmente no llueve! Diez minutos después, grita conforme baja por un tobogán de agua, los pies primero, a una rapidez terminal de 5.70 m/s, viajando por lo alto de la pared exterior de una curva horizontal de 2.40 m de radio (figura P6.24). Eleva la cabeza para ver hacia adelante sobre los dedos de sus pies. Encuentre la tensión en los músculos en ambos lados de su cuello.



Figura P6.24

25. Una plomada no cuelga exactamente a lo largo de una línea que se dirige al centro de rotación de la Tierra. ¿Cuánto se desvía la plomada de una línea radial a 35.0° latitud norte? Suponga que la Tierra es esférica.

Sección 6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

26. Un paracaidista de 80.0 kg de masa salta desde un avión de lento movimiento y alcanza una rapidez terminal de 50.0 m/s. a) ¿Cuál es la aceleración del paracaidista cuando su rapidez es 30.0 m/s? ¿Cuál es la fuerza de arrastre sobre el paracaidista cuando su rapidez es b) 50.0 m/s? c) ¿Cuando es 30.0 m/s?

27. Un pequeño trozo de espuma de estireno, material de empaque, se suelta desde una altura de 2.00 m sobre el suelo. Hasta que llega a rapidez terminal, la magnitud de su aceleración se conoce mediante $a = g - bv$. Después de caer 0.500 m, la espuma de estireno en efecto alcanza su rapidez terminal y después tarda 5.00 s más en llegar al suelo. a) ¿Cuál es el valor de la constante b? b) ¿Cuál es la aceleración en $t = 0$? c) ¿Cuál es la aceleración cuando la rapidez es 0.150 m/s?

28. a) Estime la rapidez terminal de una esfera de madera (densidad 0.830 g/cm^3) que cae a través del aire, considere su radio como 8.00 cm y su coeficiente de arrastre como 0.500. b) ¿Desde qué altura un objeto en caída libre alcanzaría esta rapidez en ausencia de resistencia del aire?

29. Calcule la fuerza que se requiere para jalar una bola de cobre de 2.00 cm de radio hacia arriba a través de un fluido con rapidez constante de 9.00 cm/s. Considere la fuerza de arrastre proporcional a la rapidez, con constante de proporcionalidad 0.950 kg/s. Ignore la fuerza de flotación.

30. La masa de un automóvil deportivo es 1 200 kg. La forma del cuerpo es tal que el coeficiente de arrastre aerodinámico es 0.250 y el área frontal es 2.20 m^2. Si ignora todas las otras fuentes de fricción, calcule la aceleración inicial que tiene el automóvil si ha viajado a 100 km/h y ahora que cambia a neutral y lo deja deslizarse.

31. Una esfera pequeña de 3.00 g de masa se libera desde el reposo en $t = 0$ dentro de una botella de champú líquido. Se observa que la rapidez terminal es $v_T = 2.00$ cm/s. Encuentre: a) el

valor de la constante b en la ecuación 6.2, b) el tiempo t en el que la esfera alcanza $0.632v_T$ y c) el valor de la fuerza resistiva cuando la esfera alcanza su rapidez terminal.

32. **Problema de repaso.** Una policía encubierta jala un rodillo de goma por una ventana vertical muy alta. El rodillo tiene 160 g de masa y está montado en el extremo de una barra ligera. El coeficiente de fricción cinética entre el rodillo y el vidrio seco es 0.900. La agente lo presiona contra la ventana con una fuerza que tiene una componente horizontal de 4.00 N. a) Si ella jala el rodillo por la ventana a velocidad constante, ¿qué componente de fuerza vertical debe ejercer? b) La agente aumenta la componente de fuerza hacia abajo en 25.0%, pero todas las otras fuerzas permanecen iguales. Encuentre la aceleración del rodillo en esta situación. c) Luego el rodillo se mueve en una porción húmeda de la ventana, donde su movimiento ahora lo resiste una fuerza de arrastre de fluido proporcional a su velocidad de acuerdo con $R = -(20.0 \text{ N}\cdot\text{s/m})v$. Encuentre la velocidad terminal a la que se aproxima el rodillo, si supone que la agente ejerce la misma fuerza descrita en el inciso b).

33. Un objeto de 9.00 kg que parte del reposo cae a través de un medio viscoso y experimenta una fuerza resistiva $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$, donde $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad del objeto. El objeto alcanza un medio de su rapidez terminal en 5.54 s. a) Determine la rapidez terminal. b) ¿En qué tiempo la rapidez del objeto es tres cuartos de la rapidez terminal? c) ¿Qué distancia recorrió el objeto en los primeros 5.54 s de movimiento?

34. Considere un objeto sobre el que la fuerza neta es una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de su rapidez. Por ejemplo, suponga que la fuerza resistiva que actúa sobre un patinador rápido es $f = -kmv^2$, donde k es una constante y m es la masa del patinador. El patinador cruza la línea de meta de una competencia en línea recta con rapidez v_0 y después disminuye su velocidad deslizándose sobre sus patines. Demuestre que la rapidez del patinador en cualquier tiempo t después de cruzar la línea final es $v(t) = v_0/(1 + ktv_0)$. Este problema también proporciona los antecedentes para los siguientes dos problemas.

35. a) Use el resultado del problema 34 para encontrar la posición x como función del tiempo para un objeto de masa m ubicado en $x = 0$ y que se mueve con velocidad $-v_0\,\hat{\mathbf{i}}$ en el tiempo $t = 0$, y a partir de ahí experimenta una fuerza neta $-kmv^2\,\hat{\mathbf{i}}$. b) Encuentre la velocidad del objeto como función de la posición.

36. En los juegos de beisbol de las grandes ligas es un lugar común mostrar en una pantalla la rapidez de cada lanzamiento. Esta rapidez se determina con una pistola radar dirigida por un operador colocado detrás de la almohadilla del bateador. La pistola usa el corrimiento Doppler de microondas reflejadas desde la bola de beisbol, como se estudiará en el capítulo 39. La pistola determina la rapidez en algún punto particular sobre la trayectoria de la bola, dependiendo de cuándo el operador jala el disparador. Puesto que la bola está sometida a una fuerza de arrastre debida al aire, frena conforme viaja 18.3 m hacia la almohadilla. Use el resultado del problema 35b) para encontrar cuánto disminuye su rapidez. Suponga que la bola deja la mano del lanzador a 90.0 mi/h = 40.2 m/s. Ignore su movimiento vertical. Use los datos acerca de bolas de beisbol del ejemplo 6.11 para determinar la rapidez del lanzamiento cuando cruza la almohadilla.

37. El conductor de un lancha de motor apaga su motor cuando su rapidez es 10.0 m/s y se desliza hasta el reposo. La ecuación que describe el movimiento de la lancha durante este periodo es $v = v_i e^{-ct}$, donde v es la rapidez en el tiempo t, v_i es la rapidez inicial y c es una constante. En $t = 20.0$ s, la rapidez es 5.00 m/s. a) Encuentre la constante c. b) ¿Cuál es la rapidez en $t = 40.0$ s? c) derive la expresión para $v(t)$ y muestre por esto que la aceleración de la lancha es proporcional a la rapidez en cualquier tiempo.

38. Usted puede sentir una fuerza de arrastre de aire sobre su mano si estira el brazo por afuera de una ventana abierta en un automóvil que se mueve rápidamente. *Nota:* No se ponga en peligro. ¿Cuál es el orden de magnitud de esta fuerza? En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

Problemas adicionales

39. Un objeto de masa m se proyecta hacia adelante a lo largo del eje x con rapidez inicial v_0. La única fuerza sobre él es una fuerza resistiva proporcional a su velocidad, dada por $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$. De manera concreta, podría visualizar un avión con flotadores que aterriza sobre un lago. La segunda ley de Newton aplicada al objeto es $bv\,\hat{\mathbf{i}} = m(dv/dt)\,\hat{\mathbf{i}}$. A partir del teorema fundamental del cálculo, esta ecuación diferencial implica que la rapidez cambia de acuerdo con

$$\int_{\text{inicio}}^{\text{un punto posterior}} \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

Realice las integraciones para determinar la rapidez del objeto como función del tiempo. Bosqueje una gráfica de la rapidez como función del tiempo. ¿El objeto llega a un alto completo después de un intervalo de tiempo finito? ¿El objeto viaja una distancia finita para detenerse?

40. Un objeto de 0.400 kg se balancea en una trayectoria circular vertical sobre una cuerda de 0.500 m de largo. Si su rapidez es 4.00 m/s en lo alto del círculo, ¿cuál es la tensión en la cuerda en ese lugar?

41. a) Un carrusel de equipaje en un aeropuerto tiene la forma de una sección de un gran cono, y gira de manera estable en torno a su eje vertical. Su superficie metálica se inclina hacia abajo y al exterior y forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. Una pieza de equipaje que tiene una masa de 30.0 kg se coloca sobre el carrusel, a 7.46 m del eje de rotación. La maleta viajera gira una vez en 38.0 s. Calcule la fuerza de fricción estática que ejerce el carrusel sobre la maleta. b) El motor conductor se cambia para girar el carrusel a una mayor relación de rotación constante, y la pieza de equipaje salta a otra posición, a 7.94 m del eje de rotación. Ahora, al dar una vuelta cada 34.0 s, la maleta está a punto de deslizarse. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la maleta y el carrusel.

42. En una secadora de ropa doméstica, una tina cilíndrica que contiene ropa húmeda gira de manera estable en torno a un eje horizontal, como se muestra en la figura P6.42. De tal modo

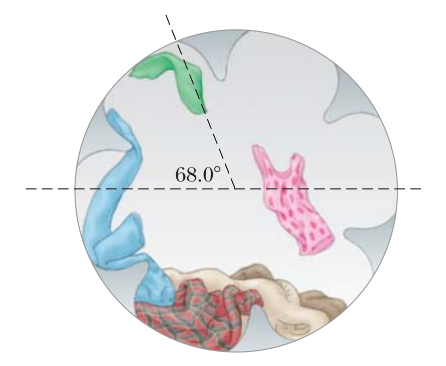


Figura P6.42

que las prendas se sequen uniformemente, se hacen rodar. La relación de rotación de la tina con paredes uniformes se elige de modo que una pequeña pieza de ropa perderá contacto con la tina cuando la ropa esté a un ángulo de 68.0° sobre la horizontal. Si el radio de la tina es 0.330 m, ¿qué cantidad de revolución se necesita?

43. En el capítulo 40 se estudiará el trabajo más importante del ganador del Nobel, Arthur Compton. Perturbado por los veloces automóviles afuera del edificio de física en la Universidad de Washington en St. Louis, Compton diseñó un tope y lo instaló. Suponga que un automóvil de 1 800 kg pasa sobre un tope en una autopista que sigue el arco de un círculo de 20.4 m de radio, como se muestra en la figura P6.43. a) ¿Qué fuerza ejerce el camino sobre el automóvil conforme éste pasa el punto más alto del tope, si viaja a 30.0 km/h? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener el automóvil mientras pasa el punto más alto sin perder contacto con el camino?

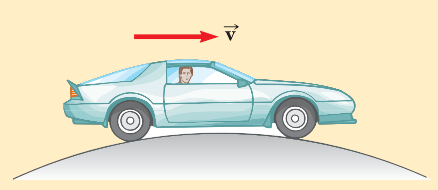


Figura P6.43 Problemas 43 y 44.

44. Un automóvil de masa m pasa sobre un tope en un camino que sigue el arco de un círculo de radio R, como se muestra en la figura P6.43. a) ¿Qué fuerza ejerce el camino sobre el automóvil mientras éste pasa el punto más alto del tope si viaja a una rapidez v? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener el automóvil mientras pasa el punto más alto sin perder contacto con el camino?

45. Interprete la gráfica de la figura 6.16b). Proceda del modo siguiente. a) Encuentre la pendiente de la línea recta, incluidas sus unidades. b) De la ecuación 6.6, $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$, identifique la pendiente teórica de una gráfica de fuerza resistiva en función de rapidez al cuadrado. c) Iguale las pendientes experimental y teórica y proceda a calcular el coeficiente de arrastre de los filtros. Use el valor para la densidad del aire que se menciona al final del libro. Modele el área de sección transversal de los filtros como el de un círculo de 10.5 cm de radio. d) Elija arbitrariamente los ocho puntos de información sobre la gráfica y encuentre su separación vertical de la línea de mejor ajuste. Exprese esta dispersión como un porcentaje. e) En un párrafo breve, establezca lo que demuestra la gráfica y compare lo que demuestra con la predicción teórica. Necesitará hacer referencia a las cantidades graficadas en los ejes, a la forma de la línea de la gráfica, a los puntos de información y a los resultados de los incisos c) y d).

46. ● Una vasija que rodea un drenaje tiene la forma de un cono circular que se abre hacia arriba, y en todas partes tiene un ángulo de 35.0° con la horizontal. Un cubo de hielo de 25.0 g se hace deslizar alrededor del cono sin fricción en un círculo horizontal de radio R. a) Encuentre la rapidez que debe tener el cubo de hielo como dependiente de R. b) ¿Es innecesaria alguna parte de la información para la solución? Suponga que R se hace dos veces más grande. c) ¿La rapidez requerida aumenta, disminuye o permanece constante? Si cambia, ¿en qué factor? d) ¿El tiempo requerido para cada revolución aumenta, disminuye o permanece constante? Si cambia, en qué factor? e) ¿Las respuestas a los incisos c) y d) parecen contradictorias? Explique cómo son consistentes.

47. Suponga que el vagón de la figura 6.12 es móvil con aceleración constante a hacia arriba de una colina que forma un ángulo ϕ con la horizontal. Si el péndulo forma un ángulo constante θ con la perpendicular al techo, ¿cuál es a?

48. El piloto de un avión ejecuta una maniobra de rizo con rapidez constante en un círculo vertical. La rapidez del avión es 300 mi/h; el radio del círculo es 1 200 pies. a) ¿Cuál es el peso aparente del piloto en el punto más bajo si su peso verdadero es 160 lb? b) ¿Cuál es su peso aparente en el punto más alto? c) **¿Qué pasaría si?** Describa cómo experimentaría el piloto la sensación de ausencia de peso si puede variar el radio y la rapidez. *Nota:* Su peso aparente es igual a la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre su cuerpo.

49. Ya que la Tierra gira en torno a su eje, un punto sobre el ecuador experimenta una aceleración centrípeta de 0.033 7 m/s^2, mientras que un punto en los polos no experimenta aceleración centrípeta. a) Muestre que, en el ecuador, la fuerza gravitacional sobre un objeto debe superar la fuerza normal que se requiere para sostener el objeto. Esto es, demuestre que el peso verdadero del objeto supera su peso aparente. b) ¿Cuál es el peso aparente en el ecuador y en los polos de una persona que tiene una masa de 75.0 kg? Suponga que la Tierra es una esfera uniforme y considere g = 9.800 m/s^2.

50. ● Un disco de aire de masa m_1 se une a una cuerda y se le permite girar en un círculo de radio R sobre una mesa sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa a través de un pequeño orificio en el centro de la mesa, y una carga de masa m_2 se une a la cuerda (figura P6.50). La carga suspendida permanece en equilibrio mientras que el disco en la tabla da vueltas. ¿Cuáles son a) la tensión en la cuerda, b) la fuerza radial que actúa sobre el disco y c) la rapidez del disco? d) Describa cualitativamente qué ocurrirá en el movimiento del disco si el valor de m_2 aumenta un poco al colocar una carga adicional sobre él. e) Describa cualitativamente qué ocurrirá en el movimiento del disco si el valor de m_2 disminuye al remover una parte de la carga suspendida.

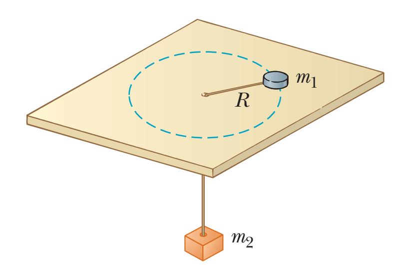


Figura P6.50

51. ● Mientras aprende a conducir, usted está en un automóvil de 1 200 kg que se mueve a 20.0 m/s a través de un gran estacionamiento vacío y a nivel. Súbitamente se da cuenta de que se dirige justo hacia una pared de ladrillos de un gran supermercado y está en peligro de chocar con ella. El pavimento puede ejercer una fuerza horizontal máxima de 7 000 N sobre el automóvil. a) Explique por qué debe esperar que la fuerza tenga un valor máximo bien definido. b) Suponga que pisa los frenos y no gira el volante. Encuentre la distancia mínima a la que debe estar de la pared para evitar un choque. c) Si no frena y en vez de ello mantiene rapidez constante y gira el volante, ¿cuál es la distancia mínima a la que debe estar de la pared para evitar un choque? d) ¿Cuál método, b) o c), es mejor para evitar una colisión? O, ¿debe usar tanto frenos

como volante, o ninguno? Explique. e) ¿La conclusión del inciso d) depende de los valores numéricos que se proporcionan en este problema, o es verdad en general? Explique.

52. Suponga que una rueda de la fortuna gira cuatro veces cada minuto. Lleva a cada carro alrededor de un círculo de 18.0 m de diámetro. a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un pasajero? ¿Qué fuerza ejerce el asiento sobre un pasajero de 40.0 kg? b) en el punto más bajo del viaje y c) en el punto más alto del viaje? d) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el asiento sobre un pasajero cuando está a la mitad entre las partes superior e inferior?

53. Un juego en un parque de diversiones consiste en una plataforma circular giratoria de 8.00 m de diámetro de donde asientos de 10.0 kg están suspendidos en el extremo de las cadenas sin masa de 2.50 m (figura P6.53). Cuando el sistema gira, las cadenas forman un ángulo $\theta = 28.0°$ con la vertical. a) ¿Cuál es la rapidez de cada asiento? b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de un niño de 40.0 kg que viaja en un asiento y encuentre la tensión en la cadena.

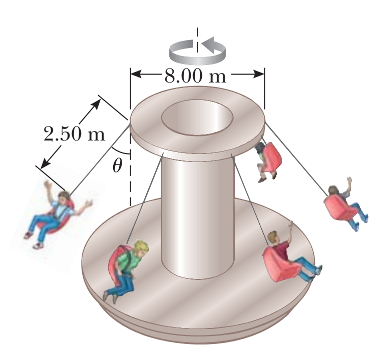


Figura P6.53

54. Una porción de masilla inicialmente se ubica en el punto A en el borde de una rueda de molino que gira en torno a un eje horizontal. La masilla se desplaza del punto A cuando el diámetro a través de A es horizontal. Luego se eleva verticalmente y regresa a A en el instante en que la rueda completa una revolución. a) Encuentre la rapidez de un punto sobre el borde de la rueda en términos de la aceleración debida a la gravedad y el radio R de la rueda. b) Si la cantidad de masilla es m, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que la mantiene en la rueda?

55. ● Un juego en un parque de diversiones consiste en un gran cilindro vertical que gira en torno a su eje lo suficientemente rápido para que cualquier persona en su interior se mantenga contra la pared cuando el suelo se aleja (figura P6.55). El coeficiente de fricción estática entre la persona y la pared es μ_s y el radio del cilindro es R. a) Demuestre que el periodo de revolución máximo necesario para evitar que la persona caiga es $T = (4\pi^2 R\mu_s/g)^{1/2}$. b) Obtenga un valor numérico para T, considere $R = 4.00$ m y $\mu_s = 0.400$. ¿Cuántas revoluciones por minuto realiza el cilindro? c) Si la relación de revolución del cilindro se hace un poco mayor, ¿qué ocurre con la magnitud de cada una de las fuerzas que actúan sobre la persona? ¿Qué ocurre en el movimiento de la persona? d) Si en vez de ello la relación de revolución del cilindro se hace un poco más pequeña, ¿qué ocurre con la magnitud de cada una de las fuerzas que actúan sobre la persona? ¿Qué ocurre en el movimiento de la persona?

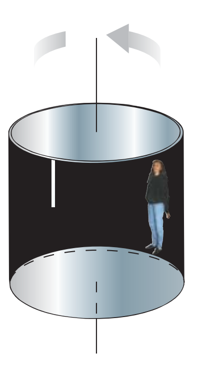


Figura P6.55

56. *Un ejemplo del efecto Coriolis.* Suponga que la resistencia del aire es despreciable para una bola de golf. Un golfista saca desde una posición precisamente a $\phi_i = 35.0°$ latitud norte. Golpea la bola hacia el sur, con un alcance de 285 m. La velocidad inicial de la bola está a 48.0° sobre la horizontal. a) ¿Cuánto tiempo la bola está en vuelo? El hoyo está hacia el sur de la posición del golfista, y haría un hoyo en uno si la Tierra no gira. La rotación de la Tierra hace que el tee se mueva en un círculo de radio $R_E \cos\phi_i = (6.37 \times 10^6 \text{ m}) \cos 35.0°$, como se muestra en la figura P6.56. El tee completa una revolución cada día. b) Encuentre la rapidez hacia el este del tee, en relación con las estrellas. El hoyo también se mueve al este, pero está 285 m más al sur y por tanto a una latitud ligeramente menor ϕ_f. Dado que el hoyo se mueve en un círculo ligeramente más grande, su rapidez debe ser mayor que la del tee. c) ¿Por cuánto la rapidez del hoyo supera la del tee? Durante el intervalo de tiempo en que la bola está en vuelo, se mueve arriba y abajo así como al sur con el movimiento de proyectil que estudió en el capítulo 4, pero también se mueve al este con la rapidez que encontró en el inciso b). Sin embargo, el hoyo se mueve al este a una rapidez mayor, y jala la bola con la rapidez relativa que encontró en el inciso c). d) ¿A qué distancia hacia el oeste del hoyo aterriza la bola?

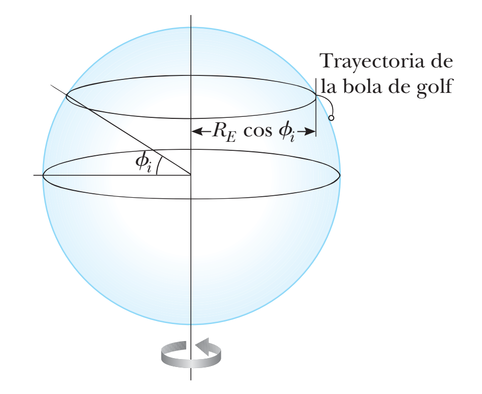


Figura P6.56

57. Un automóvil recorre una curva peraltada como se muestra en la figura 6.5. El radio de curvatura del camino es R, el ángulo de peralte es θ y el coeficiente de fricción estática es μ_s. a) Determine el intervalo de rapidez que puede tener el automóvil sin deslizarse arriba o abajo del peralte. b) Encuentre el valor mínimo para μ_s tal que la rapidez mínima sea cero. c) ¿Cuál es el intervalo de rapidez posible si $R = 100$ m, $\theta = 10.0°$ y $\mu_s = 0.100$ (condiciones de deslizamiento)?

58. ● Una sola cuenta puede deslizarse con fricción despreciable sobre un alambre rígido que se dobló en una espira circular de 15.0 cm de radio, como se muestra en la figura P6.58. El círculo siempre está en un plano vertical y gira de manera estable en torno a su diámetro vertical con a) un periodo de 0.450 s. La posición de la cuenta se describe mediante el ángulo θ que la línea radial, desde el centro de la espira a la cuenta, forma con la vertical. ¿A qué ángulo arriba del fondo del círculo puede permanecer la cuenta sin movimiento en relación con el círculo que gira? b) **¿Qué pasaría si?** Repita el problema y considere que el periodo de rotación del círculo es 0.850 s. c) Describa cómo la solución al inciso b) es fundamentalmente diferente de la solución al inciso a). Para cualquier periodo o tamaño de espira, ¿siempre hay un ángulo al que la cuenta puede permanecer quieta en relación con la espira? ¿Alguna vez hay más de dos ángulos? Arnold Arons sugirió la idea para este problema.

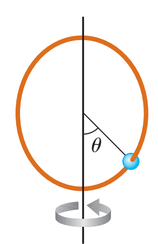


Figura P6.58

59. La expresión $F = arv + br^2v^2$ da la magnitud de la fuerza resistiva (en newtons) que se ejerce sobre una esfera de radio r (en metros) por una corriente de aire que se mueve con rapidez v (en metros por segundo), donde a y b son constantes con unidades del SI apropiadas. Sus valores numéricos son $a = 3.10 \times 10^{-4}$ y $b = 0.870$. Con esta expresión encuentre la rapidez terminal para gotas de agua que caen bajo su propio peso en aire y considere los siguientes valores para los radios de gotas: a) 10.0 μm, b) 100 μm, c) 1.00 mm. Para a) y c), puede obtener respuestas precisas sin resolver una ecuación cuadrática al considerar cuál de las dos contribuciones a la resistencia del aire es dominante e ignorar la contribución menor.

60. A los integrantes de un club de paracaidismo se les dieron los siguientes datos para usar en la planeación de sus saltos. En la tabla, d es la distancia que cae desde el reposo un paracaidista en una "posición extendida estable en caída libre" en función del tiempo de caída t. a) Convierta las distancias en pies a metros. b) Grafique d (en metros) en función de t. c) Determine el valor de la rapidez terminal v_T al encontrar la pendiente de la porción recta de la curva. Aplique un ajuste de mínimos cuadrados para determinar esta pendiente.

t (s)	d (ft)	t (s)	d (ft)	t (s)	d (ft)
0	0	7	652	14	1 831
1	16	8	808	15	2 005
2	62	9	971	16	2 179
3	138	10	1 138	17	2 353
4	242	11	1 309	18	2 527
5	366	12	1 483	19	2 701
6	504	13	1 657	20	2 875

61. Un aeroplano a escala de 0.750 kg de masa vuela con una rapidez de 35.0 m/s en un círculo horizontal en el extremo de un alambre de control de 60.0 m. Calcule la tensión en el alambre, si supone que forma un ángulo constante de 20.0° con la horizontal. Las fuerzas que se ejercen sobre el aeroplano son el jalón del alambre de control, la fuerza gravitacional y la sustentación aerodinámica que actúa a 20.0° hacia adentro desde la vertical, como se muestra en la figura P6.61.

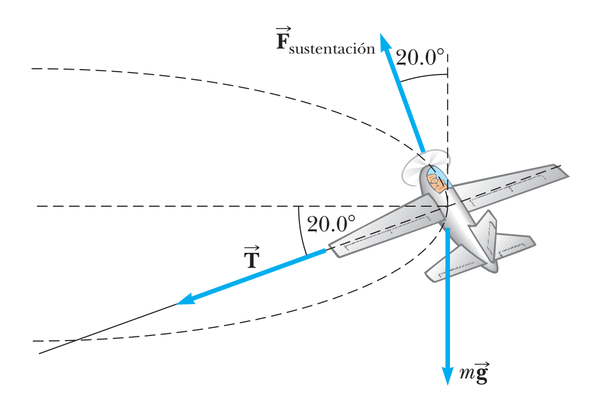


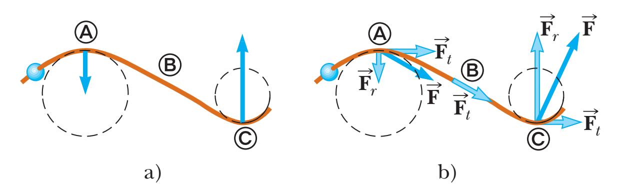
Figura P6.61

62. ● Galileo pensó acerca de si la aceleración debía definirse como la relación de cambio de la velocidad en el tiempo o como la relación de cambio en velocidad en la distancia. Él eligió la anterior, así que use el nombre "vroomosidad" para la relación de cambio de la velocidad en el espacio. Para el movimiento de una partícula en una línea recta con aceleración constante, la ecuación $v = v_i + at$ da su velocidad v como función del tiempo. De igual modo, para el movimiento lineal de una partícula con vroomosidad constante k, la ecuación $v = v_i + kx$ da la velocidad como función de la posición x si la rapidez de la partícula es v_i en $x = 0$. a) Encuentre la ley que describe la fuerza total que actúa sobre este objeto, de masa m. Describa un ejemplo de tal movimiento o explique por qué tal movimiento es irreal. Considere b) la posibilidad de k positiva y también c) la posibilidad de k negativa.

Respuestas a las preguntas rápidas

6.1. **i)**, a). La fuerza normal siempre es perpendicular a la superficie que aplica la fuerza. Ya que su automóvil mantiene su orientación en todos los puntos en el viaje, la fuerza normal siempre es hacia arriba. **ii)**, b) Su aceleración centrípeta es hacia abajo, hacia el centro del círculo, de modo que la fuerza neta sobre usted debe ser hacia abajo.

6.2. a). Ya que la rapidez es constante, la única dirección que puede tener la fuerza es de aceleración centrípeta. La fuerza es mayor en Ⓒ que en Ⓐ porque el radio en Ⓒ es más pequeño. No hay fuerza en Ⓑ porque el alambre está recto. b) Además de las fuerzas en la dirección centrípeta en a), ahora hay fuerzas tangenciales para proporcionar la aceleración tangencial. La fuerza tangencial es la misma en los tres puntos porque la aceleración tangencial es constante.



PR6.2

6.3. c). Las únicas fuerzas que actúan sobre el pasajero son la fuerza de contacto con la puerta y la fuerza de fricción del asiento. Ambas son fuerzas reales y ambas actúan hacia la izquierda en la figura 6.10. En un diagrama de fuerza nunca se dibujan las fuerzas de fricción.

6.4. a). El balón de basquetbol, que tiene un área de sección transversal más grande, tendrá una fuerza mayor, debido a la resistencia del aire, que la pelota de beisbol, lo que resultará en una aceleración hacia abajo más pequeña.



En una granja de viento, el aire en movimiento realiza trabajo sobre las aspas de los molinos, lo que hace girar las aspas y el rotor de un generador eléctrico. La energía se transfiere afuera del sistema del molino de viento mediante electricidad. (Billy Hustace/Getty Images)

7 Energía de un sistema

Las definiciones de cantidades como posición, velocidad, aceleración y fuerza junto a principios como la segunda ley de Newton han permitido encontrar muchas soluciones. Sin embargo algunos problemas, que podrían resolverse teóricamente con las leyes de Newton, son muy difíciles en la práctica, pero es posible simplificarlos con un planteamiento diferente. Aquí, y en los capítulos siguientes, se investigará este nuevo planteamiento que incluirá definiciones de cantidades que tal vez no le sean familiares. Otras cantidades pueden sonar familiares, pero adquieren significados más específicos en física que en la vida cotidiana. El análisis comienza al explorar la noción de *energía*.

El concepto de energía es uno de los temas más importantes en ciencia e ingeniería. En la vida cotidiana se piensa en la energía en términos de combustible para transporte y calentamiento, electricidad para luz y electrodomésticos, y alimentos para el consumo. No obstante, estas ideas no definen la energía; sólo dejan ver que los combustibles son necesarios para realizar un trabajo y que dichos combustibles proporcionan algo que se llama energía.

La energía está presente en el Universo en varias formas. *Todo* proceso físico que ocurra en el Universo involucra energía y transferencias o transformaciones de energía. Por desgracia, a pesar de su extrema importancia, la energía no es fácil de definir. Las variables en los capítulos previos fueron relativamente concretas; se tiene experiencia cotidiana con velocidades y fuerzas, por ejemplo. Aunque se tengan *experiencias* con la energía, como

cuando se acaba la gasolina o con la pérdida del servicio eléctrico después de una tormenta violenta, la *noción* de energía es más abstracta.

El concepto de energía se aplica a sistemas mecánicos sin recurrir a las leyes de Newton. Además, en capítulos posteriores del libro la aproximación de energía permite comprender fenómenos térmicos y eléctricos, para los que las leyes de Newton no son útiles.

Las técnicas para resolución de problemas que se presentaron en capítulos anteriores respecto al movimiento de una partícula o un objeto que podría representarse como una partícula. Dichas técnicas aplican el *modelo de partícula*. El nuevo planteamiento comienza al dirigir la atención sobre un *sistema* y desarrollar técnicas para aplicar en un *modelo de sistema*.

7.1 Sistemas y entornos

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.1
Identifique el sistema

La primera etapa más importante a considerar en la solución de un problema aplicando el planteamiento de energía es identificar el sistema de interés adecuado.

En el modelo de sistema la atención se dirige a una porción pequeña del Universo, el **sistema**, y se ignoran detalles del resto del Universo afuera del sistema. Una habilidad vital para aplicar el modelo de sistema a problemas es la *identificación del sistema*. Un sistema válido

- puede ser un objeto simple o partícula
- puede ser una colección de objetos o partículas
- puede ser una región de espacio (como el interior del cilindro de combustión de un motor de automóvil)
- puede variar en tamaño y forma (como una bola de goma, que se deforma al golpear una pared)

Identificar la necesidad de un enfoque de sistema para resolver un problema (en oposición al enfoque de partícula) es parte del paso Categorizar en la "Estrategia general para resolver problemas" que se destacó en el capítulo 2. Identificar el sistema particular es una segunda parte de esta etapa.

No importa cuál sea el sistema particular en un problema dado, se identifica una **frontera de sistema**, una superficie imaginaria (que no necesariamente coincide con una superficie física) que divide al Universo del sistema y el **entorno** que lo rodea.

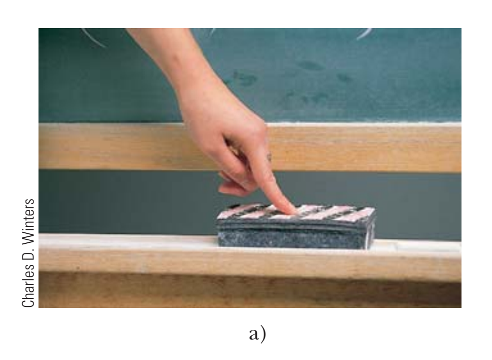
Como ejemplo, examine una fuerza aplicada a un objeto en el espacio vacío. Se puede definir el objeto como el sistema y su superficie como la frontera del sistema. La fuerza aplicada a él es una influencia sobre el sistema desde el entorno que actúa a través de la frontera del sistema. Se verá cómo analizar esta situación desde un enfoque de sistema en una sección posterior de este capítulo.

Otro ejemplo se vio en el ejemplo 5.10, donde el sistema se define como la combinación de la bola, el bloque y la cuerda. La influencia del entorno incluye las fuerzas gravitacionales sobre la bola y el bloque, las fuerzas normal y de fricción sobre el bloque, y la fuerza ejercida por la polea sobre la cuerda. Las fuerzas que ejerce la cuerda sobre la bola y el bloque son internas al sistema y debido a eso no se incluyen como una influencia del entorno.

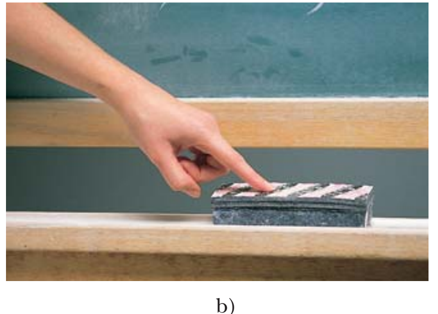
Existen algunos mecanismos mediante los cuales un sistema recibe influencia de su entorno. El primero que se investigará es el *trabajo*.

7.2 Trabajo invertido por una fuerza constante

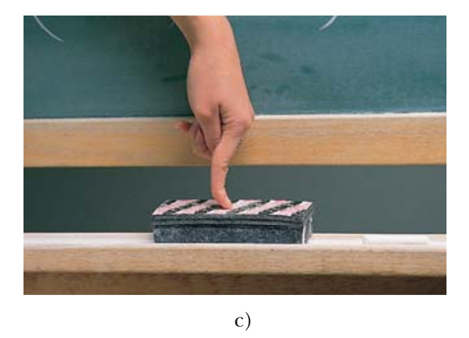
Casi todos los términos utilizados hasta el momento (velocidad, aceleración, fuerza, etcétera) tienen un significado similar en física como en la vida diaria. Sin embargo, ahora se encuentra un término cuyo significado en física es particularmente diferente de su significado cotidiano: *trabajo*.



a)



b)



c)

Figura 7.1 Un borrador se empuja a lo largo de un riel del pizarrón mediante una fuerza que actúa a diferentes ángulos respecto de la dirección horizontal.

Para comprender qué significa trabajo en física, considere la situación que se ilustra en la figura 7.1. Se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ a un borrador, qué se identifica como el sistema, y el borrador se desliza a lo largo del riel. Si quiere saber qué tan efectiva es la fuerza para mover el borrador, debe considerar no sólo la magnitud de la fuerza sino también su dirección. Si supone que la magnitud de la fuerza aplicada es la misma en las tres fotografías, el empujón que se aplica en la figura 7.1b hace más para mover el borrador que el empujón de la figura 7.1a. Por otra parte, la figura 7.1c muestra una situación en que la fuerza aplicada no mueve el borrador en absoluto, sin importar cuán fuerte se empuje (a menos, desde luego, ¡que se aplique una fuerza tan grande que rompa el riel!). Estos resultados sugieren que, cuando se analizan fuerzas para determinar el trabajo que realizan, se debe considerar la naturaleza vectorial de las fuerzas. También se debe conocer el desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ del borrador mientras se mueve a lo largo del riel si se quiere determinar el trabajo invertido sobre él por la fuerza. Mover el borrador 3 m a lo largo del riel requiere más trabajo que moverlo 2 cm.

Examine la situación de la figura 7.2, donde el objeto (el sistema) experimenta un desplazamiento a lo largo de una línea recta mientras sobre él actúa una fuerza constante de magnitud F que forma un ángulo θ con la dirección del desplazamiento.

El **trabajo** W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W \equiv F\,\Delta r\cos\theta \qquad \textbf{(7.1)}$$

◀ Trabajo invertido por una fuerza constante

Note en la ecuación 7.1 que el trabajo es un escalar, aun cuando se defina en términos de dos vectores, una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. En la sección 7.3 se explora cómo combinar dos vectores para generar una cantidad escalar.

Como ejemplo de la distinción entre la definición de trabajo y la comprensión cotidiana de la palabra, considere sostener una pesada silla con los brazos extendidos durante 3 minutos. Al final de este intervalo de tiempo, sus cansados brazos pueden hacerle creer que realizó una cantidad considerable de trabajo sobre la silla. Sin embargo, de acuerdo con la definición, sobre ella no ha realizado ningún trabajo. Usted ejerce una fuerza para sostener la silla, pero no la mueve. Una fuerza no realiza trabajo sobre un objeto si la fuerza no se mueve a través de un desplazamiento. Si $\Delta r = 0$, la ecuación 7.1 da $W = 0$, que es la situación que se muestra en la figura 7.1c.

Advierta también de la ecuación 7.1 que el trabajo invertido por una fuerza sobre un objeto en movimiento es cero cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación. Esto es, si $\theta = 90°$, por lo tanto $W = 0$ porque $\cos 90° = 0$. Por ejemplo, en la figura 7.3, el trabajo invertido por la fuerza normal sobre el objeto y el trabajo invertido por la fuerza gravitacional sobre el objeto son ambos cero porque ambas

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.2
¿Qué se desplaza?

El desplazamiento en la ecuación 7.1 es el *del punto de aplicación de la fuerza*. Si la fuerza se aplica a una partícula o un sistema no deformable, este desplazamiento es el mismo que el desplazamiento de la partícula o sistema. Sin embargo, para sistemas deformables, estos dos desplazamientos con frecuencia no son los mismos.

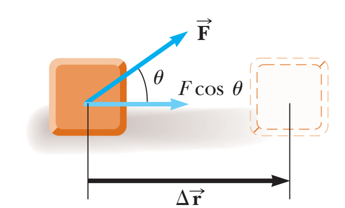


Figura 7.2 Si un objeto se somete a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ bajo la acción de una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$, el trabajo invertido por la fuerza es $F\,\Delta r\cos\theta$.

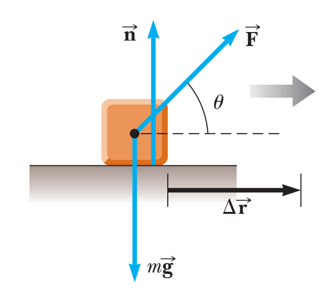


Figura 7.3 Un objeto se desplaza sobre una superficie horizontal sin fricción. La fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ no trabajan sobre el objeto. En la situación que se muestra aquí, $\vec{\mathbf{F}}$ es la única fuerza que realiza trabajo sobre el objeto.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.3

Trabajo realizado por… sobre…

No sólo debe identificar el sistema, también debe saber qué agente en el entorno realiza trabajo sobre el sistema. Cuando se analice el trabajo, siempre use la frase "el trabajo realizado por… sobre…". Después de "por", inserte la parte del entorno que interactúa directamente con el sistema. Después de "sobre", inserte el sistema. Por ejemplo, "el trabajo realizado por el martillo sobre el clavo" identifica al clavo como el sistema y la fuerza del martillo representa la interacción con el entorno.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.4

Causa del desplazamiento

Es posible calcular el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto, pero dicha fuerza *no* necesariamente es la causa del desplazamiento del objeto. Por ejemplo, si levanta un objeto, la fuerza gravitacional realiza trabajo sobre el objeto, ¡aunque la gravedad no es la causa de que el objeto se mueva hacia arriba!

fuerzas son perpendiculares al desplazamiento y tienen componentes cero a lo largo de un eje en la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

El signo del trabajo también depende de la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$ en relación con $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. El trabajo invertido por la fuerza aplicada sobre un sistema es positivo cuando la proyección de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ está en la misma dirección que el desplazamiento. Por ejemplo, cuando un objeto se levanta, el trabajo invertido por la fuerza aplicada sobre el objeto es positivo, porque la dirección de dicha fuerza es hacia arriba, en la misma dirección que el desplazamiento de su punto de aplicación. Cuando la proyección de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ está en la dirección opuesta al desplazamiento, W es negativo. Por ejemplo, conforme se levanta un objeto, el trabajo invertido por la fuerza gravitacional sobre el objeto es negativo. El factor cos θ en la definición de W (ecuación 7.1) automáticamente toma en cuenta el signo.

Si una fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ está en la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, por lo tanto $\theta = 0$ y $\cos 0 = 1$. En este caso, la ecuación 7.1 produce

$$W = F\,\Delta r$$

Las unidades de trabajo son las de fuerza multiplicada por longitud. En consecuencia, la unidad del SI de trabajo es el **newton·metro** ($\text{N}\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$). Esta combinación de unidades se usa con tanta frecuencia que se le ha dado un nombre propio, **joule** (J).

Una consideración importante para un enfoque de sistema a los problemas es que **el trabajo es una transferencia de energía**. Si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, la energía se transfiere *al* sistema; si W es negativo, la energía se transfiere *desde* el sistema. Por lo tanto, si un sistema interactúa con su entorno, esta interacción se describe como una transferencia de energía a través de las fronteras del sistema. El resultado es un cambio en la energía almacenada en el sistema. En la sección 7.5 se aprenderá acerca del primer tipo de almacenamiento de energía, después de investigar más aspectos del trabajo.

Pregunta rápida 7.1 La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra mantiene a ésta en una órbita alrededor de aquél. Suponga que la órbita es perfectamente circular. El trabajo realizado por esta fuerza gravitacional durante un intervalo de tiempo breve, en el que la Tierra se mueve a través de un desplazamiento en su trayectoria orbital, es a) cero, b) positivo, c) negativo, d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 7.2 La figura 7.4 muestra cuatro situaciones en las que una fuerza se aplica a un objeto. En los cuatro casos, la fuerza tiene la misma magnitud y el desplazamiento del objeto es hacia la derecha y de la misma magnitud. Clasifique las situaciones en orden del trabajo invertido por la fuerza sobre el objeto, del más positivo al más negativo.

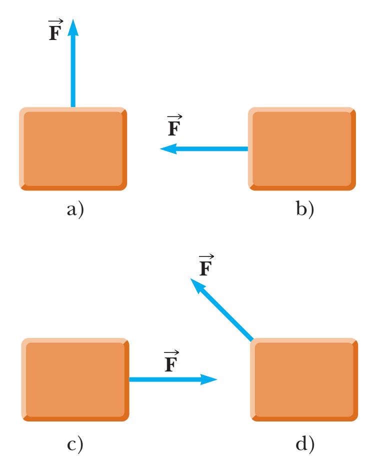


Figura 7.4 (Pregunta rápida 7.2) Se jala un bloque mediante una fuerza en cuatro direcciones diferentes. En cada caso, el desplazamiento del bloque es hacia la derecha y de la misma magnitud.

EJEMPLO 7.1 **Sr. Limpio**

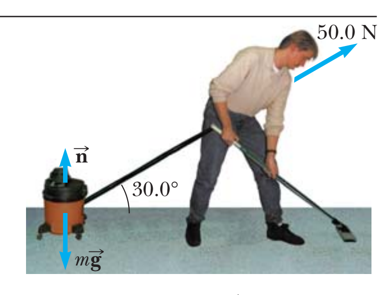


Figura 7.5 (Ejemplo 7.1) Una aspiradora se jala con un ángulo de 30.0° de la horizontal.

Un hombre que limpia un piso jala una aspiradora con una fuerza de magnitud $F = 50.0$ N en un ángulo de 30.0° con la horizontal (figura 7.5). Calcule el trabajo consumido por la fuerza sobre la aspiradora a medida que ésta se desplaza 3.00 m hacia la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.5 ayuda a formar ideas de la situación. Piense en una experiencia de su vida en la que jaló un objeto a través del piso con una soga o cuerda.

Categorizar Se aplica una fuerza sobre un objeto, un desplazamiento del objeto y el ángulo entre los dos vectores, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. La aspiradora se identifica como el sistema.

Aplique la definición de trabajo (ecuación 7.1):

$$W = F\,\Delta r\cos\theta = (50.0\text{ N})(3.00\text{ m})(\cos 30.0°)$$
$$= 130\text{ J}$$

Observe en esta situación que la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ no realizan trabajo sobre la aspiradora porque estas fuerzas son perpendiculares a su desplazamiento.

7.3 Producto escalar de dos vectores

Debido a la manera en que los vectores fuerza y desplazamiento se combinan en la ecuación 7.1, es útil aplicar una herramienta matemática conveniente denominada **producto escalar** de dos vectores. Este producto escalar de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se escribe como $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ (Debido al símbolo punto, con frecuencia al producto escalar se le llama **producto punto**.)

El producto escalar de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos:

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta \qquad (7.2)$$

◀ Producto escalar de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

Como es el caso con cualquier multiplicación, $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ no necesitan tener las mismas unidades.

Al comparar esta definición con la ecuación 7.1, esta ecuación se expresa como un producto escalar:

$$W = F\,\Delta r\cos\theta = \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} \qquad (7.3)$$

En otras palabras, $\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es una notación abreviada de $F\,\Delta r\cos\theta$.

Antes de continuar con el análisis del trabajo, se investigan algunas propiedades del producto punto. La figura 7.6 muestra dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y el ángulo θ entre ellos, que se aplica en la definición del producto punto. En la figura 7.6, $B\cos\theta$ es la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$. Debido a eso, la ecuación 7.2 significa que $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ es el producto de la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$.[1]

Del lado derecho de la ecuación 7.2, también se ve que el producto escalar es **conmutativo**.[2] Esto es,

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$$

Por último, el producto escalar obedece la **ley distributiva de la multiplicación**, de este modo

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.5
El trabajo es un escalar

Aunque la ecuación 7.3 define el trabajo en términos de dos vectores, *el trabajo es un escalar*; no hay dirección asociada con él. *Todas* las clases de energía y de transferencia de energía son escalares. Este hecho es una gran ventaja de la aproximación de energía, ¡porque no se necesitan cálculos vectoriales!

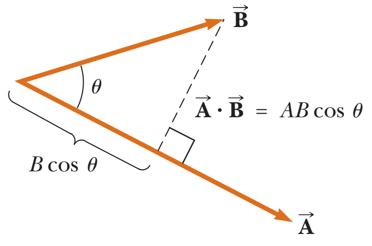


Figura 7.6 El producto escalar $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ multiplicada por $B\cos\theta$, que es la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$.

[1] Este enunciado es equivalente a afirmar que $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ es igual al producto de la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ sobre $\vec{\mathbf{B}}$.

[2] En el capítulo 11 se verá otra forma de combinar vectores que resulta ser útil en física y no es conmutativa.

El producto punto es simple de evaluar a partir de la ecuación 7.2 cuando $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular o paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 90°$), en tal caso $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$. (La igualdad $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ también se cumple en el caso más trivial en el que $\vec{\mathbf{A}}$ o $\vec{\mathbf{B}}$ es cero.) Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y los dos apuntan en la misma dirección ($\theta = 0$), por lo tanto $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB$. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$ pero los dos apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180°$), en consecuencia $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -AB$. El producto escalar es negativo cuando $90° < \theta \leq 180°$.

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, que se definieron en el capítulo 3, se encuentran en las direcciones x, y y z positivas, respectivamente, de un sistema coordenado de mano derecha. Por lo tanto, se sigue de la definición de $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ que los productos escalares de estos vectores unitarios son

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad \textbf{(7.4)}$$

Productos punto de vectores unitarios ▶

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \textbf{(7.5)}$$

Las ecuaciones 3.18 y 3.19 establecen que dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se expresan en forma de vector unitario como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

Con la información que se proporciona en las ecuaciones 7.4 y 7.5 se muestra que el producto escalar de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se reduce a

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \textbf{(7.6)}$$

(Los detalles de la deducción se le dejan en el problema 5 al final del capítulo.) En el caso especial en el que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$, se ve que

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

Pregunta rápida 7.3 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero respecto a la correspondencia entre el producto punto de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores? a) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es mayor que AB. b) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es menor que AB. c) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores. d) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ podría ser igual a AB.

EJEMPLO 7.2 El producto escalar

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$.

A) Determine el producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar No hay sistema físico a imaginar aquí. En vez de ello, es un ejercicio matemático que involucra dos vectores.

Categorizar Puesto que se tiene una definición para el producto escalar, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las expresiones vectoriales específicas para $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

$$= -2\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) = -2 + 6 = \boxed{4}$$

Se obtiene el mismo resultado cuando se aplica directamente la ecuación 7.6, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

B) Encuentre el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Evalúe las magnitudes de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ con el teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Aplique la ecuación 7.2 y el resultado del inciso (A) para encontrar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{65}} = 60.3°$$

EJEMPLO 7.3 **Trabajo consumido por una fuerza constante**

Una partícula móvil en el plano xy se somete a un desplazamiento conocido por $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ m cuando una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre la partícula.

A) Calcule las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento de la partícula.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque este ejemplo es un poco más físico que el anterior, en cuanto que identifica una fuerza y un desplazamiento, es similar en términos de su estructura matemática.

Categorizar Ya que se proporcionan dos vectores y se pide encontrar sus magnitudes, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique el teorema de Pitágoras para encontrar las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = 5.4\text{ N}$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = 3.6\text{ m}$$

B) Calcule el trabajo consumido por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula.

SOLUCIÓN

Sustituya las expresiones para $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ en la ecuación 7.3 y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5:

$$W = \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} = [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\text{ N}]\cdot[(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}]$$

$$= (5.0\hat{\mathbf{i}}\cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}}\cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}\cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}\cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{ N}\cdot\text{m}$$

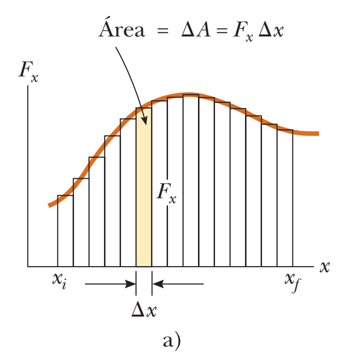
$$= [10 + 0 + 0 + 6]\text{ N}\cdot\text{m} = 16\text{ J}$$

7.4 Trabajo consumido por una fuerza variable

Considere una partícula que se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía con la posición. La partícula se desplaza en la dirección de x creciente, desde $x = x_i$ a $x = x_f$. En tal situación, no se aplica $W = F\,\Delta r\cos\theta$ para calcular el trabajo consumido por la fuerza, porque esta correspondencia sólo se aplica cuando $\vec{\mathbf{F}}$ es constante en magnitud y dirección. Sin embargo, si piensa que la partícula se somete a un desplazamiento muy pequeño Δx, como se muestra en la figura 7.7a, la componente x de la fuerza, F_x, es aproximadamente constante en este intervalo pequeño; para este desplazamiento pequeño, se puede aproximar el trabajo invertido en la partícula mediante la fuerza como

$$W \approx F_x\,\Delta x$$

que es el área del rectángulo sombreado en la figura 7.7a. Si toma en cuenta F_x en función de la curva x dividida en un gran número de tales intervalos, el trabajo total consumido por



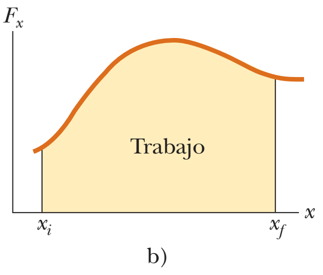


Figura 7.7 a) El trabajo consumido en una partícula por la componente de fuerza F_x para el desplazamiento pequeño Δx es $F_x \Delta x$, que es igual al área del rectángulo sombreado. El trabajo total consumido por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos. b) El trabajo invertido por la componente F_x de la fuerza variable cuando la partícula se traslada de x_i a x_f es *exactamente* igual al área bajo esta curva.

el desplazamiento desde x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran número de tales términos:

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Si se permite que el tamaño de los desplazamientos pequeños se aproxime a cero, el número de términos en la suma aumenta sin límite, pero el valor de la suma se aproxima a un valor definido que es igual al área limitada por la curva F_x y el eje x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \, \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

En consecuencia, el trabajo invertido por F_x en la partícula conforme se traslada de x_i a x_f se puede expresar como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \quad \textbf{(7.7)}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación 7.1 cuando la componente $F_x = F \cos \theta$ es constante.

Si más de una fuerza actúa sobre un sistema *y el sistema se puede modelar como una partícula*, el trabajo total consumido en el sistema es justo el trabajo invertido por la fuerza neta. Si la fuerza neta en la dirección x se expresa como $\sum F_x$, el trabajo total, o *trabajo neto*, consumido cuando la partícula se traslada de x_i a x_f es

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x \right) dx$$

Para el caso general de una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ cuya magnitud y dirección puede variar, se aplica el producto escalar,

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}} \right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad \textbf{(7.8)}$$

donde la integral se calcula sobre la trayectoria que toma la partícula a través del espacio.

Si no es posible modelar el sistema como una partícula (por ejemplo, si el sistema consiste de múltiples partículas que se mueven unas respecto de otras), no se puede usar la ecuación 7.8, porque fuerzas diferentes sobre el sistema pueden moverse a través de diferentes desplazamientos. En este caso, se debe evaluar el trabajo invertido por cada fuerza por separado y después sumar algebraicamente los trabajos para encontrar el trabajo neto invertido en el sistema.

EJEMPLO 7.4 Cálculo del trabajo total a partir de una gráfica

Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con x como se muestra en la figura 7.8. Calcule el trabajo consumido por la fuerza en la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

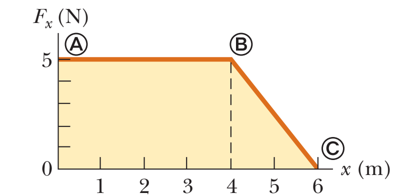


Figura 7.8 (Ejemplo 7.4) La fuerza que actúa sobre una partícula es constante para los primeros 4.0 m de movimiento y después disminuye linealmente con x de $x_{Ⓑ} = 4.0$ m a $x_{Ⓒ} = 6.0$ m. El trabajo neto invertido por esta fuerza es el área bajo la curva.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere una partícula sometida a la fuerza de la figura 7.8. Observe que la fuerza permanece constante a medida que la partícula se traslada a través de los primeros 4.0 m y después disminuye linealmente a cero en 6.0 m.

Categorizar Ya que la fuerza varía durante todo el movimiento de la partícula, se deben aplicar las técnicas para el trabajo invertido por fuerzas variables. En este caso, se aplica la representación gráfica de la figura 7.8 para evaluar el trabajo consumido.

Analizar El trabajo consumido por la fuerza es igual al área bajo la curva de $x_{Ⓐ} = 0$ a $x_{Ⓒ} = 6.0$ m. Esta área es igual al área de la sección rectangular de Ⓐ hasta Ⓑ más el área de la sección triangular de Ⓑ hasta Ⓒ.

Evalúe el área del rectángulo: $W_{ⒶⒷ} = (5.0\text{ N})(4.0\text{ m}) = 20\text{ J}$

Hallar el valor numérico del área del triángulo: $W_{ⒷⒸ} = \frac{1}{2}(5.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 5.0\text{ J}$

Encuentre el trabajo total consumido por la fuerza en la partícula: $W_{ⒶⒸ} = W_{ⒶⒷ} + W_{ⒷⒸ} = 20\text{ J} + 5.0\text{ J} = \boxed{25\text{ J}}$

Finalizar Ya que la gráfica de la fuerza consiste de líneas rectas, se pueden usar reglas para la búsqueda de las áreas de formas geométricas simples para evaluar el trabajo total invertido en este ejemplo. En un caso en el que la fuerza no varíe linealmente, tales reglas no se pueden aplicar y la función fuerza se debe integrar como en las ecuaciones 7.7 o 7.8.

Trabajo consumido en un resorte

En la figura 7.9 se muestra un modelo de sistema físico común para el que la fuerza varía con la posición. Un bloque sobre una superficie horizontal sin fricción se conecta a un resorte. Para muchos resortes, si el resorte está estirado o comprimido una distancia pequeña desde su configuración sin estirar (en equilibrio), ejerce en el bloque una fuerza que se puede representar matemáticamente como

$$F_s = -kx \qquad (7.9)$$

◀ Fuerza de resorte

donde x es la posición del bloque en relación con su posición de equilibrio ($x = 0$) y k es una constante positiva llamada **constante de fuerza** o **constante de resorte** del resorte.

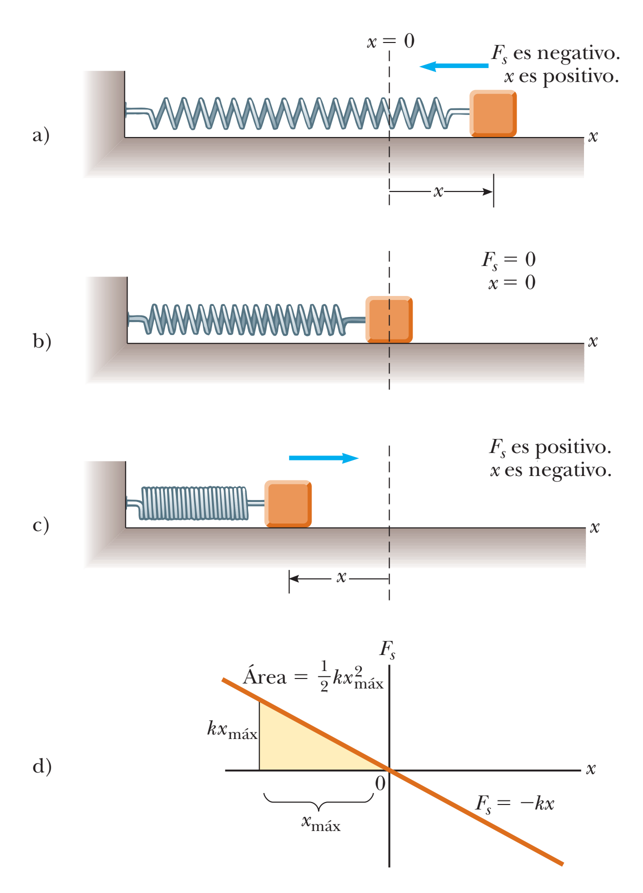


Figura 7.9 La fuerza que ejerce un resorte sobre un bloque varía con la posición x del bloque en relación con la posición de equilibrio $x = 0$. a) Cuando x es positivo (resorte estirado), la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda. b) Cuando x es cero (longitud natural del resorte), la fuerza del resorte es cero. c) Cuando x es negativo (resorte comprimido), la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha. d) Gráfica de F_s en función de x para el sistema bloque–resorte. El trabajo invertido por la fuerza del resorte en el bloque cuando se traslada desde $-x_{máx}$ a 0 es el área del triángulo sombreado, $\frac{1}{2}kx^2_{máx}$.

En otras palabras, la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte es proporcional a la cantidad de estiramiento o compresión x. Esta ley de fuerza para resortes se conoce como **ley de Hooke**. El valor de k es una medida de la *rigidez* del resorte. Los resortes rígidos tienen grandes valores k, y los resortes suaves tienen pequeños valores k. Como se puede ver de la ecuación 7.9, las unidades de k son N/m.

La forma vectorial de la ecuación 7.9 es

$$\vec{\mathbf{F}}_s = F_s\hat{\mathbf{i}} = -kx\hat{\mathbf{i}} \tag{7.10}$$

donde el eje x se eligió en la dirección de extensión o compresión del resorte.

El signo negativo en las ecuaciones 7.9 y 7.10 significa que la fuerza que ejerce el resorte siempre tiene una dirección *opuesta* al desplazamiento de equilibrio. Cuando $x > 0$, como en la figura 7.9a, de modo que el bloque está a la derecha de la posición de equilibrio, la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda, en la dirección x negativa. Cuando $x < 0$, como en la figura 7.9c, el bloque está a la izquierda del equilibrio y la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha, en la dirección x positiva. Cuando $x = 0$, como en la figura 7.9b, el resorte no está estirado y $F_s = 0$. Puesto que la fuerza del resorte siempre actúa hacia la posición de equilibrio $(x = 0)$, a veces se le llama *fuerza de restitución*.

Si el resorte se comprime hasta que el bloque está en el punto $-x_{\text{máx}}$ y después se libera, el bloque se traslada de $-x_{\text{máx}}$ a través de cero hasta $+x_{\text{máx}}$. Después invierte la dirección, regresa a $-x_{\text{máx}}$ y continúa oscilando de ida y vuelta.

Suponga que el bloque se empuja hacia la izquierda a una posición $-x_{\text{máx}}$ y después se libera. Identifique el bloque como el sistema y calcule el trabajo W_s invertido por la fuerza del resorte en el bloque conforme éste se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$. Al aplicar la ecuación 7.8 y suponer que el bloque se puede modelar como una partícula, se obtiene

$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 \tag{7.11}$$

donde se aplicó la integral $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ con $n = 1$. El trabajo consumido por la fuerza del resorte es positivo porque la fuerza está en la misma dirección que su desplazamiento (ambos hacia la derecha). Puesto que el bloque llega en $x = 0$ con cierta rapidez, continuará móvil hasta que alcance una posición $+x_{\text{máx}}$. El trabajo invertido por la fuerza del resorte sobre el bloque conforme se traslada de $x_i = 0$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es $W_s = -\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$ porque para esta parte del movimiento la fuerza del resorte es hacia la izquierda y su desplazamiento es hacia la derecha. En consecuencia, el trabajo *neto* invertido por la fuerza del resorte en el bloque conforme se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es *cero*.

La figura 7.9d es una gráfica de F_s en función de x. El trabajo calculado en la ecuación 7.11 es el área del triángulo sombreada, que corresponde al desplazamiento desde $-x_{\text{máx}}$ hasta 0. Ya que el triángulo tiene base $x_{\text{máx}}$ y altura $kx_{\text{máx}}$, su área es $\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$, el trabajo invertido por el resorte que se proporciona por la ecuación 7.11.

Si el bloque se somete a un desplazamiento arbitrario desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$, el trabajo invertido por la fuerza del resorte en el bloque es

Trabajo consumido por un resorte ▶

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_i^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_f^{\,2} \tag{7.12}$$

De la ecuación 7.12 se ve que el trabajo invertido por la fuerza del resorte es cero para cualquier movimiento que termine donde comenzó $(x_i = x_f)$. En el capítulo 8 se usará este resultado importante cuando se describa con mayor detalle el movimiento de este sistema.

Las ecuaciones 7.11 y 7.12 describen el trabajo empleado por el resorte sobre el bloque. Ahora considere el trabajo invertido en el bloque por un *agente externo* conforme el agente aplica una fuerza sobre el bloque y el bloque se mueve *muy lentamente* de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$, como en la figura 7.10. Se puede calcular este trabajo al notar que, en cualquier valor de la posición, la *fuerza aplicada* $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte $\vec{\mathbf{F}}_s$, de modo que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}} = F_{\text{ap}}\hat{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{F}}_s = -(-kx\hat{\mathbf{i}}) = kx\hat{\mathbf{i}}$. Debido a eso, el trabajo realizado por esta fuerza aplicada (el agente externo) en el sistema bloque–resorte es

$$W_{ap} = \int \vec{\mathbf{F}}_{ap} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{máx}}^{0} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_{máx}^2$$

Este trabajo es igual al negativo del trabajo invertido por la fuerza del resorte para este desplazamiento (ecuación 7.11). El trabajo es negativo porque el agente externo debe empujar hacia adentro sobre el resorte para evitar que se expanda y esta dirección es opuesta a la dirección del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza conforme el bloque se traslada desde $-x_{máx}$ a 0.

Para un desplazamiento arbitrario del bloque, el trabajo consumido en el sistema por el agente externo es

$$W_{ap} = \int_{x_i}^{x_f} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_i^{\,2} \qquad \textbf{(7.13)}$$

Advierta que esta ecuación es el negativo de la ecuación 7.12.

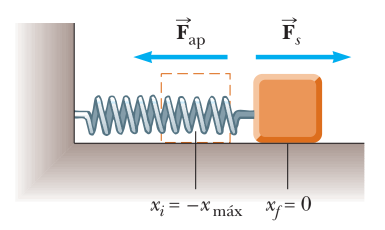


Figura 7.10 Un bloque se traslada desde $x_i = -x_{máx}$ a $x_f = 0$ sobre una superficie sin fricción conforme se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{ap}$ al bloque. Si el proceso se realiza muy lentamente, la fuerza aplicada es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte en todo momento.

Pregunta rápida 7.4 Un dardo se carga en una pistola de juguete, la cual se activa por un resorte al empujarlo hacia adentro una distancia *x*. Para la carga siguiente, el resorte se comprime una distancia 2*x*. ¿Cuánto trabajo se requiere para cargar el segundo dardo en comparación con el que se requiere para cargar el primero? a) cuatro veces más, b) dos veces más, c) el mismo, d) la mitad, e) una cuarta parte.

EJEMPLO 7.5 Medición de *k* para un resorte

Una técnica común aplicada para medir la constante de fuerza de un resorte se demuestra por la configuración de la figura 7.11. El resorte cuelga verticalmente (figura 7.11a) y un objeto de masa *m* se une a su extremo inferior. Bajo la acción de la "carga" *mg*, el resorte se estira una distancia *d* desde su posición de equilibrio (figura 7.11b).

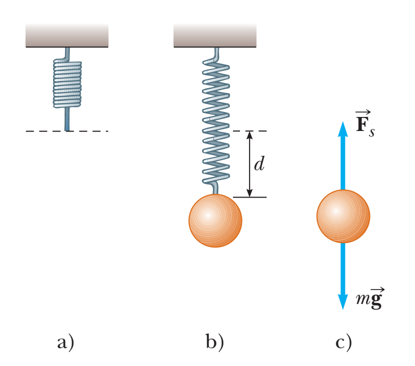


Figura 7.11 (Ejemplo 7.5) Determinación de la constante de fuerza *k* de un resorte. La elongación *d* la produce un objeto unido, que tiene un peso *mg*.

A) Si un resorte se estira 2.0 cm por un objeto suspendido que tiene una masa de 0.55 kg, ¿cuál es la constante de fuerza del resorte?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 7.11b, que muestra lo que le ocurre al resorte cuando el objeto se une a él. Simule esta situación al colgar un objeto sobre una banda elástica.

Categorizar El objeto en la figura 7.11b no acelera, de modo que se le modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Puesto que el objeto está en equilibrio, la fuerza neta sobre él es cero y la fuerza hacia arriba del resorte equilibra la fuerza gravitacional hacia abajo $m\vec{\mathbf{g}}$ (figura 7.11c).

Al aplicar la ley de Hooke produce $|\vec{\mathbf{F}}_s| = kd = mg$ y al resolver para *k*:

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}{2.0\times 10^{-2}\text{ m}} = 2.7\times 10^2\text{ N/m}$$

B) ¿Cuánto trabajo invierte el resorte sobre el objeto conforme se estira esta distancia?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 7.12 para encontrar el trabajo invertido por el resorte sobre el objeto:

$$W_s = 0 - \tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(2.7\times 10^2\text{ N/m})(2.0\times 10^{-2}\text{ m})^2$$
$$= -5.4\times 10^{-2}\text{ J}$$

Finalizar A medida que el objeto se mueve a través de los 2.0 cm de distancia, la fuerza gravitacional también realiza trabajo sobre él. Este trabajo es positivo porque la fuerza gravitacional es hacia abajo y así es el desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza. Respecto a la ecuación 7.12 y la discusión posterior, ¿esperaría que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sea $+5.4 \times 10^{-2}$ J? Descúbralo.

Evalúe el trabajo invertido por la fuerza gravitacional en el objeto:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg)(d)\cos 0 = mgd$$
$$= (0.55 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.1 \times 10^{-1} \text{ J}$$

Si usted esperaba que el trabajo invertido por la gravedad simplemente fuera el invertido por el resorte con un signo positivo, ¡es posible que le sorprenda este resultado! Para comprender por qué éste no es el caso, es necesario explorar más, como se hace en la siguiente sección.

7.5 Energía cinética y el teorema trabajo–energía cinética

Ya se investigó el trabajo y se le identificó como un mecanismo de transferencia de energía en un sistema. Un resultado posible de hacer trabajo sobre un sistema es que el sistema cambia su rapidez. En esta sección se investiga esta situación y se introduce el primer tipo de energía que un sistema puede tener, llamada *energía cinética*.

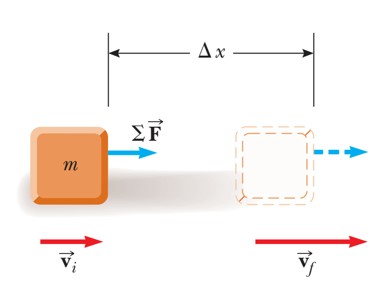


Figura 7.12 Un objeto que se somete a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}}$ y un cambio en velocidad bajo la acción de una fuerza neta constante $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$.

Considere un sistema que consiste de un solo objeto. La figura 7.12 muestra un bloque de masa m que se mueve a través de un desplazamiento dirigido hacia la derecha bajo la acción de una fuerza neta $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$, también dirigida hacia la derecha. Se sabe de la segunda ley de Newton que el bloque se mueve con una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$. Si el bloque (y por tanto la fuerza) se mueven a través de un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}} = (x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}}$, el trabajo neto realizado sobre el bloque por la fuerza neta $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ es

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\,dx \tag{7.14}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, se sustituye para la magnitud de la fuerza neta $\Sigma F = ma$ y después se realizan las siguientes manipulaciones de la regla de la cadena en el integrando:

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\,dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv \tag{7.15}$$

$$W_{\text{neto}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

donde v_i es la rapidez del bloque cuando está en $x = x_i$ y v_f es su rapidez en x_f.

La ecuación 7.15 se generó por la situación específica de movimiento unidimensional, pero es un resultado general. Dice que el trabajo invertido por la fuerza neta en una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ representa la energía asociada con el movimiento de la partícula. Esta cantidad es tan importante que se le ha dado un nombre especial, **energía cinética**:

Energía cinética ▶

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{7.16}$$

La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo. Por ejemplo, un objeto de 2.0 kg que se mueve con una rapidez de 4.0 m/s tiene una energía cinética de 16 J. La tabla 7.1 menciona las energías cinéticas de diferentes objetos.

La ecuación 7.15 afirma que el trabajo realizado en una partícula por una fuerza neta $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre él es igual al cambio en energía cinética de la partícula. Con frecuencia es conveniente escribir la ecuación 7.15 en la forma

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K \tag{7.17}$$

Otra forma de escribirla es $K_f = K_i + W_{\text{neto}}$, que dice que la energía cinética final de un objeto es igual a su energía cinética inicial más el cambio debido al trabajo neto invertido sobre él.

TABLA 7.1

Energías cinéticas de diferentes objetos

Objeto	Masa (kg)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (J)
Tierra que orbita el Sol	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.66×10^{33}
Luna que orbita la Tierra	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Cohete que se mueve con rapidez de escape[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automóvil a 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Atleta que corre	70	10	3 500
Piedra que se deja caer desde 10 m	1.0	14	98
Pelota de golf con rapidez terminal	0.046	44	45
Gota de lluvia con rapidez terminal	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Molécula de oxígeno en aire	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

[a] Rapidez de escape es la rapidez mínima que un objeto debe lograr cerca de la superficie de la Tierra para alejarse infinitamente de ésta.

La ecuación 7.17 se generó al suponer que se realiza trabajo en una partícula. También se podría hacer trabajo sobre un sistema deformable, en el que las partes del sistema se muevan unas respecto de otras. En este caso, también se encuentra que la ecuación 7.17 es válida en tanto el trabajo neto se encuentre al sumar los trabajos invertidos por cada fuerza y sumarlos, tal como se discutió anteriormente en relación con la ecuación 7.8.

La ecuación 7.17 es un resultado importante conocido como **teorema trabajo–energía cinética**:

> Cuando se consume trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez, el trabajo neto consumido en el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema.

◀ Teorema trabajo–energía cinética

El teorema trabajo–energía cinética indica que la rapidez de un sistema *aumenta* si el trabajo neto invertido sobre él es *positivo* porque la energía cinética final es mayor que la energía cinética inicial. La rapidez *disminuye* si el trabajo neto es *negativo* porque la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial.

Puesto que hasta el momento sólo se ha investigado movimiento traslacional a través del espacio, se llegó al teorema trabajo–energía cinética al analizar situaciones que involucran movimiento traslacional. Otro tipo de movimiento es el *movimiento rotacional*, en el que un objeto gira en torno a un eje. Este tipo de movimiento se estudiará en el capítulo 10. El teorema trabajo–energía cinética también es válido para sistemas que se someten a un cambio en la rapidez rotacional debido al trabajo realizado sobre el sistema. El molino de viento en la fotografía al principio de este capítulo es un ejemplo de trabajo que causa movimiento rotacional.

El teorema trabajo–energía cinética pondrá en claro un resultado visto anteriormente en este capítulo que puede parecer extraño. En la sección 7.4 se llegó a un resultado de trabajo neto realizado cero cuando un resorte empujó un bloque de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$. Note que, ya que la rapidez del bloque cambia continuamente, puede parecer complicado analizar este proceso. Sin embargo, la cantidad ΔK en el teorema trabajo–energía cinética sólo se refiere a los puntos inicial y final para las magnitudes de velocidad; no depende de los detalles de la trayectoria seguida entre dichos puntos. Por lo tanto, dado que la rapidez es cero tanto en el punto inicial como en el final del movimiento, el trabajo neto invertido en el bloque es cero. Con frecuencia este concepto de independencia con la trayectoria se verá en planteamientos similares de problemas.

Además se regresa al final del ejemplo 7.5 para el misterio en la etapa finalizar. ¿Por qué el trabajo invertido por la gravedad no fue sólo el trabajo consumido por el resorte con un signo positivo? Note que el trabajo invertido por la gravedad es mayor que la magnitud del trabajo consumido por el resorte. Por lo tanto, el trabajo total invertido por todas las fuerzas en el objeto es positivo. Ahora piense cómo crear la situación en que las *únicas* fuerzas sobre el objeto son la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional. Debe soportar el objeto en el punto más alto y después *quitar* su mano y dejar que el objeto caiga. Si lo hace,

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.6

Condiciones para el teorema trabajo–energía cinética

El teorema trabajo–energía cinética es importante pero limitado en su aplicación; no es un principio general. En muchas situaciones, otros cambios en el sistema ocurren además de su rapidez, y existen otras interacciones con el entorno además del trabajo. Un principio más general que involucra energía es la *conservación de energía* en la sección 8.1.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.7

El teorema trabajo–energía cinética: rapidez, no velocidad

El teorema trabajo–energía cinética relaciona el trabajo con un cambio en la *rapidez* de un sistema, no con un cambio en su velocidad. Por ejemplo, si un objeto está en movimiento circular uniforme, su rapidez es constante. Aun cuando su velocidad cambie, no se realiza trabajo sobre el objeto por la fuerza que causa el movimiento circular.

sabe que, cuando el objeto alcanza una posición 2.0 cm abajo de su mano, se estará *moviendo*, que es consistente con la ecuación 7.17. En el objeto se invierte trabajo neto positivo y el resultado es que tiene una energía cinética conforme pasa a través del punto 2.0 cm. La única manera de evitar que el objeto tenga una energía cinética después de moverse 2.0 cm es bajarlo lentamente con su mano. Sin embargo, después, existe una tercera fuerza invirtiendo trabajo en el objeto, la fuerza normal de su mano. Si este trabajo se calcula y suma al invertido por la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional, el trabajo neto invertido en el objeto es cero, que es consistente porque no es móvil en el punto 2.0 cm.

Antes se indicó que el trabajo se considera un mecanismo para la transferencia de energía en un sistema. La ecuación 7.17 es un enunciado matemático de este concepto. Cuando se invierte trabajo en un sistema W_{neto}, el resultado es una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El resultado en el sistema, en el caso de la ecuación 7.17, es un cambio ΔK de energía cinética. En la siguiente sección se investiga otro tipo de energía que se puede almacenar en un sistema como resultado de realizar trabajo en el sistema.

Pregunta rápida 7.5 Se carga un dardo en una pistola de juguete, accionada por resorte, al empujar el resorte hacia adentro una distancia x. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido deja la pistola el segundo dardo, en comparación con el primero? a) cuatro veces más rápido, b) dos veces más rápido, c) la misma, d) la mitad de rápido, e) un cuarto de rápido.

EJEMPLO 7.6 Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido 3.0 m.

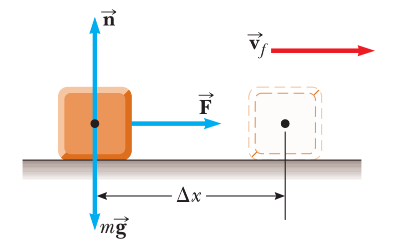


Figura 7.13 (Ejemplo 7.6) Bloque que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción mediante una fuerza horizontal constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.13 ilustra esta situación. Suponga que jala un carro de juguete a través de una mesa con una banda elástica horizontal unida al frente del carro. La fuerza se mantiene constante al asegurar que la banda elástica estirada siempre tiene la misma longitud.

Categorizar Se podrían aplicar las ecuaciones de cinemática para determinar la respuesta, pero practique la aproximación de energía. El bloque es el sistema y tres fuerzas externas actúan en el sistema. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional en el bloque y ninguna de estas fuerzas que actúan verticalmente realiza trabajo sobre el bloque porque sus puntos de aplicación se desplazan horizontalmente.

Analizar La fuerza externa neta que actúa sobre el bloque es la fuerza horizontal de 12 N.

Hallar el trabajo invertido por esta fuerza en el bloque:

$$W = F\,\Delta x = (12\text{ N})(3.0\text{ m}) = 36\text{ J}$$

Use el teorema trabajo–energía para el bloque y note que su energía cinética inicial es cero:

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

Resuelva para v_f:

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\text{ J})}{6.0\text{ kg}}} = 3.5\text{ m/s}$$

Finalizar Le sería útil resolver este problema de nuevo, al representar el bloque como una partícula bajo una fuerza neta para encontrar su aceleración y luego como una partícula bajo aceleración constante para encontrar su velocidad final.

¿Qué pasaría si? Suponga que la magnitud de la fuerza en este ejemplo se duplica a $F' = 2F$. El bloque de 6.0 kg acelera a 3.5 m/s debido a esta fuerza aplicada mientras se mueve a través de un desplazamiento $\Delta x'$. ¿Cómo se compara el desplazamiento $\Delta x'$ con el desplazamiento original Δx?

Respuesta Si se jala más fuerte, el bloque debe acelerar a una cierta rapidez en una distancia más corta, así que se espera que $\Delta x' < \Delta x$. En ambos casos, el bloque experimenta el mismo cambio en energía cinética ΔK. Matemáticamente, a partir del teorema trabajo–energía cinética, se encuentra que

$$W = F'\Delta x' = \Delta K = F\Delta x$$

$$\Delta x' = \frac{F}{F'}\Delta x = \frac{F}{2F}\Delta x = \tfrac{1}{2}\Delta x$$

y la distancia es más corta, como se sugiere por el argumento conceptual.

EJEMPLO CONCEPTUAL 7.7 **¿La rampa reduce el trabajo requerido?**

Un hombre quiere cargar un refrigerador en una camioneta con el uso de una rampa a un ángulo θ, como se muestra en la figura 7.14. Él afirma que se debe requerir menos trabajo para cargar la camioneta si la longitud L de la rampa aumenta. ¿Esta afirmación es válida?

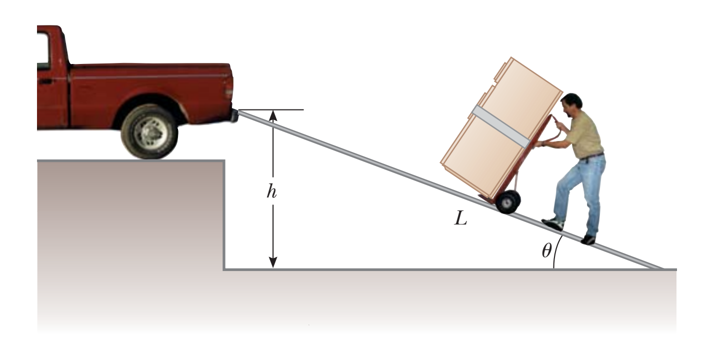


Figura 7.14 (Ejemplo conceptual 7.7) Un refrigerador unido a una carretilla con ruedas sin fricción se mueve por una rampa con rapidez constante.

SOLUCIÓN

No. Suponga que el refrigerador se sube por la rampa en una carretilla con rapidez constante. En este caso, para el sistema del refrigerador y la carretilla, $\Delta K = 0$. La fuerza normal que ejerce la rampa sobre el sistema se dirige 90° al desplazamiento de su punto de aplicación y por lo tanto no realiza trabajo sobre el sistema. Puesto que $\Delta K = 0$, el teorema trabajo–energía cinética produce

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{por hombre}} + W_{\text{por gravedad}} = 0$$

El trabajo invertido por la fuerza gravitacional es igual al producto del peso mg del sistema, la distancia L a través de la que se desplaza el refrigerador y cos $(\theta + 90°)$. En consecuencia,

$$W_{\text{por hombre}} = -W_{\text{por gravedad}} = -(mg)(L)[\cos(\theta + 90°)]$$
$$= mgL \operatorname{sen}\theta = mgh$$

donde $h = L \operatorname{sen}\theta$ es la altura de la rampa. Por lo tanto, el hombre debe realizar la misma cantidad de trabajo mgh sobre el sistema *sin importar* la longitud de la rampa. El trabajo sólo depende de la altura de la rampa. Aunque se requiere menos fuerza con una rampa más larga, el punto de aplicación de dicha fuerza se mueve a través de un mayor desplazamiento.

7.6 Energía potencial de un sistema

Hasta el momento en este capítulo se ha definido un sistema en general, pero la atención se ha enfocado principalmente sobre partículas u objetos solos bajo la influencia de fuerzas externas. Considere ahora sistemas de dos o más partículas u objetos que interactúan a través de una fuerza que es *interna* al sistema. La energía cinética de tal sistema es la suma algebraica de las energías cinéticas de todos los integrantes del sistema. Sin embargo, puede haber sistemas en los que un objeto sea tan masivo que se pueda modelar como fijo y su energía cinética sea despreciable. Por ejemplo, si se considera un sistema bola–Tierra mientras la bola cae a la Tierra, la energía cinética del sistema se puede considerar sólo como la energía cinética de la bola. La Tierra se mueve tan lentamente en este proceso que se puede ignorar su energía cinética. Por otra parte, la energía cinética de un sistema de dos electrones debe incluir las energías cinéticas de ambas partículas.

Piense en un sistema que consiste de un libro y la Tierra, que interactúa a través de la fuerza gravitacional. Se hace algo de trabajo sobre el sistema al levantar el libro lentamente desde el reposo a través de una desplazamiento vertical $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}$, como en la figura 7.15. De acuerdo con la discusión del trabajo como una transferencia de energía, este trabajo invertido en el sistema debe aparecer como un aumento en energía del sistema.

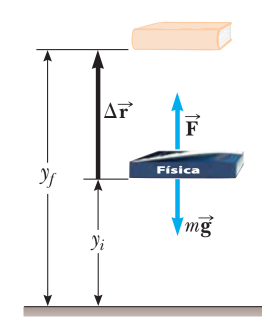


Figura 7.15 El trabajo invertido por un agente externo en el sistema del libro y la Tierra a medida que el libro se levanta lentamente desde una altura y_i a una altura y_f es igual a $mgy_f - mgy_i$.

El libro está en reposo antes de realizar el trabajo y está en reposo después de realizar el trabajo. Por lo tanto, no hay cambio en la energía cinética del sistema.

Puesto que el cambio de energía del sistema no es en la forma de energía cinética, debe aparecer como alguna otra forma de almacenamiento de energía. Después de levantar el libro, se le podría liberar y dejar que caiga de vuelta a la posición y_i. Note que el libro (y, por lo tanto, el sistema) ahora tiene energía cinética y su fuente está en el trabajo que se hizo al levantar el libro. Mientras el libro estaba en el punto más alto, la energía del sistema tenía el *potencial* para convertirse en energía cinética, pero no lo hizo hasta que al libro se le permitió caer. En consecuencia, al mecanismo de almacenamiento de energía antes de que el libro se libere se le llama **energía potencial**. Se encontrará que la energía potencial de un sistema sólo se asocia con tipos específicos de fuerzas que actúan entre integrantes de un sistema. La cantidad de energía potencial en el sistema se determina mediante la *configuración* del mismo. Mover los integrantes del sistema a diferentes posiciones o girarlos cambia su configuración y por ende su energía potencial.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.8

Energía potencial

La frase *energía potencial* no se refiere a algo que tenga el potencial de convertirse en energía. La energía potencial *es* energía.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.9

La energía potencial pertenece a un sistema

La energía potencial siempre se asocia con un *sistema* de dos o más objetos en interacción. Cuando un objeto pequeño se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia de la gravedad, a veces se puede hacer referencia a la energía potencial "asociada con el objeto" en lugar de "asociada con el sistema", que es lo más apropiado, porque la Tierra no se mueve significativamente. Sin embargo, en el texto no se hará alusión a la energía potencial "del objeto" porque esta frase ignora el papel de la Tierra.

Ahora deduzca una expresión para la energía potencial asociada con un objeto en cierta ubicación sobre la superficie de la Tierra. Considere un agente externo que levanta un objeto de masa m desde una altura inicial y_i sobre el suelo a una altura final y_f, como en la figura 7.15. Se supone que el levantamiento se hace lentamente, sin aceleración, de modo que la fuerza aplicada del agente se representa como igual en magnitud a la fuerza gravitacional en el objeto: el objeto se modela como una partícula en equilibrio que se mueve con velocidad constante. El trabajo invertido por el agente externo sobre el sistema (objeto y Tierra) conforme el objeto se somete a este desplazamiento hacia arriba, se conoce por el producto de la fuerza aplicada hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ y el desplazamiento hacia arriba de esta fuerza, $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta y\hat{\mathbf{j}}$:

$$W_{\text{neto}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}})\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}})\cdot[(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i \qquad \textbf{(7.18)}$$

donde este resultado es el trabajo neto invertido en el sistema porque la fuerza aplicada es la única fuerza sobre el sistema desde el entorno. Advierta la similitud entre la ecuación 7.18 y la ecuación 7.15. En cada ecuación, el trabajo invertido en un sistema es igual a una diferencia entre los valores final e inicial de una cantidad. En la ecuación 7.15, el trabajo representa una transferencia de energía en el sistema y el incremento en energía del sistema es cinética en forma. En la ecuación 7.18, el trabajo representa una transferencia de energía al sistema y la energía del sistema aparece en una forma diferente, a lo que se llamó energía potencial.

En consecuencia, la cantidad mgy se puede identificar como la **energía potencial gravitacional U_g**:

Energía potencial gravitacional ►

$$U_g \equiv mgy \qquad \textbf{(7.19)}$$

Las unidades de la energía potencial gravitacional son joules, las mismas unidades que el trabajo y la energía cinética. La energía potencial, como el trabajo y la energía cinética, es una cantidad escalar. Note que la ecuación 7.19 sólo es válida para objetos cerca de la superficie de la Tierra, donde g es aproximadamente constante.[3]

Al usar la definición de energía potencial gravitacional, la ecuación 7.18 ahora se puede rescribir como

$$W_{\text{neto}} = \Delta U_g \qquad \textbf{(7.20)}$$

que matemáticamente describe que el trabajo neto invertido en el sistema en esta situación aparece como un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

La energía potencial gravitacional sólo depende de la altura vertical del objeto sobre la superficie de la Tierra. La misma cantidad de trabajo se debe invertir sobre un sistema objeto–Tierra ya sea que el objeto se levante verticalmente desde la Tierra o se empuje desde el mismo punto hacia arriba de un plano inclinado sin fricción para terminar en la misma altura. Este enunciado se verifica para una situación específica como empujar un refrigerador sobre una rampa en el ejemplo conceptual 7.7. Se puede demostrar que

[3] La suposición de que g es constante es válida en tanto que el desplazamiento vertical del objeto sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra.

este enunciado es verdadero en general al calcular el trabajo invertido en un objeto por un agente que mueve el objeto a lo largo de un desplazamiento que tiene componentes tanto vertical como horizontal:

$$W_{\text{neto}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i$$

donde no hay término que involucre a x en el resultado final porque $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$.

Al resolver problemas, debe elegir una configuración de referencia para la cual la energía potencial gravitacional del sistema se haga igual a algún valor de referencia, que normalmente es cero. La elección de configuración de referencia es completamente arbitraria porque la cantidad importante es la *diferencia* en energía potencial, y esta diferencia es independiente de la elección de la configuración de referencia.

Con frecuencia es conveniente elegir como la configuración de referencia para la energía potencial gravitacional la configuración en la que un objeto está en la superficie de la Tierra, pero esta elección no es esencial. Frecuentemente el enunciado del problema sugiere aplicar una configuración conveniente.

Pregunta rápida 7.6 Elija la respuesta correcta. La energía potencial gravitacional de un sistema a) siempre es positiva, b) siempre es negativa, c) puede ser negativa o positiva.

EJEMPLO 7.8 El bolichista y el dedo lastimado

Una bola de boliche sostenida por un bolichista descuidado se desliza de sus manos y cae sobre un dedo de su pie. Si elige el nivel del suelo como el punto $y = 0$ de su sistema coordenado, estime el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra mientras cae la bola. Repita el cálculo usando la coronilla de la cabeza del bolichista como el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La bola de boliche cambia su posición vertical en relación con la superficie de la Tierra. Asociado con este cambio de posición, hay un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

Categorizar Se evalúa un cambio de energía potencial gravitacional definido en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifique como un problema de sustitución.

El enunciado del problema dice que la configuración de referencia del sistema bola–Tierra que corresponde a energía potencial cero es cuando el punto más bajo de la bola está en el suelo. Para encontrar el cambio de energía del sistema, es necesario estimar unos cuantos valores. Una bola de boliche tiene una masa de aproximadamente 7 kg, y la parte superior del dedo del pie de una persona está aproximadamente a 0.03 m sobre el suelo. Además, se debe suponer que la bola cae desde una altura de 0.5 m.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra justo antes de que la bola de boliche se libere:

$$U_i = mgy_i = (7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ m}) = 34.3 \text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra cuando la bola llega al dedo del bolichista:

$$U_f = mgy_f = (7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.03 \text{ m}) = 2.06 \text{ J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra:

$$\Delta U_g = 2.06 \text{ J} - 34.3 \text{ J} = -32.24 \text{ J}$$

En este caso probablemente se conserve sólo un dígito debido a lo burdo de las estimaciones; en consecuencia, se estima que el cambio en energía potencial gravitacional es -30 J. El sistema tiene 30 J de energía potencial gravitacional antes de que la bola inicie su caída y aproximadamente cero de energía potencial cuando la bola llega a la parte superior del dedo.

El segundo caso indica que la configuración de referencia del sistema para energía potencial cero se elige cuando la bola está en la cabeza del bolichista (aun cuando la bola nunca está en tal posición en su movimiento). Se estima que esta posición es 1.50 m sobre el suelo.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra justo antes de que la bola de boliche se libere desde su posición 1 m abajo de la cabeza del bolichista:

$$U_i = mgy_i = (7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-1 \text{ m}) = -68.6 \text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra cuando la bola llega al dedo del bolichista ubicado 1.47 m bajo la cabeza del bolichista:

$$U_f = mgy_f = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-1.47\text{ m}) = -100.8\text{ J}$$

Evalúe el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra:

$$\Delta U_g = -100.8\text{ J} - (-68.6\text{ J}) = -32.2\text{ J} \approx -30\text{ J}$$

Este valor es el mismo que antes, como debe ser.

Energía potencial elástica

Ahora que está familiarizado con la energía potencial gravitacional de un sistema, explore un segundo tipo de energía potencial que puede tener un sistema. Considere un sistema que consta de un bloque y un resorte, como se muestra en la figura 7.16. La fuerza que el resorte ejerce sobre el bloque se conoce por $F_s = -kx$ (ecuación 7.9). El trabajo invertido por una fuerza aplicada externa F_{ap} en un sistema que consiste de un bloque conectado al resorte se proporciona por la ecuación 7.13:

$$W_{ap} = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 \quad \textbf{(7.21)}$$

En esta situación, las coordenadas inicial y final x del bloque se miden desde su posición de equilibrio, $x = 0$. De nuevo (como en el caso gravitacional) se ve que el trabajo invertido en el sistema es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una expresión relacionada con la configuración del sistema. La función de **energía potencial elástica** asociada con el sistema bloque–resorte se define mediante

Energía potencial elástica ▶

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \textbf{(7.22)}$$

La energía potencial elástica del sistema se puede percibir como la energía almacenada en el resorte deformado (uno que está comprimido o estirado desde su posición de equilibrio). La energía potencial elástica almacenada en un resorte es cero siempre que

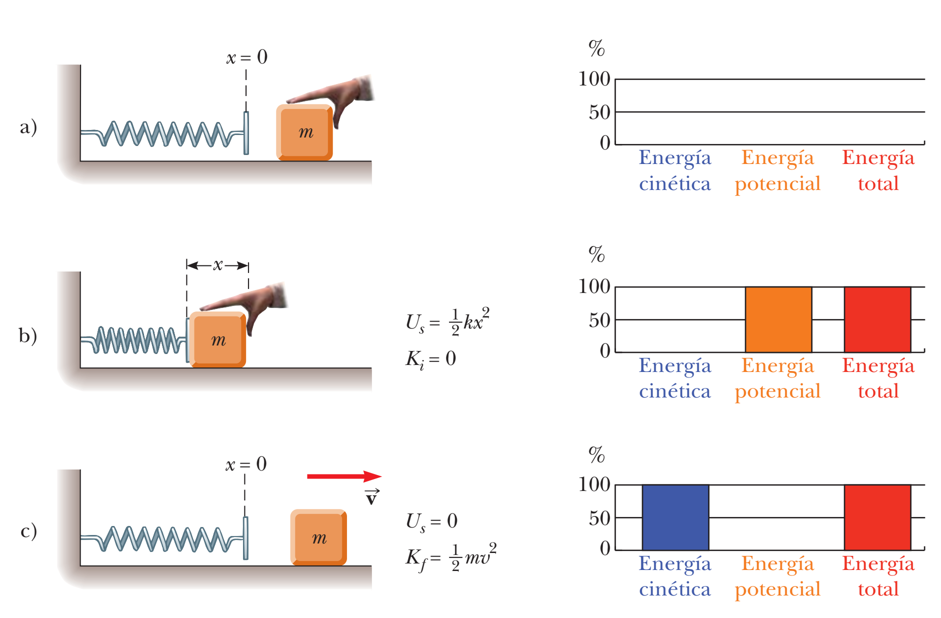


Figura 7.16 a) Un resorte no deformado sobre una superficie horizontal sin fricción. b) Se empuja un bloque de masa m contra el resorte y lo comprime una distancia x. La energía potencial elástica se almacena en el sistema resorte–bloque. c) Cuando el bloque se libera desde el reposo, la energía potencial elástica se transforma en energía cinética del bloque. Las gráficas de barras de energía a la derecha de cada parte de la figura ayudan a seguir la pista de la energía en el sistema.

el resorte no esté deformado ($x = 0$). La energía se almacena en el resorte sólo cuando el resorte está estirado o comprimido. Puesto que la energía potencial elástica es proporcional a x^2, se ve que U_s siempre es positiva en un resorte deformado.

Considere la figura 7.16, que muestra un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando se empuja un bloque contra el resorte y el resorte se comprime una distancia x (figura 7.16b), la energía potencial elástica almacenada en el resorte es $\frac{1}{2}kx^2$. Cuando el bloque se libera desde el reposo, el resorte ejerce una fuerza sobre el bloque y regresa a su longitud original. La energía potencial elástica almacenada se transforma en energía cinética del bloque (figura 7.16c).

La figura 7.16 muestra una representación gráfica importante de información relacionada con energía de sistemas llamada **gráfica de barras de energía**. El eje vertical representa la cantidad de energía de una clase determinada en el sistema. El eje horizontal muestra las clases de energía en el sistema. La gráfica de barras de la figura 7.16a muestra que el sistema contiene energía cero porque el resorte está relajado y el bloque no se mueve. Entre la figura 7.16a y 7.16b, la mano realiza trabajo sobre el sistema, comprime el resorte y almacena energía potencial elástica en el sistema. En la figura 7.16c, el resorte regresó a su longitud relajada y el sistema ahora contiene energía cinética asociada con el bloque en movimiento.

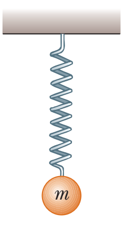


Figura 7.17 (Pregunta rápida 7.7) Una bola conectada a un resorte sin masa suspendido verticalmente. ¿Qué formas de energía potencial se asocian con el sistema cuando la bola se desplaza hacia abajo?

Pregunta rápida 7.7 Una bola se conecta a un resorte ligero suspendido verticalmente, como se muestra en la figura 7.17. Cuando se jala hacia abajo desde su posición de equilibrio y se libera, la bola oscila arriba y abajo. **i)** En el sistema de *la bola, el resorte y la Tierra*, ¿qué formas de energía existen durante el movimiento? a) cinética y potencial elástica, b) cinética y potencial gravitacional, c) cinética, potencial elástica y potencial gravitacional, d) potencial elástica y potencial gravitacional. **ii)** En el sistema de *la bola y el resorte*, ¿qué formas de energía existen durante el movimiento? Elija de las mismas posibilidades de la a) a la d).

7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

Ahora se introduce un tercer tipo de energía que tiene un sistema. Imagine que usted acelera con su mano el libro en la figura 7.18a y lo desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y frena debido a la fuerza de fricción. Suponga que la *superficie* es el sistema. Debido a eso la fuerza de fricción al deslizarse el libro realiza trabajo sobre la superficie. La fuerza sobre la superficie es hacia la derecha y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es hacia la derecha. El trabajo invertido en la superficie es positivo, pero la superficie no se mueve después de que el libro se detiene. Sobre la superficie se realizó trabajo positivo, aunque no hay aumento en la energía cinética de la superficie o la energía potencial de sistema alguno.

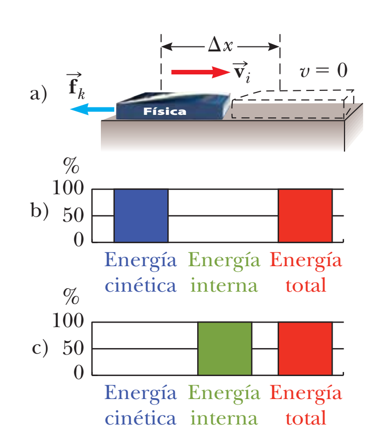


Figura 7.18 a) Un libro que se desliza hacia la derecha sobre una superficie horizontal frena en presencia de una fuerza de fricción cinética que actúa hacia la izquierda. b) Gráfica de barras de energía que muestra la energía en el sistema del libro y la superficie en el instante de tiempo inicial. La energía del sistema es toda energía cinética. c) Después de que el libro se detiene, la energía del sistema es toda energía interna.

A partir de su experiencia cotidiana con el deslizamiento sobre superficies con fricción, probablemente usted puede adivinar que la superficie se *calentará* después de que el libro se deslice sobre ella. (¡Frote sus manos vigorosamente para descubrirlo!) El trabajo que se hizo sobre la superficie se fue en calentar la superficie en lugar de aumentar su rapidez o cambiar la configuración de un sistema. A la energía asociada con la temperatura de un sistema se le llama **energía interna**, que se simboliza E_{int}. (En el capítulo 20 se definirá de manera más general la energía interna.) En este caso, el trabajo invertido en la superficie de hecho representa la energía transferida hacia dentro del sistema, pero aparece en el sistema como energía interna en lugar de energía cinética o potencial.

Considere el libro y la superficie en la figura 7.18a juntos como un sistema. Inicialmente, el sistema tiene energía cinética porque el libro es móvil. Después de que el libro llegó al reposo, la energía interna del sistema aumentó: el libro y la superficie están más calientes que antes. Se puede considerar el trabajo invertido por fricción dentro del

sistema (esto es, entre el libro y la superficie) como un *mecanismo de transformación* para energía. Este trabajo transforma la energía cinética del sistema en energía interna. De igual modo, cuando un libro cae recto hacia abajo sin resistencia del aire, el trabajo invertido por la fuerza gravitacional dentro del sistema libro–Tierra transforma la energía potencial gravitacional del sistema a energía cinética.

Las figuras 7.18b y 7.18c muestran gráficas de barras de energía para la situación en la figura 7.18a. En la figura 7.18b, la gráfica de barras muestra que el sistema contiene energía cinética en el instante en que su mano libera el libro. En este instante se define la cantidad de energía interna de referencia en el sistema igual a cero. En la figura 7.18c, después de que el libro deja de deslizarse, la energía cinética es cero y ahora el sistema contiene energía interna. Observe que la cantidad de energía interna en el sistema, después de que el libro se detiene, es igual a la cantidad de energía cinética en el sistema en el instante inicial. Esta igualdad se describe mediante un principio importante llamado *conservación de energía*. Este principio se explorará en el capítulo 8.

Ahora considere con más detalle un objeto que se mueve hacia abajo, cerca de la superficie de la Tierra. El trabajo invertido por la fuerza gravitacional en el objeto no depende de si cae vertical o se desliza hacia abajo de un plano muy inclinado. Todo lo que importa es el cambio en la elevación del objeto. Sin embargo, la transformación de energía a energía interna debida a fricción en dicho plano depende de la distancia que el objeto se desliza. En otras palabras, la trayectoria no hace diferencia cuando se considera el trabajo invertido por la fuerza gravitacional, pero sí hace una diferencia cuando se considera la transformación de energía debida a fuerzas de fricción. Se puede usar esta dependencia variable con la trayectoria para clasificar fuerzas como conservativas o no conservativas. De las dos fuerzas mencionadas, la fuerza gravitacional es conservativa y la fuerza de fricción es no conservativa.

Fuerzas conservativas

Las **fuerzas conservativas** tienen estas dos propiedades equivalentes:

Propiedades de fuerzas conservativas ▶

1. El trabajo invertido por una fuerza conservativa sobre una partícula móvil entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria tomada por la partícula.
2. El trabajo invertido por una fuerza conservativa en una partícula móvil a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. (Una trayectoria cerrada es aquella en la que el punto de partida y el punto final son idénticos.)

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.10

Advertencia sobre ecuaciones similares

Compare la ecuación 7.23 con la ecuación 7.20. Estas ecuaciones son similares excepto por el signo negativo, que es una fuente común de confusión. La ecuación 7.20 dice que trabajo positivo se invierte *por un agente externo* en un sistema que causa un aumento en la energía potencial del sistema (sin cambio en la energía cinética o interna). La ecuación 7.23 establece que el trabajo invertido *en una componente de un sistema por una fuerza conservativa interna a un sistema aislado* causa una disminución en la energía potencial del sistema.

La fuerza gravitacional es un ejemplo de fuerza conservativa; la fuerza que un resorte ideal ejerce en cualquier objeto unido al resorte es otra. El trabajo invertido por la fuerza gravitacional en un objeto móvil entre dos puntos cualesquiera cerca de la superficie de la Tierra es $W_g = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_i - mgy_f$. A partir de esta ecuación, observe que W_g sólo depende de las coordenadas y inicial y final del objeto y por tanto es independiente de la trayectoria. Además, W_g es cero cuando el objeto se traslada en cualquier trayectoria cerrada (donde $y_i = y_f$).

Para el caso del sistema objeto–resorte, el trabajo W_s invertido por la fuerza del resorte se conoce por $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$ (ecuación 7.12). Se ve que la fuerza del resorte es conservativa porque W_s sólo depende de las coordenadas x, inicial y final del objeto y es cero para cualquier trayectoria cerrada.

Es posible asociar una energía potencial para un sistema con una fuerza que actúa entre integrantes del sistema, pero sólo se puede hacer para fuerzas conservativas. En general, el trabajo W_c invertido por una fuerza conservativa en un objeto que es integrante de un sistema conforme el objeto se traslada de una posición a otra es igual al valor inicial de la energía potencial del sistema menos el valor final:

$$W_c = U_i - U_f = -\Delta U \qquad \textbf{(7.23)}$$

Como ejemplo, compare esta ecuación general con la ecuación específica para el trabajo invertido por la fuerza de resorte (ecuación 7.12) como la extensión de los cambios del resorte.

Fuerzas no conservativas

Una fuerza es **no conservativa** si no satisface las propiedades 1 y 2 para fuerzas conservativas. Se define la suma de las energías cinética y potencial de un sistema como la **energía mecánica** del sistema:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \tag{7.24}$$

donde K incluye la energía cinética de todos los integrantes móviles del sistema y U incluye todos los tipos de energía potencial en el sistema. Las fuerzas no conservativas que actúan dentro de un sistema causan un *cambio* en la energía mecánica del sistema. Por ejemplo, para un libro que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, la energía mecánica del sistema libro–superficie se transforma en energía interna, como se discutió anteriormente. Sólo parte de la energía cinética del libro se transforma en energía interna en el libro. El resto aparece como energía interna en la superficie. (Cuando tropieza y se desliza por el suelo de un gimnasio, no sólo la piel en sus rodillas se calienta, ¡también lo hace el piso!) Puesto que la fuerza de fricción cinética transforma la energía mecánica de un sistema en energía interna, esta es una fuerza no conservativa.

Como ejemplo de la dependencia del trabajo con la trayectoria para una fuerza no conservativa, considere la figura 7.19. Suponga que desplaza un libro entre dos puntos sobre una mesa. Si el libro se desplaza en una línea recta a lo largo de la trayectoria azul entre los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 7.19, realiza cierta cantidad de trabajo contra la fuerza de fricción cinética para mantener al libro móvil con una rapidez constante. Ahora, piense que empuja el libro a lo largo de la trayectoria semicircular café en la figura 7.19. Realiza más trabajo contra la fricción a lo largo de esta trayectoria curva que a lo largo de la trayectoria recta porque la trayectoria curva es más larga. El trabajo invertido en el libro depende de la trayectoria, así que la fuerza de fricción *no puede* ser conservativa.

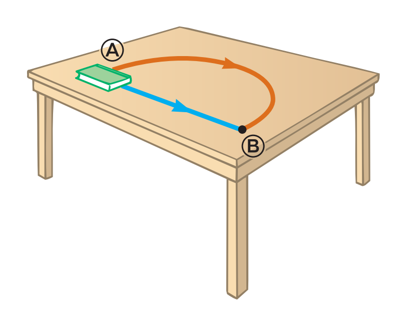


Figura 7.19 El trabajo invertido contra la fuerza de fricción cinética depende de la trayectoria tomada mientras el libro se traslada de Ⓐ a Ⓑ. El trabajo es mayor a lo largo de la trayectoria café que a lo largo de la trayectoria azul.

7.8 Correspondencia entre fuerzas conservativas y energía potencial

En la sección anterior se encontró que el trabajo consumido en un integrante de un sistema por una fuerza conservativa entre los integrantes del sistema no depende de la trayectoria seguida por el integrante en movimiento. El trabajo sólo depende de las coordenadas inicial y final. En consecuencia, se puede definir una **función de energía potencial** U tal que el trabajo invertido dentro del sistema por la fuerza conservativa sea igual a la disminución en la energía potencial del sistema. Conciba un sistema de partículas en el que la configuración cambia debido al movimiento de una partícula a lo largo del eje x. El trabajo realizado por una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ conforme una partícula se traslada a lo largo del eje x es[4]

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = -\Delta U \tag{7.25}$$

donde F_x es la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección del desplazamiento. Esto es: el trabajo invertido por una fuerza conservativa que actúa entre integrantes de un sistema es igual al negativo del cambio en la energía potencial del sistema asociado con dicha fuerza cuando cambia la configuración del sistema. La ecuación 7.25 también se puede expresar como

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \tag{7.26}$$

[4] Para un desplazamiento general, el trabajo realizado en dos o tres dimensiones también es igual a $-\Delta U$, donde $U = U(x, y, z)$. Esta ecuación se escribe formalmente como $W_c = \int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U_i - U_f$.

En consecuencia, ΔU es negativa cuando F_x y dx están en la misma dirección, como cuando se baja un objeto en un campo gravitacional o cuando un resorte empuja un objeto hacia el equilibrio.

Con frecuencia es conveniente establecer alguna ubicación particular x_i de un integrante de un sistema como representativo de una configuración de referencia y medir todas las diferencias de energía potencial en relación con él. En tal caso es posible definir la función de energía potencial como

$$U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + U_i \qquad \textbf{(7.27)}$$

Frecuentemene el valor de U_i se considera cero para la configuración de referencia. No importa qué valor se asigne a U_i porque cualquier valor distinto de cero simplemente desplaza a $U_f(x)$ en una cantidad constante y sólo el *cambio* en energía potencial es físicamente significativo.

Si el punto de aplicación de la fuerza se somete a un desplazamiento infinitesimal dx, el cambio infinitesimal en la energía potencial del sistema dU se expresa como

$$dU = -F_x dx$$

Por lo tanto, la fuerza conservativa se relaciona con la función de energía potencial mediante la correspondencia[5]

Relación de fuerza entre integrantes de un sistema y la energía potencial del sistema

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad \textbf{(7.28)}$$

Es decir, **la componente *x* de una fuerza conservativa que actúa sobre un objeto dentro de un sistema es igual a la derivada negativa de la energía potencial del sistema en relación con *x*.**

Es fácil comprobar la ecuación 7.28 para los dos ejemplos ya analizados. En el caso del resorte deformado, $U_s = \frac{1}{2}kx^2$; debido a eso,

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

que corresponde a la fuerza restauradora en el resorte (ley de Hooke). Ya que la función de energía potencial gravitacional es $U_g = mgy$, se sigue de la ecuación 7.28 que $F_g = -mg$ cuando deriva U_g respecto de y en lugar de x.

Ahora se ve que U es una función importante porque de ella se deduce una fuerza conservativa. A más de esto, la ecuación 7.28 pone en claro que sumar una constante a la energía potencial no es importante porque la derivada de una constante es cero.

Pregunta rápida 7.8 ¿Qué representa la pendiente de una gráfica de $U(x)$ en función de x? a) la magnitud de la fuerza sobre el objeto, b) el negativo de la magnitud de la fuerza sobre el objeto, c) la componente x de la fuerza sobre el objeto, d) el negativo de la componente x de la fuerza sobre el objeto.

---

[5] En tres dimensiones, la expresión es

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

donde $(\partial U/\partial x)$ y así sucesivamente son derivadas parciales. En el lenguaje del cálculo vectorial, $\vec{\mathbf{F}}$ es igual al negativo del *gradiente* de la cantidad escalar $U(x, y, z)$.

7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

Con frecuencia el movimiento de un sistema se puede entender cualitativamente mediante una gráfica de su energía potencial en función de la posición de un integrante del sistema. Considere la función energía potencial para un sistema bloque–resorte, dada por $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Esta función se grafica en función de x en la figura 7.20a. La fuerza F_x que ejerce el resorte en el bloque se relaciona con U_s a través de la ecuación 7.28:

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

Como se vio en la pregunta rápida 7.8, la componente x de la fuerza es igual al negativo de la pendiente de la curva U en función de x. Cuando el bloque se coloca en reposo en la posición de equilibrio del resorte ($x = 0$), donde $F_x = 0$, permanecerá ahí a menos que alguna fuerza externa F_{ext} actúe sobre él. Si esta fuerza externa estira el resorte desde el equilibrio, x es positivo y la pendiente dU/dx es positiva; debido a eso, la fuerza F_s que ejerce el resorte es negativa y el bloque acelera de regreso hacia $x = 0$ cuando se libera. Si la fuerza externa comprime el resorte, x es negativa y la pendiente es negativa; por lo tanto, F_s es positiva y una vez más la masa acelera hacia $x = 0$ al momento de liberarse.

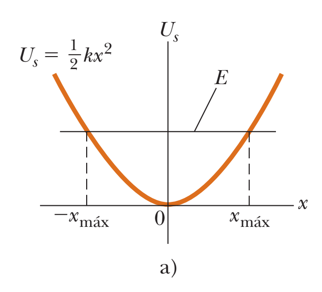
A partir de este análisis, se concluye que la posición $x = 0$ para un sistema bloque–resorte es aquella de **equilibrio estable**. Es decir: cualquier movimiento que se aleje de esta posición da como resultado una fuerza que se dirige de regreso hacia $x = 0$. En general, **las configuraciones de un sistema en equilibrio estable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ del sistema es un mínimo.**

Si el bloque en la figura 7.20 se mueve hacia una posición inicial $x_{máx}$ y en tal caso se libera del reposo, su energía total inicialmente es la energía potencial $\frac{1}{2}kx_{máx}^2$ almacenada en el resorte. Conforme el bloque comienza a moverse, el sistema adquiere energía cinética y pierde energía potencial. El bloque oscila (se mueve hacia atrás y hacia adelante) entre los dos puntos $x = -x_{máx}$ y $x = +x_{máx}$, llamados *puntos de retorno*. De hecho, puesto que ninguna energía se transforma en energía interna debido a la fricción, el bloque oscila entre $-x_{máx}$ y $+x_{máx}$ por siempre. (Estas oscilaciones se discuten más en el capítulo 15.)

Otro sistema mecánico simple con una configuración de equilibrio estable es una bola que rueda en el fondo de un tazón. En cualquier momento la bola se desplaza de su posición más baja y tiende a regresar a dicha posición cuando se libera.

Ahora considere una partícula móvil a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa F_x, donde la curva U con x es como la que se muestra en la figura 7.21. Nuevamente, $F_x = 0$ en $x = 0$, y por ende la partícula está en equilibrio en este punto. Sin embargo, esta posición es de **equilibrio inestable** por la explicación que sigue: suponga que la partícula se desplaza hacia la derecha ($x > 0$). Ya que la pendiente es negativa para $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ es positiva y la partícula acelera alejándose de $x = 0$. Si en vez de ello la partícula está en $x = 0$ y se desplaza hacia la izquierda ($x < 0$), la fuerza es negativa porque la pendiente es positiva para $x < 0$ y la partícula de nuevo acelera alejándose de la posición de equilibrio. En esta situación la posición $x = 0$ es de equilibrio inestable porque, para cualquier desplazamiento a partir de este punto, la fuerza empuja la partícula más lejos del equilibrio y hacia una posición de menor energía potencial. Un lápiz que se equilibra sobre su punta está en una posición de equilibrio inestable. Si el lápiz se desplaza un poco de su posición absolutamente vertical y después se libera, es seguro que caerá. En general, **las configuraciones de un sistema en equilibrio inestable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ del sistema es un máximo.**

Por último, una configuración llamada **equilibrio neutro** surge cuando U es constante en alguna región. Pequeños desplazamientos de un objeto desde una posición en esta región no producen fuerzas restauradoras ni perturbadoras. Una bola que yace sobre una superficie horizontal plana es un ejemplo de un objeto en equilibrio neutro.



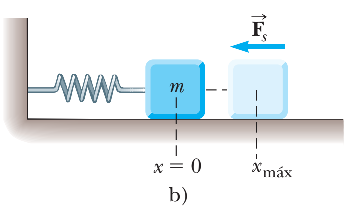


Figura 7.20 a) Energía potencial como función de x para el sistema bloque–resorte sin fricción que se muestra en b). El bloque oscila entre los puntos de retorno, que tienen las coordenadas $x = \pm x_{máx}$. Observe que la fuerza restauradora que ejerce el resorte siempre actúa hacia $x = 0$, la posición de equilibrio estable.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.11

Diagramas de energía

Un error común es pensar que la energía potencial en la gráfica de un diagrama de energía representa altura. Por ejemplo, no es el caso en la figura 7.20, donde el bloque sólo se mueve horizontalmente.

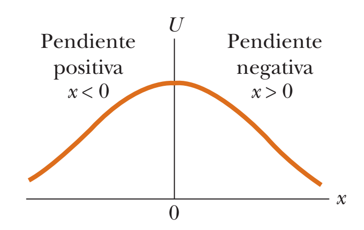


Figura 7.21 Gráfica de U con x para una partícula que tiene una posición de equilibrio inestable ubicada en $x = 0$. Para cualquier desplazamiento finito de la partícula, la fuerza sobre la partícula se dirige alejándose de $x = 0$.

EJEMPLO 7.9 Fuerza y energía a escala atómica

La energía potencial asociada con la fuerza entre dos átomos neutros en una molécula se representa mediante la función energía potencial de Lennard–Jones:

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

donde x es la separación de los átomos. La función $U(x)$ contiene dos parámetros σ y ϵ que están determinados por los experimentos. Valores muestra para la interacción entre dos átomos en una molécula son $\sigma = 0.263$ nm y $\epsilon = 1.51 \times 10^{-22}$ J. Con una hoja de cálculo o herramienta similar, grafique esta función y encuentre la distancia más probable entre los dos átomos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los dos átomos en la molécula se identifican como un sistema. Respecto a nuestra interpretación de que existen moléculas estables, se espera encontrar equilibrio estable cuando los dos átomos estén separados por cierta distancia de equilibrio.

Categorizar Ya que existe una función energía potencial, la fuerza entre los átomos se clasifica como conservativa. Para una fuerza conservativa, la ecuación 7.28 describe la correspondencia entre la fuerza y la función energía potencial.

Analizar Existe equilibrio estable para una distancia de separación en que la energía potencial del sistema de dos átomos (la molécula) es un mínimo.

Tome la derivada de la función $U(x)$:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] = 4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} + \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right]$$

Minimice la función $U(x)$ al hacer su derivada igual a cero:

$$4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x_{\text{eq}}{}^{13}} + \frac{6\sigma^{6}}{x_{\text{eq}}{}^{7}}\right] = 0 \quad\rightarrow\quad x_{\text{eq}} = (2)^{1/6}\sigma$$

Evalúe x_{eq}, la separación de equilibrio de los dos átomos en la molécula:

$$x_{\text{eq}} = (2)^{1/6}\,(0.263\text{ nm}) = 2.95 \times 10^{-10}\text{ m}$$

Grafique la función de Lennard–Jones en ambos lados de este valor crítico para generar el diagrama de energía como se muestra en la figura 7.22.

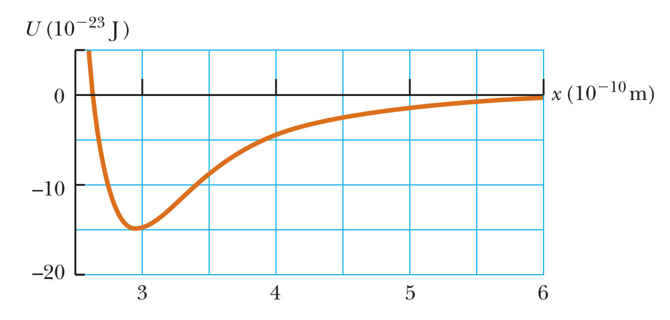


Figura 7.22 (Ejemplo 7.9) Curva de energía potencial asociada con una molécula. La distancia x es la separación entre los dos átomos que conforman la molécula.

Finalizar Note que $U(x)$ es extremadamente grande cuando los átomos están muy cerca uno del otro, es un mínimo cuando los átomos están en su separación crítica y después aumenta de nuevo conforme los átomos se separan. Cuando $U(x)$ es mínima, los átomos están en equilibrio estable, lo que indica que la separación más probable entre ellos se presenta en este punto.

Resumen

DEFINICIONES

Con mucha frecuencia, un **sistema** es una sola partícula, un conjunto de partículas o una región del espacio, y puede variar en tamaño y forma. La **frontera del sistema** separa al sistema del **medio ambiente.**

El **trabajo** W invertido en un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ en el sistema es el producto de la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y la componente $F\cos\theta$ de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$:

$$W \equiv F\,\Delta r\cos\theta \qquad \textbf{(7.1)}$$

Si una fuerza variable realiza trabajo en una partícula conforme la partícula se traslada a lo largo del eje x desde x_i hasta x_f, el trabajo consumido por la fuerza en la partícula se proporciona por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \qquad \textbf{(7.7)}$$

donde F_x es la componente de fuerza en la dirección x.

El **producto escalar** (producto punto) de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define mediante la correspondencia

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta \qquad \textbf{(7.2)}$$

donde el resultado es una cantidad escalar y θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto escalar obedece a las leyes conmutativa y distributiva.

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v es

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

Si una partícula de masa m está a una distancia y sobre la superficie de la Tierra, la **energía potencial gravitacional** del sistema partícula-Tierra es

$$U_g \equiv mgy \qquad \textbf{(7.19)}$$

La **energía potencial elástica** almacenada en un resorte con constante de fuerza k es

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(7.22)}$$

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo que realiza en una partícula que es integrante del sistema, conforme la partícula se mueve entre dos puntos, es independiente de la trayectoria que sigue la partícula entre los dos puntos. Además, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a través de una trayectoria cerrada arbitraria y regresa a su posición inicial. Una fuerza que no satisface estos criterios se dice que es **no conservativa**.

La **energía mecánica total de un sistema** se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \qquad \textbf{(7.24)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El **teorema trabajo–energía cinética** establece que, si una fuerza externa invierte trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez,

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_i^{\,2} \qquad \textbf{(7.15, 7.17)}$$

Una **función de energía potencial** U se asocia sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ actúa entre integrantes de un sistema mientras un integrante se mueve a lo largo del eje x de x_i a x_f, el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo invertido por dicha fuerza:

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \qquad \textbf{(7.26)}$$

Los sistemas están en tres clases de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta en un integrante del sistema es cero. Las configuraciones de **equilibrio estable** corresponden cuando $U(x)$ es un mínimo. Las configuraciones de **equilibrio inestable** corresponden cuando $U(x)$ es un máximo. El **equilibrio neutro** surge cuando U es constante mientras un integrante del sistema se mueve en alguna región.

Preguntas

O Indica pregunta complementaria.

1. Discuta si algún trabajo se invierte por cada uno de los siguientes agentes y, si es así, si el trabajo es positivo o negativo: a) un pollo que rasca la tierra, b) una persona que estudia, c) una grúa que levanta una cubeta de concreto, d) la fuerza gravitacional sobre la cubeta del inciso c), e) los músculos de la pierna de una persona en el acto de sentarse.

2. Cite dos ejemplos en los que se ejerza una fuerza sobre un objeto sin realizar trabajo alguno sobre el objeto.

3. Cuando un péndulo oscila hacia atrás y hacia adelante, las fuerzas que actúan sobre el objeto suspendido son la fuerza gravitacional, la tensión en la cuerda de soporte y la resistencia del aire. a) ¿Cuál de estas fuerzas, si alguna, no realiza trabajo en el péndulo? b) ¿Cuál de estas fuerzas realiza trabajo negativo en todo momento durante su movimiento? c) Describa el trabajo que invierte la fuerza gravitacional mientras el péndulo oscila.

4. **O** Sea $\hat{\mathbf{N}}$ que representa la dirección horizontal al norte, $\widehat{\mathbf{NE}}$ que representa el noreste (la mitad entre norte y este), $\widehat{\mathbf{up}}$ representa la dirección vertical hacia arriba, etcétera. Cada especificación de dirección se considera como un vector unitario. Clasifique de mayor a menor los siguientes productos punto. Observe que cero es mayor que un número negativo. Si dos cantidades son iguales, muestre ese hecho en su clasificación. a) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{N}}$, b) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \widehat{\mathbf{NE}}$, c) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$, d) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, e) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \widehat{\mathbf{up}}$, f) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, g) $\widehat{\mathbf{SE}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$, h) $\widehat{\mathbf{up}} \cdot \widehat{\mathbf{down}}$.

5. ¿Para qué valores del ángulo θ entre dos vectores su producto escalar es a) positivo y b) negativo?

6. **O** La figura 7.9a muestra un resorte ligero extendido que ejerce una fuerza F_s hacia la izquierda sobre el bloque. **i)** ¿El bloque ejerce una fuerza sobre el resorte? Elija toda respuesta correcta. a) No, no lo hace. b) Sí, hacia la izquierda. c) Sí, hacia la derecha. d) Su magnitud es mayor que F_s. e) Su magnitud es igual a F_s. f) Su magnitud es menor que F_s. **ii)** ¿El resorte ejerce una fuerza sobre la pared? Elija toda respuesta correcta de la misma lista, de a) a f).

7. Cierto resorte uniforme tiene constante de resorte k. Ahora el resorte se corta a la mitad. ¿Cuál es la relación entre k y la constante de resorte k' de cada resorte más pequeño resultante? Explique su razonamiento.

8. ¿La energía cinética puede ser negativa? Explique.

9. Discuta el trabajo invertido por un pitcher que lanza una pelota de beisbol. ¿Cuál es la distancia aproximada a través de la cual actúa la fuerza mientras se lanza la pelota?

10. **O** La bala 2 tiene el doble de masa que la bala 1. Ambas se disparan de modo que tienen la misma rapidez. La energía cinética de la bala 1 es K. La energía cinética de la bala 2 es a) $0.25K$, b) $0.5K$, c) $0.71K$, d) K, e) $2K$, f) $4K$.

11. **O** Si la rapidez de una partícula se duplica, ¿qué ocurre con su energía cinética? a) Se vuelve cuatro veces mayor. b) Se vuelve dos veces mayor. c) Se vuelve $\sqrt{2}$ veces mayor. d) No cambia. e) Se vuelve la mitad.

12. Un estudiante tiene la idea de que el trabajo total invertido en un objeto es igual a su energía cinética final. ¿Este enunciado es cierto siempre, a veces o nunca? Si a veces es cierto, ¿bajo qué circunstancias? Si es siempre o nunca, explique por qué.

13. ¿Una fuerza normal puede realizar trabajo? Si no, ¿por qué no? Si sí, dé un ejemplo.

14. **O** ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de una partícula si el trabajo neto realizado sobre ella es cero? a) Es cero. b) Disminuye. c) No cambia. d) No se puede extraer una conclusión.

15. **O** Un carro se pone a rodar a través de una mesa a nivel, con la misma rapidez en cada pista. Si corre en un tramo de arena, el carro ejerce sobre la arena una fuerza horizontal promedio de 6 N y recorre una distancia de 6 cm a través de la arena conforme llega al reposo. **i)** Si en vez de ello el carro corre en un tramo de grava sobre la que ejerce una fuerza horizontal promedio de 9 N, ¿cuánto recorrerá el carro en la grava hasta detenerse? Elija una respuesta. a) 9 cm, b) 6 cm, c) 4 cm, d) 3 cm, e) ninguna de estas respuestas. **ii)** Si en vez de ello el carro corre en un tramo de harina, rueda 18 cm antes de detenerse. ¿Cuál es la magnitud promedio de la fuerza horizontal que el carro ejerce sobre la harina? a) 2 N, b) 3 N, c) 6 N, d) 18 N, e) ninguna de estas respuestas. **iii)** Si en vez de ello el carro corre sin obstáculo alguno, ¿cuánto recorrerá? a) 6 cm, b) 18 cm, c) 36 cm, d) una distancia infinita.

16. La energía cinética de un objeto depende del marco de referencia en el que se observa su movimiento. Dé un ejemplo para ilustrar este punto.

17. **O** Para estirar 10 cm desde su longitud sin deformar, se requieren 4 J para un resorte que se describe mediante la ley de Hooke. ¿Cuánto trabajo adicional se requiere para estirar el resorte 10 cm adicionales? Elija una: a) ninguna, b) 2 J, c) 4 J, d) 8 J, e) 12 J, f) 16 J.

18. Si sólo una fuerza externa actúa sobre una partícula, ¿necesariamente cambia la a) energía cinética de la partícula? b) ¿Su velocidad?

19. **O** **i)** Clasifique las aceleraciones gravitacionales que mediría para a) un objeto de 2 kg a 5 cm arriba del suelo, b) un objeto de 2 kg a 120 cm sobre el suelo, c) un objeto de 3 kg a 120 cm sobre el suelo y d) un objeto de 3 kg a 80 cm sobre el suelo. Mencione primero el que tiene aceleración con mayor magnitud. Si dos son iguales, muestre su igualdad en la lista. **ii)** Clasifique las fuerzas gravitacionales sobre los mismos cuatro objetos, primero la mayor magnitud. **iii)** Clasifique las energías potenciales gravitacionales (del sistema objeto–Tierra) para los mismos cuatro objetos, primero la mayor, y considere $y = 0$ en el suelo.

20. Se le encomienda regresar a sus anaqueles los libros de una biblioteca. Levante un libro del suelo hasta el anaquel superior. La energía cinética del libro sobre el suelo fue cero y la energía cinética del libro en el anaquel superior es cero, así que no ocurre cambio en la energía cinética aunque usted hizo algo de trabajo en levantar el libro. ¿Se violó el teorema trabajo–energía cinética?

21. Los músculos del cuerpo ejercen fuerzas cuando se levanta, empuja, corre, salta, etcétera. ¿Estas fuerzas son conservativas?

22. ¿Qué forma tendría la gráfica de U con x si una partícula estuviese en una región de equilibrio neutro?

23. **O** A un cubo de hielo se le da un empujón y se desliza sin fricción sobre una mesa a nivel. ¿Qué es correcto? a) Está en equilibrio estable. b) Está en equilibrio inestable. c) Está en equilibrio neutro. d) No está en equilibrio.

24. Para limpiarlas, usted quita todas las teclas removibles de un teclado de computadora. Cada tecla tiene la forma de una pequeña caja con un lado abierto. Por accidente, tira las teclas en el suelo. Explique por qué muchas más de ellas aterrizan con el lado de la letra hacia abajo que con el lado abierto.

25. ¿Quién estableció por primera vez el teorema trabajo–energía cinética? ¿Quién demostró que es útil al resolver muchos problemas prácticos? Realice una investigación para responder estas preguntas.

Problemas

Sección 7.2 Trabajo invertido por una fuerza constante

1. Un bloque de 2.50 kg de masa se empuja 2.20 m a lo largo de una mesa horizontal sin fricción por una fuerza constante de 16.0 N dirigida 25.0° debajo de la horizontal. Determine el trabajo invertido sobre el bloque por a) la fuerza aplicada, b) la fuerza normal que ejerce la mesa y c) la fuerza gravitacional. d) Determine el trabajo neto invertido en el bloque.

2. Una gota de lluvia de 3.35×10^{-5} kg de masa cae verticalmente con rapidez constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Modele la gota como partícula. Mientras cae 100 m, ¿cuál es el trabajo consumido en la gota a) por la fuerza gravitacional y b) por la resistencia del aire?

3. Batman, cuya masa es de 80.0 kg, está colgado en el extremo libre de una soga de 12.0 m, el otro extremo está fijo de la rama de un árbol arriba de él. Al flexionar repetidamente la cintura, hace que la soga se ponga en movimiento, y eventualmente la hace balancear lo suficiente para que pueda llegar a una repisa cuando la soga forma un ángulo de 60.0° con la vertical. ¿Cuánto trabajo invirtió la fuerza gravitacional en Batman en esta maniobra?

4. ● El objeto 1 empuja sobre el objeto 2 mientras se mueven juntos, como un buldózer que empuja una piedra. Suponga que el objeto 1 realiza 15.0 J de trabajo sobre el objeto 2. ¿El objeto 2 realiza trabajo sobre el objeto 1? Explique su respuesta. Si es posible, determine cuánto trabajo y explique su razonamiento.

Sección 7.3 Producto escalar de dos vectores

5. Para dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, demuestre que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$. *Sugerencia:* Escriba $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en forma de vectores unitarios y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5.

6. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 5.00 unidades y $\vec{\mathbf{B}}$ tiene una magnitud de 9.00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50.0° uno con el otro. Hallar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

Nota: En los problemas del 7 al 10, calcule respuestas numéricas a tres cifras significativas, como siempre.

7. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})$ actúa en una partícula que experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ m. Hallar a) el trabajo invertido por la fuerza en la partícula y b) el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

8. Encuentre el producto escalar de los vectores en la figura P7.8.

9. Con la definición del producto escalar, encuentre los ángulos entre los siguientes: a) $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$, b) $\vec{\mathbf{A}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, c) $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$.

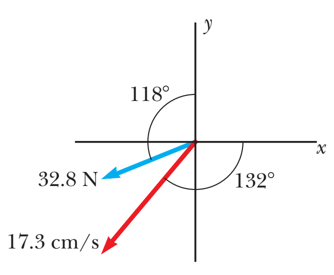


Figura P7.8

10. Para los vectores $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, encuentre $\vec{\mathbf{C}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}})$.

11. Sea $\vec{\mathbf{B}}$ = 5.00 m a 60.0°. Sea $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{\mathbf{A}}$ y un ángulo de dirección mayor que el de $\vec{\mathbf{A}}$ en 25.0°. Sea $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 30.0$ m^2 y $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 35.0$ m^2. Encuentre $\vec{\mathbf{A}}$.

Sección 7.4 Trabajo consumido por una fuerza variable

12. La fuerza que actúa en una partícula es $F_x = (8x - 16)$ N, donde x está en metros. a) Grafique esta fuerza con x desde $x = 0$ hasta $x = 3.00$ m. b) A partir de su gráfica, encuentre el trabajo neto realizado por esta fuerza sobre la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 3.00$ m.

13. La fuerza que actúa sobre una partícula varía como se muestra en la figura P7.13. Encuentre el trabajo invertido por la fuerza en la partícula conforme se mueve a) de $x = 0$ a $x = 8.00$ m, b) de $x = 8.00$ m a $x = 10.0$ m, y c) de $x = 0$ a $x = 10.0$ m.

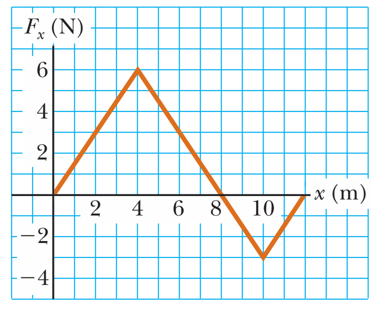


Figura P7.13

14. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (4x\hat{\mathbf{i}} + 3y\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre un objeto mientras el objeto se mueve en la dirección x desde el origen hasta $x = 5.00$ m. Encuentre el trabajo $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ invertido por la fuerza sobre el objeto.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

15. Una partícula se somete a una fuerza F_x que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. Encuentre el trabajo invertido por la fuerza en la partícula mientras se mueve a) de $x = 0$ a $x = 5.00$ m, b) de $x = 5.00$ a $x = 10.0$ m, y c) de $x = 10.0$ m a $x = 15.0$ m. d) ¿Cuál es el trabajo total invertido por la fuerza sobre la distancia $x = 0$ a $x = 15.0$ m?

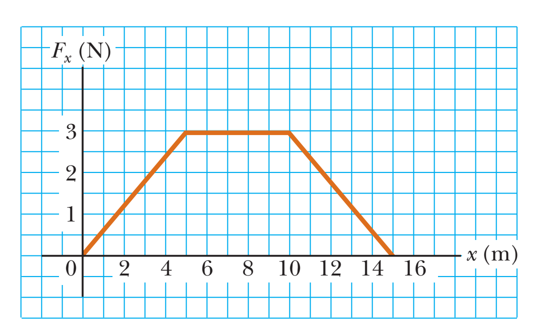


Figura P7.15 Problemas 15 y 32.

16. Un arquero jala hacia atrás la cuerda de su arco 0.400 m al ejercer una fuerza que aumenta uniformemente de cero a 230 N. a) ¿Cuál es la constante de resorte equivalente del arco? b) ¿Cuánto trabajo realiza el arquero al estirar su arco?

17. Cuando un objeto de 4.00 kg cuelga verticalmente en cierto resorte ligero descrito por la ley de Hooke, el resorte se estira 2.50 cm. Si se quita el objeto de 4.00 kg, a) ¿cuánto se estirará el resorte si se le cuelga un objeto de 1.50 kg? b) ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo para estirar el mismo resorte 4.00 cm desde su posición sin estirar?

18. La ley de Hooke describe cierto resorte ligero de 35.0 cm de longitud sin estirar. Cuando un extremo se une a la parte superior de un marco de puerta y del otro extremo se cuelga un objeto de 7.50 kg, la longitud del resorte es 41.5 cm. a) Encuentre su constante de resorte. b) La carga y el resorte se desmontan. Dos personas jalan en direcciones opuestas en los extremos del resorte, cada una con una fuerza de 190 N. Encuentre la longitud del resorte en esta situación.

19. En un sistema de control, un acelerómetro consiste de un objeto de 4.70 g que se desliza sobre un riel horizontal. Un resorte de masa pequeña une al objeto a una pestaña en un extremo del riel. La grasa en el riel hace despreciable la fricción estática, pero amortigua rápidamente las vibraciones del objeto deslizante. Cuando el acelerómetro se mueve con una aceleración estable de $0.800g$, el objeto llega a una posición 0.500 cm de su posición de equilibrio. Encuentre la constante de fuerza requerida para el resorte.

20. Un resorte ligero, con constante de fuerza 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm mientras se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha, ambos en reposo sobre una superficie horizontal. El resorte ejerce una fuerza en cada bloque, y tiende a separarlos. Los bloques se sueltan simultáneamente desde el reposo. Encuentre la aceleración con la que cada bloque comienza a moverse, dado que el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es a) 0, b) 0.100 y c) 0.462.

21. Un vagón de 6 000 kg rueda a lo largo de la vía con fricción despreciable. El vagón se lleva al reposo mediante una combinación de dos resortes en espiral, como se ilustra en la figura P7.21. Ambos resortes se describen mediante la ley de Hooke con $k_1 = 1\,600$ N/m y $k_2 = 3\,400$ N/m. Después de que el primer resorte se comprime una distancia de 30.0 cm, el segundo resorte actúa con el primero para aumentar la fuerza mientras se presenta una compresión adicional como se muestra en la gráfica. El vagón llega al reposo 50.0 cm después de que hace el primer contacto con el sistema de dos resortes. Encuentre la rapidez inicial del vagón.

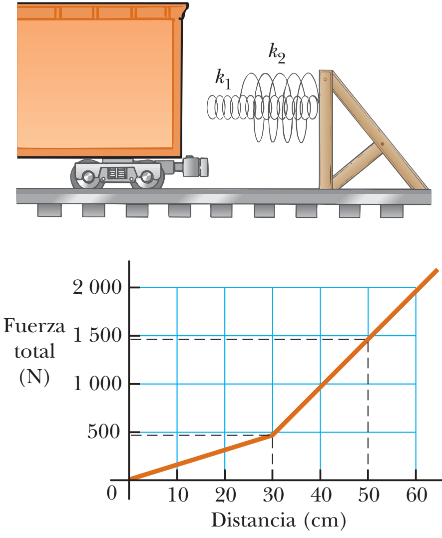


Figura P7.21

22. Se dispara una bala de 100 g de un rifle que tiene un cañón de 0.600 m de largo. Elija el origen como la ubicación donde la bala comienza a moverse. En tal caso la fuerza (en newtons) que ejercen sobre la bala los gases en expansión es $15\,000 + 10\,000x - 25\,000x^2$, donde x está en metros. a) Determine el trabajo invertido por el gas en la bala conforme la bala recorre la longitud del cañón. b) **¿Qué pasaría si?** Si el cañón mide 1.00 m de largo, ¿cuánto trabajo se consume y cómo se compara este valor con el trabajo calculado en el inciso a)?

23. Un resorte ligero, con constante de resorte 1 200 N/m, cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior cuelga un segundo resorte ligero, que tiene constante de resorte 1 800 N/m. Un objeto de 1.50 kg de masa cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. a) Encuentre la distancia de extensión total del par de resortes. b) Encuentre la constante de resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describa estos resortes como *en serie*.

24. Un resorte ligero, con constante de resorte k_1, cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior cuelga un segundo resorte ligero, que tiene constante de resorte k_2. Un objeto de masa m cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. a) Encuentre la distancia de extensión total del par de resortes. b) Encuentre la constante de resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describa estos resortes como *en serie*.

25. Una partícula pequeña de masa m se jala hacia lo alto de un medio cilindro sin fricción (de radio R) mediante una cuerda que pasa sobre lo alto del cilindro, como se ilustra en la figura P7.25. a) Si supone que la partícula se mueve con rapidez constante, demuestre que $F = mg\cos\theta$. *Nota:* Si la partícula se mueve con rapidez constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo momento. b) Mediante integración directa de $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, encuentre el trabajo invertido al mover la partícula con rapidez constante desde el fondo hasta lo alto del medio cilindro.

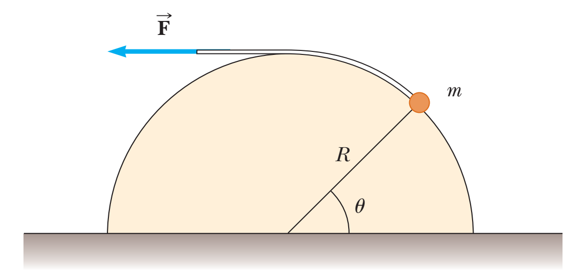


Figura P7.25

26. Exprese las unidades de la constante de fuerza de un resorte en unidades fundamentales del SI.

27. **Problema de repaso.** La gráfica de la figura P7.27 especifica una correspondencia funcional entre las dos variables *u* y *v*. a) Encuentre $\int_a^b u\,dv$. b) Encuentre $\int_b^a u\,dv$. c) Encuentre $\int_a^b v\,du$.

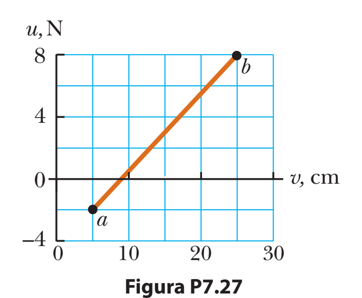


Figura P7.27

28. Un dispensador de charolas en una cafetería sostiene una pila de charolas sobre un anaquel que cuelga de cuatro resortes en espiral idénticos bajo tensión, uno cerca de cada esquina del anaquel. Cada charola es rectangular, de 45.3 cm por 35.6 cm, 0.450 cm de grosor y 580 g de masa. Demuestre que la charola superior en la pila siempre está a la misma altura sobre el piso, aunque haya muchas charolas en el dispensador. Encuentre la constante de resorte que cada uno debe tener para que el dispensador funcione en esta forma conveniente. ¿Alguna parte de la información es innecesaria para esta determinación?

Sección 7.5 Energía cinética y el teorema trabajo–energía cinética

29. Una partícula de 0.600 kg tiene una rapidez de 2.00 m/s en el punto Ⓐ y energía cinética de 7.50 J en el punto Ⓑ. ¿Cuáles son a) su energía cinética en Ⓐ, b) su rapidez en Ⓑ y c) el trabajo neto invertido en la partícula conforme se mueve de Ⓐ a Ⓑ?

30. Una bola de 0.300 kg tiene una rapidez de 15.0 m/s. a) ¿Cuál es su energía cinética? b) **¿Qué pasaría si?** Si su rapidez se duplica, ¿cuál sería su energía cinética?

31. Un objeto de 3.00 kg tiene una velocidad de $(6.00\,\hat{\mathbf{i}} - 2.00\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) ¿Cuál es su energía cinética en este momento? b) ¿Cuál es el trabajo neto invertido en el objeto si su velocidad cambia a $(8.00\,\hat{\mathbf{i}} + 4.00\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s? *Nota:* De la definición del producto punto, $v^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

32. Una partícula de 4.00 kg se somete a una fuerza neta que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. La partícula comienza a moverse en $x = 0$, muy cerca del reposo. ¿Cuál es su rapidez en a) $x = 5.00$ m, b) $x = 10.0$ m y c) $x = 15.0$ m?

33. Un martinete de 2 100 kg se usa para enterrar una viga I de acero en la tierra. El martinete cae 5.00 m antes de quedar en contacto con la parte superior de la viga. Después clava la viga 12.0 cm más en el suelo mientras llega al reposo. Aplicando consideraciones de energía, calcule la fuerza promedio que la viga ejerce sobre el martinete mientras éste llega al reposo.

34. ● Un carro de 300 g rueda a lo largo de una pista recta con velocidad de $0.600\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s en $x = 0$. Un estudiante sostiene un imán enfrente del carro para temporalmente jalar hacia adelante sobre él, en seguida el carro se desplaza hacia un montículo de arena que se convierte en una pequeña pila. Estos efectos se representan cuantitativamente mediante la gráfica de la componente *x* de la fuerza neta sobre el carro como una función de la posición, en la figura P7.34. a) ¿El carro rodará todo el camino hasta la pila de arena? Explique cómo puede decirlo. b) Si es así, encuentre la rapidez a la que sale en $x =$ 7.00 cm. Si no, ¿qué máxima coordenada *x* alcanza?

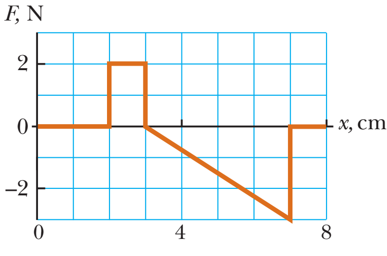


Figura P7.34

35. ● Se puede considerar al teorema trabajo–energía cinética como una segunda teoría de movimiento, paralela a las leyes de Newton, en cuanto que describe cómo las influencias externas afectan el movimiento de un objeto. En este problema, resuelva los incisos a) y b) por separado de los incisos c) y d), de modo que pueda comparar las predicciones de las dos teorías. En un cañón de rifle, una bala de 15.0 g acelera desde el reposo a una rapidez de 780 m/s. a) Encuentre el trabajo que se invierte en la bala. b) Si supone que el cañón del rifle mide 72.0 cm de largo, encuentre la magnitud de la fuerza neta promedio que actúa sobre él, como $\Sigma F = W/(\Delta r \cos\theta)$. c) Encuentre la aceleración constante de una bala que parte del reposo y gana una rapidez de 780 m/s en una distancia de 72.0 cm. d) Si supone ahora que la bala tiene 15.0 g de masa, encuentre la fuerza neta que actúa sobre ésta como $\Sigma F = ma$. e) ¿Qué conclusión puede extraer al comparar sus resultados?

36. En el cuello de la pantalla de cierto televisor blanco y negro, un cañón de electrones contiene dos placas metálicas cargadas, separadas 2.80 cm. Una fuerza eléctrica acelera cada electrón en el haz desde el reposo hasta 9.60% de la rapidez de la luz sobre esta distancia. a) Determine la energía cinética del electrón mientras deja el cañón de electrones. Los electrones portan esta energía a un material fosforescente en la superficie interior de la pantalla del televisor y lo hacen brillar. Para un electrón que pasa entre las placas en el cañón de electrones, determine, b) la magnitud de la fuerza eléctrica constante que actúa sobre el electrón, c) la aceleración y d) el tiempo de vuelo.

Sección 7.6 Energía potencial de un sistema

37. Un carro de montaña rusa, de 1 000 kg, inicialmente está en lo alto de un bucle, en el punto Ⓐ. Luego se mueve 135 pies a un ángulo de 40.0° bajo la horizontal, hacia un punto inferior Ⓑ. a) Elija el carro en el punto Ⓑ como la configuración cero para energía potencial gravitacional del sistema montaña rusa-

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

Tierra. Hallar la energía potencial del sistema cuando el carro está en los puntos Ⓐ y Ⓑ y el cambio en energía potencial conforme se mueve el carro. b) Repita el inciso a), pero haga la configuración cero con el carro en el punto Ⓐ.

38. Un niño de 400 N está en un columpio unido a cuerdas de 2.00 m de largo. Encuentre la energía potencial gravitacional del sistema niño–Tierra en relación con la posición más baja del niño cuando a) las cuerdas están horizontales, b) las cuerdas forman un ángulo de 30.0° con la vertical y c) el niño está en el fondo del arco circular.

Sección 7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

39. ● Una partícula de 4.00 kg se mueve desde el origen a la posición C, que tiene coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m (figura P7.39). Una fuerza en la partícula es la fuerza gravitacional que actúa en la dirección y negativa. Con la ecuación 7.3, calcule el trabajo invertido por la fuerza gravitacional en la partícula conforme va de O a C a lo largo de a) OAC, b) OBC y c) OC. Sus resultados deben ser idénticos. ¿Por qué?

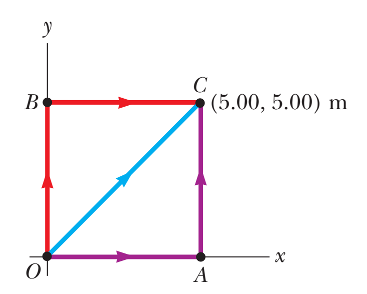


Figura P7.39 Problemas del 39 al 42.

40. a) Suponga que una fuerza constante actúa en un objeto. La fuerza no varía con el tiempo o con la posición o la velocidad del objeto. Comience con la definición general del trabajo invertido por una fuerza

$$W = \int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

y demuestre que la fuerza es conservativa. b) Como caso especial, suponga que la fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$ N actúa en una partícula que se mueve de O a C en la figura P7.39. Calcule el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula conforme se mueve a lo largo de cada una de las tres trayectorias OAC, OBC y OC. Compruebe que sus tres respuestas son idénticas.

41. ● Una fuerza que actúa en una partícula móvil en el plano xy se conoce por $\vec{\mathbf{F}} = (2y\hat{\mathbf{i}} + x^2\hat{\mathbf{j}})$ N, donde x y y están en metros. Las partículas se mueven desde la posición original a la final en las coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m como se muestra en la figura P7.39. Calcule el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula cuando ésta se mueve a lo largo de a) OAC, b) OBC y c) OC. d) $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativa o no conservativa.

42. ● Una partícula se mueve en el plano xy en la figura P7.39 bajo la influencia de una fuerza de fricción con 3.00 N de magnitud y actúa en dirección opuesta al desplazamiento de la partícula. Calcule el trabajo invertido por la fuerza de fricción en la partícula conforme se mueve a lo largo de las siguientes trayectorias cerradas: a) la trayectoria OA seguida por la trayectoria de regreso AO, b) la trayectoria OA seguida por AC y la trayectoria de regreso CO, y c) la trayectoria OC seguida por la trayectoria de regreso CO. d) Cada una de las tres respuestas es distinta de cero. ¿Cuál es el significado de esta observación?

Sección 7.8 Correspondencia entre fuerzas conservativas y energía potencial

43. Una sola fuerza conservativa actúa sobre una partícula de 5.00 kg. La ecuación $F_x = (2x + 4)$ N describe la fuerza, donde x está en metros. Conforme la partícula se mueve a lo largo del eje x, de $x = 1.00$ m a $x = 5.00$ m, calcule a) el trabajo invertido por esta fuerza en la partícula, b) el cambio en la energía potencial del sistema y c) la energía cinética que tiene la partícula en $x = 5.00$ m si su rapidez es 3.00 m/s en $x = 1.00$ m.

44. Una sola fuerza conservativa que actúa en una partícula varía como $\vec{\mathbf{F}} = (-Ax + Bx^2)\,\hat{\mathbf{i}}$ N, donde A y B son constantes y x está en metros. a) Calcule la función energía potencial $U(x)$ asociada con esta fuerza, y tome $U = 0$ en $x = 0$. b) Encuentre el cambio de energía potencial y el cambio de energía cinética del sistema conforme la partícula se traslada de $x = 2.00$ m a $x = 3.00$ m.

45. La energía potencial de un sistema de dos partículas separadas por una distancia r se conoce por $U(r) = A/r$, donde A es una constante. Encuentre la fuerza radial $\vec{\mathbf{F}}$ que cada partícula ejerce sobre la otra.

46. Una función energía potencial para una fuerza en dos dimensiones es de la forma $U = 3x^3y - 7x$. Encuentre la fuerza que actúa en el punto (x, y).

Sección 7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

47. Para la curva energía potencial que se muestra en la figura P7.47, a) determine si la fuerza F_x es positiva, negativa o cero en los cinco puntos indicados. b) Señale los puntos de equilibrio estable, inestable y neutro. c) Bosqueje la curva para F_x con x desde $x = 0$ hasta $x = 9.5$ m.

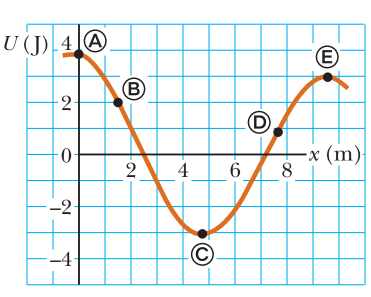


Figura P7.47

48. Un cono circular recto se puede equilibrar sobre una superficie horizontal en tres diferentes formas. Bosqueje estas tres configuraciones de equilibrio e identifíquelas como posiciones de equilibrio estable, inestable o neutro.

49. Una partícula de 1.18 kg de masa se une entre dos resortes idénticos en una mesa horizontal sin fricción. Ambos resortes tienen constante de resorte k e inicialmente no están estirados. a) La partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, como se muestra en la figura P7.49. Demuestre que la fuerza ejercida por los resortes sobre la partícula es

$$\vec{\mathbf{F}} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

b) Demuestre que la energía potencial del sistema es

$$U(x) = kx^2 + 2kL\left(L - \sqrt{x^2 + L^2}\right)$$

c) Elabore una gráfica de $U(x)$ en función de x e identifique todos los puntos de equilibrio. Suponga $L = 1.20$ m y $k = 40.0$ N/m. d) Si la partícula se jala 0.500 m hacia la derecha y después se libera, ¿cuál es su rapidez cuando llega al punto de equilibrio $x = 0$?

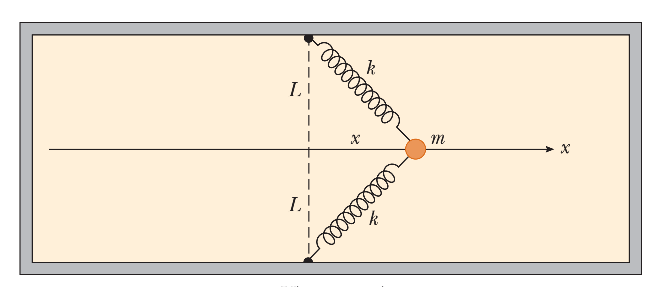


Figura P7.49

Problemas adicionales

50. Una bolita en el fondo de un tazón es un ejemplo de un objeto en posición de equilibrio estable. Cuando un sistema físico se desplaza en una cantidad x desde equilibrio estable, sobre él actúa una fuerza restauradora, que tiende a regresar al sistema su configuración de equilibrio. La magnitud de la fuerza restauradora puede ser una función complicada de x. Por ejemplo, cuando un ion en un cristal se desplaza de su sitio reticular, la fuerza restauradora puede no ser una simple función de x. En tales casos, por lo general se puede imaginar la función $F(x)$ como expresada por una serie de potencias en x como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots)$. Aquí, el primer término es la ley de Hooke, que describe la fuerza que ejerce un solo resorte para desplazamientos pequeños. Por lo general en pequeñas desviaciones desde el equilibrio se ignoran los términos de orden superior; sin embargo, en algunos casos, puede ser deseable mantener también el segundo término. Si la fuerza restauradora se representa como $F = -(k_1x + k_2x^2)$, ¿cuánto trabajo se invierte al desplazar el sistema de $x = 0$ a $x = x_{\text{máx}}$ mediante una fuerza aplicada $-F$?

51. Un jardinero de beisbol lanza una pelota de 0.150 kg con una rapidez de 40.0 m/s y un ángulo inicial de 30.0°. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota en el punto más alto de su trayectoria?

52. La constante de resorte del resorte de suspensión de un automóvil aumenta con la carga creciente debido a un muelle helicoidal que es más ancho en la base, y cambia de manera uniforme a un diámetro más pequeño cerca de la parte superior. El resultado es un viaje más suave sobre superficies de camino normal de los muelles helicoidales, pero el automóvil no va hasta abajo en los baches porque, cuando se colapsan los muelles inferiores, los muelles más rígidos cerca de lo alto absorben la carga. Para un resorte helicoidal piramidal que se comprime 12.9 cm con una carga de 1 000 N y 31.5 cm con una carga de 5 000 N, a) evalúe las constantes a y b en la ecuación empírica $F = ax^b$ y b) encuentre el trabajo necesario para comprimir el resorte 25.0 cm.

53. ● Un resorte ligero tiene una longitud sín estirar de 15.5 cm. Se describe mediante la ley de Hooke con constante de resorte 4.30 N/m. Un extremo del resorte horizontal se mantiene en un eje vertical fijo, y el otro extremo se une a un disco de masa m que se puede mover sin fricción sobre una superficie horizontal. El disco se pone en movimiento en un círculo con un periodo de 1.30 s. a) Encuentre la extensión del resorte x conforme depende de m. Evalúe x para b) $m = 0.070\,0$ kg, c) $m = 0.140$ kg, d) $m = 0.180$ kg y e) $m = 0.190$ kg. f) Describa el patrón de variación de x como dependiente de m.

54. Dos bolas de acero, cada una con 25.4 mm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5 m/s, corren una hacia la otra frontalmente y rebotan. a) ¿Su interacción dura sólo un instante o un intervalo de tiempo distinto de cero? Establezca su evidencia. Una de las bolas se comprime en una prensa de banco mientras se hacen mediciones precisas de la cantidad de compresión resultante. Los resultados muestran que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la bola. Para un dato, una fuerza de 16 kN ejercida por cada mandíbula de la prensa de banco resulta en una reducción de 0.2 mm en el diámetro de la bola. El diámetro regresa a su valor original cuando la fuerza se quita. b) Al modelar la bola como resorte, encuentre su constante de resorte. c) Calcule una estimación de la energía cinética de cada una de las bolas antes de chocar. En su solución, explique su lógica. d) Calcule una estimación para la cantidad máxima de compresión que cada bola experimenta cuando chocan. e) Calcule una estimación del orden de magnitud para el intervalo de tiempo durante el que están en contacto las bolas. En su solución, explique su razonamiento. (En el capítulo 15 aprenderá a calcular el tiempo de contacto preciso en este modelo.)

55. ● Considere $U = 5$ en $x = 0$ y calcule la energía potencial como función de x, correspondiente a la fuerza $(8e^{-2x})\hat{\mathbf{i}}$. Explique si la fuerza es conservativa o no conservativa y cómo puede decirlo.

56. La función energía potencial de un sistema se conoce por $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$. a) Determine la fuerza F_x como una función de x. b) ¿Para qué valores de x la fuerza es igual a cero? c) Grafique $U(x)$ con x y F_x en función de x e indique los puntos de equilibrio estable e inestable.

57. El lanzador de bola en una máquina de pinball tiene un resorte con una constante de fuerza de 1.20 N/cm (figura P7.57). La superficie sobre la que se mueve la bola está inclinada 10.0° respecto de la horizontal. El resorte inicialmente se comprime 5.00 cm. Encuentre la rapidez de lanzamiento de una bola de 100 g cuando se suelta el émbolo. La fricción y la masa del émbolo son despreciables.

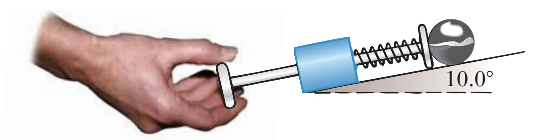


Figura P7.57

58. ● **Problema de repaso.** Dos fuerzas constantes actúan sobre un objeto de 5.00 kg que se mueve en el plano xy, como se muestra en la figura P7.58. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ es de 25.0 N a 35.0° y $\vec{\mathbf{F}}_2$ es de 42.0 N a 150°. En el tiempo $t = 0$, el objeto está en el origen y tiene velocidad $(4.00\hat{\mathbf{i}} + 2.50\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) Exprese las dos fuerzas en notación de vector unitario. Use notación de vectores unitarios para sus otras respuestas. b) Encuentre la fuerza total que se ejerce sobre el objeto. c) Encuentre la aceleración del objeto. Ahora, considere el instante $t = 3.00$ s, y encuentre d) la velocidad del objeto, e) su posición, f) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2$ y g) su energía cinética a

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$. h) ¿Qué conclusión puede extraer al comparar las respuestas a los incisos f) y g)?

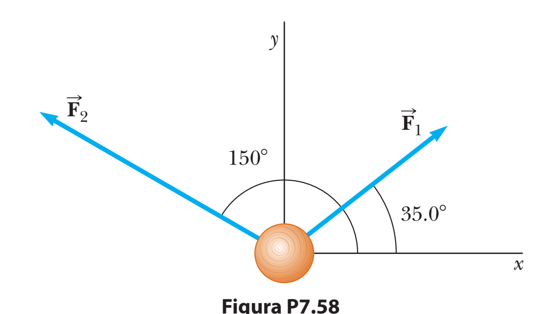


Figura P7.58

59. Una partícula se mueve a lo largo del eje x desde $x = 12.8$ m hasta $x = 23.7$ m bajo la influencia de una fuerza

$$F = \frac{375}{x^3 + 3.75x}$$

donde F está en newtons y x en metros. Con el uso de integración numérica, determine el trabajo invertido por esta fuerza en la partícula durante este desplazamiento. Su resultado debe ser exacto hasta 2%.

60. ● Cuando diferentes cargas cuelgan de un resorte, el resorte se estira a diferentes longitudes, como se muestra en la tabla siguiente. a) Elabore una gráfica de la fuerza aplicada con la extensión del resorte. Mediante ajuste por mínimos cuadrados, determine la línea recta que ajusta mejor los datos. ¿Quiere usar todos los datos o debe ignorar algunos de ellos? Explique. b) A partir de la pendiente de la línea de mejor ajuste, encuentre la constante de resorte k. c) El resorte se extiende a 105 mm. ¿Qué fuerza ejerce sobre el objeto suspendido?

F **(*N*)**	2.0	4.0	6.0	8.0	10	12	14	16	18	20	22
L **(mm)**	15	32	49	64	79	98	112	126	149	175	190

Respuestas a las preguntas rápidas

7.1 a). La fuerza no realiza trabajo sobre la Tierra porque la fuerza se dirige hacia el centro del círculo y por lo tanto es perpendicular a la dirección de su desplazamiento.

7.2 c), a), d), b). El trabajo realizado en c) es positivo y de mayor valor posible porque el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es cero. El trabajo invertido en a) es cero porque la fuerza es perpendicular al desplazamiento. En d) y b), la fuerza aplicada invierte trabajo negativo porque en ningún caso existe una componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. La situación b) es la de valor más negativo porque el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es 180°.

7.3 d). Debido al intervalo de valores de la función coseno, $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ tiene valores que varían de AB a $-AB$.

7.4 a). Puesto que el trabajo invertido al comprimir un resorte es proporcional al cuadrado de la distancia de compresión x, duplicar el valor de x hace que el trabajo aumente cuatro veces.

7.5 b). Ya que el trabajo es proporcional al cuadrado de la distancia de compresión x y la energía cinética es proporcional al cuadrado de la rapidez v, duplicar la distancia de compresión duplica la rapidez.

7.6 c). El signo de la energía potencial gravitacional depende de su elección de configuración cero. Si los dos objetos en el sistema están más juntos que en la configuración cero, la energía potencial es negativa. Si están más separados, la energía potencial es positiva.

7.7 **i**), c). Este sistema muestra cambios en energía cinética, así como en ambos tipos de energía potencial. **ii**), a). Puesto que la Tierra no se incluye en el sistema, no hay energía potencial gravitacional asociada con el sistema.

7.8 d). La pendiente de una gráfica $U(x)$ en función de x es por definición $dU(x)/dx$. De la ecuación 7.28, se ve que esta expresión es igual al negativo de la componente x de la fuerza conservativa que actúa sobre un objeto que es parte del sistema.



A medida que un esquiador se desliza por una colina, el sistema esquiador–nieve–Tierra experimenta cambios en energía cinética, en relación con la rapidez del esquiador; la energía potencial, en proporción con la altitud del esquiador; y la energía interna, en relación con la temperatura de los esquíes, la nieve y el aire. Si la energía total de este sistema se evaluara en varios instantes durante este proceso, el resultado sería el mismo en todo momento. Una aplicación del *principio de conservación de la energía*, a analizar en este capítulo, es que la energía total de un sistema aislado permanece constante. (© aaleksander/ Shutterstock)

8 Conservación de energía

En el capítulo 7 se presentaron tres métodos para almacenar energía en un sistema: energía cinética, asociada con el movimiento de los integrantes del sistema; energía potencial, determinada por la configuración del sistema y energía interna, que se relaciona con la temperatura del sistema.

Ahora se considera el análisis de situaciones físicas aplicando la aproximación de energía para dos tipos de sistemas: sistemas *no aislados* y *aislados*. Para sistemas no aislados se investigarán formas en que la energía cruza la frontera del sistema, lo que resulta en un cambio en la energía total del sistema. Este análisis conduce a un principio muy importante llamado *conservación de energía*. El principio de conservación de la energía se extiende más allá de la física y se aplica a organismos biológicos, sistemas tecnológicos y situaciones de ingeniería.

En los sistemas aislados la energía no cruza la frontera del sistema. Para dichos sistemas, la energía total del sistema es constante. Si dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se aplica la *conservación de energía mecánica* para resolver varios problemas.

Las situaciones que suponen la transformación de energía mecánica en energía interna debido a fuerzas no conservativas requieren un manejo especial. Se investigan los procedimientos para estos tipos de problemas.

Por último, se reconoce que la energía puede cruzar las fronteras de un sistema en diferentes cantidades. La rapidez de transferencia de energía se describe con la cantidad *potencia*.

8.1 El sistema no aislado: conservación de energía

Como se ha visto, un objeto que se representa como partícula pueden actuar fuerzas diferentes, resultando un cambio en su energía cinética. Esta situación muy simple es el primer ejemplo del modelo de un **sistema no aislado**, en él la energía cruza la frontera del sistema durante cierto intervalo de tiempo debido a una interacción con el medio ambiente. Este escenario es común en problemas de física. Si un sistema no interactúa con su medio ambiente, es un sistema aislado, que se estudiará en la sección 8.2.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 8.1

El calor no es una forma de energía

Por lo general la palabra *calor* se usa mal. El calor es un método de *transferencia* de energía, *no* una forma de almacenamiento de energía. En consecuencia, frases tales como "contenido de calor", "el calor del verano" y "el calor que escapó" representan usos de esta palabra que son inconsistentes con la definición física. Véase el capítulo 20.

El teorema trabajo–energía cinética del capítulo 7 es el primer ejemplo de una ecuación de energía adecuada para un sistema no aislado. En el caso de dicho teorema, la interacción del sistema con su entorno es el trabajo invertido por la fuerza externa, y la cantidad que cambia en el sistema es la energía cinética.

Hasta el momento sólo se ha visto una forma de transferir energía a un sistema: trabajo. Enseguida se mencionan otras formas de transferencia de energía hacia o desde un sistema. Los detalles de estos procesos se estudiarán en otras secciones del libro. En la figura 8.1 se ilustran mecanismos para transferir energía y se resumen del modo siguiente.

El **trabajo**, como aprendió en el capítulo 7, es un método para transferir energía hacia un sistema mediante la aplicación de una fuerza al sistema y causar un desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza (figura 8.1a).

Las **ondas mecánicas** (capítulos 16–18) son un medio de transferencia de energía al facilitar que una perturbación se propague a través del aire u otro medio. Es el método mediante el que la energía (que usted detecta como sonido) deja su radio reloj a través de la bocina y entra a sus oídos para estimular el proceso de audición (figura 8.1b). Otros ejemplos de ondas mecánicas son las ondas sísmicas y las ondas oceánicas.

El **calor** (capítulo 20) es un mecanismo de transferencia de energía que se activa mediante una diferencia de temperatura entre dos regiones del espacio. Por ejemplo, el mango de una cuchara dentro de una taza con café se calienta porque los electrones y átomos en movimiento constante en la parte sumergida de la cuchara chocan con los más lentos en la parte cercana del mango (figura 8.1c). Dichas partículas se mueven más rápido debido a las colisiones y chocan con el siguiente grupo de partículas lentas. Por lo tanto, la energía interna del mango de la cuchara se eleva a causa de la transferencia de energía debida a este proceso de colisión.

La **transferencia de materia** (capítulo 20) involucra situaciones en las cuales la materia cruza físicamente la frontera de un sistema, transportando energía. Los ejemplos inclu-

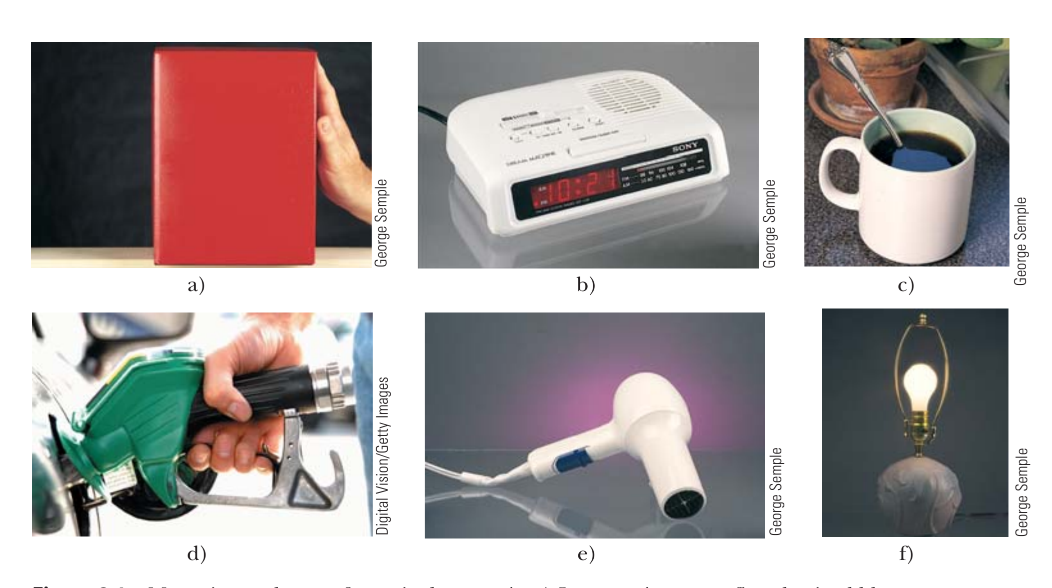


Figura 8.1 Mecanismos de transferencia de energía. a) La energía se transfiere hacia el bloque mediante *trabajo*; b) la energía deja el radio desde la bocina mediante *ondas mecánicas*; c) la energía se transfiere hacia el mango de la cuchara mediante *calor*; d) la energía entra al tanque de gasolina del automóvil mediante *transferencia de materia*; e) la energía entra a la secadora mediante *transmisión eléctrica*; y f) la energía sale del foco mediante *radiación electromagnética*.

yen llenar el tanque de su automóvil con gasolina (figura 8.1d) y transportar energía a las habitaciones de su hogar mediante circulación de aire caliente del horno, un proceso llamado *convección*.

La **transmisión eléctrica** (capítulos 27 y 28) es la transferencia de energía mediante corrientes eléctricas. Es como se transfiere energía en su secadora de pelo (figura 8.1e), sistema de sonido o cualquier otro dispositivo eléctrico.

La **radiación electromagnética** (capítulo 34) se refiere a las ondas electromagnéticas como la luz, microondas y ondas de radio (figura 8.1f). Los ejemplos de este método de transferencia incluyen cocinar una papa en su horno de microondas y la energía luminosa que viaja del Sol hacia la Tierra a través del espacio.[1]

Una característica central de la aproximación de energía es la noción de que no se puede crear ni destruir energía, la energía siempre *se conserva*. Esta característica se ha comprobado en incontables experimentos, y ningún experimento ha demostrado jamás que este enunciado sea incorrecto. Debido a eso, **si la cantidad total de energía en un sistema cambia, sólo es porque la energía cruzó la frontera del sistema mediante un mecanismo de transferencia, como alguno de los métodos mencionados anteriormente**. Este enunciado general del principio de **conservación de la energía** se describe matemáticamente como la **ecuación de conservación de energía** del modo siguiente:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T \qquad (8.1)$$

◄ Conservación de energía

donde E_{sistema} es la energía total del sistema, incluidos todos los métodos de almacenamiento de energía (cinética, potencial e interna) y T (por *transferencia*) es la cantidad de energía transferida a través de la frontera del sistema mediante algún mecanismo. Dos de los mecanismos de transferencia tienen notaciones simbólicas bien establecidas. Para trabajo, $T_{\text{trabajo}} = W$, como se discutió en el capítulo 7, y para calor, $T_{\text{calor}} = Q$, como se define en el capítulo 20. Los otros cuatro integrantes de la lista no tienen símbolos establecidos, así que se les llamará T_{OM} (ondas mecánicas), T_{TM} (transferencia de materia), T_{TE} (transmisión eléctrica) y T_{RE} (radiación electromagnética).

La expansión completa de la ecuación 8.1 es

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \qquad (8.2)$$

que es la representación matemática básica de la versión energética del **modelo de sistema no aislado**. (En capítulos posteriores se verán otras versiones, incluida la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular.) En la mayoría de los casos, la ecuación 8.2 se reduce a una mucho más simple, porque algunos de los términos son cero. Si, para un sistema conocido, todos los términos en el lado derecho de la ecuación de conservación de energía son cero, el sistema es un *sistema aislado*, que se estudia en la siguiente sección.

En teoría la ecuación de conservación de energía no es más complicada que llevar cuentas sanas en su chequera. Si su cuenta es el sistema, el cambio en el saldo para un mes determinado es la suma de todas las transferencias: depósitos, retiros, comisiones, intereses y cheques expedidos. ¡Puede resultarle útil pensar en la energía como la *moneda de la naturaleza*!

Suponga que se aplica una fuerza a un sistema no aislado y el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de un desplazamiento. Por lo tanto suponga que el único efecto sobre el sistema es cambiar su rapidez. En este caso, el único mecanismo de transferencia es el trabajo (de modo que el lado derecho de la ecuación 8.2 se reduce sólo a W) y la única clase de energía en el sistema que cambia es la energía cinética (de modo que $\Delta E_{\text{sistema}}$ se reduce sólo a ΔK). Por consiguiente la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta K = W$$

que es el teorema trabajo–energía cinética. Este teorema es un caso especial del principio más general de conservación de energía. Se verán varios casos especiales en capítulos futuros.

[1] La radiación electromagnética y el trabajo invertido por las fuerzas de campo son los únicos mecanismos de transferencia de energía que no requieren de moléculas del medio ambiente disponibles en la frontera del sistema. Debido a eso, los sistemas rodeados por un vacío (como los planetas) sólo intercambian energía con el medio ambiente mediante estas dos posibilidades.

Pregunta rápida 8.1 ¿Mediante qué mecanismos de transferencia la energía entra y sale de a) su televisor? b) ¿Su podadora a gasolina? c) ¿Su sacapuntas manual?

Pregunta rápida 8.2 Considere un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal con fricción. Ignore cualquier sonido que pueda producir el deslizamiento. **i)** Si el sistema es el *bloque*, este sistema es a) aislado, b) no aislado, c) imposible de determinar. **ii)** Si el sistema es la *superficie*, describa el sistema a partir del mismo conjunto de opciones. **iii)** Si el sistema es el *bloque y la superficie*, describa el sistema a partir del mismo conjunto de opciones.

8.2 El sistema aislado

En esta sección se estudia otro escenario muy común en problemas físicos: un **sistema aislado**, en él la energía no cruza la frontera del sistema por ningún método. En primer término se considera una situación gravitacional. Piense en el sistema libro–Tierra de la figura 7.15 en el capítulo anterior. Después de levantar el libro, existe energía potencial gravitacional almacenada en el sistema, que se calcula a partir del trabajo invertido por el agente externo en el sistema, con $W = \Delta U_g$.

Ahora ponga su atención al trabajo invertido solo por la fuerza gravitacional en el libro (figura 8.2) a medida que el libro cae de regreso a su altura original. Mientras el libro cae de y_i a y_f, el trabajo invertido por la fuerza gravitacional en el libro es

$$W_{\text{sobre el libro}} = (m\vec{\mathbf{g}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (-mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_i - mgy_f \quad \textbf{(8.3)}$$

A partir del teorema trabajo–energía cinética del capítulo 7, el trabajo invertido en el libro es igual al cambio en la energía cinética del libro:

$$W_{\text{sobre el libro}} = \Delta K_{\text{libro}}$$

Se pueden igualar estas dos expresiones para el trabajo invertido en el libro:

$$\Delta K_{\text{libro}} = mgy_i - mgy_f \quad \textbf{(8.4)}$$

Ahora relacione cada lado de esta ecuación con el *sistema* del libro y la Tierra. Para el lado derecho,

$$mgy_i - mgy_f = -(mgy_f - mgy_i) = -\Delta U_g$$

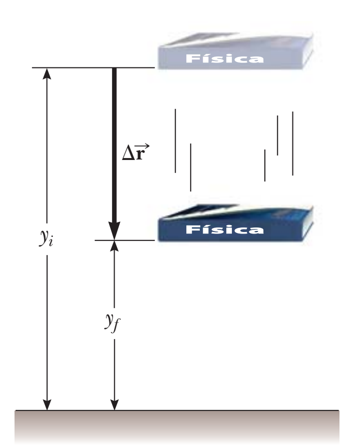


Figura 8.2 El trabajo invertido por la fuerza gravitacional en el libro a medida que el libro cae de y_i a una altura y_f es igual a $mgy_i - mgy_f$.

donde $U_g = mgy$ es la energía potencial gravitacional del sistema. Para el lado izquierdo de la ecuación 8.4, ya que el libro es la única parte del sistema que es móvil, se ve que $\Delta K_{\text{libro}} = \Delta K$, donde K es la energía cinética del sistema. Por lo tanto, con cada lado de la ecuación 8.4 sustituido con su equivalente de sistema, la ecuación se convierte en

$$\Delta K = -\Delta U_g \quad \textbf{(8.5)}$$

Esta ecuación se manipula para proporcionar un resultado general muy importante para resolver problemas. Primero, el cambio en energía potencial se mueve al lado izquierdo de la ecuación:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

El lado izquierdo representa una suma de cambios de la energía almacenada en el sistema. El lado derecho es cero porque no hay transferencias de energía a través de la frontera del sistema; el sistema libro–Tierra está *aislado* del medio ambiente. Esta ecuación se desarrolló para un sistema gravitacional, pero se demuestra su validez para un sistema con cualquier tipo de energía potencial. En consecuencia, para un sistema aislado,

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \textbf{(8.6)}$$

En el capítulo 7 se definió la suma de las energías cinética y potencial de un sistema como su energía mecánica:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \qquad \textbf{(8.7)}$$

◀ Energía mecánica de un sistema

donde U representa el total de *todos* los tipos de energía potencial. Ya que el sistema bajo consideración está aislado, las ecuaciones 8.6 y 8.7 dicen que la energía mecánica del sistema se conserva:

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \qquad \textbf{(8.8)}$$

◀ La energía mecánica de un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en actuación se conserva

La ecuación 8.8 es un enunciado de la **conservación de energía mecánica** para un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en actuación. La energía mecánica en tal sistema se conserva: la suma de las energías cinética y potencial permanece constante.

Si hay fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, la energía mecánica se transforma en energía interna como se discutió en la sección 7.7. Si fuerzas no conservativas actúan en un sistema aislado, la energía total del sistema se conserva aunque no la energía mecánica. En este caso, la conservación de energía del sistema se expresa como

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \qquad \textbf{(8.9)}$$

◀ La energía total de un sistema aislado se conserva

donde E_{sistema} incluye todas las energías cinética, potencial e interna. Esta ecuación es el enunciado más general del **modelo de sistema aislado**.

Ahora escriba explícitamente los cambios en energía en la ecuación 8.6:

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i \qquad \textbf{(8.10)}$$

Para la situación gravitacional del libro que cae, la ecuación 8.10 se reescribe como

$$\tfrac{1}{2}mv_f^{\,2} + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^{\,2} + mgy_i$$

Mientras el libro cae hacia la Tierra, el sistema libro–Tierra pierde energía potencial y gana energía cinética tal que el total de las dos clases de energía siempre permanece constante.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 8.2

Condiciones para la ecuación 8.10

La ecuación 8.10 sólo es verdadera para un sistema en el que actúan fuerzas conservativas. Se verá cómo manipular fuerzas no conservativas en las secciones 8.3 y 8.4.

Pregunta rápida 8.3 Una roca de masa m se deja caer hacia el suelo desde una altura h. Una segunda roca, con masa $2m$, se deja caer desde la misma altura. Cuando la segunda roca golpea el suelo, ¿cuál es su energía cinética? a) el doble de la primera roca, b) cuatro veces la de la primera roca, c) la misma que en la primera roca, d) la mitad de la primera roca e) imposible de determinar.

Pregunta rápida 8.4 Tres bolas idénticas se lanzan desde lo alto de un edificio, todas con la misma rapidez inicial. Como se muestra en la figura 8.3, la primera se lanza horizontalmente, la segunda a cierto ángulo sobre la horizontal y la tercera a cierto ángulo bajo la horizontal. Desprecie la resistencia del aire y clasifique las magnitudes de velocidad de las bolas en el instante en que cada una golpea el suelo.

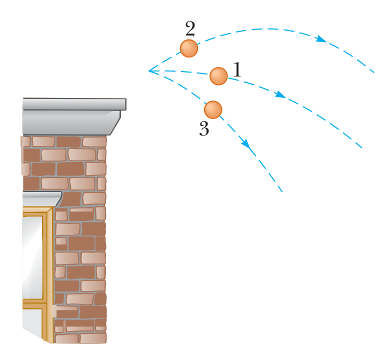


Figura 8.3 (Pregunta rápida 8.4) Tres bolas idénticas se lanzan con la misma rapidez inicial desde lo alto de un edificio.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Sistemas aislados sin fuerzas no conservativas: conservación de energía mecánica**

Muchos problemas en física se resuelven con el principio de conservación de la energía para un sistema aislado. El siguiente procedimiento se debe usar cuando aplique este principio:

1. *Conceptualizar.* Estudie cuidadosamente la situación física y forme una representación mental de lo que ocurre. A medida que se vuelva más hábil al trabajar problemas de energía, comenzará a sentirse cómodo al imaginar las clases de energía que cambian en el sistema.

2. *Categorizar*. Defina su sistema, quizá consista en más de un objeto y puede o no incluir resortes u otras posibilidades para almacenar energía potencial. Determine si se presenta alguna transferencia de energía a través de la frontera de su sistema. Si es así, aplique el modelo de sistema no aislado, $\Delta E_{\text{sistema}} = \Sigma\, T$, de la sección 8.1. Si no, aplique el modelo de sistema aislado, $\Delta E_{\text{sistema}} = 0$.

   Determine si dentro del sistema hay presentes fuerzas no conservativas. Si es así, use las técnicas de las secciones 8.3 y 8.4. Si no, aplique más adelante el principio de conservación de energía mecánica que se reseña.

3. *Analizar*. Elija configuraciones para representar las condiciones inicial y final del sistema. Para cada objeto que cambie elevación, seleccione una posición de referencia para el objeto que defina la configuración cero de energía potencial gravitacional para el sistema. Para un objeto en un resorte, la configuración cero para energía potencial elástica es cuando el objeto está en su posición de equilibrio. Si existe más de una fuerza conservativa, escriba una expresión para la energía potencial asociada con cada fuerza.

   Escriba la energía mecánica inicial total E_i del sistema para alguna configuración como la suma de las energías cinética y potencial asociadas con la configuración. Después escriba una expresión similar para la energía mecánica total E_f del sistema para la configuración final que es de interés. Ya que la energía mecánica se *conserva*, iguale las dos energías totales y resuelva para la cantidad que se desconoce.

4. *Finalizar*. Asegúrese de que sus resultados sean consistentes con su representación mental. También cerciórese de que los valores de sus resultados son razonables y consistentes con experiencias cotidianas.

EJEMPLO 8.1 **Bola en caída libre**

Una bola de masa m se deja caer desde una altura h sobre el suelo, como se muestra en la figura 8.4.

A) Ignore la resistencia del aire y determine la rapidez de la bola cuando está a una altura y sobre el suelo.

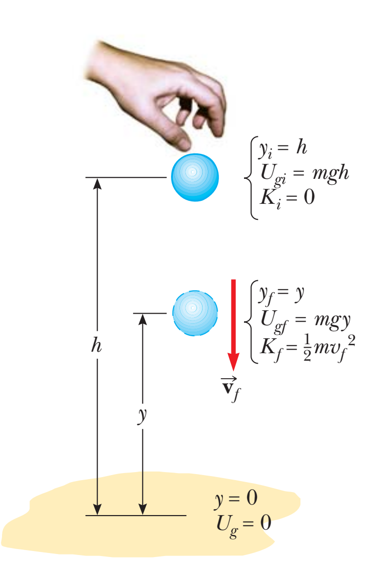


Figura 8.4 (Ejemplo 8.1) Una bola se deja caer desde una altura h sobre el suelo. Al inicio, la energía total del sistema bola–Tierra es energía potencial gravitacional, igual a mgh en relación con el suelo. En la elevación y, la energía total es la suma de las energías cinética y potencial.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 8.4 y la experiencia cotidiana con objetos que caen permiten formar ideas de la situación. Aunque este problema se resuelve fácilmente con las técnicas del capítulo 2, practique la aproximación de energía.

Categorizar El sistema se identifica como la bola y la Tierra. Ya que no hay ni resistencia del aire ni alguna otra interacción entre el sistema y el medio ambiente, el sistema es aislado. La única fuerza entre los integrantes del sistema es la fuerza gravitacional, que es conservativa.

Analizar Ya que el sistema es aislado y no existen fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, se aplica el principio de conservación de energía mecánica al sistema bola–Tierra. En el instante cuando la bola se libera, su energía cinética es $K_i = 0$ y la energía potencial gravitacional del sistema es $U_{gi} = mgh$. Cuando la bola está a una distancia y sobre el suelo, su energía cinética es $K_f = \frac{1}{2}\, mv_f^2$ y la energía potencial en relación con el suelo es $U_{gf} = mgy$.

Aplique la ecuación 8.10:

$$K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy = 0 + mgh$$

Resuelva para v_f: $$v_f^2 = 2g(h - y) \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

La rapidez siempre es positiva. Si se le pidió hallar la velocidad de la bola, usará el valor negativo de la raíz cuadrada como la componente y para indicar el movimiento hacia abajo.

B) Determine la rapidez de la bola en y si en el instante de liberación ya tiene una rapidez inicial hacia arriba v_i en la altitud inicial h.

SOLUCIÓN

Analizar En este caso, la energía inicial incluye energía cinética igual a $\frac{1}{2}mv_i^2$.

Aplique la ecuación 8.10: $$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh$$

Resuelva para v_f: $$v_f^2 = v_i^2 + 2g(h - y) \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h - y)}$$

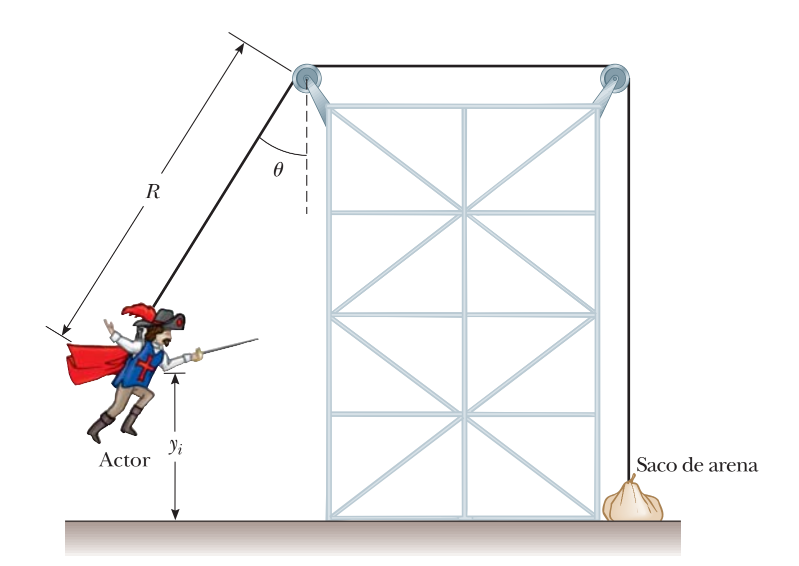
Finalizar Este resultado para la rapidez inicial es consistente con la expresión $v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$ de cinemática, donde $y_i = h$. Además, este resultado es válido incluso si la velocidad inicial está en un ángulo con la horizontal (pregunta rápida 8.4) por dos argumentos: 1) la energía cinética, un escalar, sólo depende de la magnitud de la velocidad; y 2) el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema sólo depende del cambio en la posición de la bola en la dirección vertical.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ en inciso B) fuese hacia abajo? ¿Cómo afectaría esto a la rapidez de la bola en la posición y?

Respuesta Puede afirmar que lanzar la bola hacia abajo resultaría en una mayor rapidez en y que si la lanza hacia arriba. Sin embargo, la conservación de la energía mecánica depende de las energías cinética y potencial, que son escalares. En consecuencia, la dirección del vector velocidad inicial no tiene conexión con la rapidez final.

EJEMPLO 8.2 **Una gran entrada**

Se le pide diseñar un aparato para sostener a un actor de 65 kg de masa que "volará" hacia el escenario durante la representación de una obra. Usted sujeta el arnés del actor a un saco de arena de 130 kg mediante un cable de acero ligero que corre de manera uniforme en dos poleas sin fricción, como en la figura 8.5a. Necesita 3.0 m de cable entre el arnés y la polea más cercana, de modo que quede oculta detrás de una cortina. Para que el aparato funcione, el saco de arena nunca debe levantarse arriba del suelo mientras el actor se balancea desde arriba del escenario hacia el suelo. Llame θ al ángulo inicial que el cable del actor forma con la vertical. ¿Cuál es el valor máximo θ que tiene antes de que el saco de arena se levante del suelo?



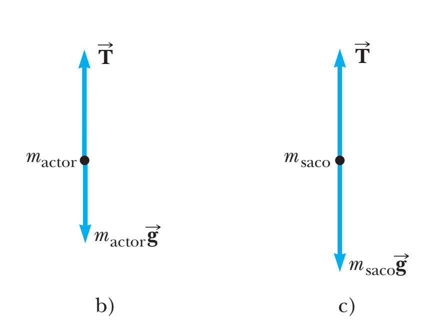


Figura 8.5 (Ejemplo 8.2) a) Un actor usa una armazón para hacer su entrada. b) Diagrama de cuerpo libre para el actor en el fondo de la trayectoria circular. c) Diagrama de cuerpo libre para el saco de arena si la fuerza normal desde el suelo tiende a cero.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se deben usar muchos conceptos para resolver este problema. Piense lo que sucede conforme el actor se aproxima a la parte baja del balanceo. En la parte baja, el cable es vertical y debe soportar su peso, así como proporcionar aceleración centrípeta de su cuerpo en la dirección hacia arriba. En este punto, la tensión en el cable es la más alta y el saco de arena tiene más probabilidades de levantarse del suelo.

Categorizar Primero, al observar el balanceo del actor desde el punto inicial hasta el punto más bajo, se modela al actor y a la Tierra como un sistema aislado. Se ignora la resistencia del aire, de modo que no hay fuerzas no conservativas en acción. En principio debe estar tentado a modelar el sistema como no aislado, debido a la interacción del sistema con el cable, que está en el entorno. Sin embargo, la fuerza aplicada al actor por el cable siempre es perpendicular a cada elemento del desplazamiento del actor y por tanto no realiza trabajo. En consecuencia, en términos de transferencias de energía a través de la frontera, el sistema está aislado.

Analizar Se aplica el principio de conservación de energía mecánica para el sistema con el fin de encontrar la rapidez del actor a medida que llega al suelo como función del ángulo inicial θ y el radio R de la trayectoria circular que recorre.

Aplique conservación de energía mecánica al sistema actor–Tierra:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Sea y_i la altura inicial del actor sobre el suelo y v_f su rapidez en el instante antes de aterrizar. (Observe que $K_i = 0$ porque el actor parte del reposo y que $U_f = 0$ porque la configuración del actor en el suelo se define con energía potencial gravitacional cero.)

$$1) \quad \tfrac{1}{2}m_{\text{actor}}\, v_f^2 + 0 = 0 + m_{\text{actor}}\, g y_i$$

De la geometría en la figura 8.5a, observe que $y_f = 0$, de modo que $y_i = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$. Aplique esta correspondencia en la ecuación 1) y resuelva para v_f^2:

$$2) \quad v_f^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

Categorizar A continuación, concentrese en el instante cuando el actor está en el punto más bajo. Ya que la tensión en el cable se transfiere como una fuerza aplicada al saco de arena, en este instante el actor se modela como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar Aplique la segunda ley de Newton al actor en la parte baja de su trayectoria, con el diagrama de cuerpo libre de la figura 8.5b como guía:

$$\sum F_y = T - m_{\text{actor}}\, g = m_{\text{actor}}\frac{v_f^2}{R}$$

$$3) \quad T = m_{\text{actor}}\, g + m_{\text{actor}}\frac{v_f^2}{R}$$

Categorizar Por último, observe que el saco de arena se levanta del suelo cuando la fuerza hacia arriba que el cable ejerce sobre él supera la fuerza gravitacional que también actúa sobre él; la fuerza normal es cero cuando esto ocurre. Sin embargo, *no* se quiere que el saco de arena se levante del suelo. El saco de arena debe permanecer en reposo, así que se le modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Una fuerza T de la magnitud dada por la ecuación 3) se transmite mediante el cable al saco de arena. Si el saco de arena permanece en reposo, pero puede levantarse del suelo si el cable aplica un poco más de fuerza, la fuerza normal sobre él se vuelve cero y la segunda ley de Newton con $a = 0$ dice que $T = m_{\text{saco}}g$, como en la figura 8.5c.

Use esta condición, junto con las ecuaciones 2) y 3):

$$m_{\text{saco}}g = m_{\text{actor}}g + m_{\text{actor}}\frac{2gR(1 - \cos\theta)}{R}$$

Resuelva para $\cos\theta$ y sustituya los parámetros que se proporcionan:

$$\cos\theta = \frac{3m_{\text{actor}} - m_{\text{saco}}}{2m_{\text{actor}}} = \frac{3(65\text{ kg}) - 130\text{ kg}}{2(65\text{ kg})} = 0.50$$

$$\theta = \boxed{60°}$$

Finalizar En este caso se combinaron técnicas de diferentes áreas de estudio, energía y segunda ley de Newton. Además, observe que la longitud R del cable desde el arnés del actor hasta la polea de la izquierda no aparece en la ecuación algebraica final. Por tanto, la respuesta final es independiente de R.

EJEMPLO 8.3 El rifle de juguete cargado por resorte

El mecanismo de lanzamiento de un rifle de juguete consiste en un resorte de constante de resorte desconocida (figura 8.6a). Cuando el resorte se comprime 0.120 m, y se dispara verticalmente el rifle, es capaz de lanzar un proyectil de 35.0 g a una altura máxima de 20.0 m arriba de la posición cuando el proyectil deja el resorte.

A) Ignore todas las fuerzas resistivas y determine la constante de resorte.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el proceso que se ilustra en la figura 8.6. El proyectil parte del reposo, aumenta su velocidad conforme el resorte lo empuja hacia arriba, deja el resorte y después disminuye su velocidad mientras la fuerza gravitacional lo jala hacia abajo.

Categorizar El sistema se identifica como el proyectil, el resorte y la Tierra. Se ignoran la resistencia del aire sobre el proyectil y la fricción en el rifle; de esa manera el sistema se modela como aislado sin fuerzas no conservativas en acción.

Analizar Puesto que el proyectil parte del reposo, su energía cinética inicial es cero. La configuración cero para la energía potencial gravitacional del sistema se elige cuando el proyectil deja el resorte. Para esta configuración, la energía potencial elástica también es cero.

Después de disparar el rifle, el proyectil se eleva a una altura máxima $y_{Ⓒ}$. La energía cinética final del proyectil es cero.

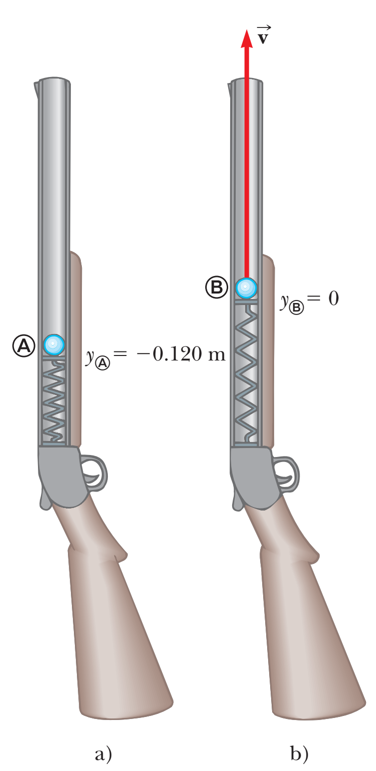
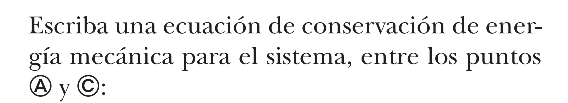
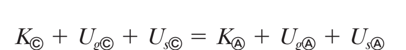


Figura 8.6 (Ejemplo 8.3) Rifle de juguete cargado por resorte a) antes de disparar y b) cuando el resorte se extiende a su longitud relajada.



Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema, entre los puntos Ⓐ y Ⓒ:



$$K_{Ⓒ} + U_{gⒸ} + U_{sⒸ} = K_{Ⓐ} + U_{gⒶ} + U_{sⒶ}$$

Sustituya para cada energía:

$$0 + mgy_{Ⓒ} + 0 = 0 + mgy_{Ⓐ} + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Resuelva para k:

$$k = \frac{2mg(y_{Ⓒ} - y_{Ⓐ})}{x^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$k = \frac{2(0.035\,0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)[20.0 \text{ m} - (-0.120 \text{ m})]}{(0.120 \text{ m})^2} = \boxed{958 \text{ N/m}}$$

B) Hallar la rapidez del proyectil a medida que se traslada a través de la posición de equilibrio del resorte, como se muestra en la figura 8.6b.

SOLUCIÓN

Analizar La energía del sistema a medida que el proyectil se traslada a través de la posición de equilibrio del resorte, sólo incluye la energía cinética del proyectil $\frac{1}{2}mv_{Ⓑ}^2$.

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema, entre los puntos Ⓐ y Ⓑ:

$$K_{Ⓑ} + U_{gⒷ} + U_{sⒷ} = K_{Ⓐ} + U_{gⒶ} + U_{sⒶ}$$

Sustituya para cada energía: $\frac{1}{2}mv_{Ⓑ}^2 + 0 + 0 = 0 + mgy_{Ⓐ} + \frac{1}{2}kx^2$

Resuelva para $v_{Ⓑ}$: $v_{Ⓑ} = \sqrt{\frac{kx^2}{m} + 2gy_{Ⓐ}}$

Sustituya valores numéricos: $v_{Ⓑ} = \sqrt{\frac{(958 \text{ N/m})(0.120 \text{ m})^2}{(0.035\,0 \text{ kg})} + 2(9.80 \text{ m/s}^2)(-0.120 \text{ m})} = 19.8 \text{ m/s}$

Finalizar Este es el primer ejemplo en el que se han incluido dos tipos de energía potencial.

8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

Considere de nuevo el libro de la figura 7.18 que se desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y disminuye su velocidad debido a la fuerza de fricción. La fuerza de fricción invierte trabajo porque hay una fuerza y un desplazamiento. Sin embargo, tenga en mente que las ecuaciones para trabajo incluyen el desplazamiento *del punto de aplicación de la fuerza*. En la figura 8.7a se muestra un modelo simple de la fuerza de fricción entre el libro y la superficie. Toda la fuerza de fricción entre el libro y la superficie se representa con dos dientes idénticos que se soldaron puntualmente uno con otro.[2] Un diente se proyecta hacia arriba desde la superficie, el otro hacia abajo desde el libro, y están soldados en los puntos donde se tocan. La fuerza de fricción actúa en la unión de los dos dientes. Piense que el libro se desliza una pequeña distancia d hacia la derecha, como en la figura 8.7b. Ya que los dientes se modelan como idénticos, su unión se mueve hacia la derecha una distancia $d/2$. En consecuencia, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción es $d/2$, ¡pero el desplazamiento del libro es d!

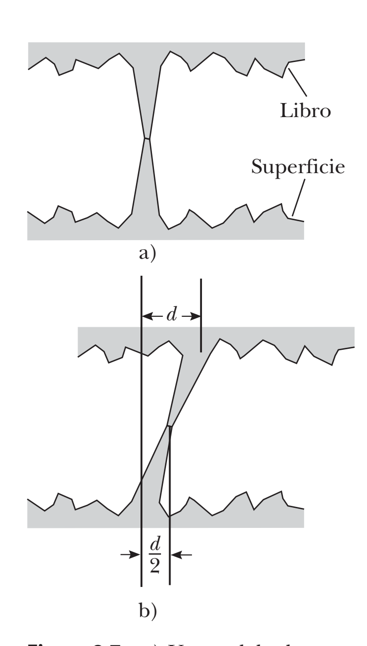


Figura 8.7 a) Un modelo de fricción simplificado entre un libro y una superficie. Toda la fuerza de fricción se modela como aplicada a la interfaz entre dos dientes idénticos que se proyectan del libro y la superficie. b) El libro se mueve hacia la derecha una distancia d. El punto de aplicación de la fuerza de fricción se mueve a través de una desplazamiento de magnitud $d/2$.

En realidad, la fuerza de fricción se dispersa sobre toda el área de contacto de un objeto que se desliza sobre una superficie, de modo que la fuerza no se localiza en un punto. Además, ya que las magnitudes de las fuerzas de fricción en varios puntos cambian constantemente a medida que se presentan los puntos de soldadura individuales, la superficie y el libro se deforman de manera local, y de este modo el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción no es en absoluto el mismo que el desplazamiento del libro. De hecho, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción no es calculable y tampoco lo es el trabajo invertido por la fuerza de fricción.

El teorema trabajo–energía cinética es válido para una partícula o un objeto que se modela como partícula. No obstante, cuando actúa una fuerza de fricción, no se puede calcular el trabajo invertido por la fricción. Para tales situaciones, la segunda ley de Newton todavía es válida para el sistema aun cuando el teorema trabajo–energía cinética no lo sea. El caso de un objeto no deformable como el libro que se desliza sobre la superficie[3] se puede manejar de una manera relativamente directa.

A partir de una situación en la que fuerzas, incluida la fricción, aplicadas al libro, es posible seguir un procedimiento similar al efectuado en el desarrollo de la ecuación 7.17. Comience por escribir la ecuación 7.8 para todas las fuerzas distintas de la fricción:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(8.11)}$$

El $d\vec{\mathbf{r}}$ en esta ecuación es el desplazamiento del objeto porque, para fuerzas distintas de la fricción, bajo la suposición de que dichas fuerzas no deforman el objeto, este desplazamiento es el mismo que el desplazamiento del punto de aplicación de las fuerzas.

[2] La figura 8.7 y su discusión se inspiraron en un artículo clásico acerca de fricción: B.A. Sherwood y W.H. Bernard, "Work and heat transfer in the presence of sliding friction", *American Journal of Physics*, 52 p. 1001, 1984.

[3] La forma global del libro permanece igual, por lo que se dice que es indeformable. Sin embargo, a nivel microscópico, existe deformación de la cara del libro cuando se desliza sobre la superficie.

A cada lado de la ecuación 8.11 se añade la integral del producto escalar de la fuerza de fricción cinética y $d\vec{\mathbf{r}}$:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

$$= \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}} + \vec{\mathbf{f}}_k\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

El integrando en el lado derecho de esta ecuación es la fuerza neta $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}}$, de modo que

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Al incorporar la segunda ley de Newton $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ se obtiene

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int m\vec{\mathbf{a}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int m\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{t_i}^{t_f} m\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}\,dt \qquad \textbf{(8.12)}$$

donde se usó la ecuación 4.3 para rescribir $d\vec{\mathbf{r}}$ como $\vec{\mathbf{v}}\,dt$. El producto escalar obedece la regla del producto para la derivación (véase la ecuación B.30 en el apéndice B.6), de modo que la derivada del producto escalar de $\vec{\mathbf{v}}$ consigo misma se puede escribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = 2\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

donde se usó la propiedad conmutativa del producto escalar para justificar la expresión final en esta ecuación. En consecuencia,

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \tfrac{1}{2}\,\frac{dv^2}{dt}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 8.12 se obtiene

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{t_i}^{t_f} m\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{dv^2}{dt}\right)dt = \tfrac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} d(v^2) = \tfrac{1}{2}mv_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_i^{\,2} = \Delta K$$

Al observar el lado izquierdo de esta ecuación, observe que, en el marco inercial de la superficie, $\vec{\mathbf{f}}_k$ y $d\vec{\mathbf{r}}$ estarán en direcciones opuestas para cada incremento $d\vec{\mathbf{r}}$ de la trayectoria que sigue el objeto. En consecuencia, $\vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -f_k\,dr$. Ahora la expresión anterior se convierte en

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - \int f_k\,dr = \Delta K$$

En el modelo para la fricción, la magnitud de la fuerza de fricción cinética es constante, de modo de f_k se puede sacar de la integral. La integral restante $\int dx$ es simplemente la suma de incrementos de longitud a lo largo de la trayectoria, que es la longitud de trayectoria total d. Por lo tanto,

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - f_k d = \Delta K \qquad \textbf{(8.13)}$$

o

$$K_f = K_i - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \qquad \textbf{(8.14)}$$

La ecuación 8.13 es una forma modificada del teorema trabajo–energía cinética que se aplica cuando una fuerza de fricción actúa sobre un objeto. El cambio en energía cinética es igual al trabajo invertido por todas las fuerzas distintas de la fricción menos un término $f_k d$ asociado con la fuerza de fricción.

Ahora considere el sistema más grande del libro *y* la superficie a medida que el libro frena bajo la influencia de una fuerza de fricción sola. No hay trabajo invertido a través de la frontera de este sistema porque el sistema no interactúa con el medio ambiente. No hay otros tipos de transferencia de energía que ocurran a través de la frontera del sistema, ¡suponiendo que se ignora el inevitable sonido que hace el libro al deslizarse! En este caso, la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

El cambio en energía cinética del sistema libro–superficie es el mismo que el cambio en energía cinética del libro porque el libro es la única parte del sistema que se mueve. Debido a eso, al incorporar la ecuación 8.13 se obtiene

$$-f_k d + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Cambio en la energía interna debida a fricción dentro del sistema

$$\Delta E_{\text{int}} = f_k d \tag{8.15}$$

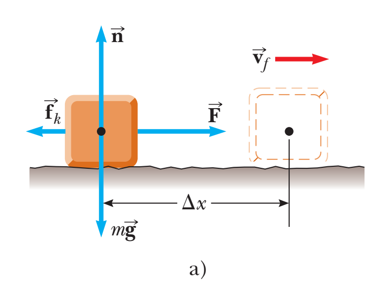
Por lo tanto, el aumento de energía interna del sistema es igual al producto de la fuerza de fricción y la longitud de trayectoria en la que se mueve el libro. En resumen, **una fuerza de fricción transforma la energía cinética de un sistema en energía interna, y el aumento en energía interna del sistema es igual a su disminución en energía cinética.**

Pregunta rápida 8.5 Usted viaja a lo largo de una autopista a 65 mi/h. Su automóvil tiene energía cinética. Súbitamente derrapa hasta detenerse debido a un congestionamiento de tránsito. ¿Dónde está la energía cinética que alguna vez tuvo su automóvil? a) Toda está en energía interna en el camino. b) Toda está en energía interna en las llantas. c) Parte de ella se transformó en energía interna y otra parte se transfirió mediante ondas mecánicas. d) Toda se transfirió del automóvil mediante varios mecanismos.

EJEMPLO 8.4 Se jala un bloque sobre una superficie rugosa

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza horizontal constante de 12 N.

A) Encuentre la rapidez del bloque después de que se mueve 3.0 m si las superficies en contacto tienen un coeficiente de fricción cinética de 0.15.



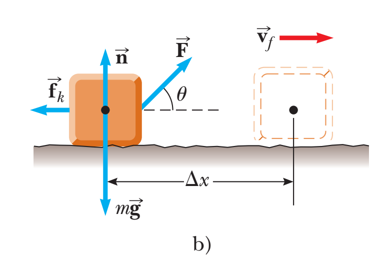


Figura 8.8 (Ejemplo 8.4) a) Se jala un bloque hacia la derecha sobre una superficie rugosa mediante una fuerza horizontal constante. b) La fuerza aplicada está en un ángulo θ con la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En este caso el ejemplo 7.6 se modifica de tal manera que la superficie ya no es sin fricción. La superficie rugosa aplica una fuerza de fricción sobre el bloque, opuesta a la fuerza aplicada. Como resultado, se espera que la rapidez sea menor que la encontrada en el ejemplo 7.6.

Categorizar El bloque se jala mediante una fuerza y la superficie es rugosa, de modo que el sistema bloque–superficie se representa como no aislado con una fuerza no conservativa en acción.

Analizar La figura 8.8a ilustra esta situación. Ni la fuerza normal ni la fuerza gravitacional realizan trabajo sobre el sistema porque sus puntos de aplicación se desplazan horizontalmente.

Encuentre el trabajo invertido en el sistema por la fuerza aplicada tal como en el ejemplo 7.6:

$$W = F\,\Delta x = (12\text{N})(3.0\text{ m}) = 36\text{ J}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al bloque en la dirección vertical:

$$\Sigma F_y = 0 \;\rightarrow\; n - mg = 0 \;\rightarrow\; n = mg$$

Encuentre la magnitud de la fuerza de fricción:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0.15)(6.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 8.82\text{ N}$$

Hallar la rapidez final del bloque a partir de la ecuación 8.14:

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2}{m}\left(-f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}\right)}$$

$$= \sqrt{0 + \frac{2}{6.0\text{ kg}}\left[-(8.82\text{ N})(3.0\text{ m}) + 36\text{ J}\right]} = \boxed{1.8\text{ m/s}}$$

Finalizar Como se esperaba, este valor es menor que los 3.5 m/s encontrados en el caso del bloque que se desliza sobre una superficie sin fricción (véase el ejemplo 7.6).

B) Suponga que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica en un ángulo θ, como se muestra en la figura 8.8b. ¿En qué ángulo se debe aplicar la fuerza para lograr la mayor rapidez posible después de que el bloque se mueve 3.0 m hacia la derecha?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede suponer que $\theta = 0$ daría la mayor rapidez porque la fuerza tendría la mayor componente posible en la dirección paralela a la superficie. Sin embargo, piense en un ángulo arbitrario distinto de cero. Aunque la componente horizontal de la fuerza se redujera, la componente vertical de la fuerza reduciría la fuerza normal, lo que a su vez reduce la fuerza de fricción, esto sugiere que la rapidez se podría maximizar al jalar en un ángulo distinto de $\theta = 0$.

Categorizar Como en el inciso A), el sistema bloque–superficie se modela como no aislado con una fuerza no conservativa en acción.

Analizar Encuentre el trabajo invertido por la fuerza aplicada, y señalando que $\Delta x = d$ porque la trayectoria seguida por el bloque es una línea recta:

$$W = F\,\Delta x \cos\theta = Fd\cos\theta$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al bloque en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n + F\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$$

Resuelva para n:

$$n = mg - F\,\text{sen}\,\theta$$

Aplique la ecuación 8.14 para encontrar la energía cinética final para esta situación:

$$K_f = K_i - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}$$
$$= 0 - \mu_k n d + Fd\cos\theta = -\mu_k(mg - F\,\text{sen}\,\theta)d + Fd\cos\theta$$

Maximizar la rapidez es equivalente a maximizar la energía cinética final. En consecuencia, derivando K_f respecto de θ e iguale el resultado a cero:

$$\frac{d(K_f)}{d\theta} = -\mu_k(0 - F\cos\theta)d - Fd\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$\mu_k\cos\theta - \text{sen}\,\theta = 0$$
$$\tan\theta = \mu_k$$

Evalúe θ para $\mu_k = 0.15$:

$$\theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) = 8.5°$$

Finalizar Note que el ángulo en que la rapidez del bloque es un máximo, de hecho no es $\theta = 0$. Cuando el ángulo supera 8.5°, la componente horizontal de la fuerza aplicada es demasiado pequeña para compensarse mediante la fuerza de fricción reducida y la rapidez del bloque comienza a disminuir de su valor máximo.

EJEMPLO CONCEPTUAL 8.5 **Física útil para conducción segura**

Un automóvil que viaja con una rapidez inicial v se desliza una distancia d hasta detenerse después de aplicar los frenos. Si la rapidez inicial del automóvil es $2v$ en el momento de frenar, estime la distancia que se desliza.

SOLUCIÓN

Se considera que la fuerza de fricción cinética entre el automóvil y la superficie del camino es constante y la misma para ambas magnitudes de velocidad. De acuerdo con la ecuación 8.14, la fuerza de fricción multiplicada por la distancia d es igual a la energía cinética inicial del automóvil (porque $K_f = 0$ y no hay trabajo invertido por otras fuerzas). Si la rapidez se duplica, como lo es en este ejemplo, la energía cinética se cuadruplica. Para una fuerza de fricción determinada, la distancia recorrida es cuatro veces mayor cuando la rapidez inicial se duplica, y por eso la distancia estimada que se desliza el automóvil es $4d$.

EJEMPLO 8.6 Un sistema bloque–resorte

Un bloque de 1.6 kg de masa se une a un resorte horizontal que tiene una constante de fuerza de 1.0×10^3 N/m, como se muestra en la figura 8.9. El resorte se comprime 2.0 cm y después se libera desde el reposo.

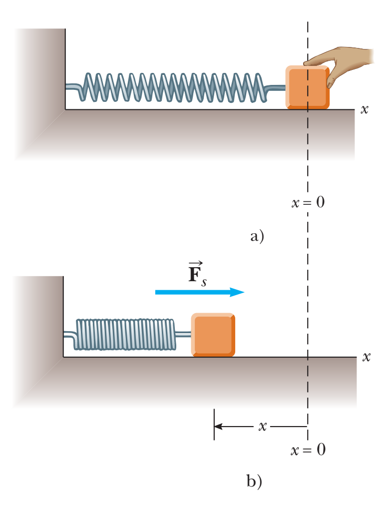


Figura 8.9 (Ejemplo 8.6) a) Un bloque se une a un resorte. El resorte se comprime una distancia x. b) Luego el bloque se libera y el resorte lo empuja hacia la derecha.

A) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ si la superficie no tiene fricción.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta situación ya se discutió antes y es fácil visualizar el bloque cuando es empujado hacia la derecha por el resorte y moverse con cierta rapidez.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y se modela como un sistema no aislado.

Analizar En esta situación, el bloque inicia con $v_i = 0$ en $x_i = -2.0$ cm y se quiere encontrar v_f en $x_f = 0$.

Aplique la ecuación 7.11 para encontrar el trabajo invertido por el resorte con $x_{\text{máx}} = x_i = -2.0\text{ cm} = -2.0 \times 10^{-2}$ m:

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 = \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\text{ N/m})(-2.0 \times 10^{-2}\text{ m})^2 = 0.20\text{ J}$$

En el bloque se consume trabajo y su rapidez cambia. La ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, se reduce al teorema trabajo–energía cinética. Aplique dicho teorema para encontrar la rapidez en $x = 0$:

$$W_s = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2}{m}W_s}$$

$$= \sqrt{0 + \frac{2}{1.6\text{ kg}}(0.20\text{ J})} = \boxed{0.50\text{ m/s}}$$

Finalizar Aunque este problema se pudo haber resuelto en el capítulo 7, aquí se presenta para proporcionar contraste con el siguiente inciso B), que requiere las técnicas de este capítulo.

B) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción constante de 4.0 N retarda su movimiento desde el momento en que se libera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La respuesta correcta debe ser menor que la encontrada en el inciso A) porque la fuerza de fricción retarda el movimiento.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y la superficie. El sistema no está aislado debido al trabajo consumido por el resorte y hay una fuerza no conservativa en acción: la fricción entre el bloque y la superficie.

Analizar Escriba la ecuación 8.14:

$$1)\quad K_f = K_i - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}$$

Evalúe $f_k d$:

$$f_k d = (4.0\text{ N})(2.0 \times 10^{-2}\text{ m}) = 0.080\text{ J}$$

Evalúe $\Sigma\, W_{\text{otras fuerzas}}$, el trabajo invertido por el resorte, al recordar que en el inciso A) se encontró que era 0.20 J. Use $K_i = 0$ en la ecuación 1) y resuelva para la rapidez final:

$$K_f = 0 - 0.080\text{ J} + 0.20\text{ J} = 0.12\text{ J} = \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.12\text{ J})}{1.6\text{ kg}}} = \boxed{0.39\text{ m/s}}$$

Finalizar Como se esperaba, este valor es menor que los 0.50 m/s encontrados en el inciso A).

¿Qué pasaría si? ¿Y si la fricción aumenta a 10.0 N? ¿Cuál es la rapidez del bloque en $x = 0$?

Respuesta En este caso, el valor de $f_k d$ mientras el bloque se traslada a $x = 0$ es

$$f_k d = (10.0 \text{ N})(2.0 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.20 \text{ J}$$

que es igual en magnitud a la energía cinética en $x = 0$ sin la pérdida debida a fricción. Debido a eso, toda la energía cinética se ha transformado por fricción cuando el bloque llega a $x = 0$, y su rapidez en este punto es $v = 0$.

En esta situación, así como en el inciso B), la rapidez del bloque alcanza un máximo en alguna posición distinta de $x = 0$. El problema 47 le pide ubicar dichas posiciones.

8.4 Cambios en energía mecánica para fuerzas no conservativas

Considere el libro que se desliza a través de la superficie en la sección anterior. A medida que el libro se mueve a través de una distancia d, la única fuerza que realiza trabajo en él es la fuerza de fricción cinética. Esta fuerza causa un cambio $-f_k d$ en la energía cinética del libro, como se describe mediante la ecuación 8.13.

Sin embargo, ahora considere que el libro es parte de un sistema que además presenta un cambio en energía potencial. En este caso, $-f_k d$ es la cantidad por la que cambia la energía *mecánica* del sistema debido a la fuerza de fricción cinética. Por ejemplo, si el libro se mueve sobre un plano inclinado que no tiene fricción, hay un cambio tanto en la energía cinética como en la energía potencial gravitacional del sistema libro–Tierra. En consecuencia,

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta Ug = -f_k d$$

En general, si actúa una fuerza de fricción dentro de un sistema aislado,

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = -f_k d \qquad \textbf{(8.16)}$$

◄ Cambio en energía mecánica de un sistema debido a fricción dentro del sistema

donde ΔU es el cambio en *todas* las formas de energía potencial. Note que la ecuación 8.16 se reduce a la ecuación 8.10 si la fuerza de fricción es cero.

Si el sistema en el que actúa la fuerza no conservativa es no aislado, la generalización de la ecuación 8.13 es

$$\Delta E_{\text{mec}} = -f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \qquad \textbf{(8.17)}$$

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS — Sistemas con fuerzas no conservativas

Se debe aplicar el siguiente procedimiento cuando enfrente un problema que involucre un sistema en el que actúen fuerzas no conservativas:

1. *Conceptualizar*. Estudie cuidadosamente la situación física y forme una representación mental de lo que ocurre.
2. *Categorizar*. Defina su sistema, que puede consistir de más de un objeto. El sistema podría incluir resortes u otras posibilidades de almacenamiento de energía potencial. Determine si hay presente alguna fuerza no conservativa. Si no, proceda con el principio de conservación de energía mecánica que se reseña en la sección 8.2. Si es así, utilice el procedimiento discutido antes.

   Determine si, a través de las fronteras de su sistema, alguna fuerza distinta de la fricción realiza trabajo alguno. Si es así, aplique la ecuación 8.17 para analizar el problema. Si no, proceda con la ecuación 8.16.
3. *Analizar*. Elija configuraciones para representar las condiciones inicial y final del sistema. Para cada objeto que cambie elevación, seleccione una posición de referencia para el objeto que defina la configuración cero de energía potencial gravitacional para el sistema. Para un objeto en un resorte, la configuración cero para energía potencial elástica es

cuando el objeto está en su posición de equilibrio. Si hay más de una fuerza conservativa, escriba una expresión para la energía potencial asociada con cada fuerza.

Use la ecuación 8.16 o la ecuación 8.17 para establecer una representación matemática del problema. Resuelva para las incógnitas.

4. *Finalizar*. Asegúrese de que sus resultados sean consistentes con su representación mental. También de que los valores de sus resultados sean razonables y consistentes con la experiencia cotidiana.

EJEMPLO 8.7 Caja que se desliza por una rampa

Una caja de 3.00 kg se desliza hacia abajo por un rampa. La rampa mide 1.00 m de largo y está inclinada en un ángulo de 30.0°, como se muestra en la figura 8.10. La caja parte del reposo en lo alto, experimenta una fuerza de fricción constante de 5.00 N de magnitud y continúa su movimiento una corta distancia sobre el piso horizontal, después de dejar la rampa.

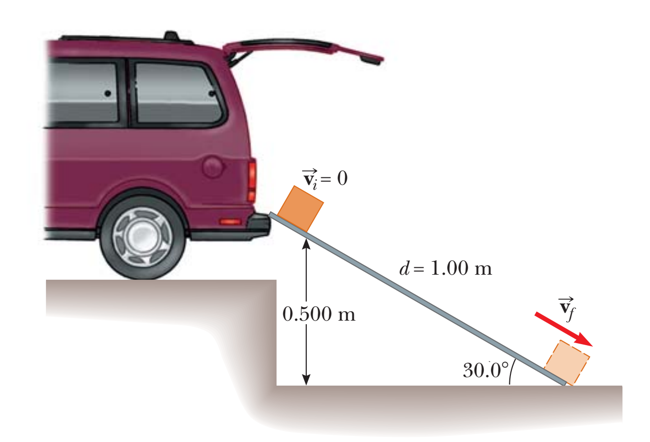


Figura 8.10 (Ejemplo 8.7) Una caja se desliza hacia abajo por una rampa bajo la influencia de la gravedad. La energía potencial del sistema disminuye, mientras que la energía cinética aumenta.

A) Proceda con el planteamiento de energía para determinar la rapidez de la caja en el fondo de la rampa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en la caja que se desliza por la rampa en la figura 8.10. Mientras más grande sea la fuerza de fricción, más lenta se deslizará la caja.

Categorizar Identifique la caja, la superficie y la Tierra como el sistema. El sistema se clasifica como aislado con una fuerza no conservativa en acción.

Analizar Ya que $v_i = 0$, la energía cinética inicial del sistema, cuando la caja está en lo alto de la rampa, es cero. Si la coordenada y se mide desde la base de la rampa (la posición final de la caja, para la cual se elige que la energía potencial gravitacional del sistema sea cero) con la dirección hacia arriba positiva, por lo tanto $y_i = 0.500$ m.

Evalúe la energía mecánica total del sistema cuando la caja está en lo alto:

$$E_i = K_i + U_i = 0 + U_i = mgy_i$$
$$= (3.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.500 \text{ m}) = 14.7 \text{ J}$$

Escriba una expresión para la energía mecánica final:

$$E_f = K_f + U_f = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

Aplique la ecuación 8.16:

$$\Delta E_{\text{mec}} = E_f - E_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i = -f_k d$$

Resuelva para v_f^2:

$$1) \quad v_f^2 = \frac{2}{m}(mgy_i - f_k d)$$

Sustituya valores numéricos y resuelva para v_f:

$$v_f^2 = \frac{2}{3.00 \text{ kg}}[14.7 \text{ J} - (5.00 \text{ N})(1.00 \text{ m})] = 6.47 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 2.54 \text{ m/s}$$

B) ¿A qué distancia se desliza la caja sobre el piso horizontal si continúa experimentando una fuerza de fricción de 5.00 N de magnitud?

SOLUCIÓN

Analizar Esta parte del problema se maneja exactamente igual que el inciso A), pero en este caso se considera que la energía mecánica del sistema consiste sólo en energía cinética, porque la energía potencial del sistema permanece fija.

Evalúe la energía mecánica del sistema cuando la caja deja la parte baja de la rampa: $E_i = K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(3.00\text{ kg})(2.54\text{ m/s})^2 = 9.68\text{ J}$

Aplique la ecuación 8.16 con $E_f = 0$: $E_f - E_i = 0 - 9.68\text{ J} = -f_k d$

Resuelva para la distancia d: $d = \frac{9.68\text{ J}}{f_k} = \frac{9.68\text{ J}}{5.00\text{ N}} = 1.94\text{ m}$

Finalizar Por comparación, es posible que pretenda calcular la rapidez de la caja en la parte baja de la rampa como un caso en el que la rampa no tiene fricción. Note también que el aumento en energía interna del sistema, a medida que la caja se desliza hacia abajo por la rampa, es 5.00 J. Esta energía se comparte entre la caja y la superficie, y cada una es un poco más caliente que antes.

Advierta además que la distancia d que se desliza el objeto sobre la superficie horizontal es infinita si la superficie no tiene fricción. ¿Esto es consistente con su marco conceptual de la situación?

¿Qué pasaría si? Un trabajador precavido decide que la rapidez de la caja cuando llega a la parte baja de la rampa es tal que su contenido podría dañarse. Por lo tanto, sustituye la rampa con una más larga de tal modo que la nueva rampa forma un ángulo de 25.0° con el suelo. ¿Esta nueva rampa reduce la rapidez de la caja a medida que llega al suelo?

Respuesta Ya que la rampa es más larga, la fuerza de fricción actúa en una distancia mayor y transforma más de la energía mecánica en energía interna. El resultado es una reducción en la energía cinética de la caja y se espera una rapidez menor cuando llegue al suelo.

Encuentre la longitud d de la rampa nueva: $\text{sen } 25.0° = \frac{0.500\text{ m}}{d} \rightarrow d = \frac{0.500\text{ m}}{\text{sen } 25.0°} = 1.18\text{ m}$

Hallar v_f^2 de la ecuación 1) en el inciso A): $v_f^2 = \frac{2}{3.00\text{ kg}}[14.7\text{ J} - (5.00\text{ N})(1.18\text{ m})] = 5.87\text{ m}^2/\text{s}^2$

$$v_f = 2.42\text{ m/s}$$

De hecho la rapidez final es menor que en el caso de un ángulo mayor.

EJEMPLO 8.8 Colisión bloque–resorte

A un bloque, que tiene 0.80 kg de masa, se le da una velocidad inicial $v_{Ⓐ} = 1.2$ m/s hacia la derecha y choca con un resorte con masa despreciable y cuya constante de fuerza es $k = 50$ N/m, como se muestra en la figura 8.11.

A) Suponga que la superficie no tiene fricción y calcule la compresión máxima del resorte después del choque.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las diversas partes de la figura 8.11 ayudan a imaginar lo que hará el bloque en esta situación. Todo el movimiento tiene lugar en un plano horizontal, así que no es necesario considerar cambios en energía potencial gravitacional.

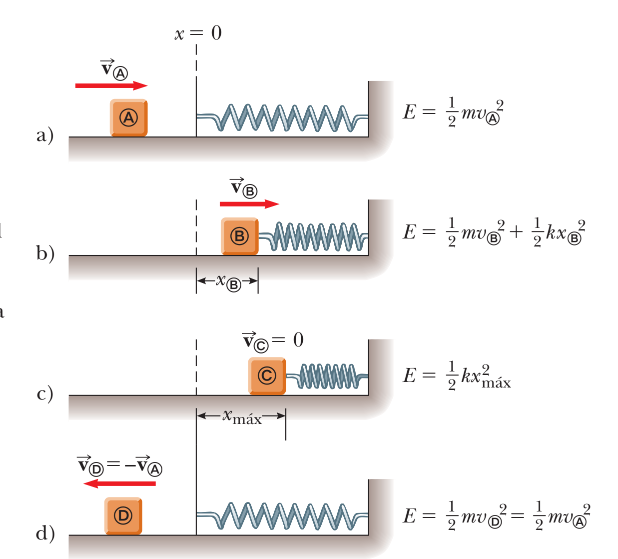


Figura 8.11 (Ejemplo 8.8) Un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal uniforme choca con un resorte ligero. a) Al inicio, toda la energía mecánica es energía cinética. b) La energía mecánica es la suma de la energía cinética del bloque y la energía potencial elástica en el resorte. c) La energía es completamente energía potencial. d) La energía se transformó de regreso a energía cinética del bloque. La energía total del sistema permanece constante a lo largo del movimiento.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y el resorte. El sistema bloque–resorte está aislado sin fuerzas no conservativas en acción.

Analizar Antes de la colisión, cuando el bloque está en Ⓐ, tiene energía cinética y el resorte no está comprimido, de modo que la energía potencial elástica almacenada en el sistema es cero. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema antes de la colisión es justo $\frac{1}{2}mv_Ⓐ^2$. Después de la colisión, cuando el bloque está en Ⓒ, el resorte está completamente comprimido; ahora el bloque está en reposo y, por eso, tiene energía cinética cero. Sin embargo, la energía potencial elástica almacenada en el sistema tiene su valor máximo $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx^2_{máx}$, donde el origen de coordenadas $x = 0$ se elige como la posición de equilibrio del resorte y $x_{máx}$ es la compresión máxima del resorte, que en este caso es en $x_Ⓒ$. La energía mecánica total del sistema se conserva, porque sobre los objetos del sistema aislado no actúan fuerzas no conservativas.

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica:

$$K_Ⓒ + U_{sⒸ} = K_Ⓐ + U_{sⒶ}$$

$$0 + \frac{1}{2}kx^2_{máx} = \frac{1}{2}mv_Ⓐ^2 + 0$$

Resuelva para $x_{máx}$ y evalúe:

$$x_{máx} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_Ⓐ = \sqrt{\frac{0.80 \text{ kg}}{50 \text{ N/m}}}(1.2 \text{ m/s}) = 0.15 \text{ m}$$

B) Suponga que una fuerza constante de fricción cinética actúa entre el bloque y la superficie, con $\mu_k = 0.50$. Si la rapidez del bloque en el momento que choca con el resorte es $v_Ⓐ = 1.2$ m/s, ¿cuál es la compresión máxima $x_Ⓒ$ en el resorte?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Debido a la fuerza de fricción, se espera que la compresión del resorte sea más pequeña que en el inciso A), porque parte de la energía cinética del bloque se transforma en energía interna en el bloque y la superficie.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque, la superficie y el resorte. Este sistema está aislado pero ahora involucra una fuerza no conservativa.

Analizar En este caso, la energía mecánica $E_{mec} = K + U_s$ del sistema *no* se conserva porque una fuerza de fricción actúa en el bloque. A partir del modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical, se ve que $n = mg$.

Evalúe la magnitud de la fuerza de fricción:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = 0.50(0.80 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 3.9 \text{ N}$$

Escriba el cambio en la energía mecánica del sistema debido a fricción a medida que el bloque se desplaza de $x = 0$ a $x_Ⓒ$:

$$\Delta E_{mec} = -f_k x_Ⓒ$$

Sustituya las energías inicial y final:

$$\Delta E_{mec} = E_f - E_i = (0 + \tfrac{1}{2}kx_Ⓒ^2) - (\tfrac{1}{2}mv_Ⓐ^2 + 0) = -f_k x_Ⓒ$$

Sustituya valores numéricos:

$$\tfrac{1}{2}(50)x_Ⓒ^2 - \tfrac{1}{2}(0.80)(1.2)^2 = -3.9x_Ⓒ$$

$$25x_Ⓒ^2 + 3.9x_Ⓒ - 0.58 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática para $x_Ⓒ$, se obtiene $x_Ⓒ = 0.093$ m y $x_Ⓒ = -0.25$ m. La raíz con significado físico es $x_Ⓒ =$ 0.093 m.

Finalizar La raíz negativa no aplica a esta situación porque el bloque debe estar a la derecha del origen (valor positivo de x) cuando llegue al reposo. Note que el valor de 0.093 m es menor que la distancia obtenida en el caso sin fricción del inciso A), como se esperaba.

EJEMPLO 8.9 Bloques conectados en movimiento

Dos bloques se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se muestra en la figura 8.12. El bloque de masa m_1 se encuentra en una superficie horizontal y está conectado a un resorte con una constante de fuerza k. El sistema se libera desde el reposo cuando el resorte no está estirado. Si el bloque colgante de masa m_2 cae una

distancia h antes de llegar al reposo, calcule el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_1 y la superficie.

Figura 8.12 (Ejemplo 8.9) A medida que el bloque colgante se mueve desde su elevación más alta hacia la más baja, el sistema pierde energía potencial gravitacional pero gana energía potencial elástica en el resorte. Parte de la energía mecánica se transforma a energía interna debido a fricción entre el bloque deslizante y la superficie.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La palabra clave *reposo* aparece dos veces en el enunciado del problema. Esta palabra sugiere que las configuraciones del sistema asociadas con reposo son buenas candidatas para las configuraciones inicial y final porque la energía cinética del sistema es cero para dichas configuraciones.

Categorizar En esta situación, el sistema consiste en dos bloques, el resorte y la Tierra. El sistema está aislado con una fuerza no conservativa en acción. El bloque deslizante también se modela como una partícula en equilibrio en la dirección vertical, lo que conduce a $n = m_1 g$.

Analizar Es necesario considerar dos formas de energía potencial para el sistema, gravitacional y elástica: $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$ es el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema y $\Delta U_s = U_{sf} - U_{si}$ es el cambio en la energía potencial elástica del sistema. El cambio en la energía potencial gravitacional del sistema se asocia sólo con el bloque que cae porque la coordenada vertical del bloque que se desliza horizontalmente no cambia. Las energías cinética inicial y final del sistema son cero, de modo que $\Delta K = 0$.

Escriba el cambio en energía mecánica para el sistema:



$$1) \quad \Delta E_{\text{mec}} = \Delta U_g + \Delta U_s$$

Proceder con la ecuación 8.16 para encontrar el cambio en energía mecánica en el sistema debido a fricción entre el bloque que se desliza horizontalmente y la superficie, y señalando que, mientras el bloque colgante cae una distancia h, el bloque con movimiento horizontal avanza la misma distancia h hacia la derecha:

$$2) \quad \Delta E_{\text{mec}} = -f_k h = -(\mu_k n)h = -\mu_k m_1 g h$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema y elija la configuración con el bloque colgante en la posición más baja para representar energía potencial cero:

$$3) \quad \Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = 0 - m_2 g h$$

Evalúe el cambio en la energía potencial elástica del sistema:

$$4) \quad \Delta U_s = U_{sf} - U_{si} = \tfrac{1}{2}kh^2 - 0$$

Sustituya las ecuaciones 2), 3) y 4) en la ecuación 1):

$$-\mu_k m_1 g h = -m_2 g h + \tfrac{1}{2}kh^2$$

Resuelva para μ_k:

$$\mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$$

Finalizar Esta configuración representa un método de medición del coeficiente de fricción cinética entre un objeto y cierta superficie.

8.5 Potencia

Considere de nuevo el ejemplo conceptual 7.7, que implicó rodar un refrigerador hacia arriba de una rampa para llegar a una camioneta. Suponga que el hombre no está convencido de que el trabajo es el mismo sin importar la longitud de la rampa y coloca una rampa larga con una suave elevación. Aunque él realiza la misma cantidad de trabajo que alguien que usa una rampa más corta, le toma más tiempo realizar el trabajo porque tiene que mover el refrigerador una mayor distancia. Aunque el trabajo realizado sobre ambas rampas es el mismo, hay *algo* diferente acerca de las tareas: el *intervalo de tiempo* durante el que se realiza el trabajo.

La relación con el tiempo de transferencia de energía se llama **potencia instantánea** $\mathcal{P}$ y se define como sigue:

$$\mathcal{P} \equiv \frac{dE}{dt} \qquad \textbf{(8.18)}$$

◄ Definición de potencia

En esta exposición se contará el trabajo como el método de transferencia de energía, pero tenga en mente que la noción de potencia es válida para *cualquier* medio de transferencia de energía discutido en la sección 8.1. Si una fuerza externa se aplica a un objeto (que se representa como partícula) y si el trabajo invertido por esta fuerza en el objeto en el intervalo de tiempo Δt es W, la **potencia promedio** durante este intervalo es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{W}{\Delta t}$$

Debido a eso, en el ejemplo 7.7, aunque se consume el mismo trabajo al rodar el refrigerador por ambas rampas, para la rampa más larga se requiere menos potencia.

Al igual que la definición de velocidad y aceleración, la potencia instantánea es el valor límite de la potencia promedio a medida que Δt tiende a cero:

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

donde se representó el valor infinitesimal del trabajo invertido mediante dW. De la ecuación 7.3 se encuentra que $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. En consecuencia, la potencia instantánea se escribe

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \qquad \textbf{(8.19)}$$

donde $\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{r}}/dt$.

La unidad del SI de potencia es joules por segundo (J/s), también llamado **watt** (W) en honor de James Watt:

Watt ►

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Una unidad de potencia en el sistema acostumbrado estadounidense es el **caballo de fuerza** (hp):

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 8.3

W, *W* y watts

No confunda el símbolo W para el watt con el símbolo en cursiva *W* para trabajo. También, recuerde que el watt ya representa una relación de transferencia de energía, así que "watts por segundo" no tiene sentido. El watt es *lo mismo que* un joule por segundo.

Ahora se puede definir una unidad de energía (o trabajo) en términos de la unidad de potencia. Un **kilowatt hora** (kWh) es la energía transferida en 1 h en una proporción constante de 1 kW = 1 000 J/s. La cantidad de energía representada por 1 kWh es

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3\,600 \text{ s}) = 3.60 \times 10^6 \text{ J}$$

Un kilowatt hora es una unidad de energía, no de potencia. Cuando usted paga el recibo de la electricidad, usted está comprando energía, y la cantidad de energía transferida por la transmisión eléctrica hacia un hogar durante el periodo representado por el recibo se expresa en kilowatt horas. Por ejemplo, su recibo puede establecer que usted usó 900 kWh de energía durante un mes y que se le cobra en una proporción de 10 centavos por kilowatt hora. Por lo tanto su deuda es de 90 dólares por esta cantidad de energía. Otro ejemplo, suponga que una lámpara se especifica en 100 W. En 1.00 hora de operación, la línea de transmisión eléctrica tendría que transferir energía a la lámpara la cantidad de $(0.100 \text{ kW})(1.00 \text{ h}) = 0.100 \text{ kWh} = 3.60 \times 10^5 \text{ J}$.

EJEMPLO 8.10 Potencia entregada por un motor de elevador

Un ascensor (figura 8.13a) tiene una masa de 1 600 kg y transporta pasajeros con una masa combinada de 200 kg. Una fuerza de fricción constante de 4 000 N retarda su movimiento.

A) ¿Cuánta potencia debe proporcionar un motor para levantar el elevador y a sus pasajeros con una rapidez constante de 3.00 m/s?

SOLUCIÓN

Conceptualizar El motor debe suministrar la fuerza de magnitud T que jale el ascensor hacia arriba.

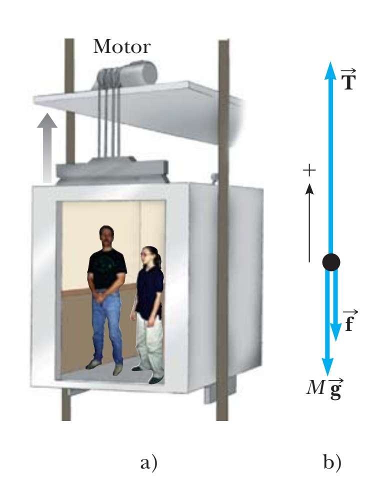


Figura 8.13 (Ejemplo 8.10) a) El motor ejerce una fuerza hacia arriba $\vec{T}$ en el ascensor. La magnitud de esta fuerza es la tensión T en el cable que conecta la cabina y el motor. Las fuerzas que actúan hacia abajo en la cabina son una fuerza de fricción $\vec{f}$ y la fuerza gravitacional $\vec{F}g = M\vec{g}$. b) Diagrama de cuerpo libre para el ascensor.

Categorizar La fuerza de fricción aumenta la potencia necesaria para levantar el elevador. El problema establece que la rapidez del elevador es constante: $a = 0$. El elevador se modela como una partícula en equilibrio.

Analizar El diagrama de cuerpo libre en la figura 8.13b especifica la dirección hacia arriba como positiva. La masa *total* M del sistema (carro más pasajeros) es igual a 1 800 kg.

Aplique la segunda ley de Newton a la cabina:

$$\sum F_y = T - f - Mg = 0$$

Resuelva para T:

$$T = f + Mg$$
$$= 4.00 \times 10^3 \text{ N} + (1.80 \times 10^3 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 2.16 \times 10^4 \text{ N}$$

Proceda con la ecuación 8.19 y que $\vec{T}$ esté en la misma dirección que $\vec{v}$ para encontrar la potencia:

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = Tv$$
$$= (2.16 \times 10^4 \text{ N})(3.00 \text{ m/s}) = \boxed{6.48 \times 10^4 \text{ W}}$$

B) ¿Qué potencia debe entregar el motor en el instante en que la rapidez del elevador es v si el motor está diseñado para proporcionar al ascensor una aceleración hacia arriba de 1.00 m/s^2?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En este caso, el motor debe proporcionar la fuerza de magnitud T que jala al ascensor hacia arriba con una rapidez creciente. Se espera que se requiera más potencia para hacer lo que en el inciso A), ya que el motor ahora debe realizar la tarea adicional de acelerar la cabina.

Categorizar En este caso, el ascensor se modela como una partícula bajo una fuerza neta porque está acelerando.

Analizar Aplique la segunda ley de Newton a la cabina:

$$\sum F_y = T - f - Mg = Ma$$

Resuelva para T:

$$T = M(a + g) + f$$
$$= (1.80 \times 10^3 \text{ kg})(1.00 \text{ m/s}^2 + 9.80 \text{ m/s}^2) + 4.00 \times 10^3 \text{ N}$$
$$= 2.34 \times 10^4 \text{ N}$$

Use la ecuación 8.19 para obtener la potencia requerida:

$$\mathcal{P} = Tv = \boxed{(2.34 \times 10^4 \text{ N})v}$$

donde v es la rapidez instantánea de la cabina en metros por segundo.

Finalizar Para comparar con el inciso A), sea $v = 3.00$ m/s, que proporciona una potencia de

$$\mathcal{P} = (2.34 \times 10^4 \text{ N})(3.00 \text{ m/s}) = 7.02 \times 10^4 \text{ W}$$

mayor que la potencia encontrada en el inciso A), como se esperaba.

Resumen

DEFINICIONES

Un **sistema no aislado** es uno para el que la energía cruza la frontera del sistema. Un **sistema aislado** es uno para el que la energía no cruza la frontera del sistema.

La **potencia instantánea** $\mathcal{P}$ se define como la proporción de transferencia de energía en el tiempo:

$$\mathcal{P} \equiv \frac{dE}{dt} \quad (8.18)$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Para un sistema no aislado, se puede igualar el cambio en la energía total almacenada en el sistema con la suma de todas las transferencias de energía a través de la frontera del sistema, que es un enunciado de **conservación de la energía**. Para un sistema aislado, la energía total es constante.

Si un sistema es aislado y si en los objetos dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica total del sistema es constante:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (8.10)$$

Si entre los objetos dentro de un sistema actúan fuerzas no conservativas (como la fricción), la energía mecánica no se conserva. En estas situaciones, la diferencia entre la energía mecánica final total y la energía mecánica inicial total del sistema es igual a la energía transformada a energía interna por las fuerzas no conservativas.

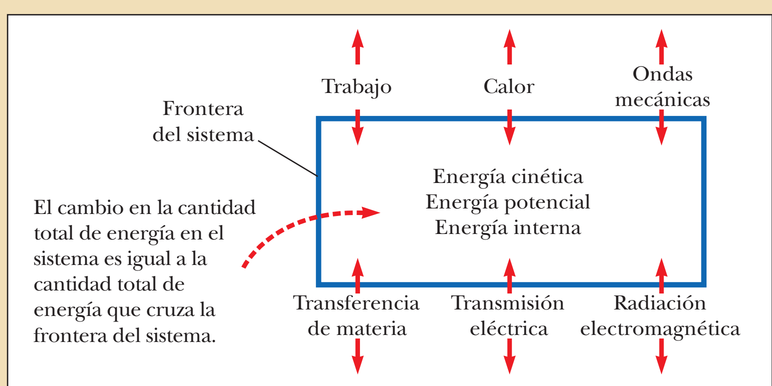
Si una fuerza de fricción actúa dentro de un sistema aislado, la energía mecánica del sistema se reduce y la ecuación apropiada por aplicar es

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = f_k d \quad (8.16)$$

Si una fuerza de fricción actúa dentro de un sistema no aislado, la ecuación apropiada por aplicar es

$$\Delta E_{\text{mec}} = -f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \quad (8.17)$$

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



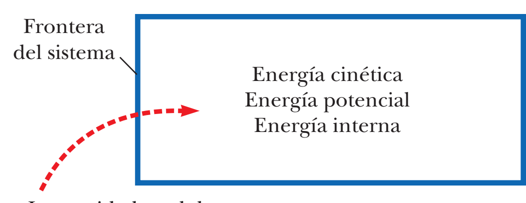
Sistema no aislado (energía). El enunciado más general que describe el comportamiento de un sistema no aislado es la **ecuación de conservación de energía:**

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T \quad (8.1)$$

Al incluir los tipos de almacenamiento de energía y transferencia de energía que se han discutido se produce

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{MT}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \quad (8.2)$$

Para un problema específico, esta ecuación por lo general se reduce a un número más pequeño de términos al eliminar los términos que no son adecuados a la situación.



Sistema aislado (energía). La energía total de un sistema aislado se conserva, de modo que

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \quad (8.9)$$

Si dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva, de modo que

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \quad (8.8)$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Todo tiene energía? Dé argumentos para su respuesta.
2. **O** Un martinete es un dispositivo que se usa para clavar postes en la Tierra mediante la caída repetida de un objeto pesado sobre ellos. Suponga que el objeto se deja caer desde la misma altura cada vez. ¿En qué factor cambia la energía del sistema martinete–Tierra cuando la masa del objeto a soltar se duplica? a) ½, b) 1: la energía es la misma, c) 2, d) 4.
3. **O** Un tobogán está instalado junto a una alberca en un patio. Dos niños suben a una plataforma en lo alto del tobogán. El niño más pequeño salta recto hacia abajo a la alberca y el niño más grande se desliza desde lo alto del tobogán sin fricción. **i)** Al momento de llegar al agua, en comparación con el niño mayor, ¿la energía cinética del niño pequeño es a) mayor, b) menor o c) igual? **ii)** Al momento de llegar al agua, en comparación con el niño mayor, ¿la rapidez del niño pequeño es a) mayor, b) menor o c) igual? **iii)** Durante los movimientos desde la plataforma al agua, en comparación con el niño mayor, ¿la aceleración promedio del niño pequeño es a) mayor, b) menor o c) igual?
4. **O** a) ¿Un sistema objeto–Tierra puede tener energía cinética y no energía potencial gravitacional? b) ¿Puede tener energía potencial gravitacional y no energía cinética? c) ¿Puede tener ambos tipos de energía al mismo tiempo? d) ¿Puede no tener ninguna?
5. **O** Una bola de arcilla cae libremente hacia el piso duro. No rebota de manera notable, sino que llega al reposo muy rápidamente. ¿En tal caso qué ocurrió con la energía que la bola tenía mientras caía? a) Se usó para producir el movimiento hacia abajo. b) Se transformó de regreso en energía potencial. c) Se transfirió a la bola por calor. d) Está en la bola y el suelo (y paredes) como energía de movimiento hacia abajo invisible. e) La mayor parte se fue en sonido.
6. **O** Sostiene una honda a la longitud de su brazo, jala la ligera banda elástica hacia su barbilla y la suelta para lanzar una piedra horizontalmente con una rapidez de 200 cm/s. Con el mismo procedimiento, dispara un frijol con rapidez de 600 cm/s. ¿Cuál es la relación de la masa del frijol a la masa de la piedra? a) $\frac{1}{9}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $1/\sqrt{3}$, d) 1, e) $\sqrt{3}$, f) 3, g) 9.
7. Una persona deja caer una bola desde lo alto de un edificio mientras que otra, en la base, observa su movimiento. ¿Estas dos personas estarán de acuerdo con el valor de la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra? ¿En el cambio en energía potencial? ¿En la energía cinética?
8. En el capítulo 7 se introdujo el teorema trabajo–energía cinética, $W_{\text{neto}} = \Delta K$. Esta ecuación establece que el trabajo invertido en un sistema aparece como un cambio en energía cinética. Es una ecuación de caso especial, válida si no hay cambios en algún otro tipo de energía como la potencial o la interna. Proporcione ejemplos en los que se invierta trabajo en un sistema pero que el cambio en energía del sistema no sea un cambio en energía cinética.
9. Usted viaja en bicicleta. ¿En qué sentido su bicicleta es impulsada por energía solar?
10. Una bola de boliche está suspendida del techo de un salón de conferencias mediante una fuerte cuerda. La bola se aleja de su posición de equilibrio y se libera del reposo desde la punta de la nariz de la conferencista, como se muestra en la figura P8.10. La conferencista permanece fija. Explique por qué la bola no la golpea en su viaje de retorno. ¿La conferencista estaría a salvo si a la bola se le da un empujón desde su posición de partida en su nariz?

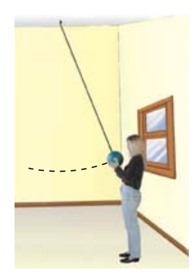


Figura P8.10

11. Un bloque se conecta a un resorte que está suspendido del techo. Si supone que el bloque se pone en movimiento vertical y se ignora la resistencia del aire, describa las transformaciones de energía que se presentan dentro del sistema que consiste del bloque, la Tierra y el resorte.
12. **O** En un laboratorio de modelos de automóviles que derrapan hasta detenerse, se obtuvo la información para seis pistas. Cada una de tres bloques se lanza en dos magnitudes de velocidad inicial diferentes v_i y se deslizan a través de una mesa a nivel a medida que llegan al reposo. Los bloques tienen masas iguales pero difieren en rugosidad y por tanto tienen diferentes coeficientes de fricción cinética μ_k con la mesa. Clasifique los siguientes casos del a) al f) de acuerdo con la distancia de frenado, de mayor a menor. Si la distancia de frenado es la misma en dos casos, déles igual clasificación. a) $v_i = 1$ m/s, $\mu_k = 0.2$, b) $v_i = 1$ m/s, $\mu_k = 0.4$, c) $v_i = 1$ m/s, $\mu_k = 0.8$, d) $v_i = 2$ m/s, $\mu_k = 0.2$, e) $v_i = 2$ m/s, $\mu_k = 0.4$, f) $v_i = 2$ m/s, $\mu_k = 0.8$.
13. ¿Una fuerza de fricción estática puede hacer trabajo? Si no, ¿por qué? Si es sí, proporcione un ejemplo.
14. Describa dispositivos hechos por el hombre diseñados para producir cada una de las siguientes transferencias o transformaciones de energía. Siempre que pueda, también describa un proceso natural en el que se presente el proceso energético. Proporcione detalles para defender sus elecciones, como la identificación del sistema y otra salida de energía si el proceso tiene eficiencia limitada. a) Energía potencial química se transforma en energía interna. b) La energía transferida por transmisión eléctrica se convierte en energía potencial gravitacional. c) Energía potencial elástica se transfiere fuera de un sistema mediante calor. d) La energía transferida por ondas mecánicas realiza trabajo sobre un sistema. e) La energía transportada por ondas electromagnéticas se convierte en energía cinética en un sistema.
15. En la ecuación general de conservación de energía, establezca cuáles términos predominan al describir cada uno de los siguientes dispositivos y procesos. Para un proceso que funciona de manera continua, puede considerar lo que ocurre en un intervalo de tiempo de 10 s. Establezca cuáles términos en la ecuación representan las formas original y final de energía, cuáles serían entradas, y cuáles serían salidas. a) una honda que dispara una piedra, b) un fuego ardiendo, c) un radio portátil en operación, d) un carro que frena hasta detenerse, e) la superficie del Sol brillando visiblemente, f) una persona que salta encima de una silla.

16. **O** En la parte baja de una pista de aire inclinada a un ángulo θ, a un deslizador de masa m se le da un empujón para hacerlo que se deslice una distancia d hacia arriba de la pendiente a medida que frena y se detiene. Luego el deslizador regresa hacia abajo por la pista hasta su punto de partida. Ahora se repite el experimento con la misma rapidez original pero con un segundo deslizador idéntico colocado en la parte superior del primero. El flujo de aire es lo suficientemente intenso como para soportar el par de deslizadores de modo que se mueven libremente sobre la pista. La fricción estática mantiene al segundo deslizador fijo en relación con el primer deslizador a lo largo del movimiento. El coeficiente de fricción estática entre los dos deslizadores es μ_s. ¿Cuál es el cambio en energía mecánica del sistema dos deslizadores–Tierra en el movimiento hacia arriba y abajo de la pendiente después de que el par de deslizadores se libera? Elija una. a) $-2md$, b) $-2\mu_s gd$, c) $-2\mu_s md$, d) $-2\mu_s mg$, e) $-2mg \cos \theta$, f) $-2mgd \cos \theta$, g) $-2\mu_s mgd \cos \theta$, h) $-4\mu_s mgd \cos \theta$, i) $-\mu_s mgd \cos \theta$, j) $-2\mu_s mgd \operatorname{sen} \theta$, k) 0, l) $+2\mu_s mgd \cos \theta$.

17. Un vendedor de automóviles afirma que un motor mejorado de 300 hp es una opción necesaria en un auto compacto en lugar del motor convencional de 130 hp. Suponga que usted tiene la intención de conducir el automóvil dentro de los límites de rapidez ($\leq$ 65 mi/h) en terreno plano. ¿Cómo contrarrestaría esta propaganda comercial?

Problemas

Sección 8.1 El sistema no aislado: conservación de energía

1. Para cada uno de los siguientes sistemas e intervalos de tiempo, escriba la versión reducida y adecuada de la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de energía. a) las bobinas de calentamiento en su tostadora durante los primeros cinco segundos después de que enciende la tostadora, b) su automóvil, justo desde antes de que le llene el tanque con gasolina hasta que sale de la gasolinera a 10 mi/h, c) su cuerpo mientras está sentada tranquilamente y come un emparedado de mantequilla de cacahuate y mermelada durante su almuerzo, d) su casa durante cinco minutos de una tarde soleada mientras la temperatura en la casa permanece fija.

Sección 8.2 El sistema aislado

2. A las 11:00 a.m. del 7 de septiembre de 2001, más de un millón de escolares británicos saltaron arriba y abajo durante 1 min. El punto central del plan de estudios del “gran salto” estuvo en los terremotos, pero se integró con muchos otros temas, como el ejercicio, la geografía, la cooperación, la prueba de hipótesis y el establecimiento de registros mundiales. Los estudiantes construyeron sus propios sismógrafos que registraron efectos locales. a) Encuentre la energía convertida en energía mecánica en el experimento. Suponga que 1 050 000 niños, con masa promedio de 36.0 kg, saltaron 12 veces cada uno y elevaron sus centros de masa 25.0 cm cada vez y descansaban brevemente entre un salto y el siguiente. La aceleración de caída libre en Bretaña es 9.81 m/s^2. b) La mayor parte de la energía mecánica se convierte muy rápidamente en energía interna dentro de los cuerpos de los estudiantes y los suelos de los edificios escolares. De la energía que se propaga hacia dentro del área, la mayoría produce vibraciones de “microtemblor” de alta frecuencia que se amortiguan rápidamente y no pueden viajar mucho. Suponga que 0.01% de la energía se transporta lejos mediante una onda sísmica de largo rango. La magnitud de un terremoto en la escala Richter está dada por

$$M = \frac{\log E - 4.8}{1.5}$$

donde E es la energía de la onda sísmica en joules. De acuerdo con este modelo, ¿cuál es la magnitud del temblor de demostración? No se hizo registro de ruido más allá del medio ambiente a ultramar o en el sismógrafo del Wolverton Seismic Vault, en Hampshire.

3. Una bolita perforada se desliza sin fricción alrededor de un bucle (figura P8.3). La bolita se libera desde una altura $h = 3.50R$. a) ¿Cuál es la rapidez de la bolita en el punto Ⓐ? b) ¿Qué tan grande es la fuerza normal sobre la bolita si su masa es 5.00 g?

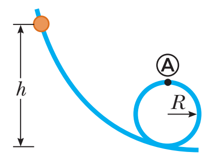


Figura P8.3

4. Una partícula de masa m = 5.00 kg se libera desde el punto Ⓐ y se desliza sobre la pista sin fricción que se muestra en la figura P8.4. Determine a) la rapidez de la partícula en los puntos Ⓑ y Ⓒ y b) el trabajo neto invertido por la fuerza gravitacional a medida que la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓒ.

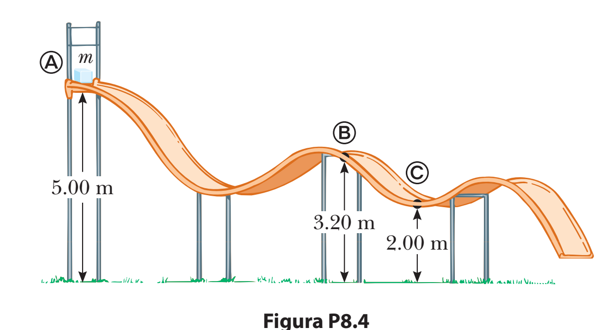


Figura P8.4

5. Un bloque de 0.250 kg de masa se coloca en lo alto de un resorte vertical ligero de constante de fuerza 5 000 N/m y se empuja hacia abajo de modo que el resorte se comprime 0.100 m. Después de que el bloque se libera del reposo, viaja hacia arriba y luego deja el resorte. ¿A qué altura máxima arriba del punto de liberación llega?

6. Un trapecio de circo consiste en una barra suspendida mediante dos cuerdas paralelas, cada una de longitud ℓ, que permiten a los ejecutantes balancearse en un arco circular vertical (figura P8.6). Suponga que una ejecutante con masa m sostiene la barra y salta de una plataforma elevada, partiendo del reposo con las cuerdas en un ángulo θ_i respecto de la vertical. Suponga que el tamaño del cuerpo de la ejecutante es pequeño en

comparación con la longitud ℓ, que no mueve el trapecio para balancearse más alto y que la resistencia del aire es despreciable. a) Demuestre que, cuando las cuerdas forman un ángulo θ con la vertical, la ejecutante debe ejercer una fuerza

$$mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_i)$$

para estar preparada. b) Determine el ángulo θ_i para que la fuerza necesaria para estar en la parte baja del columpio sea el doble de la fuerza gravitacional que se ejerce sobre la ejecutante.

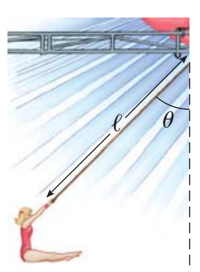


Figura P8.6

7. Dos objetos se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura P8.7. El objeto de 5.00 kg de masa se libera desde el reposo. Con el modelo de sistema aislado, a) determine la rapidez del objeto de 3.00 kg justo cuando el objeto de 5.00 kg golpea el suelo. b) Encuentre la altura máxima a la que llega el objeto de 3.00 kg.

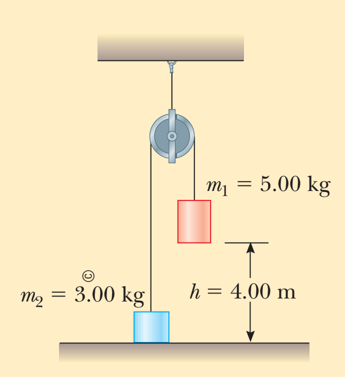


Figura P8.7 Problemas 7 y 8.

8. Dos objetos se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura P8.7. El objeto de masa m_1 se libera desde el reposo a una altura h. Con el modelo de sistema aislado, a) determine la rapidez de m_2 justo cuando m_1 golpea el suelo. b) Encuentre la altura máxima a la que llega m_2.

9. Una barra ligera rígida mide 77.0 cm de largo. Su extremo superior tiene como pivote un eje horizontal de baja fricción. La barra cuelga recta hacia abajo en reposo con una pequeña bola de gran masa unida a su extremo inferior. Usted golpea la bola y súbitamente le da una velocidad horizontal de modo que se balancea alrededor de un círculo completo. ¿Qué rapidez mínima se requiere en la parte más baja para hacer que la bola recorra lo alto del círculo?

10. Una bola de cañón de 20.0 kg se dispara desde un cañón con rapidez de boquilla de 1 000 m/s con un ángulo de 37.0° con la horizontal. Una segunda bala de cañón se dispara con un ángulo de 90.0°. Aplique el modelo de sistema aislado para encontrar a) la altura máxima que alcanza cada bola y b) la energía mecánica total del sistema bola–Tierra a la altura máxima para cada bola. Sea $y = 0$ en el cañón.

11. Un atrevido planea un salto bungee desde un globo aerostático a 65.0 m en medio de una feria (figura P8.11). Usará una cuerda elástica uniforme, amarrada a un arnés alrededor de su cuerpo, para detener su caída en un punto 10.0 m sobre el suelo. Modele su cuerpo como una partícula y la cuerda como si tuviera masa despreciable y obedeciera la ley de Hooke. En una prueba preliminar, colgando en reposo de una cuerda de 5.00 m de largo, el osado encuentra que el peso de su cuerpo estira la cuerda 1.50 m. Él pretende soltarse desde el reposo en el punto donde el extremo superior de una sección más larga de la cuerda está unida al globo fijo. a) ¿Qué longitud de cuerda debe usar? b) ¿Qué aceleración máxima experimentará?



Figura P8.11 Problemas 11 y 46.

12. **Problema de repaso.** El sistema que se muestra en la figura P8.12 consiste de una cuerda ligera inextensible; poleas ligeras sin fricción; y bloques de igual masa. Inicialmente se mantiene en reposo de modo que los bloques están a la misma altura sobre el suelo. Después los bloques se liberan. Encuentre la rapidez del bloque A en el momento en que la separación vertical de los bloques es h.

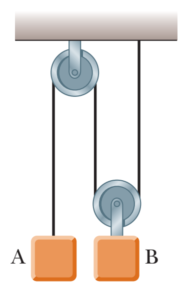


Figura P8.12

Sección 8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

13. Una caja de 40.0 kg, inicialmente en reposo, se empuja 5.00 m a lo largo de un suelo horizontal rugoso, con una fuerza constante horizontal aplicada de 130 N. El coeficiente de fricción entre la caja y el suelo es 0.300. Encuentre: a) el trabajo invertido por la fuerza aplicada, b) el aumento en energía interna en el sistema caja–suelo como resultado de la fricción, c) el

trabajo invertido por la fuerza normal, d) el trabajo invertido por la fuerza gravitacional, e) el cambio en energía cinética de la caja y f) la rapidez final de la caja.

14. Un bloque de 2.00 kg se une a un resorte con constante de fuerza 500 N/m, como se muestra en la figura 7.9. Se jala el bloque 5.00 cm hacia la derecha del equilibrio y se libera desde el reposo. Encuentre la rapidez que tiene el bloque cuando pasa a través del equilibrio si a) la superficie horizontal no tiene fricción y b) el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.350.

15. Una caja de 10.0 kg de masa se jala hacia arriba de un plano inclinado rugoso con una rapidez inicial de 1.50 m/s. La fuerza del jalón es 100 N paralela al plano, que forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.400 y la caja se jala 5.00 m. a) ¿Cuánto trabajo invierte la fuerza gravitacional en la caja? b) Determine el aumento en energía interna del sistema caja–plano inclinado debido a fricción. c) ¿Cuánto trabajo invierte la fuerza de 100 N en la caja? d) ¿Cuál es el cambio en energía cinética de la caja? e) ¿Cuál es la rapidez de la caja después de jalarse 5.00 m?

16. ● Un bloque de masa m está sobre una superficie horizontal con la que su coeficiente de fricción cinética es μ_k. El bloque se empuja contra el extremo libre de un resorte ligero con constante de fuerza k, que comprime el resorte una distancia d. Después el bloque se libera desde el reposo de modo que el resorte dispara el bloque a través de la superficie. De las posibles expresiones a) a k) que se mencionan a continuación para la rapidez del bloque después de que se desliza una distancia d, **i)** ¿cuál no puede ser cierta porque es dimensionalmente incorrecta? **ii)** De las restantes, ¿cuál(es) da(n) un resultado incorrecto en el límite a medida que k se vuelve muy grande? **iii)** De los restantes, ¿cuál(es) da(n) un resultado incorrecto en el límite a medida que μ_k tiende a cero? **iv)** De las que quedan, ¿cuál puede descartar por otras razones que especifique? (**v**) ¿Cuál expresión es correcta? **vi)** Evalúe la rapidez en el caso $m = 250$ g, $\mu_k = 0.600$, $k = 18.0$ N/m y $d = 12.0$ cm. Necesitará explicar su respuesta. a) $(kd^2 - \mu_k mgd)^{1/2}$, b) $(kd^2/m - \mu_k g)^{1/2}$, c) $(kd/m - 2\mu_k gd)^{1/2}$, d) $(kd^2/m - gd)^{1/2}$, e) $(kd^2/m - \mu_k^2 gd)^{1/2}$, f) $kd^2/m - \mu_k gd$, g) $(\mu_k kd^2/m - gd)^{1/2}$, h) $(kd^2/m - 2\mu_k gd)^{1/2}$, i) $(\mu_k gd - kd^2/m)^{1/2}$, j) $(gd - \mu_k gd)^{1/2}$, k) $(kd^2/m + \mu_k gd)^{1/2}$.

17. A un trineo de masa m se le da una patada sobre un lago congelado. La patada le imparte una rapidez inicial de 2.00 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y el hielo es 0.100. Aplique consideraciones energéticas para encontrar la distancia que el trineo se mueve antes de detenerse.

Sección 8.4 Cambios en energía mecánica para fuerzas no conservativas

18. ● En un tiempo t_i, la energía cinética de una partícula es 30.0 J y la energía potencial del sistema al que pertenece es 10.0 J. En algún tiempo posterior t_f, la energía cinética de la partícula es 18.0 J. a) Si sólo fuerzas conservativas actúan sobre la partícula, ¿cuáles son la energía potencial y la energía total en el tiempo t_f? b) Si la energía potencial del sistema en el tiempo t_f es 5.00 J, ¿existen fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula? Explique.

19. El coeficiente de fricción entre el bloque de 3.00 kg y la superficie en la figura P8.19 es 0.400. El sistema parte del reposo. ¿Cuál es la rapidez de la bola de 5.00 kg cuando cae 1.50 m?

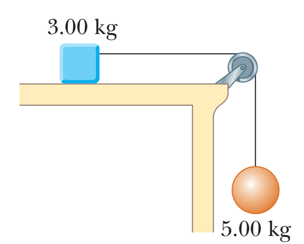


Figura P8.19

20. En su mano, una lanzadora de softball balancea una bola de 0.250 kg de masa alrededor de una trayectoria circular de 60.0 cm de radio antes de liberarla de su mano. La lanzadora mantiene una componente de fuerza en la bola con magnitud constante de 30.0 N en la dirección de movimiento alrededor de la trayectoria completa. La rapidez de la bola en lo alto del círculo es 15.0 m/s. Si la lanzadora libera la bola en la parte más baja del círculo, ¿cuál es su rapidez al liberarla?

21. Un bloque de 5.00 kg se pone en movimiento hacia arriba de un plano inclinado con una rapidez inicial de 8.00 m/s (figura P8.21). El bloque llega al reposo después de viajar 3.00 m a lo largo del plano, que está inclinado en un ángulo de 30.0° con la horizontal. Para este movimiento, determine a) el cambio en la energía cinética del bloque, b) el cambio en la energía potencial del sistema bloque–Tierra y c) la fuerza de fricción que se ejerce sobre el bloque (supuesta constante). d) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?

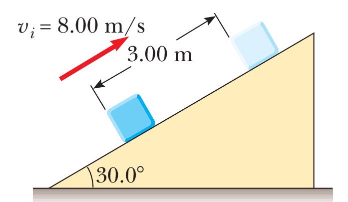


Figura P8.21

22. ● Un paracaidista de 80.0 kg salta de un globo a una altura de 1 000 m y abre el paracaídas a una altitud de 200 m. a) Si supone que la fuerza retardadora total sobre el paracaidista es constante en 50.0 N con el paracaídas cerrado y constante en 3 600 N con el paracaídas abierto, encuentre la rapidez del paracaidista cuando aterriza en el suelo. b) ¿Cree que el paracaidista se lesionará? Explique. c) ¿A qué altura se debe abrir el paracaídas de modo que la rapidez final del paracaidista cuando golpee el suelo sea 5.00 m/s? d) ¿Qué tan real es la suposición de que la fuerza retardadora total es constante? Explique.

23. Un arma de juguete usa un resorte para proyectar una bola de hule suave de 5.30 g. El resorte originalmente se comprime 5.00 cm y tiene una constante de fuerza de 8.00 N/m. Cuando el arma se dispara, la bola se mueve 15.0 cm a través del cañón horizontal del arma y el cañón ejerce una fuerza de fricción constante de 0.032 0 N en la bola. a) ¿Con qué rapidez el proyectil deja el cañón del arma? b) ¿En qué punto la bola tiene rapidez máxima? c) ¿Cuál es esta rapidez máxima?

24. Una partícula se mueve a lo largo de una línea donde la energía potencial de su sistema depende de su posición r, como se grafica en la figura P8.24. En el límite cuando r aumenta sin frontera, $U(r)$ tiende a +1 J. a) Identifique cada posición de equilibrio para esta partícula. Indique si cada una es un punto de equilibrio estable, inestable o neutro. b) ¿La partícula estará acotada si la energía total del sistema está, en ese intervalo? Ahora suponga que el sistema tiene energía de −3 J. Determine

c) el intervalo de posiciones donde se puede encontrar la partícula, d) su energía cinética máxima, e) la ubicación donde tiene energía cinética máxima y f) la *energía de enlace* del sistema, esto es, la energía adicional que tendría que darse a la partícula para moverla a $r \to \infty$.

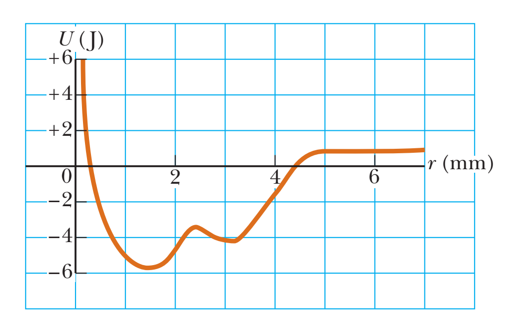


Figura P8.24

25. Un objeto de 1.50 kg se mantiene 1.20 m sobre un resorte vertical relajado sin masa con una constante de fuerza de 320 N/m. Se deja caer el objeto sobre el resorte. a) ¿Cuánto comprime al resorte? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto comprime al resorte si el mismo experimento se realiza sobre la Luna, donde g = 1.63 m/s^2? c) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso a), pero esta vez suponga que una fuerza de resistencia del aire constante de 0.700 N actúa sobre el objeto durante su movimiento.

26. Un niño en una silla de ruedas (masa total: 47.0 kg) gana una carrera contra un chico en patineta. El niño tiene 1.40 m/s de rapidez en la cresta de una pendiente de 2.60 m de alto y 12.4 m de largo. En la parte más baja de la pendiente su rapidez es 6.20 m/s. Suponga que la resistencia del aire y la resistencia de rodamiento se representan como una fuerza de fricción constante de 41.0 N. Encuentre el trabajo que hizo en empujar hacia adelante sus ruedas durante el viaje colina abajo.

27. Un tablero uniforme de longitud L se desliza a lo largo de un plano horizontal uniforme (sin fricción), como se muestra en la figura P8.27a. Después el tablero se desliza a través de la frontera con una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de fricción cinética entre el tablero y la segunda superficie es μ_k. a) Encuentre la aceleración del tablero cuando su extremo frontal recorre una distancia x más allá de la frontera. b) El tablero se detiene en el momento en que su extremo posterior llega a la frontera, como se muestra en la figura P8.27b. Encuentre la rapidez inicial v del tablero.

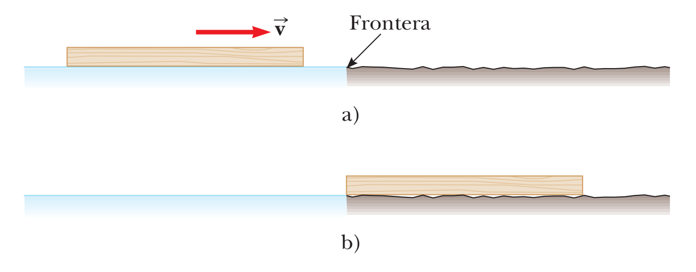


Figura P8.27

Sección 8.5 Potencia

28. El motor eléctrico de un tren a escala acelera al tren desde el reposo a 0.620 m/s en 21.0 ms. La masa total del tren es 875 g. hallar la potencia promedio entregada al tren durante la aceleración.

29. Un marine de 700 N en entrenamiento básico asciende en 8.00 s una soga vertical de 10.0 m con una rapidez constante. ¿Cuál es su potencia desarrollada?

30. El columnista Dave Barry se mofó del nombre “Las grandes ciudades” que adoptaran Grand Forks, Dakota del Norte, y East Grand Forks, Minnesota. En consecuencia los residentes de dichas ciudades nombraron su siguiente edificio municipal en su honor. En la Estación de elevación Dave Barry núm. 16, aguas de drenaje no tratadas se elevan verticalmente 5.49 m, en una proporción de 1 890 000 litros cada día. El desperdicio, de 1 050 kg/m^3 de densidad, entra y sale de la bomba a presión atmosférica, a través de tuberías de igual diámetro. a) Encuentre la potencia mecánica de salida de la estación de elevación de aguas sucias. b) Suponga que un motor eléctrico, que opera continuamente con potencia promedio de 5.90 kW, impulsa la bomba. Encuentre su eficiencia.

31. Haga una estimación de un orden de magnitud de la potencia que aporta el motor de un automóvil para acelerar el auto a rapidez de autopista. Considere su propio automóvil, si usa uno. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos. La masa del vehículo se proporciona en el manual del propietario. Si no quiere estimar un automóvil, considere un autobús o camión que especifique.

32. Un elevador de 650 kg parte del reposo. Se mueve hacia arriba durante 3.00 s con aceleración constante hasta que llega a su rapidez de crucero de 1.75 m/s. a) ¿Cuál es la potencia promedio del motor del elevador durante este intervalo de tiempo? b) ¿De qué modo se compara esta potencia con la potencia del motor cuando el elevador se mueve a su rapidez de crucero?

33. Una lámpara con eficiencia energética, que toma 28.0 W de potencia, produce el mismo nivel de brillantez que una lámpara convencional que funciona a una potencia de 100 W. El tiempo de vida de la lámpara con eficiencia energética es 10 000 h y su precio de compra es 17.0 dólares, mientras que la lámpara convencional tiene un tiempo de vida de 750 h y cuesta 0.420 dólares por lámpara. Determine el ahorro total que se obtiene al usar una lámpara con eficiencia energética durante su tiempo de vida, en oposición a usar lámparas convencionales durante el mismo intervalo de tiempo. Suponga un costo de energía de 0.080 0 dólares por kilowatt hora.

34. Una motoneta eléctrica tiene una batería capaz de suministrar 120 Wh de energía. Si las fuerzas de fricción y otras pérdidas explican 60.0% del uso de energía, ¿qué cambio en altitud puede lograr un motociclista cuando conduce en terreno montañoso, si el conductor y la motoneta tienen un peso combinado de 890 N?

35. Un furgón cargado tiene una masa de 950 kg y rueda sobre rieles con fricción despreciable. Parte del reposo y un cable conectado a un malacate lo jala por el tiro de una mina. El tiro está inclinado 30.0° sobre la horizontal. El furgón acelera de manera uniforme a una rapidez de 2.20 m/s en 12.0 s y después continúa con rapidez constante. a) ¿Qué potencia debe proporcionar el motor del malacate cuando el furgón se mueve con rapidez constante? b) ¿Qué potencia máxima debe proporcionar el motor del malacate? c) ¿Qué energía total transfirió el motor mediante trabajo para cuando el furgón salió de la pista, que tiene 1 250 m de largo?

36. Por convención la energía se mide en Calorías, así como en joules. Una Caloría en nutrición es una kilocaloría, que se define como 1 kcal = 4 186 J. Metabolizar 1 g de grasa puede

liberar 9.00 kcal. Una estudiante decide intentar perder peso mediante el ejercicio. Ella planea subir y bajar corriendo las escaleras de un estadio de futbol tan rápido como pueda y tantas veces como sea necesario. ¿Esta actividad en sí misma es una forma práctica de perder peso? Para evaluar el programa, suponga que ella sube un tramo de 80 escalones, cada uno de 0.150 m de alto, en 65.0 s. Por simplicidad, ignore la energía que usa al bajar (que es pequeña). Suponga que una eficiencia típica para músculos humanos es de 20.0%. Esta afirmación significa que, cuando su cuerpo convierte 100 J de grasa en metabolismo, 20 J realizan trabajo mecánico (en este caso, subir escaleras). El resto va a energía interna adicional. Suponga que la masa de la estudiante es de 50.0 kg. a) ¿Cuántas veces debe correr el tramo de escaleras para perder 1 lb de grasa? b) ¿Cuál es su potencia desarrollada promedio, en watts y en caballos de fuerza, mientras sube corriendo las escaleras?

Problemas adicionales

37. Un muchacho con su patineta se modela como una partícula de 76.0 kg de masa, ubicado en su centro de masa (que se estudiará en el capítulo 9). Como se muestra en la figura P8.37, el muchacho parte del reposo en una posición encorvada en un borde de un medio tubo (punto Ⓐ). El medio tubo es un canal de agua seco, que forma la mitad de un cilindro de 6.80 m de radio con su eje horizontal. En su descenso, el muchacho se mueve sin fricción de modo que su centro de masa se mueve a través de un cuarto de círculo de 6.30 m de radio. a) Encuentre su rapidez en el fondo del medio tubo (punto Ⓑ). b) Encuentre su aceleración centrípeta. c) Encuentre la fuerza normal $n_{Ⓑ}$ que actúa sobre él en el punto Ⓑ. Inmediatamente después de pasar el punto Ⓑ, se pone de pie y eleva los brazos, lo que eleva su centro de masa de 0.500 m a 0.950 m sobre el concreto (punto Ⓒ). Para explicar la conversión de energía química en mecánica modele sus piernas como realizando trabajo al empujarlo verticalmente hacia arriba, con una fuerza constante igual a la fuerza normal $n_{Ⓑ}$, sobre una distancia de 0.450 m. (En el capítulo 11 será capaz de resolver este problema con un modelo más preciso.) d) ¿Cuál es el trabajo invertido en el cuerpo del muchacho en este proceso? A continuación, él se desliza hacia arriba con su centro de masa moviéndose en un cuarto de círculo de 5.85 m de radio. Su cuerpo está horizontal cuando pasa el punto Ⓓ, el borde lejano del medio tubo. e) Encuentre su rapidez en esta ubicación. Por último se vuelve balístico y gira mientras su centro de masa se mueve verticalmente. f) ¿A qué altura sobre el punto Ⓓ se eleva? g) ¿Durante qué intervalo de tiempo es aerotransportado antes de bajar, 2.34 m abajo del nivel del punto Ⓓ? *Precaución:* No intente esta acrobacia sin la habilidad y equipo requeridos, o en un canal de drenaje al que no tenga acceso legal.

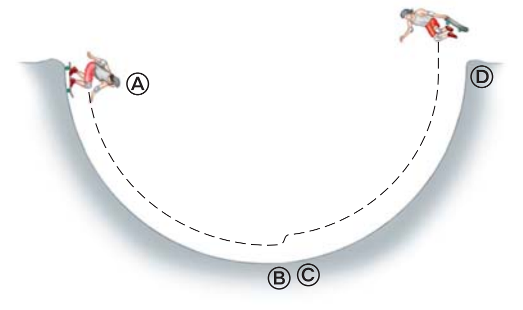


Figura P8.37

38. ● **Problema de repaso.** Como se muestra en la figura P8.38, unacuerda ligera que no se estira cambia de horizontal a vertical a medida que pasa sobre el borde de una mesa. La cuerda conecta un bloque de 3.50 kg, al principio en reposo sobre la mesa horizontal, 1.20 m arriba del suelo, a un bloque colgante de 1.90 kg, al principio a 0.900 m sobre el suelo. Ni la superficie de la mesa ni su borde ejercen una fuerza de fricción cinética. Los bloques comienzan a moverse con rapidez despreciable. Considere los dos bloques más la Tierra como el sistema. a) ¿La energía mecánica del sistema permanece constante entre el instante de liberación y el instante antes de que el bloque colgante golpee el suelo? b) Encuentre la rapidez a la que el bloque deslizante deja el borde de la mesa. c) Ahora suponga que el bloque colgante se detiene permanentemente tan pron-to como llega al suelo pegajoso. ¿La energía mecánica del sistema permanece constante entre el instante de liberación y el instante antes de que el bloque deslizante golpee el suelo? d) Encuentre la rapidez de impacto del bloque deslizante. e) ¿Cuán larga debe ser la cuerda si no se debe tensar mientras el bloque deslizante está en vuelo? f) ¿Se invalidaría su cálculo de rapidez si la cuerda se tensa? g) Incluso con fricción cinética despreciable, el coeficiente de fricción estática entre el bloque más pesado y la mesa es 0.560. Evalúe la fuerza de fricción que actúa sobre este bloque antes de que comience el movimiento. h) ¿El movimiento comenzará por sí solo, o el experimentador debe dar un pequeño golpe al bloque deslizante para que comience? ¿Los cálculos de rapidez todavía son válidos?

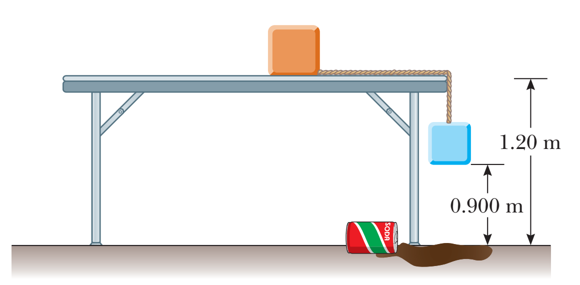


Figura P8.38

39. Una partícula de 4.00 kg se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con $x = t + 2.0t^3$, donde x está en metros y t en segundos. Encuentre: a) la energía cinética en cualquier tiempo t, b) la aceleración de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella en el tiempo t, c) la potencia que se entrega a la partícula en el tiempo t y d) el trabajo invertido en la partícula en el intervalo $t = 0$ a $t = 2.00$ s.

40. ● Sin atención del peligro, un niño salta sobre una pila de colchonetas para usarlas como trampolín. Su movimiento entre dos puntos particulares se describe mediante la ecuación de conservación de la energía

$$\tfrac{1}{2}(46.0\text{ kg})(2.40\text{ m/s})^2 + (46.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.80\text{ m} + x) = \tfrac{1}{2}(1.94 \times 10^4\text{ N/m})x^2$$

a) Resuelva la ecuación para x. b) Componga el enunciado de un problema, incluidos datos, para los que esta ecuación dé la solución. Identifique el significado físico del valor de x.

41. Mientras el conductor pisa el pedal del acelerador, un automóvil de 1 160 kg de masa acelera desde el reposo. Durante los primeros segundos de movimiento, la aceleración del automóvil aumenta con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$a = (1.16\text{ m/s}^3)t - (0.210\text{ m/s}^4)t^2 + (0.240\text{ m/s}^5)t^3$$

a) ¿Qué trabajo invierten las ruedas sobre el automóvil durante el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 2.50$ s? b) ¿Cuál es la potencia útil de las ruedas en el instante $t = 2.50$ s?

42. Una partícula de 0.400 kg se desliza alrededor de una pista horizontal. La pista tiene una pared exterior vertical uniforme que forma un círculo con un radio de 1.50 m. A la partícula se le da una rapidez inicial de 8.00 m/s. Después de una revolución, su rapidez cae a 6.00 m/s debido a la fricción con el suelo rugoso de la pista. a) Encuentre la energía transformada de mecánica a interna en el sistema como resultado de la fricción en una revolución. b) Calcule el coeficiente de fricción cinética. c) ¿Cuál es el número total de revoluciones que da la partícula antes de detenerse?

43. Un bloque de 200 g se presiona contra un resorte con 1.40 kN/m de constante de fuerza hasta que el bloque comprime el resorte 10.0 cm. El resorte descansa en la parte baja de una rampa inclinada 60.0° con la horizontal. Mediante consideraciones de energía, determine cuánto se mueve el bloque hacia arriba del plano inclinado antes de detenerse a) si la rampa no ejerce fuerza de fricción en el bloque y b) si el coeficiente de fricción cinética es 0.400.

44. ● Mientras limpia un estacionamiento, un quitanieve empuja una pila cada vez más grande de nieve enfrente de él. Suponga que un automóvil que se mueve a través del aire se modela como un cilindro que empuja una pila creciente de aire enfrente de él. El aire originalmente estacionario se pone en movimiento a la rapidez constante v del cilindro, como se muestra en la figura P8.44. En un intervalo de tiempo Δt, un nuevo disco de aire de masa Δm se debe mover una distancia $v \Delta t$ y por tanto se le debe dar una energía cinética $\frac{1}{2}(\Delta m)v^2$. Con el uso de este modelo, muestre que la pérdida de potencia del automóvil debida a resistencia del aire es $\frac{1}{2}\rho A v^3$, y que la fuerza resistiva que actúa sobre el automóvil es $\frac{1}{2}\rho A v^2$, donde ρ es la densidad del aire. Compare este resultado con la expresión empírica $\frac{1}{2}D\rho A v^2$ para la fuerza resistiva.

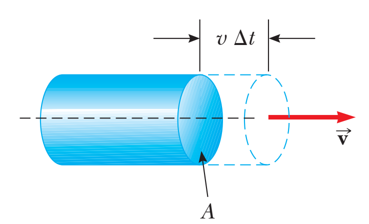


Figura P8.44

45. Un molino de viento, como el que se muestra en la fotografía de apertura del capítulo 7, gira en respuesta a una fuerza de resistencia del aire de alta rapidez, $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$. La potencial disponible es $\mathcal{P} = Rv = \frac{1}{2}D\rho\pi r^2 v^3$, donde v es la rapidez del viento y se supone una cara circular para el molino de viento, de radio r. Tome el coeficiente de arrastre como $D = 1.00$ y la densidad del aire de las primeras páginas de este libro. Para un molino de viento casero que tenga $r = 1.50$ m, calcule la potencia disponible con a) $v = 8.00$ m/s y b) $v = 24.0$ m/s. La potencia entregada al generador está limitada por la eficiencia del sistema, cerca de 25%. En comparación, un hogar estadounidense típico usa alrededor de 3 kW de energía eléctrica.

46. ● Desde el reposo, una persona de 64.0 kg hace un salto bungee desde un globo atado 65.0 m sobre el suelo (figura P8.11). La cuerda bungee tiene masa despreciable y longitud no estirada de 25.8 m. Un extremo se amarra a la canasta del globo aerostático y el otro extremo a un arnés alrededor del cuerpo de la persona. La cuerda se modela como un resorte que obedece la ley de Hooke con una constante de resorte de 81.0 N/m, y el cuerpo de la persona se modela como partícula. El globo no se mueve. a) Exprese la energía potencial gravitacional del sistema persona–Tierra como función de la altura variable y de la persona sobre el suelo. b) Exprese la energía potencial elástica de la cuerda como función de y. c) Exprese la energía potencial total del sistema persona–cuerda–Tierra como función de y. d) Trace una gráfica de energías gravitacional, elástica y potencial total como funciones de y. e) Suponga que la resistencia del aire es despreciable. Determine la altura mínima de la persona sobre el suelo durante su caída. f) ¿La gráfica de energía potencial muestra alguna posición de equilibrio? Si es así, ¿a qué elevaciones? ¿Son estables o inestables? g) Determine la rapidez máxima del saltador.

47. Considere el sistema bloque–resorte–superficie en el inciso B) del ejemplo 8.6. a) ¿En qué posición x del bloque su rapidez es un máximo? b) En la sección **¿Qué pasaría si?** de dicho ejemplo, se exploraron los efectos de una fuerza de fricción aumentada de 10.0 N. ¿En qué posición del bloque su rapidez máxima se presenta en esta situación?

48. ● Hace más de 2 300 años el maestro griego Aristóteles escribió el primer libro llamado *Física*. Puesto en terminología más precisa, este pasaje es del final de su Sección Eta:

> Sea $\mathcal{P}$ la potencia de un agente que causa movimiento; w, la carga movida; d, la distancia cubierta; y Δt, el intervalo de tiempo requerido. En tal caso 1) una potencial igual a $\mathcal{P}$ en un intervalo de tiempo igual a Δt moverá $w/2$ una distancia $2d$, o 2) moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$. Además, si 3) la potencia conocida $\mathcal{P}$ mueve la carga dada w una distancia $d/2$ en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$, por lo tanto 4) $\mathcal{P}/2$ moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo de tiempo dado Δt.

a) Demuestre que las proporciones de Aristóteles se incluyen en la ecuación $\mathcal{P}\Delta t = bwd$, donde b es una constante de proporcionalidad. b) Demuestre que la teoría de movimiento del libro incluye esta parte de la teoría de Aristóteles como un caso especial. En particular, describa una situación en la que sea verdadera, deduzca la ecuación que represente las proporciones de Aristóteles y determine la constante de proporcionalidad.

49. **Problema de repaso.** La masa de un automóvil es 1 500 kg. La forma del cuerpo del automóvil es tal que su coeficiente de arrastre aerodinámico es $D = 0.330$ y el área frontal es 2.50 m^2. Si supone que la fuerza de arrastre es proporcional a v^2 y si ignora otras fuentes de fricción, calcule la potencia requerida para mantener una rapidez de 100 km/h mientras el automóvil asciende una larga colina con 3.20° de pendiente.

50. Una partícula de 200 g se libera desde el reposo en el punto Ⓐ a lo largo del diámetro horizontal en el interior de un tazón hemisférico sin fricción con radio $R = 30.0$ cm (figura P8.50). Calcule a) la energía potencial gravitacional del sistema partícula–Tierra cuando la partícula está en el punto Ⓐ en rela-

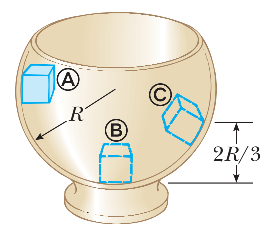


Figura P8.50 Problemas 50 y 51.

ción con el punto Ⓑ, b) la energía cinética de la partícula en el punto Ⓑ, c) su rapidez en el punto Ⓑ y d) su energía cinética y la energía potencial cuando la partícula está en el punto Ⓒ.

51. ● **¿Qué pasaría si?** La partícula descrita en el problema 50 (figura P8.50) se libera desde el reposo en Ⓐ, y la superficie del tazón es rugosa. La rapidez de la partícula en Ⓑ es 1.50 m/s. a) ¿Cuál es su energía cinética en Ⓑ? b) ¿Cuánta energía mecánica se transforma en energía interna a medida que la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ? c) ¿Es posible determinar el coeficiente de fricción a partir de estos resultados de alguna manera simple? Explique.

52. Suponga que asiste a una universidad estatal que se fundó como escuela de agricultura. Cerca del centro del campus hay un alto silo coronado con un casco hemisférico. El casco no tiene fricción cuando está húmedo. Alguien equilibró una calabaza en el punto más alto del silo. La línea desde el centro de curvatura del casco hacia la calabaza forma un ángulo $\theta_i = 0°$ con la vertical. En una noche lluviosa, mientras está de pie en las cercanías, un soplo de viento hace que la calabaza se comience a deslizar hacia abajo desde el reposo. La calabaza pierde contacto con el casco cuando la línea desde el centro del hemisferio hacia la calabaza forma cierto ángulo con la vertical. ¿Cuál es este ángulo?

53. El zanco saltarín de un niño (figura P8.53) almacena energía en un resorte con una constante de fuerza de 2.50×10^4 N/m. En la posición Ⓐ ($x_Ⓐ = -0.100$ m), la compresión del resorte es un máximo y el niño momentáneamente está en reposo. En la posición Ⓑ ($x_Ⓑ = 0$), el resorte está relajado y el niño se mueve hacia arriba. En la posición Ⓒ, el niño de nuevo está momentáneamente en reposo en lo alto del salto. La masa combinada del niño y el zanco es de 25.0 kg. a) Calcule la energía total del sistema niño–zanco saltarín–Tierra, y considere las energías gravitacional y potencial elástica como cero para $x = 0$. b) Determine $x_Ⓒ$. c) Calcule la rapidez del niño en $x = 0$. d) Determine el valor de x para el que la energía cinética del sistema es un máximo. e) Calcule la rapidez hacia arriba máxima del niño.

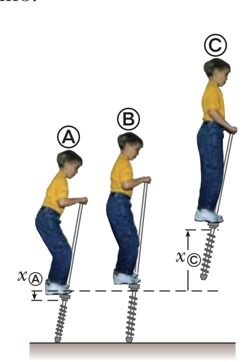


Figura P8.53

54. Un objeto de 1.00 kg se desliza hacia la derecha sobre una superficie que tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.250 (figura P8.54). El objeto tiene una rapidez de $v_i = 3.00$ m/s cuando hace contacto con un resorte ligero que tiene una constante de fuerza de 50.0 N/m. El objeto llega al reposo después de que el resorte se comprime una distancia d. En tal caso el objeto se fuerza hacia la izquierda mediante el resorte y continúa moviéndose en dicha dirección más allá de la posición no estirada del resorte. Al final, el objeto llega al reposo una distancia D a la izquierda del resorte no estirado. Encuentre a) la distancia de compresión d, b) la rapidez v en la posición no estirada cuando el objeto es móvil hacia la izquierda y c) la distancia D donde el objeto llega al reposo.

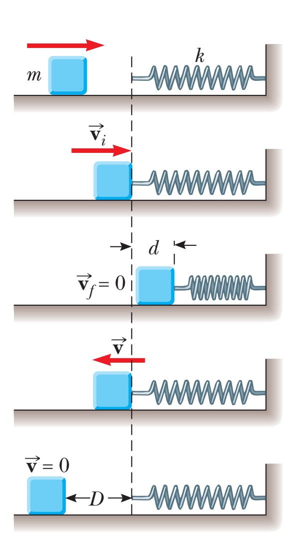


Figura P8.54

55. Un bloque de 10.0 kg se libera desde el punto Ⓐ en la figura P8.55. La pista no tiene fricción excepto por la porción entre los puntos Ⓑ y Ⓒ, que tiene una longitud de 6.00 m. El bloque viaja por la pista, golpea un resorte con 2 250 N/m de constante de fuerza y comprime el resorte 0.300 m desde su posición de equilibrio antes de llegar al reposo momentáneamente. Determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie rugosa entre Ⓑ y Ⓒ

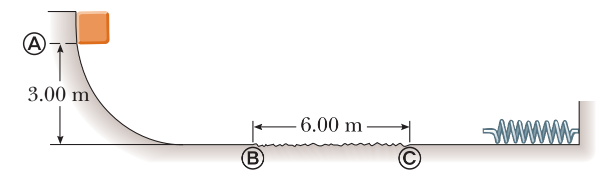


Figura P8.55

56. Una cadena uniforme de 8.00 m de longitud inicialmente yace estirada sobre una mesa horizontal. a) Si supone que el coeficiente de fricción estática entre la cadena y la mesa es 0.600, muestre que la cadena comenzará a deslizarse de la mesa si al menos 3.00 m de ella cuelgan sobre el borde de la mesa. b) Determine la rapidez de la cadena cuando su último eslabón deja la mesa, teniendo en cuenta que el coeficiente de fricción cinética entre la cadena y la mesa es 0.400.

57. Un bloque de 20.0 kg se conecta a un bloque de 30.0 kg mediante una cuerda que pasa sobre una polea ligera sin fricción. El bloque de 30.0 kg se conecta a un resorte que tiene masa despreciable y una constante de fuerza de 250 N/m, como se muestra en la figura P8.57. El resorte no está estirado cuando el sistema está como se muestra en la figura, y el plano inclinado no tiene fricción. El bloque de 20.0 kg se jala 20.0 cm hacia abajo del plano (de modo que el bloque de 30.0 kg está 40.0 cm sobre el suelo) y se libera desde el reposo. Encuentre la rapidez de cada bloque cuando el bloque de 30.0 kg está 20.0 cm arriba del suelo (esto es: cuando el resorte no está estirado).

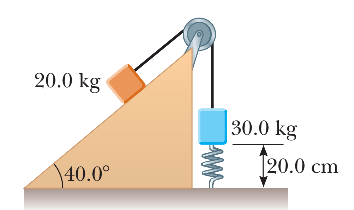


Figura P8.57

58. Jane, cuya masa es 50.0 kg, necesita columpiarse a través de un río (que tiene una anchura D), lleno de cocodrilos cebados con carne humana, para salvar a Tarzán del peligro. Ella debe columpiarse contra un viento que ejerce fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$, en una liana que tiene longitud L e inicialmente forma un ángulo θ con la vertical (figura P8.58). Considere $D = 50.0$ m, $F = 110$ N, $L = 40.0$ m y $\theta = 50.0°$. a) ¿Con qué rapidez mínima Jane debe comenzar su balanceo para apenas llegar al otro lado? b) Una vez que el rescate está completo, Tarzán y Jane deben columpiarse de vuelta a través del río. ¿Con qué rapidez mínima deben comenzar su balanceo? Suponga que Tarzán tiene una masa de 80.0 kg.

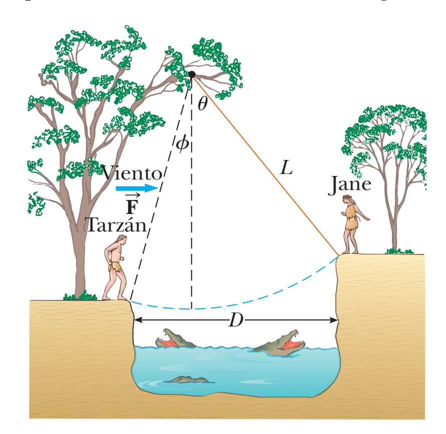


Figura P8.58

59. ● Un bloque de 0.500 kg de masa se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable hasta que el resorte se comprime una distancia x (figura P8.59). La constante de fuerza del resorte es 450 N/m. Cuando se libera, el bloque viaja a lo largo de una superficie horizontal sin fricción al punto B, la parte baja de una pista circular vertical de radio $R = 1.00$ m, y continúa moviéndose a lo largo de la pista. La rapidez del bloque en la parte baja de la pista es $v_B = 12.0$ m/s, y el bloque experimenta una fuerza de fricción promedio de 7.00 N mientras se desliza hacia arriba de la pista. a) ¿Cuál es x? b) ¿Qué rapidez predice para el bloque en lo alto de la pista? c) ¿En realidad el bloque llega a lo alto de la pista, o cae antes de llegar a lo alto?

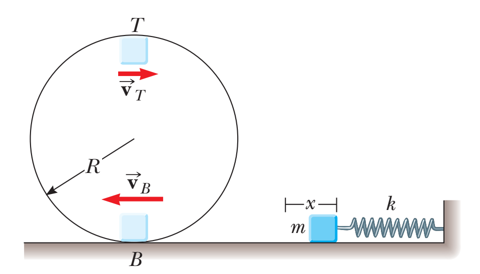


Figura P8.59

60. Una bola de masa $m = 300$ g se conecta mediante una cuerda resistente de longitud $L = 80.0$ cm a un pivote y se mantiene en su lugar con la cuerda vertical. Un viento ejerce fuerza constante F hacia la derecha sobre la bola, como se muestra en la figura P8.60. La bola se libera desde el reposo. El viento hace que se balancee para lograr altura máxima H sobre su punto de partida antes de que se balancee abajo de nuevo. a) Encuentre H como función de F. Evalúe H b) para $F = 1.00$ N y c) para $F = 10.0$ N. ¿Cómo se comporta H d) cuando F tiende a cero e) y cuando F tiende a infinito? f) Ahora considere la altura de equilibrio de la bola con el viento que sopla. Determínela como función de F. Evalúe la altura de equilibrio g) para $F = 10$ N y h) para F que tiende a infinito.

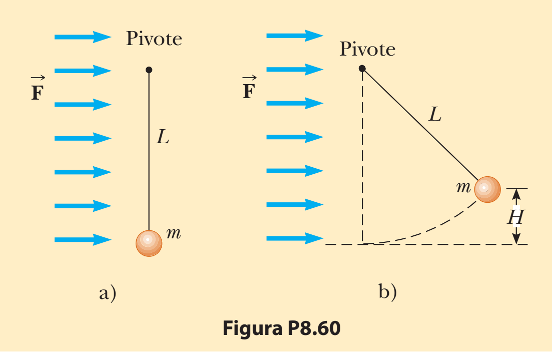


Figura P8.60

61. Un bloque de masa M descansa sobre una mesa. Se amarra al extremo inferior de un resorte vertical ligero. El extremo superior del resorte se amarra a un bloque de masa m. El bloque superior se empuja hacia abajo con una fuerza adicional $3mg$, así que la compresión del resorte es $4mg/k$. En esta configuración, el bloque superior se libera desde el reposo. El resorte se eleva de la mesa al bloque inferior. En términos de m, ¿cuál es el mayor valor posible de M?

62. Un péndulo, que consta de una cuerda ligera de longitud L y un esfera pequeña, se balancean en el plano vertical. La cuerda golpea una clavija ubicada a un distancia d bajo el punto de suspensión (figura P8.62). a) Demuestre que, si la esfera se libera desde una altura por abajo de la clavija, regresará a esta altura después de que la cuerda golpee la clavija. b) Demuestre que, si el péndulo se libera desde la posición horizontal ($\theta = 90°$) y se balancea en un círculo completo con centro en la clavija, el valor mínimo de d debe ser $3L/5$.

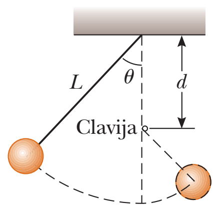


Figura P8.62

63. Una bola gira alrededor de un círculo vertical en el extremo de una cuerda. El otro extremo de la cuerda está fijo en el centro del círculo. Si supone que la energía total del sistema bola–Tierra permanece constante, demuestre que la tensión en la cuerda en la parte baja es mayor que la tensión en lo alto por seis veces el peso de la bola.

64. Un carro de montaña rusa se libera desde el reposo en lo alto de la primera subida y luego se mueve libremente con fricción despreciable. La montaña rusa que se muestra en la figura

P8.64 tiene un bucle circular de radio R en un plano vertical. a) Primero suponga que el carro apenas libra el bucle; en lo alto del bucle, los pasajeros están cabeza abajo y se sienten sin peso. Encuentre la altura requerida del punto de liberación sobre la parte baja del bucle en términos de R. b) Ahora suponga que el punto de liberación está en o arriba de la altura mínima requerida. Demuestre que la fuerza normal sobre el carro en la parte baja del bucle supera la fuerza normal en lo alto del bucle por seis veces el peso del carro. La fuerza normal sobre cada pasajero sigue la misma regla. Puesto que una fuerza normal tan grande es peligrosa y muy incómoda para los pasajeros, las montañas rusas no se construyen con bucles circulares en planos verticales. La figura P6.18 y la fotografía de la página 137 muestran dos diseños actuales.



Figura P8.64

65. **Problema de repaso.** En 1887, en Bridgeport, Connecticut, C.J. Belknap construyó el tobogán de agua que se muestra en la figura P8.65. Un pasajero en un pequeño trineo, de 80.0 kg de masa total, se empuja para arrancar en lo alto del tobogán (punto Ⓐ), con una rapidez de 2.50 m/s. El tobogán tiene 9.76 m de alto en la cima, 54.3 m de largo y 0.51 m de ancho. A lo largo de su longitud, 725 ruedas pequeñas hacen la fricción despreciable. Al momento de dejar el tobogán horizontalmente en su extremo inferior (punto Ⓒ), el pasajero pasa rozando el agua de Long Island Sound por hasta 50 m, "saltando como un guijarro plano", antes de que llegue al reposo y nade a la orilla, jalando su trineo tras de él. De acuerdo con *Scientific American*, "La expresión facial de los novatos que toman su primer deslizamiento venturoso es bastante notoria, y las sen-saciones que experimentan son correspondientemente novedosas y peculiares". a) Encuentre la rapidez del trineo y el pasajero en el punto Ⓒ. b) Modele la fuerza de la fricción del agua como una fuerza retardadora constante que actúa sobre una partícula. Encuentre el trabajo invertido por la fricción del agua para detener al trineo y al pasajero. c) Hallar la magnitud de la fuerza que ejerce el agua sobre el trineo. d) Encuentre la magnitud de la fuerza que el tobogán ejerce sobre el trineo en el punto Ⓑ. e) En el punto Ⓒ, el tobogán es horizontal pero curvo en el plano vertical. Suponga que su radio de curvatura es 20.0 m. Encuentre la fuerza que el tobogán ejerce sobre el trineo en el punto Ⓒ.

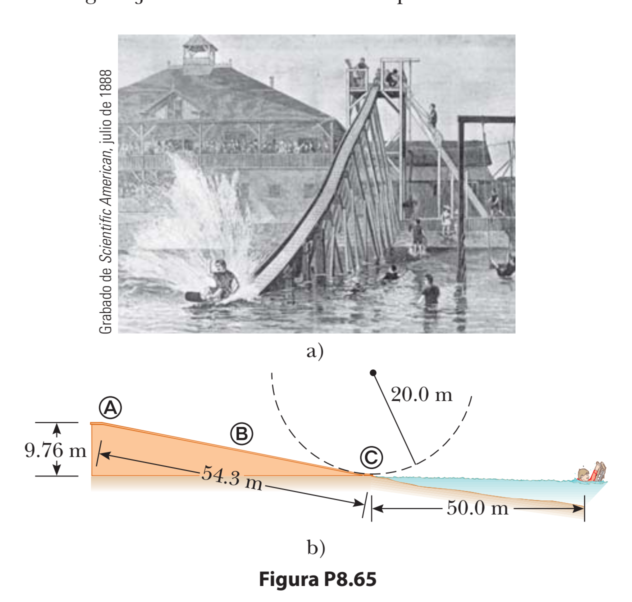


Figura P8.65

66. Considere la colisión bloque–resorte discutida en el ejemplo 8.8. a) En el inciso (B), para la situación en que la superficie ejerce una fuerza de fricción sobre el bloque, demuestre que el bloque nunca llega de regreso a $x = 0$. b) ¿Cuál es el valor máximo del coeficiente de fricción que permitiría al bloque regresar a $x = 0$?

Respuestas a las preguntas rápidas

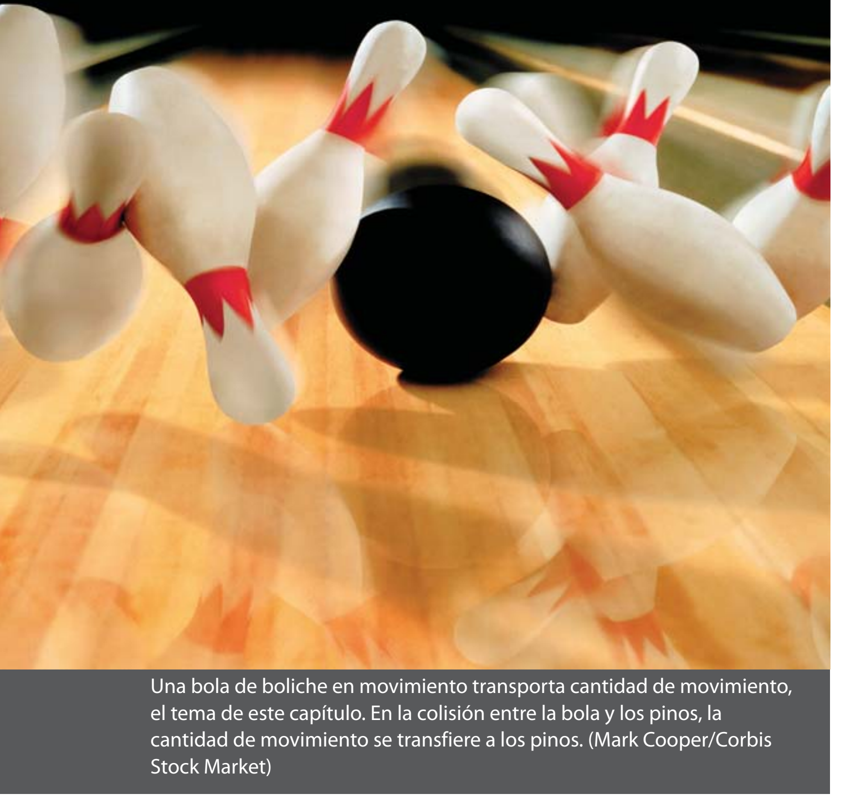
8.1 a). Para el televisor, la energía entra mediante transmisión eléctrica (a través del cable eléctrico). La energía sale mediante calor (de las superficies calientes hacia el aire), ondas mecánicas (sonido de las bocinas) y radiación electromagnética (de la pantalla). b) Para la podadora de gasolina, la energía entra mediante transferencia de materia (gasolina). La energía sale mediante trabajo (sobre las hojas de pasto), ondas mecánicas (sonido) y calor (de las superficies calientes hacia el aire). c) Para el sacapuntas manual, la energía entra mediante trabajo (de su mano que da vuelta al sacapuntas). La energía sale mediante trabajo (invertido sobre el lápiz), ondas mecánicas (sonido) y calor debido al aumento de temperatura por fricción.

8.2 **i**), b). Para el bloque, la fuerza de fricción de la superficie representa una interacción con el medio ambiente. **ii**), b). Para la superficie, la fuerza de fricción del bloque representa una interacción con el medio ambiente. **iii**), a). Para el bloque y la superficie, la fuerza de fricción es interna al sistema, así que no hay interacción con el medio ambiente.

8.3 a). La roca tiene el doble de energía potencial gravitacional asociada con ella en comparación con la de la roca más ligera. Puesto que la energía mecánica de un sistema aislado se conserva, la roca más de gran masa llegará al suelo con el doble de energía cinética que la roca más ligera.

8.4 $v_1 = v_2 = v_3$. La primera y tercera bolas aceleran después de ser lanzadas, mientras que la segunda bola frena al inicio pero acelera después de llegar a su pico. Las trayectorias de las tres bolas son parábolas, y las bolas tardan diferentes intervalos de tiempo en llegar al suelo porque tienen distintas velocidades iniciales. Sin embargo, las tres bolas tienen la misma rapidez en el momento en que golpean el suelo porque todas parten con la misma energía cinética y porque el sistema bola–Tierra se somete al mismo cambio en energía potencial gravitacional en los tres casos.

8.5 c). Los frenos y el camino son más calientes, así que su energía interna aumentó. Además, el sonido del derrape representa transferencia de energía que se aleja mediante ondas mecánicas.



Una bola de boliche en movimiento transporta cantidad de movimiento, el tema de este capítulo. En la colisión entre la bola y los pinos, la cantidad de movimiento se transfiere a los pinos. (Mark Cooper/Corbis Stock Market)

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones

Considere lo que ocurre cuando una bola de boliche golpea un pino, como en la fotografía de arriba. Al pino se le da una gran velocidad como resultado de la colisión; en consecuencia, se aleja volando y golpea a otros pinos o se proyecta hacia el tope de retención y que la fuerza promedio que se ejerce sobre el pino durante la colisión es grande (lo que resulta en una gran aceleración), el pino logra su gran velocidad muy pronto y experimenta la fuerza durante un intervalo de tiempo muy corto.

Aunque la fuerza y la aceleración son grandes para el pino, varían en el tiempo, ¡lo que hace una situación complicada! Uno de los objetivos principales de este capítulo es permitirle entender y analizar tales eventos en una forma simple. Primero, se introduce el concepto de *cantidad de movimiento*, que es útil para describir objetos en movimiento. La cantidad de movimiento de un objeto se relaciona tanto con su masa como con su velocidad. El concepto de cantidad de movimiento conduce a una segunda ley de conservación para un sistema aislado, el de conservación de la cantidad de movimiento. Esta ley es de especial utilidad para tratar problemas que incluyen colisiones entre objetos y para analizar propulsión de cohetes. Además se introduce el concepto de centro de masa de un sistema de partículas: el movimiento de un sistema de partículas se puede describir mediante el movimiento de una partícula representativa ubicada en el centro de masa.

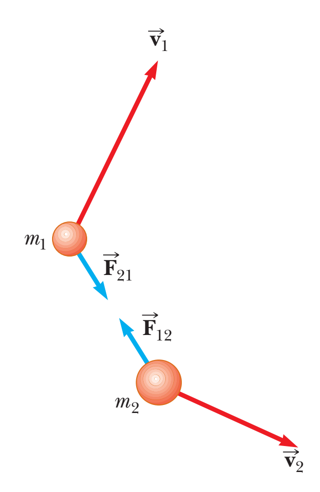


Figura 9.1 Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

En el capítulo 8 se estudiaron situaciones que son difíciles de analizar con las leyes de Newton. Fue posible resolver problemas que involucran estas situaciones al identificar un sistema y aplicar un principio de conservación, el de conservación de energía. Examine otra situación en la que un arquero de 60 kg está de pie sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s. A partir de la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que el arco ejerce en la flecha se iguala mediante una fuerza en la dirección opuesta sobre el arco (y el arquero). Esta fuerza hace que el arquero se deslice hacia atrás sobre el hielo, ¿pero con qué rapidez? No se puede responder esta pregunta directamente con el uso de la segunda ley de Newton o un planteamiento de energía porque no se tiene suficiente información.

A pesar de la incapacidad para resolver el problema del arquero mediante las técnicas aprendidas hasta el momento, este problema es muy simple de resolver si se introduce una nueva cantidad que describa el movimiento, la *cantidad de movimiento lineal*. Aplique la estrategia general para resolver problemas y elabore su marco conceptual de un sistema aislado de dos partículas (figura 9.1) con las masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en un instante de tiempo. Ya que el sistema está aislado, la única fuerza sobre una partícula es a causa de la otra partícula, y se puede clasificar esta situación como una en la que las leyes de Newton son útiles. Si una fuerza a causa de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa sobre la partícula 2, debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1. Es decir, las fuerzas en las partículas forman un par acción–reacción de la tercera ley de Newton, y $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Esta condición se expresa como

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

Más adelante *analice* esta situación al incorporar la segunda ley de Newton. En algún intervalo de tiempo, las partículas en acción recíproca en el sistema aceleran en respuesta a la fuerza. Por lo tanto, al sustituir la fuerza sobre cada partícula con $m\vec{a}$ para la partícula se obtiene

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

Ahora se sustituye cada aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes, se les puede colocar adentro de la operación de derivada, que produce

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \quad \textbf{(9.1)}$$

Para *finalizar* esta discusión, note que la derivada de la suma $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ respecto del tiempo es cero. En consecuencia, esta suma debe ser constante. A partir de esta discusión se aprendió que la cantidad $m\vec{v}$ para una partícula es importante en que la suma de estas cantidades para un sistema de partículas aislado se conserva. A esta cantidad se le llama *cantidad de movimiento lineal*:

Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula ▶

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \quad \textbf{(9.2)}$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial $\vec{v}$. Su dirección es a lo largo de $\vec{v}$, tiene dimensiones ML/T y su unidad del SI es kg · m/s.

Si una partícula es móvil en una dirección arbitraria, $\vec{\mathbf{p}}$ tiene tres componentes y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones por componentes

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Como se obseva a partir de su definición, el concepto de *momentum*[1] proporciona una distinción cuantitativa entre partículas pesadas y ligeras que se mueven a la misma velocidad. Por ejemplo, el *momentum* de una bola de boliche es mucho mayor que la de una bola de tenis que se mueve con la misma rapidez. Newton llamó al producto $m\vec{\mathbf{v}}$ *cantidad de movimiento*; tal vez hoy en día este término es una descripción más gráfica que la palabra *momentum*, que viene del latín y significa movimiento.

Al usar la segunda ley de movimiento de Newton, se puede relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa en la partícula. Se inicia con la segunda ley de Newton y sustituye la definición de aceleración:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

En la segunda ley de Newton, la masa m se supone constante. Debido a eso, se puede llevar m dentro de la operación derivada para producir

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad \textbf{(9.3)}$$

◀ Segunda ley de Newton para una partícula

Esta ecuación muestra que **la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula**.

Esta forma alternativa de la segunda ley de Newton es la forma en que Newton presentó la ley, y de hecho es más general que la forma que se introdujo en el capítulo 5. Además de las situaciones en las que el vector velocidad varía con el tiempo, se puede usar la ecuación 9.3 para estudiar fenómenos en los que la masa cambia. Por ejemplo, la masa de un cohete cambia conforme el combustible se quema y es expulsado del cohete. No se puede usar $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ para analizar la propulsión de cohetes; se debe aplicar la ecuación 9.3, como se mostrará en la sección 9.8.

Pregunta rápida 9.1 Dos objetos tienen iguales energías cinéticas. ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? a) $p_1 < p_2$, b) $p_1 = p_2$, c) $p_1 > p_2$, d) no hay suficiente información para informar.

Pregunta rápida 9.2 Su profesor de educación física le lanza una pelota de beisbol con cierta rapidez y usted la atrapa. A continuación el profesor le lanza una pelota grande y pesada usada para gimnasia cuya masa es diez veces la masa de la pelota de beisbol. Usted tiene las siguientes opciones: la pelota grande y pesada se le puede lanzar con a) la misma rapidez que la pelota de beisbol, b) la misma cantidad de movimiento o c) la misma energía cinética. Clasifique estas opciones de la más fácil a la más difícil de atrapar.

Al usar la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_{tot} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$ es *cero*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas en la figura 9.1 debe permanecer constante:

$$\vec{\mathbf{p}}_{tot} = \text{constante} \qquad \textbf{(9.4)}$$

o, de manera equivalente,

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} \qquad \textbf{(9.5)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.1

La cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva

Aunque la cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva, la cantidad de movimiento de una partícula dentro de un sistema aislado no necesariamente se conserva porque es posible que otras partículas en el sistema interactúen con ella. Siempre aplique la conservación de cantidad de movimiento a un *sistema* aislado.

[1] En este capítulo, los términos *cantidad de movimiento* y *cantidad de movimiento lineal* tienen el mismo significado. Más adelante, en el capítulo 11, se usará el término *cantidad de movimiento angular* para una cantidad diferente cuando se trate con movimiento rotacional.

donde $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2i}$ son los valores iniciales y $\vec{\mathbf{p}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2f}$ son los valores finales de las cantidades de movimiento para las dos partículas en el intervalo de tiempo durante el que las partículas se afectan entre sí. La ecuación 9.5 en forma de componentes demuestra que las cantidades de movimiento totales en las direcciones x, y y z se conservan todas de manera independiente:

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \qquad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \qquad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz} \qquad \textbf{(9.6)}$$

Este resultado, conocido como la **ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal**, se puede extender a cualquier número de partículas en un sistema aislado. Se considera una de las leyes más importantes de la mecánica. Se le puede establecer del modo siguiente:

Conservación de la cantidad de movimiento ►

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

Esta ley dice que **la cantidad de movimiento total de un sistema aislado en todo momento es igual que su cantidad de movimiento inicial**. La ley es la representación matemática de la versión en cantidad de movimiento del **modelo de sistema aislado**. La versión energética del modelo de sistema aislado se estudió en el capítulo 8.

Note que no se hizo afirmación alguna en cuanto al tipo de fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. Además, no se especificó si las fuerzas son conservativas o no conservativas. El único requisito es que las fuerzas deben ser *internas* al sistema.

EJEMPLO 9.1 El arquero

Considere la situación propuesta al principio de esta sección. Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?



Figura 9.2 (Ejemplo 9.1) Un arquero dispara una flecha horizontalmente hacia la derecha. Ya que él está de pie sobre hielo sin fricción, comenzará a deslizarse hacia la izquierda a través del hielo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es posible que usted ya haya pensado en este problema cuando se introdujo al principio de la sección. Imagine que la flecha se dispara de una forma y el arquero retrocede en la dirección opuesta.

Categorizar *No se puede* resolver este problema al representar la flecha como una partícula bajo una fuerza neta, porque no se tiene información acerca de la fuerza en la flecha o su aceleración. *No se puede* resolver este problema al usar un modelo de sistema y aplicar un enfoque energético porque no se sabe cuánto trabajo se invierte al jalar el arco hacia atrás o cuánta energía potencial se almacena en el arco. No obstante, este problema *se puede* resolver muy fácilmente con un planteamiento que suponga cantidad de movimiento.

Considere el sistema que está constituido del arquero (incluido el arco) y la flecha. El sistema no está aislado porque la fuerza gravitacional y la fuerza normal del hielo actúan sobre el sistema. Sin embargo, dichas fuerzas son verticales y perpendiculares al movimiento del sistema. Por lo tanto, no hay fuerzas externas en la dirección horizontal y se puede considerar un sistema aislado en términos de componentes de la cantidad de movimiento en esta dirección.

Analizar La cantidad de movimiento horizontal total del sistema antes de disparar la flecha es cero, porque nada en el sistema se mueve. Debido a esto, la cantidad de movimiento horizontal total del sistema después de disparar la flecha también debe ser cero. Se elige la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Al identificar al arquero como la partícula 1 y la flecha como la partícula 2, se tiene $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.50$ kg y $\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 50\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

Ajustar la cantidad de movimiento final del sistema igual a cero: $m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 0$

Resuelva esta ecuación para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{\mathbf{v}}_{2f} = -\left(\frac{0.50 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}\right)(50\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) = \boxed{-0.42\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}}$$

Finalizar El signo negativo para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ indica que el arquero, después de disparar la flecha, se mueve hacia la izquierda en la figura 9.2, en la dirección opuesta a la dirección de movimiento de la flecha, en concordancia con la tercera ley de Newton. Ya que el arquero es mucho más pesado que la flecha, su aceleración y en consecuencia su velocidad son mucho más pequeños que la aceleración y velocidad de la flecha.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la flecha se dispara en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambiará la velocidad de retroceso del arquero?

Respuesta La velocidad de retroceso disminuirá en magnitud porque sólo una componente de la velocidad de la flecha está en la dirección x. La conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x produce

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \cos\theta = 0$$

lo que conduce a

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} \cos\theta$$

Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, y la velocidad final del arquero se reduce al valor cuando la flecha se dispara horizontalmente. Para valores de θ distintos de cero, la función coseno es menor que 1 y la velocidad de retirada es menor que el valor calculado para $\theta = 0$. Si $\theta = 90°$, en tal caso $\cos\theta = 0$ y $v_{1f} = 0$, de modo que no hay velocidad de retirada.

EJEMPLO 9.2 ¿En realidad se puede ignorar la energía cinética de la Tierra?

En la sección 7.6 se afirmó que se puede ignorar la energía cinética de la Tierra cuando se considera la energía de un sistema que consiste de la Tierra y una bola que se deja caer. Verifique esta afirmación.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que deja caer una bola en la superficie de la Tierra. Desde su punto de vista, la bola cae mientras la Tierra permanece fija. Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la Tierra experimenta una fuerza hacia arriba y debido a eso una aceleración hacia arriba mientras la bola cae. En el cálculo que sigue, se demostrará que este movimiento se puede ignorar.

Categorizar El sistema se identifica como la bola y la Tierra. Ignore la resistencia del aire y otras fuerzas cualesquiera sobre el sistema, de modo que el sistema está aislado en términos de cantidad de movimiento.

Analizar Esta afirmación se verificará al establecer una relación de la energía cinética de la Tierra respecto a la bola. Se identifican v_E y v_b como las magnitudes de velocidad de la Tierra y la bola, respectivamente, después de que la bola cae a través de cierta distancia.

Use la definición de energía cinética para establecer una proporción:

$$1)\quad \frac{K_E}{K_b} = \frac{\frac{1}{2}m_E {v_E}^2}{\frac{1}{2}m_b {v_b}^2} = \left(\frac{m_E}{m_b}\right)\left(\frac{v_E}{v_b}\right)^2$$

La cantidad de movimiento inicial del sistema es cero, de modo que la cantidad de movimiento final es igual a cero:

$$p_i = p_f \quad \rightarrow \quad 0 = m_b v_b + m_E v_E$$

Resuelva la ecuación para la relación de las magnitudes de velocidad:

$$\frac{v_E}{v_b} = -\frac{m_b}{m_E}$$

Sustituya esta expresión de v_E/v_b en la ecuación 1):

$$\frac{K_E}{K_b} = \left(\frac{m_E}{m_b}\right)\left(-\frac{m_b}{m_E}\right)^2 = \frac{m_b}{m_E}$$

Sustituya los números de orden de magnitud para las masas:

$$\frac{K_E}{K_b} = \frac{m_b}{m_E} \sim \frac{1 \text{ kg}}{10^{24} \text{ kg}} \sim 10^{-24}$$

Finalizar La energía cinética de la Tierra es una fracción muy pequeña de la energía cinética de la bola, así que es justificado ignorar la energía cinética del sistema.



Las bolsas de aire en los automóviles han salvado incontables vidas en los accidentes. La bolsa de aire aumenta el intervalo de tiempo durante el cual el pasajero es llevado al reposo, con lo cual disminuye la fuerza (y las lesiones resultantes) en el pasajero.

9.2 Impulso y cantidad de movimiento

De acuerdo con la ecuación 9.3, la cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa en la partícula. Conocer el cambio en la cantidad de movimiento causada por una fuerza es útil al resolver algunos tipos de problemas. Para construir una mejor comprensión de este concepto importante, suponga que una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ actúa en una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. De acuerdo con la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, o

$$d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \qquad \textbf{(9.7)}$$

Se puede integrar[2] esta ecuación para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa durante algún intervalo de tiempo. Si la cantidad de movimiento de la partícula cambia de $\vec{\mathbf{p}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{p}}_f$ en el tiempo t_f, integrar la ecuación 9.7 produce

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \qquad \textbf{(9.8)}$$

Para evaluar la integral, es necesario saber cómo varía con el tiempo la fuerza neta. La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado **impulso** de la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa en una partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

Impulso de una fuerza ▶

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \qquad \textbf{(9.9)}$$

A partir de esta definición, se ve que el impulso $\vec{\mathbf{I}}$ es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza–tiempo, como se describe en la figura 9.3a. Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma integral que se muestra en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento. El impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento, esto es, ML/T. El impulso *no* es una propiedad de una partícula; en vez de ello, es una medida del grado en el que la fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

La ecuación 9.8 es un enunciado importante conocido como **teorema impulso–cantidad de movimiento**:

Teorema impulso–cantidad de movimiento ▶

El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \qquad \textbf{(9.10)}$$

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, significa que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a dicha partícula. La ecuación 9.10 es idéntica en forma a la ecuación de conservación de la energía, la ecuación 8.1. El lado izquierdo de la ecuación 9.10 representa el cambio en la cantidad de movimiento del sistema, que en este caso es una sola partícula. El lado derecho es una medida de cuánta cantidad de movimiento cruza la frontera del sistema debido a la fuerza neta que se aplica al sistema.

Ya que la fuerza neta que imparte un impulso a una partícula por lo general puede variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza neta promediada en el tiempo:

[2] Aquí se integra la fuerza en relación con el tiempo. Compare esta estrategia con los esfuerzos del capítulo 7, donde se integró fuerza en relación con la posición para encontrar el trabajo invertido por la fuerza.

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \qquad \textbf{(9.11)}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Esta ecuación es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.) Debido a eso, la ecuación 9.9 se puede expresar como

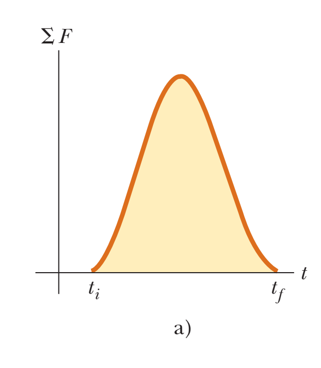
$$\vec{\mathbf{I}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \Delta t \qquad \textbf{(9.12)}$$

Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura 9.3b, se interpreta como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo Δt, el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da durante este mismo intervalo.

En principio, si $\sum \vec{\mathbf{F}}$ se conoce como una función del tiempo, el impulso se calcula a partir de la ecuación 9.9. El cálculo se vuelve especialmente simple si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante. En este caso $(\sum \vec{\mathbf{F}})_{\text{prom}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$, donde $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza neta constante, y la ecuación 9.12 se convierte en

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, \Delta t \qquad \textbf{(9.13)}$$

En muchas situaciones físicas se usará lo que se llama la **aproximación del impulso, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente**. En este caso, la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ en la ecuación 9.9 se sustituye con una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ para encontrar el impulso sobre la partícula. Esta aproximación es especialmente útil al tratar colisiones en las cuales la duración de la colisión es muy breve. Cuando se hace esta aproximación, la fuerza sola se conoce como *fuerza impulsiva*. Por ejemplo, cuando un bat golpea una pelota de beisbol, el tiempo de la colisión es aproximadamente 0.01 s y la fuerza promedio que el bat ejerce sobre la pelota en este tiempo usualmente es de muchos miles de newtons. Ya que esta fuerza de contacto es mucho más grande que la magnitud de la fuerza gravitacional, la aproximación del impulso justifica el ignorar las fuerzas gravitacionales en la pelota y el bat. Cuando se usa esta aproximación, es importante recordar que $\vec{\mathbf{p}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_f$ representan las cantidades de movimiento *inmediatamente* antes y después de la colisión, respectivamente. Por lo tanto, en cualquier situación en la que es adecuado usar la aproximación del impulso, la partícula se mueve muy poco durante la colisión.



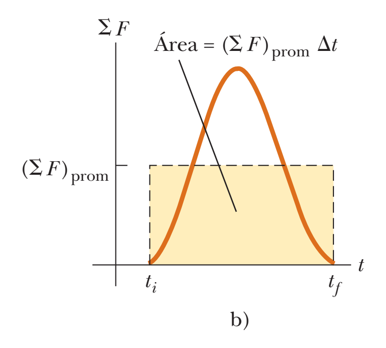


Figura 9.3 a) Una fuerza neta que actúa sobre una partícula puede variar en el tiempo. El impulso impartido a la partícula por la fuerza es el área bajo la curva fuerza con tiempo. b) En el intervalo de tiempo Δt, la fuerza neta promediada en el tiempo (línea discontinua horizontal) da el mismo impulso a una partícula como lo hace la fuerza variable en el tiempo descrita en a).

Pregunta rápida 9.3 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción. El objeto 1 tiene una masa mayor que el objeto 2. **i)** Cuando se aplica una fuerza constante al objeto 1, acelera a través de una distancia d en una línea recta. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento cuando el objeto 2 aceleró a través de la misma distancia d, ¿qué enunciados son verdaderos? a) $p_1 < p_2$, b) $p_1 = p_2$, c) $p_1 > p_2$, d) $K_1 < K_2$, e) $K_1 = K_2$, f) $K_1 > K_2$. **ii)** Cuando se aplica una fuerza al objeto 1, éste acelera durante un intervalo de tiempo Δt. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. De la misma lista de opciones, ¿cuáles enunciados son verdaderos después de que el objeto 2 acelera durante el mismo intervalo de tiempo Δt?

Pregunta rápida 9.4 Clasifique el tablero, el cinturón de seguridad y la bolsa de aire de un automóvil en términos de a) el impulso y b) la fuerza promedio que cada uno entrega a un pasajero en el asiento delantero durante una colisión, de mayor a menor.

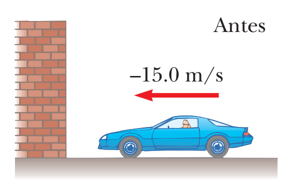
EJEMPLO 9.3 ¿Qué tan útiles son las defensas?

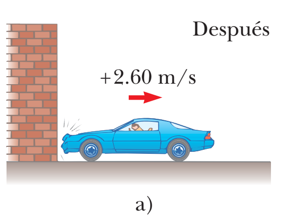
En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa choca con una pared, como se muestra en la figura 9.4. Las velocidades inicial y final del automóvil son $\vec{\mathbf{v}}_i = -15.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\vec{\mathbf{v}}_f = 2.60\hat{\mathbf{i}}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza promedio ejercida en el automóvil.

SOLUCIÓN

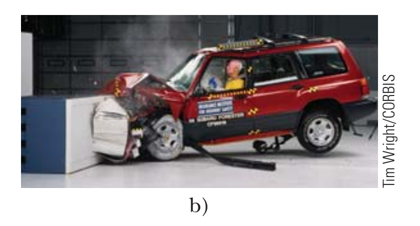
Conceptualizar El tiempo de colisión es breve, así que se puede formar una idea de que el automóvil se lleva al reposo muy rápidamente y en tal caso se mueve de regreso en la dirección opuesta con una rapidez reducida.

Categorizar Se considera que la fuerza ejercida por la pared sobre el automóvil es grande en comparación con otras fuerzas sobre el auto (como la fricción y la resistencia del aire). Además, la fuerza gravitacional y la fuerza normal ejercida por el camino sobre el automóvil son perpendiculares al movimiento y en consecuencia no afectan la cantidad de movimiento horizontal. Por lo tanto, se clasifica el problema como uno en el que se puede aplicar la aproximación del impulso en la dirección horizontal.





a)



b)

Figura 9.4 (Ejemplo 9.3) a) La cantidad de movimiento de este automóvil cambia como resultado de su colisión con la pared. b) En una prueba de choque, mucha de la energía cinética inicial del automóvil se transforma en energía asociada con el daño al auto.

Analizar

Evalúe las cantidades de movimiento inicial y final del automóvil:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m\vec{\mathbf{v}}_i = (1\,500 \text{ kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_f = m\vec{\mathbf{v}}_f = (1\,500 \text{ kg})(2.60\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Aplique la ecuación 9.10 para hallar el impulso en el automóvil

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0.39 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s})$$

$$= \boxed{2.64 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

Aplique la ecuación 9.3 para hallar el valor numérico de la fuerza promedio ejercida por la pared en el automóvil:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = \boxed{1.76 \times 10^5 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}}$$

Finalizar Note que los signos de las velocidades en este ejemplo indican la inversión de direcciones. ¿Cuáles serían las matemáticas descriptivas si las velocidades inicial y final tienen el mismo signo?

¿Qué pasaría si? ¿Y si el automóvil no rebota de la pared? Suponga que la velocidad final del automóvil es cero y que el intervalo de tiempo de la colisión permanece en 0.150 s. ¿Esto representaría una fuerza mayor o menor ejercida por la pared sobre el auto?

Respuesta En la situación original en la que el automóvil rebota, la fuerza por la pared sobre el automóvil hace dos cosas durante el intervalo de tiempo: 1) detiene el auto y 2) hace que el auto se aleje de la pared a 2.60 m/s después de chocar. Si el automóvil no rebota, la fuerza sólo hace el primero de estos pasos (detener el auto), lo que requiere una fuerza *más pequeña*.

En términos matemáticos, en el caso del auto que no rebota, el impulso es

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0 - (-2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

La fuerza promedio que ejerce la pared sobre el automóvil es

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.50 \times 10^5 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}$$

que de hecho es más pequeña que el valor anteriormente calculado, como se argumentó teóricamente.

9.3 Colisiones en una dimensión

En esta sección se usa la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal para describir lo que ocurre cuando chocan dos partículas. El término **colisión** representa un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan mediante fuerzas. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que otras fuerzas externas cualesquiera, así que se puede usar la aproximación del impulso.

Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura 9.5a, pero la noción de lo que significa una colisión se debe ampliar porque "contacto físico" en una escala submicroscópica está mal definido y por lo tanto no

tiene significado. Para comprender este concepto, considere una colisión a escala atómica (figura 9.5b) tal como la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio). Ya que las partículas tienen carga positiva, se repelen mutuamente debido a la fuerza electrostática intensa entre ellas en separaciones cercanas y nunca entran en "contacto físico".

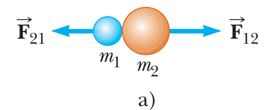
Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan como se muestra en la figura 9.5, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, tales como las que se muestran en la figura 9.3. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza impulsiva, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. En consecuencia, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

En contraste, la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. De hecho, las colisiones se categorizan como *elásticas* o como *inelásticas*, dependiendo de si la energía cinética se conserva o no.

Una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en la que **la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión**. Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son *aproximadamente* elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, usted puede escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que usted sabe que parte de la energía se transfiere del sistema mediante sonido. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas.

En una **colisión inelástica la energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve)**. Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos se unen después de chocar, como cuando un meteorito choca con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica**. Cuando los objetos en colisión no se unen sino que se pierde parte de la energía cinética, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama **inelástica** (sin adverbio modificador). Cuando la bola de hule choca con la superficie dura, parte de la energía cinética de la bola se pierde cuando la bola se deforma mientras está en contacto con la superficie.

En el resto de esta sección, se tratan las colisiones en una dimensión y se consideran los dos casos extremos, las colisiones perfectamente inelásticas y elásticas.



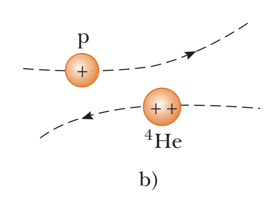


Figura 9.5 a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. b) "Colisión" entre dos partículas con carga.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.2

Colisiones inelásticas

Por lo general, las colisiones inelásticas son difíciles de analizar sin información adicional. La falta de esta información aparece en la representación matemática con más incógnitas que ecuaciones.

Colisiones perfectamente inelásticas

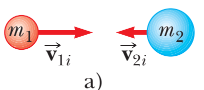
Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.6. Las dos partículas chocan de frente, quedan unidas y luego se mueven con alguna velocidad común $\vec{\mathbf{v}}_f$ después de la colisión. Ya que la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *cualquier* colisión, se puede decir que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento total del sistema compuesto después de la colisión:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f \qquad \textbf{(9.14)}$$

Al resolver para la velocidad final se obtiene

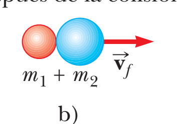
$$\vec{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(9.15)}$$

Antes de la colisión



a)

Después de la colisión



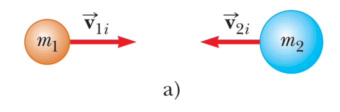
b)

Figura 9.6 Representación esquemática de una colisión frontal perfectamente inelástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

Colisiones elásticas

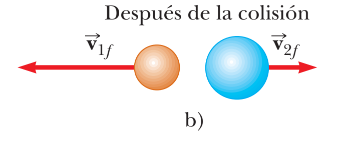
Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.7. Las dos partículas chocan frontalmente y luego dejan el sitio de colisión con diferentes velocidades $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2f}$. En una colisión elástica, tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética

Antes de la colisión



a)

Después de la colisión



b)

Figura 9.7 Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

del sistema se conserva. Por ende, al considerar velocidades a lo largo de la dirección horizontal en la figura 9.7, se tiene

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \quad \textbf{(9.16)}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^{\ 2} + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^{\ 2} = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^{\ 2} + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^{\ 2} \quad \textbf{(9.17)}$$

Ya que todas las velocidades en la figura 9.7 son hacia la izquierda o hacia la derecha, se pueden representar mediante las correspondientes magnitudes de velocidad junto con los signos algebraicos que indican dirección. Se indicará v como positivo si una partícula se mueve hacia la derecha y negativo si se mueve hacia la izquierda.

En un problema representativo que incluye colisiones elásticas, existen dos cantidades desconocidas, y las ecuaciones 9.16 y 9.17 se pueden resolver simultáneamente para encontrarlas. Sin embargo, un planteamiento alternativo, uno que involucra un poco de manipulación matemática de la ecuación 9.17, con frecuencia simplifica este proceso. Para ver cómo, cancele el factor $\frac{1}{2}$ en la ecuación 9.17 y rescríbala como

$$m_1(v_{1i}^{\ 2} - v_{1f}^{\ 2}) = m_2(v_{2f}^{\ 2} - v_{2i}^{\ 2})$$

el factorizar ambos lados de esta ecuación produce

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad \textbf{(9.18)}$$

A continuación, se separa los términos que contengan m_1 y m_2 en la ecuación 9.16 para obtener

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad \textbf{(9.19)}$$

Para obtener el resultado final, divida la ecuación 9.18 entre la ecuación 9.19

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad \textbf{(9.20)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.3

No es una ecuación general

La ecuación 9.20 sólo se puede usar en una situación muy *específica*, una colisión elástica unidimensional entre dos objetos. El concepto *general* es la conservación de la cantidad de movimiento (y la conservación de la energía cinética, si la colisión es elástica) para un sistema aislado.

Esta ecuación, en combinación con la ecuación 9.16, se usa para resolver problemas que traten con colisiones elásticas. De acuerdo con la ecuación 9.20, la velocidad *relativa* de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de su velocidad relativa después de la colisión, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Suponga que se conocen las masas y velocidades iniciales de ambas partículas. Las ecuaciones 9.16 y 9.20 se pueden resolver para las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales porque existen dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \quad \textbf{(9.21)}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \quad \textbf{(9.22)}$$

Es importante usar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i} en las ecuaciones 9.21 y 9.22.

Considere algunos casos especiales. Si $m_1 = m_2$, las ecuaciones 9.21 y 9.22 muestran que $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$, lo que significa que las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales. Esto es aproximadamente lo que uno observa en las colisiones frontales de las bolas de billar: la bola blanca se detiene y la bola golpeada se aleja de la colisión con la misma velocidad que tenía la bola blanca.

Si la partícula 2 está en reposo al inicio, en tal caso $v_{2i} = 0$, y las ecuaciones 9.21 y 9.22 se convierten en

Colisión elástica: partícula 2 inicialmente en reposo ▶

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \textbf{(9.23)}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \textbf{(9.24)}$$

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, se ve de las ecuaciones 9.23 y 9.24 que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Esto es, cuando una partícula muy pesada choca frontalmente con una muy

ligera que inicialmente está en reposo, la partícula pesada continúa su movimiento sin alterarse después de la colisión y la partícula ligera rebota con una rapidez igual a casi el doble de la rapidez inicial de la partícula pesada. Un ejemplo de tal colisión es la de un átomo pesado en movimiento, como el uranio, que golpea un átomo ligero, como el hidrógeno.

Si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 inicialmente está en reposo, en tal caso $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Esto es, cuando una partícula muy ligera choca frontalmente con una partícula muy pesada que inicialmente está en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la pesada permanece prácticamente en reposo.

Pregunta rápida 9.5 En una colisión unidimensional perfectamente inelástica entre dos objetos en movimiento, ¿qué condición única es necesaria de modo que la energía cinética final del sistema sea cero después de la colisión? a) Los objetos deben tener cantidades de movimiento con la misma magnitud pero direcciones opuestas. b) Los objetos deben tener la misma masa. c) Los objetos deben tener la misma velocidad. d) Los objetos deben tener la misma rapidez, con vectores velocidad en direcciones opuestas.

Pregunta rápida 9.6 Una pelota de ping pong se lanza hacia una bola de boliche fija. La pelota de ping pong hace una colisión elástica unidimensional y rebota de regreso a lo largo de la misma línea. En comparación con la bola de boliche después de la colisión, ¿la pelota de ping pong tiene a) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y más energía cinética, b) una magnitud menor de cantidad de movimiento y más energía cinética, c) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y menos energía cinética, d) una magnitud menor de cantidad de movimiento y menos energía cinética o e) la misma magnitud de cantidad de movimiento y la misma energía cinética?

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Colisiones unidimensionales**

Debe aplicar el planteamiento siguiente cuando resuelva problemas de colisiones en una dimensión:

1. *Conceptualizar.* Piense que la colisión se presenta en su mente. Dibuje diagramas simples de las partículas antes y después de la colisión e incluya vectores velocidad adecuados. Al principio, es posible que deba adivinar las direcciones de los vectores velocidad finales.

2. *Categorizar.* ¿El sistema de partículas es aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.

3. *Analizar.* Establezca la representación matemática adecuada para el problema. Si la colisión es perfectamente inelástica, use la ecuación 9.15. Si la colisión es elástica, use las ecuaciones 9.16 y 9.20. Si la colisión es inelástica, use la ecuación 9.16. Para encontrar las velocidades finales en este caso, necesitará alguna información adicional.

4. *Finalizar.* Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son congruentes con las representaciones mental y gráfica y que sus resultados son realistas.

EJEMPLO 9.4 **Aliviador de estrés para ejecutivos**

En la figura 9.8 (página 238) se muestra un ingenioso dispositivo que explica la conservación de la cantidad de movimiento y la energía cinética. Consiste de cinco bolas duras idénticas sostenidas por cuerdas de iguales longitudes. Cuando la bola 1 se retira y se libera, después de la colisión casi elástica entre ella y la bola 2, la bola 1 se detiene y la bola 5 se mueve hacia afuera, como se muestra en la figura 9.8b. Si las bolas 1 y 2 se retiran y liberan, se detienen después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balancean hacia afuera, y así por el estilo. ¿Alguna vez es posible que, cuando la bola 1 se libere, se detenga después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balanceen en el lado opuesto y viajen con la mitad de la rapidez de la bola 1, como en la figura 9.8c?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 9.8c, piense que una bola llega desde la izquierda y dos bolas salen de la colisión a la derecha. Este es el fenómeno que se quiere probar para ver si podría ocurrir alguna vez.

Categorizar Debido al intervalo de tiempo muy breve entre la llegada de la bola desde la izquierda y la partida de las bolas de la derecha, se puede usar la aproximación de impulso para ignorar las fuerzas gravitacionales sobre las bolas y clasificar el sistema de cinco bolas como aislado en términos de cantidad de movimiento y energía. Ya que las bolas son duras, las colisiones entre ellas se clasifican como elásticas para propósitos de cálculo.

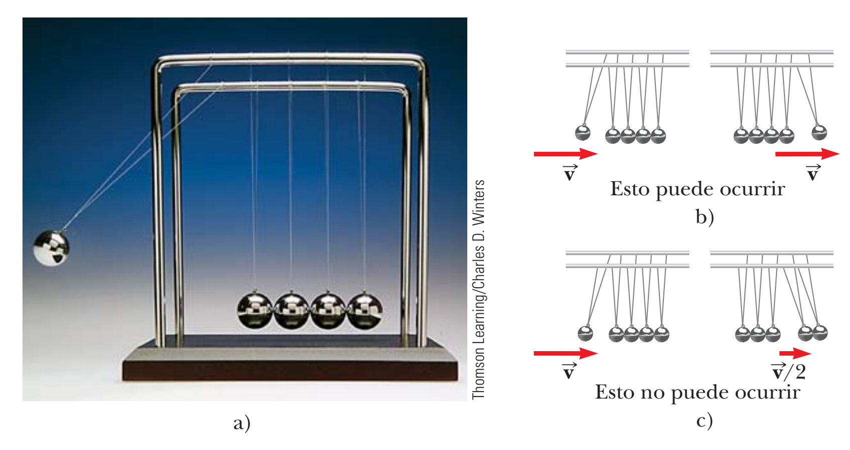


Figura 9.8 (Ejemplo 9.4) a) Un aliviador de estrés para ejecutivos. b) Si una bola se impulsa a la izquierda, se ve que una bola se aleja en el otro extremo. c) ¿Es posible que una bola se impulse a la izquierda y dos bolas dejen el otro extremo con la mitad de la rapidez de la primera bola? En b) y c), los vectores velocidad que se muestran representan los de las bolas inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión.

Analizar La cantidad de movimiento del sistema antes de la colisión es mv, donde m es la masa de la bola 1 y v es su rapidez inmediatamente antes de la colisión. Después de la colisión, se supone que la bola 1 se detiene y las bolas 4 y 5 se alejan, cada una con rapidez $v/2$. La cantidad de movimiento total del sistema después de la colisión sería $m(v/2) + m(v/2) = mv$. Por ende, la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

La energía cinética del sistema inmediatamente antes de la colisión es $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ y después de la colisión es $K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Esto muestra que la energía cinética del sistema *no* se conserva, lo que es inconsistente con la suposición de que las colisiones son elásticas.

Finalizar El análisis muestra que *no* es posible que las bolas 4 y 5 se balanceen cuando sólo la bola 1 se libera. La única forma de conservar tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema es que una bola se mueva cuando una bola se libera, dos bolas se muevan cuando dos se liberan, y así sucesivamente.

¿Qué pasaría si? Considere lo que ocurriría si las bolas 4 y 5 se unen con pegamento. ¿Qué ocurre ahora cuando la bola 1 es alejada y liberada?

Respuesta En esta situación, las bolas 4 y 5 deben moverse juntas como un solo objeto después de la colisión. En efecto antes se argumentó que, en este caso, la cantidad de movimiento y la energía del sistema no se pueden conservar. Sin embargo, se supone que la bola 1 se detuvo después de golpear la bola 2. ¿Y si no se hace esta suposición? Considere las ecuaciones de conservación con la suposición de que la bola 1 se mueve después de la colisión. Para conservación de cantidad de movimiento

$$p_i = p_f$$

$$mv_{1i} = mv_{1f} + 2mv_{4,5}$$

donde $v_{4,5}$ se refiere a la rapidez final de la combinación bola 4–bola 5. La conservación de la energía cinética produce

$$K_i = K_f$$

$$\tfrac{1}{2}mv_{1i}{}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{1f}{}^2 + \tfrac{1}{2}(2m)v_{4,5}^2$$

Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$v_{4,5} = \tfrac{2}{3}v_{1i} \qquad v_{1f} = -\tfrac{1}{3}v_{1i}$$

En consecuencia, las bolas 4 y 5 se mueven juntas como un objeto después de la colisión mientras que la bola 1 rebota en la colisión con un tercio de su rapidez original.

EJEMPLO 9.5 ¡Lleve seguro contra choques!

A un automóvil de 1 800 kg detenido en un semáforo lo golpea por la parte trasera un automóvil de 900 kg. Los dos autos quedan unidos y se mueven a lo largo de la misma trayectoria que la del automóvil en movimiento. Si el auto más pequeño se movía a 20.0 m/s antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los automóviles unidos después de la colisión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este tipo de colisión se visualiza con facilidad, y se puede predecir que, después de la colisión, ambos automóviles se moverán en la misma dirección que la del automóvil en movimiento. Ya que el automóvil en movimiento sólo tiene la mitad de masa que el automóvil fijo, se espera que la velocidad final de los automóviles sea relativamente pequeña.

Categorizar Identifique el sistema de dos automóviles como aislado y aplique la aproximación de impulso durante el breve intervalo de tiempo de la colisión. La frase "quedan unidos" pide clasificar la colisión como perfectamente inelástica.

Analizar La magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema antes de la colisión es igual a la del automóvil más pequeño porque el auto más grande inicialmente está en reposo.

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema: $p_i = m_1 v_i = (900 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s}) = 1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

Evalúe la cantidad de movimiento final del sistema: $p_f = (m_1 + m_2)v_f = (2\ 700 \text{ kg})v_f$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final y resuelva para v_f: $v_f = \dfrac{p_i}{m_1 + m_2} = \dfrac{1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2\ 700 \text{ kg}} = 6.67 \text{ m/s}$

Finalizar Ya que la velocidad final es positiva, la dirección de la velocidad final de la combinación es la misma que la velocidad del automóvil en movimiento, como se predijo. La rapidez de la combinación también es mucho menor que la rapidez inicial del automóvil en movimiento.

¿Qué pasaría si? Suponga que se invierten las masas de los automóviles. ¿Y si un automóvil de 1 800 kg en movimiento golpea a un automóvil fijo de 900 kg? ¿La rapidez final es la misma que antes?

Respuesta Por intuición, se supone que la rapidez final de la combinación es mayor que 6.67 m/s si el automóvil en movimiento es el auto más grande. En términos matemáticos, ese debe ser el caso, ya que el sistema tiene una cantidad de movimiento más grande si el automóvil en movimiento es el más grande. Al resolver para la velocidad final nueva, se encuentra

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1\ 800 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})}{2\ 700 \text{ kg}} = 13.3 \text{ m/s}$$

que es dos veces más grande que la velocidad final previa.

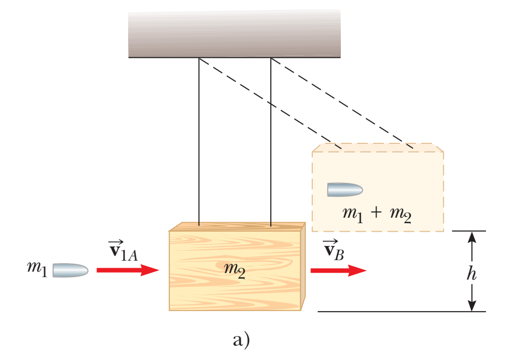
EJEMPLO 9.6 El péndulo balístico

El péndulo balístico (figura 9.9) es un aparato que se usa para medir la rapidez de un proyectil que se mueve rápidamente, como una bala. Un proyectil de masa m_1 se dispara hacia un gran bloque de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres ligeros. El proyectil se incrusta en el bloque y todo el sistema se balancea hasta una altura h. ¿Cómo se determina la rapidez del proyectil a partir de una medición de h?

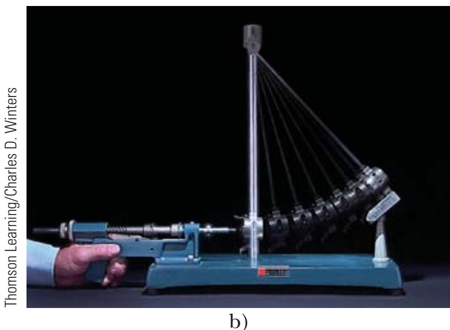
SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.9a ayuda a formar ideas de la situación. Siga la animación en su mente: el proyectil entra al péndulo, que se balancea cierta altura hasta que llega al reposo.

Categorizar El proyectil y el bloque forman un sistema aislado. Identifique la configuración A como inmediatamente antes de la colisión y la configuración B como inmediatamente después de la colisión. Ya que el proyectil se incrusta en el bloque, la colisión entre ellos se considera como perfectamente inelástica.



a)



b)

Figura 9.9 (Ejemplo 9.6) a) Diagrama de un péndulo balístico. Note que $\vec{v}_{1A}$ es la velocidad del proyectil inmediatamente antes de la colisión y $\vec{v}_B$ es la velocidad del sistema proyectil–bloque inmediatamente después de la colisión perfectamente inelástica. b) Fotografía estroboscópica de un péndulo balístico usado en el laboratorio.

Analizar Para analizar la colisión, se aplica la ecuación 9.15, que proporciona la rapidez del sistema inmediatamente después de la colisión cuando se considera la aproximación de impulso.

Al notar que $v_{2A} = 0$, resuelva la ecuación 9.15 para v_B:

$$1)\quad v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

Categorizar Para el proceso durante el que la combinación proyectil–bloque se balancea hacia arriba a una altura h (y termina en la configuración C), considere un sistema *diferente*, el del proyectil, el bloque y la Tierra. Esta parte del problema se clasifica como un sistema aislado para energía sin fuerzas no conservativas en acción.

Analizar Escriba una expresión para la energía cinética total del sistema inmediatamente después de la colisión:

$$2)\quad K_B = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$$

Sustituya el valor de v_B de la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Esta energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión es *menor* que la energía cinética inicial del proyectil, como se esperaba en una colisión inelástica.

La energía potencial gravitacional del sistema se define como cero para la configuración B. Por lo tanto, $U_B = 0$, mientras que $U_C = (m_1 + m_2)gh$.

Aplique el principio de conservación de la energía mecánica al sistema:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

Resuelva para v_{1A}:

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

Finalizar Este problema tuvo que resolverse en dos etapas. Cada etapa involucró un sistema diferente y un principio de conservación diferente. Ya que la colisión se considera perfectamente inelástica, alguna energía mecánica se transformó en energía interna. Hubiera sido *incorrecto* igualar la energía cinética inicial del proyectil que entra con la energía potencial gravitacional final de la combinación proyectil–bloque–Tierra.

EJEMPLO 9.7 Un colisión de dos cuerpos con un resorte

Un bloque de masa $m_1 = 1.60$ kg inicialmente móvil hacia la derecha con una rapidez de 4.00 m/s sobre una pista horizontal sin fricción y choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2.10$ kg que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 2.50 m/s, como se muestra en la figura 9.10a. La constante de resorte es 600 N/m.

$\vec{\mathbf{v}}_{1i} = (4.00\hat{\mathbf{i}})$ m/s $\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (-2.50\hat{\mathbf{i}})$ m/s $\vec{\mathbf{v}}_{1f} = (3.00\hat{\mathbf{i}})$ m/s $\vec{\mathbf{v}}_{2f}$

k m_1 m_2 x

a) b)

Figura 9.10 (Ejemplo 9.7) Un bloque móvil se aproxima a un segundo bloque en movimiento que está unido a un resorte.

A) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con ayuda de la figura 9.10a, siga una animación de la colisión en su mente. La figura 9.10b muestra un instante durante la colisión, cuando se comprime el resorte. Al final, el bloque 1 y el resorte se separarán de nuevo, así que el sistema se parecerá de nuevo a la figura 9.10a pero con diferentes vectores velocidad para los dos bloques.

Categorizar Ya que la fuerza del resorte es conservativa, la energía cinética en el sistema no se transforma en energía interna durante la compresión del resorte. Si ignora cualquier sonido hecho cuando el bloque golpea el resorte, clasifique la colisión como elástica.

Analizar Ya que la cantidad de movimiento del sistema se conserva, aplique la ecuación 9.16:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Sustituya los valores conocidos: $(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s}) = (1.60\ \text{kg})v_{1f} + (2.10\ \text{kg})v_{2f}$

$$1)\quad 1.15\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = (1.60\ \text{kg})v_{1f} + (2.10\ \text{kg})v_{2f}$$

Puesto que la colisión es elástica, aplique la ecuación 9.20: $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$

Sustituya los valores conocidos: $2)\quad 4.00\ \text{m/s} - (-2.50\ \text{m/s}) = 6.50\ \text{m/s} = -v_{1f} + v_{2f}$

Multiplique la ecuación 2) por 1.60 kg: $3)\quad 10.4\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = -(1.60\ \text{kg})v_{1f} + (1.60\ \text{kg})v_{2f}$

Sume las ecuaciones 1) y 3): $11.55\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = (3.70\ \text{kg})v_{2f}$

Resuelva para v_{2f}: $v_{2f} = \dfrac{11.55\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{3.70\ \text{kg}} = 3.12\ \text{m/s}$

Use la ecuación 2) para encontrar v_{1f}: $6.50\ \text{m/s} = -v_{1f} + 3.12\ \text{m/s}$

$$v_{1f} = -3.38\ \text{m/s}$$

B) Durante la colisión, en el instante en que el bloque 1 se mueve hacia la derecha con una velocidad de +3.00 m/s, como en la figura 9.10b, determine la velocidad del bloque 2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ahora dirija su atención en la figura 9.10b, que representa la configuración final del sistema para el intervalo de tiempo de interés.

Categorizar Ya que la cantidad de movimiento y la energía mecánica del sistema de dos bloques se conservan *durante toda* la colisión para el sistema de dos bloques, la colisión se clasifica como elástica para *cualquier* instante de tiempo final. Ahora elija el instante final cuando el bloque 1 se mueve con una velocidad de +3.00 m/s.

Analizar Aplique la ecuación 9.16: $m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$

Sustituya los valores conocidos: $(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s}) = (1.60\ \text{kg})(3.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})v_{2f}$

Resuelva para v_{2f}: $v_{2f} = -1.74\ \text{m/s}$

Finalizar El valor negativo para v_{2f} significa que el bloque 2 todavía se mueve hacia la izquierda en el instante que se considera.

C) Determine la distancia que se comprime el resorte en dicho instante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar De nuevo, centre su atención en la configuración del sistema que se muestra en la figura 9.10b.

Categorizar Para el sistema del resorte y dos bloques, ni fricción ni otras fuerzas no conservativas actúan dentro del sistema. Por lo tanto, el sistema se clasifica como aislado sin fuerzas no conservativas en acción.

Analizar Elija la configuración inicial del sistema como la existente inmediatamente antes de que el bloque 1 golpee el resorte y la configuración final cuando el bloque 1 se mueve hacia la derecha a 3.00 m/s.

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema: $K_i + U_i = K_f + U_f$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

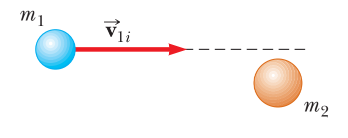
Sustituya los valores conocidos y el resultado del inciso B):

$$\tfrac{1}{2}(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2.10\text{ kg})(2.50\text{ m/s})^2 + 0$$
$$= \tfrac{1}{2}(1.60\text{ kg})(3.00\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2.10\text{ kg})(1.74\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(600\text{ N/m})x^2$$

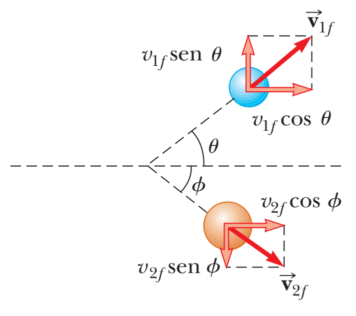
Resuelva para x:

$$x = 0.173\text{ m}$$

Finalizar Esta respuesta no es la compresión máxima del resorte, porque los dos bloques aún se mueven uno hacia el otro en el instante que se muestra en la figura 9.10b. ¿Se puede determinar la compresión máxima del resorte?



a) Antes de la colisión



b) Después de la colisión

Figura 9.11 Una colisión elástica indirecta entre dos partículas.

9.4 Colisiones en dos dimensiones

En la sección 9.1 se mostró que la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas se conserva cuando el sistema está aislado. Para cualquier colisión de dos partículas, este resultado implica que la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones x, y y z se conserva. Un importante subconjunto de colisiones tiene lugar en un plano. El juego de billar es un ejemplo familiar que involucra múltiples colisiones de objetos que se mueven en una superficie en dos dimensiones. Para tales colisiones en dos dimensiones, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

donde tres subíndices en las componentes de velocidad en estas ecuaciones representan, respectivamente, la identificación del objeto (1, 2), los valores inicial y final (i, f) y la componente de velocidad (x, y).

Considere un problema específico en dos dimensiones en el que la partícula 1 de masa m_1 choca con la partícula 2 de masa m_2 inicialmente en reposo, como en la figura 9.11. Después de la colisión (figura 9.11b), la partícula 1 se mueve en un ángulo θ respecto a la horizontal y la partícula 2 se mueve en un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Este evento se llama colisión *oblicua* al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que la componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es cero, se obtiene

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi \quad \textbf{(9.25)}$$

$$0 = m_1 v_{1f}\,\text{sen}\,\theta - m_2 v_{2f}\,\text{sen}\,\phi \quad \textbf{(9.26)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.4

No use la ecuación 9.20

La ecuación 9.20, que relaciona las velocidades relativas inicial y final de dos objetos que chocan, sólo es válida para colisiones elásticas unidimensionales. No use esta ecuación cuando analice colisiones en dos dimensiones.

donde el signo menos en la ecuación 9.26 se incluye porque, después de la colisión, la partícula 2 tiene una componente y de velocidad que es hacia abajo. (Los símbolos v en estas ecuaciones particulares son magnitudes de velocidad, no componentes de velocidad. La dirección del vector componente se indica explícitamente con los signos más o menos.) Ahora se tienen dos ecuaciones independientes. Ya que no más de dos de las siete cantidades en las ecuaciones 9.25 y 9.26 sean incógnitas, se puede resolver este problema.

Si la colisión es elástica, también se puede usar la ecuación 9.17 (conservación de energía cinética) con $v_{2i} = 0$:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^{\,2} \quad \textbf{(9.27)}$$

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, quedan cuatro incógnitas (v_{1f}, v_{2f}, θ y ϕ). Ya que sólo se tienen tres ecuaciones, se debe proporcionar una de las cuatro cantidades restantes para determinar el movimiento después de la colisión elástica a partir de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y la ecuación 9.27 *no* se aplica.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Colisiones bidimensionales**

Se recomienda el procedimiento siguiente cuando trate con problemas que involucran colisiones entre dos partículas en dos dimensiones.

1. *Conceptualizar*. Forme una idea de que ocurren las colisiones y predice las direcciones aproximadas en las que se moverán las partículas después de la colisión. Establezca un sistema coordenado y defina sus velocidades en términos de dicho sistema. Es conveniente que el eje x coincida con una de las velocidades iniciales. Bosqueje el sistema coordenado, dibuje y etiquete todos los vectores velocidad e incluya toda la información conocida.

2. *Categorizar*. ¿El sistema de partículas verdaderamente está aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.

3. *Analizar*. Escriba expresiones para las componentes x y y de la cantidad de movimiento de cada objeto antes y después de la colisión. Recuerde incluir los signos adecuados para las componentes de los vectores velocidad y ponga mucha atención a los signos.

   Escriba expresiones para la cantidad de movimiento *total* en la dirección x *antes* y *después* de la colisión, e iguale las dos. Repita este procedimiento para la cantidad de movimiento total en la dirección y.

   Proceda a resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento para las cantidades desconocidas. Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y es posible que se requerirá información adicional. Si la colisión es perfectamente inelástica, las velocidades finales de los dos objetos son iguales.

   Si la colisión es elástica, la energía cinética se conserva y se puede igualar la energía cinética total del sistema antes de la colisión con la energía cinética total después de la colisión, lo que proporciona una relación adicional entre las magnitudes de velocidad.

4. *Finalizar*. Una vez que haya determinado su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mental y gráfica y que sus resultados sean realistas.

EJEMPLO 9.8 **Colisión en un cruce**

Un automóvil de 1 500 kg, que viaja al este con una rapidez de 25.0 m/s, choca en un cruce con una camioneta de 2 500 kg que viaja al norte con una rapidez de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 9.12. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad del choque después de la colisión, y suponga que los vehículos quedan unidos después de la colisión.

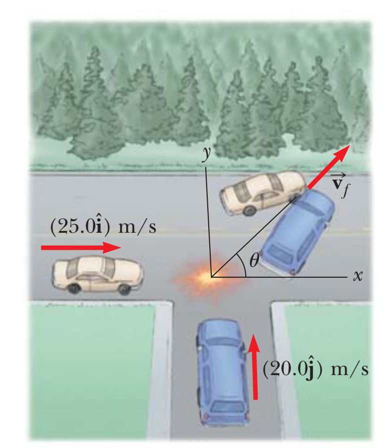


Figura 9.12 (Ejemplo 9.8) Un automóvil que viaja hacia el este choca con una camioneta que viaja hacia el norte.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.12 debe ayudarlo a formar ideas de la situación antes y después de la colisión. Elija el este a lo largo de la dirección x positiva y el norte a lo largo de la dirección y positiva.

Categorizar Como se consideran los momentos inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión como definitorios del intervalo de tiempo, se ignora el efecto pequeño que la fricción tendría sobre las llantas del automóvil y el sistema de dos autos se modela como aislado. También se ignoran los tamaños de los automóviles y se les modela como partículas. La colisión es perfectamente inelástica porque los dos autos quedan unidos después de la colisión.

Analizar Antes de la colisión, el único objeto que tiene cantidad de movimiento en la dirección x es el automóvil. Por lo tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento inicial total del sistema (automóvil más camioneta) en la dirección x sólo es la del automóvil. De igual modo, la cantidad de movimiento inicial total del sistema en la dirección y es la de la camioneta. Después de la colisión, suponga que los despojos se mueven a un ángulo θ y rapidez v_f.

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección x:

$$\sum p_{xi} = (1\,500 \text{ kg})(25.0 \text{ m/s}) = 3.75 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento final en la dirección x:

$$\sum p_{xf} = (4\,000 \text{ kg})v_f \cos\theta$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final en la dirección x:

$$1)\quad 3.75 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000 \text{ kg})v_f \cos\theta$$

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección y:

$$\sum p_{yi} = (2\,500 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s}) = 5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento final en la dirección y:

$$\sum p_{yf} = (4\,000 \text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final en la dirección y:

$$2)\quad 5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000 \text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) y resuelva para θ:

$$\frac{(4\,000 \text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta}{(4\,000 \text{ kg})v_f \cos\theta} = \tan\theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = 53.1^\circ$$

Use la ecuación 2) para encontrar el valor de v_f:

$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4\,000 \text{ kg}) \operatorname{sen} 53.1^\circ} = 15.6 \text{ m/s}$$

Finalizar Note que el ángulo θ está cualitativamente en concordancia con la figura 9.12; además que la rapidez final de la combinación es menor que las magnitudes de velocidad iniciales de los dos automóviles. Este resultado es consistente con la energía cinética del sistema a reducir en una colisión inelástica. Puede ser útil si dibuja los vectores cantidad de movimiento de cada vehículo antes de la colisión y de los dos vehículos juntos después de la colisión.

EJEMPLO 9.9 Colisión protón–protón

Un protón choca elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. El protón que entra tiene una rapidez inicial de 3.50×10^5 m/s y hace una colisión oblicua con el segundo protón, como en la figura 9.11. (En separaciones cercanas, los protones ejercen una fuerza electrostática repulsiva mutua.) Después de la colisión, un protón se aleja en un ángulo de 37.0° hacia la dirección de movimiento original y el segundo se desvía a un ángulo ϕ con el mismo eje. Encuentre las magnitudes de velocidad finales de los dos protones y el ángulo ϕ.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta colisión es similar a la que se muestra en la figura 9.11, que lo ayudará a formar ideas del comportamiento del sistema. El eje x se define a lo largo de la dirección del vector velocidad del protón inicialmente en movimiento.

Categorizar El par de protones forma un sistema aislado. Tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema se conservan en esta colisión elástica oblicua.

Analizar Se sabe que $m_1 = m_2$ y $\theta = 37.0°$, y se sabe que $v_{1i} = 3.50 \times 10^5$ m/s.

Ingrese los valores conocidos en las ecuaciones 9.25, 9.26 y 9.27:

$$1)\quad v_{1f}\cos 37^\circ + v_{2f}\cos\phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$2)\quad v_{1f}\operatorname{sen} 37.0^\circ - v_{2f}\operatorname{sen}\phi = 0$$

$$3)\quad v_{1f}^{\,2} + v_{2f}^{\,2} = (3.50 \times 10^5 \text{ m/s})^2 = 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Reordene las ecuaciones 1) y 2):

$$v_{2f}\cos\phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s} - v_{1f}\cos 37.0^\circ$$

$$v_{2f}\operatorname{sen}\phi = v_{1f}\operatorname{sen} 37.0^\circ$$

Eleve al cuadrado estas dos ecuaciones y súmelas:

$$v_{2f}^2 \cos^2 \phi + v_{2f}^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$
$$= 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 - (7.00 \times 10^5 \text{ m/s})v_{1f} \cos 37.0° + v_{1f}^2 \cos^2 37.0° + v_{1f}^2 \operatorname{sen}^2 37.0°$$

$$4) \quad v_{2f}^2 = 1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 3):

$$v_{1f}^2 + [1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2] = 1.23 \times 10^{11}$$
$$2v_{1f}^2 - (5.59 \times 10^5)v_{1f} = (2v_{1f} - 5.59 \times 10^5)v_{1f} = 0$$

Una posible solución de esta ecuación es $v_{1f} = 0$, que corresponde a una colisión frontal en la que el primer protón se detiene y el segundo continúa con la misma rapidez en la misma dirección. Esta no es la solución que se quiere.

Iguale a cero el otro factor:

$$2v_{1f} - 5.59 \times 10^5 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{1f} = \boxed{2.80 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

Use la ecuación 3) para encontrar v_{2f}:

$$v_{2f} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - v_{1f}^2} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - (2.80 \times 10^5)^2}$$
$$= \boxed{2.11 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

Use la ecuación 2) para encontrar ϕ:

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_{1f} \operatorname{sen} 37.0°}{v_{2f}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(2.80 \times 10^5) \operatorname{sen} 37.0°}{2.11 \times 10^5}\right) = \boxed{53.0°}$$

Finalizar Es interesante que $\theta + \phi = 90°$. Este resultado *no* es accidental. Siempre que dos objetos de igual masa choquen elásticamente en una colisión oblicua y uno de ellos inicialmente en reposo, sus velocidades finales son mutuamente perpendiculares.

9.5 El centro de masa

En esta sección se describe el movimiento global de un sistema en términos de un punto especial llamado el **centro de masa** del sistema. El sistema puede ser un grupo de partículas, como un conjunto de átomos en un contenedor, o un objeto extendido, como un gimnasta que salta en el aire. Se verá que el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto. Es decir, el sistema se mueve como si la fuerza externa neta se aplicara a una sola partícula ubicada en el centro de masa. Este comportamiento es independiente de otro movimiento, como la rotación o la vibración del sistema. Este modelo, el *modelo de partícula*, se introdujo en el capítulo 2.

Examine un sistema que consiste de un par de partículas que tienen diferentes masas y se conectan mediante una barra rígida ligera (figura 9.13). La posición del centro de masa de un sistema se describe como la *posición promedio* de la masa del sistema. El centro de masa del sistema se ubica en algún lugar en la línea que une las dos partículas y está más cerca de la partícula que tiene la masa más grande. Si se aplica una sola fuerza a un punto en la barra *arriba* del centro de masa, el sistema gira en sentido de las manecillas del reloj (vea la figura 9.13a). Si la fuerza se aplica en un punto en la barra por *abajo* del centro de masa, el sistema gira contra las manecillas del reloj (vea la figura 9.13b). Si la fuerza se aplica al centro de masa, el sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar (vea la figura 9.13c). El centro de masa de un objeto se ubica con este procedimiento.

El centro de masa del par de partículas descritas en la figura 9.14 (página 246) se ubica sobre el eje x y yace en algún lugar entre las partículas. Su coordenada x está dada por

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{9.28}$$

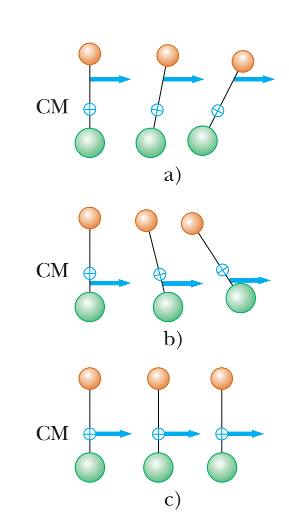


Figura 9.13 Dos partículas de distinta masa se conectan mediante una barra rígida ligera. a) El sistema gira en sentido de las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica arriba del centro de masa. b) El sistema gira contra las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica por abajo del centro de masa. c) El sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar cuando una fuerza se aplica en el centro de masa.

Figura 9.14 El centro de masa de dos partículas de masa distinta sobre el eje x se ubica en x_{CM}, un punto entre las partículas, más cerca de la que tiene la mayor masa.

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = d$ y $m_2 = 2m_1$, se encuentra que $x_{CM} = \frac{2}{3}d$. Es decir, el centro de masa se encuentra más cerca de la partícula más pesada. Si las dos masas son iguales, el centro de masa se encuentra a medio camino entre las partículas.

Se puede extender este concepto a un sistema de muchas partículas con masas m_i en tres dimensiones. La coordenada x del centro de masa de n partículas se define como

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i \quad \textbf{(9.29)}$$

donde x_i es la coordenada x de la i–ésima partícula y la masa total es $M \equiv \sum_i m_i$, donde la suma incluye las n partículas. Las coordenadas y y z del centro de masa se definen de igual modo por las ecuaciones

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_iy_i \quad \text{y} \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_iz_i \quad \textbf{(9.30)}$$

El centro de masa se puede ubicar en tres dimensiones mediante su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$. Las componentes de este vector son x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}, definidas en las ecuaciones 9.29 y 9.30. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_iy_i\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_iz_i\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{r}}_i \quad \textbf{(9.31)}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula, definida por

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Aunque ubicar el centro de masa para un objeto extendido es un poco más problemático que ubicar el centro de masa de un sistema de partículas, las ideas básicas discutidas aún se aplican. Piense en un objeto extendido como un sistema que contiene un gran número de partículas (figura 9.15). Ya que la separación de las partículas es muy pequeña, se considera que el objeto tiene una distribución de masa continua. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i, y_i, z_i, se ve que la coordenada x del centro de masa es aproximadamente

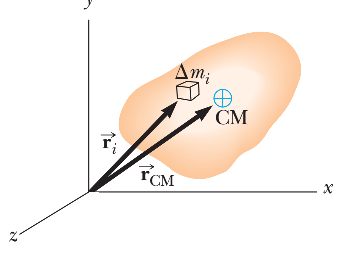


Figura 9.15 Un objeto extendido se considera como una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i. El centro de masa se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$, que tiene coordenadas x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}.

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i\,\Delta m_i$$

con expresiones similares para y_{CM} y z_{CM}. Si se hace que el número n de elementos tienda a infinito, el tamaño de cada elemento tiende a cero y x_{CM} se conoce con precisión. En este límite, se sustituye la suma mediante una integral y Δm_i por el elemento diferencial dm:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i\,\Delta m_i = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad \textbf{(9.32)}$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \quad \textbf{(9.33)}$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\,dm \quad \textbf{(9.34)}$$

que es equivalente a las tres expresiones dadas por las ecuaciones 9.32 y 9.33.

El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría.[3] Por ejemplo, el centro de masa de una barra uniforme se encuentra a medio camino entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o un cubo se encuentra en su centro geométrico.

El centro de masa de un objeto con forma irregular, como una llave de tuerca, se determina al suspender el objeto, primero de un punto y luego de otro. En la figura 9.16, una llave de tuerca cuelga del punto A y se dibuja una línea vertical AB (que se puede establecer con una plomada) cuando la llave de tuerca deja de balancearse. Luego la llave de tuerca se cuelga del punto C, y se dibuja una segunda línea vertical CD. El centro de masa está a la mitad a través del grosor de la llave de tuerca, bajo la intersección de estas dos líneas. En general, si la llave de tuerca cuelga libremente de cualquier punto, la línea vertical a través de este punto debe pasar a través del centro de masa.

Ya que un objeto extendido es una distribución de masa continua, en cada elemento pequeño de masa actúa la fuerza gravitacional. El efecto neto de todas estas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa a través de un punto especial, llamado **centro de gravedad**. Si $\vec{\mathbf{g}}$ es constante sobre la distribución de masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un objeto extendido gira sobre un eje en su centro de gravedad, se equilibra en cualquier orientación.

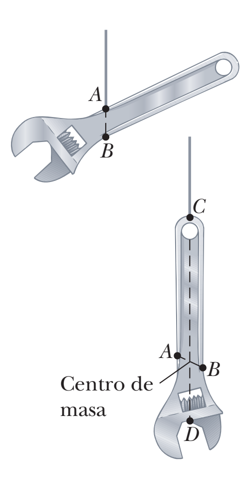


Figura 9.16 Una técnica experimental para determinar el centro de masa de una llave de tuerca. La llave de tuerca cuelga libremente, primero del punto A y luego del punto C. La intersección de las dos líneas AB y C ubica el centro de masa.

Pregunta rápida 9.7 Un bat de beisbol de densidad uniforme se corta en la ubicación de su centro de masa, como se muestra en la figura 9.17. ¿Cuál trozo tiene la menor masa? a) el de la derecha, b) el de la izquierda, c) ambos trozos tienen la misma masa, d) imposible de determinar.



Figura 9.17 (Pregunta rápida 9.7) Un bat de beisbol cortado en la ubicación de su centro de masa.

EJEMPLO 9.10 El centro de masa de tres partículas

Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura 9.18. Encuentre el centro de masa del sistema.

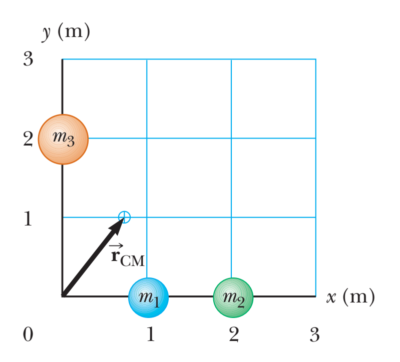


Figura 9.18 (Ejemplo 9.10) Dos partículas de 1.0 kg se ubican en el eje x, y una sola partícula de 2.0 kg se ubica en el eje y como se muestra. El vector indica la ubicación del centro de masa del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.18 muestra las tres masas. Su intuición debe decirle que el centro de masa se ubica en alguna parte en la región entre la partícula anaranjada y el par de partículas coloreadas en azul y verde, como se muestra en la figura.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución porque se usarán las ecuaciones para el centro de masa desarrolladas en esta sección.

El problema se configuró al etiquetar las masas de las partículas como se muestra en la figura, con $m_1 = m_2 = 1.0$ kg y $m_3 = 2.0$ kg.

[3] Esta afirmación sólo es válida para objetos que tienen una densidad uniforme.

Use las ecuaciones definitorias para las coordenadas del centro de masa y note que $z_{CM} = 0$:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(1.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (2.0\text{ kg})(0)}{1.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg} + 2.0\text{ kg}}$$

$$= \frac{3.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 0.75\text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(0) + (1.0\text{ kg})(0) + (2.0\text{ kg})(2.0\text{ m})}{4.0\text{ kg}} = \frac{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 1.0\text{ m}$$

Escriba el vector de posición del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} = (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}$$

EJEMPLO 9.11 El centro de masa de una barra

A) Demuestre que el centro de masa de una barra de masa M y longitud L se encuentra equidistante de sus extremos, si supone que la barra tiene una masa uniforme por unidad de longitud.

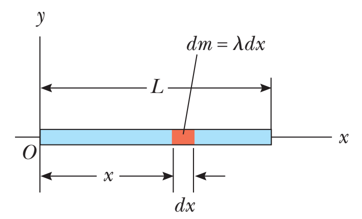


Figura 9.19 (Ejemplo 9.11) Geometría utilizada para encontrar el centro de masa de una barra uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La barra se muestra alineada a lo largo del eje x en la figura 9.19, de modo que $y_{CM} = z_{CM} = 0$.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis, porque es necesario dividir la barra en elementos para realizar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar La masa por unidad de longitud (esta cantidad se llama *densidad de masa lineal*) se puede escribir como $\lambda = M/L$ para la barra uniforme. Si la barra se divide en elementos de longitud dx, la masa de cada elemento es $dm = \lambda\, dx$.

Use la ecuación 9.32 para encontrar una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Sustituya $\lambda = M/L$:

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}$$

Además puede usar argumentos de geometría para obtener el mismo resultado.

B) Suponga que una barra *no es uniforme*, tal que su masa por unidad de longitud varía linealmente con x de acuerdo con la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada x del centro de masa como fracción de L.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la masa por unidad de longitud no es constante sino proporcional a x, los elementos de la barra hacia la derecha son más grandes que los elementos cerca del extremo izquierdo de la barra.

Categorizar Este problema se clasifica de manera similar al inciso A), con el sesgo añadido de que la densidad de masa lineal no es constante.

Analizar En este caso, sustituya dm en la ecuación 9.32 por $\lambda\, dx$, donde $\lambda = \alpha x$.

Use la ecuación 9.32 para encontrar una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

Encuentre la masa total de la barra:

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\,dx = \int_0^L \alpha x\,dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

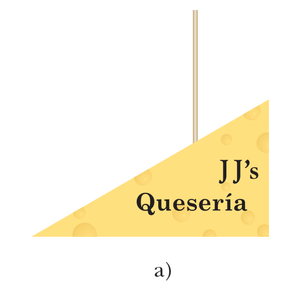
Sustituya M en la expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L$$

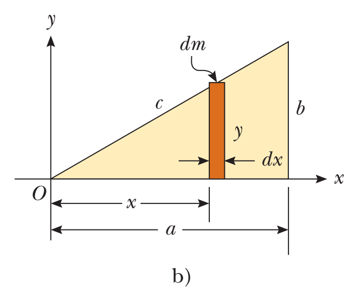
Finalizar Note que el centro de masa en el inciso B) está más lejos hacia la derecha que en el inciso A). Este resultado es razonable porque los elementos de la barra se vuelven más grandes conforme uno se mueve hacia la derecha a lo largo de la barra en el inciso B).

EJEMPLO 9.12 Centro de masa de un triángulo rectángulo

Se le pide colgar una señal metálica de un alambre vertical. La señal tiene la forma triangular que se muestra en la figura 9.20a. La parte baja de la señal es paralela al suelo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo de la señal se debe unir el alambre de soporte?



a)



b)

Figura 9.20 (Ejemplo 9.12) a) Una señal triangular que se colgará de un solo alambre. b) Construcción geométrica para ubicar el centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.20a muestra la señal que cuelga del alambre. El alambre se debe unir a un punto directamente sobre el centro de gravedad de la señal, que es el mismo que su centro de masa, porque está en un campo gravitacional uniforme.

Categorizar Como en el caso del ejemplo 9.11, este ejemplo se clasifica como un problema de análisis porque es necesario identificar elementos infinitesimales de la señal para realizar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar Se supone que la señal triangular tiene una densidad uniforme y masa total M. Ya que la señal es una distribución de masa continua, se debe usar la expresión integral de la ecuación 9.32 para hallar la coordenada x del centro de masa.

El triángulo se divide en flejes estrechos de ancho dx y altura y, como se muestra en la figura 9.20b, donde y es la altura de la hipotenusa del triángulo arriba del eje x para un valor conocido del fleje de x. La masa de cada fleje es el producto del volumen del fleje y la densidad ρ del material del que está hecho la señal: $dm = \rho yt\,dx$, donde t es el grosor de la señal metálica. La densidad del material es la masa total de la señal dividida entre su volumen total (área del triángulo por grosor).

Evalúe dm:

$$dm = \rho yt\,dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}abt}\right)yt\,dx = \frac{2My}{ab}\,dx$$

Aplique la ecuación 9.32 para encontrar la coordenada x del centro de masa:

$$1)\quad x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\frac{2My}{ab}\,dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\,dx$$

Para proceder aún más y evaluar la integral, debe expresar y en términos de x. La línea que representa la hipotenusa del triángulo en la figura 9.20b tiene una pendiente de b/a y pasa a través del origen, de modo que la ecuación de esta línea es $y = (b/a)x$.

Sustituya para y en la ecuación 1):

$$x_{\text{CM}} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \tfrac{2}{3}a$$

Por lo tanto, el alambre se debe unir a la señal a una distancia dos tercios la longitud del borde inferior desde el extremo izquierdo.

Finalizar Esta respuesta es idéntica a la del inciso B) del ejemplo 9.11. Para la señal triangular, el aumento lineal en altura y con la posición x significa que los elementos en la señal aumentan en masa linealmente, lo que refleja el aumento lineal en densidad de masa en el ejemplo 9.11. También se podría encontrar la coordenada y del centro de masa de la señal, pero esto no es necesario para determinar dónde se debe unir el alambre. Puede intentar cortar un triángulo rectángulo de cartulina y colgarlo de una cuerda de modo que la base larga sea horizontal. ¿La cuerda necesita unirse a $\frac{2}{3}a$?

9.6 Movimiento de un sistema de partículas

Comenzará a entender el significado físico y la utilidad del concepto de centro de masa si toma la derivada con el tiempo del vector posición para el centro de masa conocido en la ecuación 9.31. De la sección 4.1 se sabe que la derivada con el tiempo de un vector de posición es por definición el vector velocidad. Si supone que M permanece constante para un sistema de partículas (esto es, ninguna partícula entra o sale del sistema) se obtiene la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema:

Velocidad del centro de masa ▶

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i \quad \textbf{(9.35)}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad de la i–ésima partícula. Al reordenar la ecuación 9.35 proporciona

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas ▶

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \quad \textbf{(9.36)}$$

Debido a eso, la **cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.** En otras palabras, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$.

La derivación de la ecuación 9.35 respecto del tiempo, se obtiene la **aceleración del centro de masa** del sistema:

Aceleración del centro de masa ▶

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i \quad \textbf{(9.37)}$$

Al reordenar esta expresión y usar la segunda ley de Newton se obtiene

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \quad \textbf{(9.38)}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula i.

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema pueden incluir tanto fuerzas externas (desde afuera del sistema) y fuerzas internas (desde dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1. En consecuencia, cuando en la ecuación 9.38 se suman todas las fuerzas internas, se cancelan en pares y se encuentra que la fuerza neta en el sistema la causan *solamente* las fuerzas externas. En tal caso se escribe la ecuación 9.38 en la forma

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas ▶

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} \quad \textbf{(9.39)}$$

Es decir, **la fuerza externa neta en un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa.** Al comparar la ecuación 9.39 con la segunda ley de Newton para una sola partícula, se ve que el modelo de partícula que se ha usado en muchos capítulos se describe en términos del centro de masa:

El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Se integra la ecuación 9.39 en un intervalo de tiempo finito:

$$\int \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}\, dt = \int M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}\, dt = \int M \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt}\, dt = M \int d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = M\, \Delta\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$$

Note que esta ecuación se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \quad \textbf{(9.40)}$$

donde $\vec{\mathbf{I}}$ es el impulso que las fuerzas externas imparten al sistema y $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$ es la cantidad de movimiento del sistema. La ecuación 9.40 es la generalización del teorema impulso–cantidad de movimiento para una partícula (ecuación 9.10) a un sistema de partículas.

Por último, si la fuerza externa neta sobre un sistema es cero, se sigue de la ecuación 9.39 que

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = M \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

de modo que

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \left(\text{cuando} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0\right) \quad \textbf{(9.41)}$$

Es decir, la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas se conserva si no hay fuerza neta externa que actúe sobre el sistema. Se sigue que, para un sistema aislado de partículas, tanto la cantidad de movimiento total como la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo. Este enunciado es una generalización de la ley de conservación de la cantidad de movimiento para un sistema de muchas partículas.

Suponga que un sistema aislado que consta de dos o más integrantes en reposo. El centro de masa de tal sistema permanece en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa. Por ejemplo, considere un sistema de un nadador que está de pie sobre una balsa, con el sistema inicialmente en reposo. Cuando el nadador se clava horizontalmente desde la balsa, ésta se mueve en la dirección opuesta a la del nadador y el centro de masa del sistema permanece en reposo (si se desprecia la fricción entre la balsa y el agua). Además, la cantidad de movimiento lineal del nadador es igual en magnitud a la de la balsa, pero opuesta en dirección.

Pregunta rápida 9.8 Un crucero se mueve con rapidez constante a través del agua. Los vacacionistas en el barco están ansiosos por llegar a su siguiente destino. Deciden acelerar el crucero reuniéndose en la proa (el frente) y correr hacia la popa (la parte trasera) de la nave. **i)** Mientras corren hacia la popa, ¿la rapidez de la nave es a) mayor que antes, b) invariable, c) menor que antes, o d) imposible de determinar? **ii)** Los vacacionistas dejan de correr cuando llegan a la popa del barco. Después de que todos dejan de correr, ¿la rapidez del barco es a) mayor de la que era antes de que comenzaran a correr, b) invariable de la que era antes de que comenzaran a correr, c) menor de la que era antes de que comenzaran a correr, o d) imposible de determinar?

EJEMPLO CONCEPTUAL 9.13 Explosión de un proyectil

Un proyectil disparado al aire súbitamente explota en muchos fragmentos (figura 9.21).

A) ¿Qué se puede decir acerca del movimiento del centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos después de la explosión?

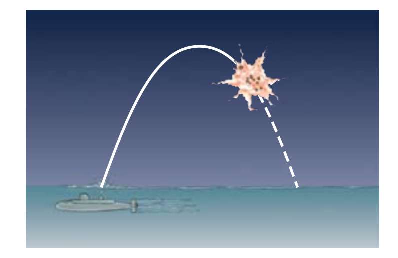


Figura 9.21 (Ejemplo conceptual 9.13) Cuando un proyectil explota en muchos fragmentos, el centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría tomado si no hubiese explotado.

SOLUCIÓN

Si desprecia la resistencia del aire, la única fuerza externa en el proyectil es la fuerza gravitacional. Por lo tanto, si el proyectil no explota, continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica indicada por la línea discontinua en la figura 9.21. Ya que las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el movimiento del centro de masa del sistema (los fragmentos). En consecuencia, después de la explosión, el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría seguido si no hubiese ocurrido la explosión.

B) Si el proyectil no explota, aterrizará a una distancia R desde su punto de lanzamiento. Suponga que el proyectil explota y se separa en dos piezas de igual masa. Una pieza aterriza a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento. ¿Dónde aterriza la otra pieza?

SOLUCIÓN

Como se discutió en el inciso A), el centro de masa del sistema de dos piezas aterriza a una distancia R desde el punto de lanzamiento. Una de las piezas aterriza a una distancia más allá de R desde el punto de aterrizaje (o a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento), a la derecha en la figura 9.21. Ya que las dos piezas tienen la misma masa, la otra pieza debe aterrizar a una distancia R a la izquierda del punto de aterrizaje en la figura 9.21, ¡lo que coloca a esta pieza justo de regreso en el punto de lanzamiento!

EJEMPLO 9.14 El cohete que explota

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de 450 m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dibuje la explosión en su mente, con una pieza yendo hacia arriba y una segunda pieza moviéndose horizontalmente hacia el este. ¿Tiene usted algún sentimiento intuitivo acerca de la dirección en la que se mueve la tercera pieza?

Categorizar Este ejemplo es un problema en dos dimensiones porque tiene dos fragmentos móviles en direcciones perpendiculares después de la explosión, así como un tercer fragmento que se mueve en una dirección desconocida en el plano definido por los vectores velocidad de los otros dos fragmentos. Se supone que el intervalo de tiempo de la explosión es muy breve, así que se usa la aproximación de impulso en la que se ignora la fuerza gravitacional y la resistencia del aire. Ya que las fuerzas de la explosión son internas al sistema (el cohete), el sistema se modela como aislado y la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_i$ del cohete inmediatamente antes de la explosión debe ser igual a la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_f$ de los fragmentos inmediatamente después de la explosión.

Analizar Ya que los tres fragmentos tienen igual masa, la masa de cada fragmento es $M/3$, donde M es la masa total del cohete. Sea $\vec{\mathbf{v}}_f$ que representa la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema antes de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = M\vec{\mathbf{v}}_i = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s})$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema después de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_f = \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s}) + \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f$$

Iguale estas dos expresiones: $$\frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f + \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s}) = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s})$$

Resuelva para $\vec{\mathbf{v}}_f$: $$\vec{\mathbf{v}}_f = (-240\,\hat{\mathbf{i}} + 450\,\hat{\mathbf{j}})\text{ m/s}$$

Finalizar Note que este evento es el inverso de una colisión perfectamente inelástica. Hay un objeto antes de la colisión y tres objetos después. Imagine correr hacia atrás una película del evento: los tres objetos se juntarían y se convertirían en un solo objeto. En una colisión perfectamente inelástica, la energía cinética del sistema disminuye. Si calcula la energía cinética antes y después del evento en este ejemplo, encontrará que la energía cinética del sistema aumenta. (¡Inténtelo!) Este aumento en energía cinética viene de la energía potencial almacenada en cualquier combustible que explote para causar el rompimiento del cohete.

9.7 Sistemas deformables

Hasta el momento, en esta exposición de mecánica, se analizó el movimiento de partículas o sistemas no deformables que se modelan como partículas. La discusión en la sección 9.6 se puede aplicar a un análisis del movimiento de los sistemas deformables. Por ejemplo, suponga que está de pie sobre una patineta y se empuja de una pared, con lo que se pone en movimiento alejándose de la pared. ¿Cómo describiría este evento?

La fuerza a causa de la pared en sus manos se mueve hasta el final sin desplazamiento; la fuerza siempre se localiza en la interfaz entre la pared y sus manos. Por lo tanto, la fuerza no trabaja en el sistema, que son usted y su patineta. Sin embargo, empujarse de la pared en efecto da por resultado un cambio en la energía cinética del sistema. Si intenta usar el teorema trabajo–energía cinética, $W = \Delta K$, para describir este evento, note que el lado izquierdo de la ecuación es cero, pero el lado derecho es distinto de cero. El teorema trabajo–energía cinética no es válido para este evento y con frecuencia no es válido para sistemas que son deformables. Su cuerpo se deformó durante este evento: sus brazos se doblaron antes del evento y se estiraron mientras se empujaba de la pared.

Para analizar el movimiento de los sistemas deformables, se recurre a la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, y a la ecuación 9.40, el teorema impulso–cantidad de movimiento para un sistema. Para el ejemplo de usted empujándose de la pared sobre su patineta, la ecuación 8.2 produce

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

donde ΔK es el cambio en energía cinética debida al aumento de rapidez del sistema y ΔU es la disminución en energía potencial almacenada en el cuerpo resultante de las comidas previas. Esta ecuación dice que el sistema transformó energía potencial en energía cinética mediante el empleo de fuerza muscular necesaria para empujarse de la pared.

Al aplicar la ecuación 9.40 a esta situación se obtiene

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$$

$$\int \vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}\,dt = m\,\Delta\vec{\mathbf{v}}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}$ es la fuerza que ejerce la pared sobre sus manos, m es la masa de usted y la patineta, y $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ es el cambio en la velocidad del sistema durante el evento. Para evaluar el lado izquierdo de esta ecuación, se necesitaría conocer cómo varía en el tiempo la fuerza a causa de la pared. En general, este proceso puede ser complicado. Sin embargo, en el caso de fuerzas constantes, o fuerzas bien comportadas, se puede evaluar la integral del lado izquierdo de la ecuación.

EJEMPLO 9.15 Empujar sobre un resorte[4]

Como se muestra en la figura 9.22a, dos bloques están en reposo sobre una mesa a nivel sin fricción. Ambos bloques tienen la misma masa m y están conectados mediante un resorte de masa despreciable. La distancia de separación de los bloques cuando el resorte está relajado es L. Durante un intervalo de tiempo Δt, se aplica horizontalmente una fuerza constante F al bloque izquierdo y lo mueve una distancia x_1, como se muestra en la figura 9.22b. Durante este intervalo de tiempo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2. Al final de este intervalo de tiempo, se retira la fuerza F.

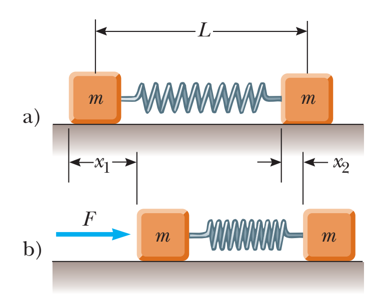


Figura 9.22 (Ejemplo 9.15) a) Dos bloques de igual masa se conectan mediante un resorte. b) El bloque izquierdo se empuja con una fuerza constante de magnitud F y se mueve una distancia x_1 durante cierto intervalo de tiempo. Durante este mismo intervalo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2.

A) Encuentre la rapidez resultante $\vec{\mathbf{v}}_{CM}$ del centro de masa del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede mientras empuja sobre el bloque izquierdo. Empieza a moverse hacia la derecha en la figura 9.22 y el resorte empieza a comprimirse. Como resultado, el resorte empuja hacia la derecha el bloque derecho, que comienza a moverse hacia la derecha. En cualquier momento dado, por lo general los bloques se mueven con diferentes velocidades. A medida que el centro de masa del sistema se mueve hacia la derecha, los dos bloques oscilan de ida y vuelta respecto del centro de masa.

Categorizar El sistema de dos bloques y un resorte no es un sistema aislado, porque se está invirtiendo trabajo en él por la fuerza aplicada. Es un sistema deformable. Durante el intervalo de tiempo Δt, el centro de masa del sistema se mueve una distancia $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Ya que la fuerza aplicada en el sistema es constante, la aceleración de su centro de masa es constante y el centro de masa se modela como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Se aplica el teorema impulso–cantidad de movimiento al sistema de dos bloques, y se reconoce que la fuerza F es constante durante el intervalo Δt mientras se aplica la fuerza.

Escriba la ecuación 9.40 para el sistema:

$$1)\quad F\,\Delta t = (2m)(v_{CM} - 0) = 2mv_{CM}$$

Ya que el centro de masa se modela como una partícula bajo aceleración constante, la velocidad promedio del centro de masa es el promedio de la velocidad inicial, que es cero, y la velocidad final v_{CM}.

Exprese el intervalo de tiempo en términos de v_{CM}:

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{v_{CM,\,prom}} = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{1}{2}(0 + v_{CM})} = \frac{(x_1 + x_2)}{v_{CM}}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 1):

$$F\frac{(x_1 + x_2)}{v_{CM}} = 2mv_{CM}$$

Resuelva para v_{CM}:

$$v_{CM} = \sqrt{F\frac{(x_1 + x_2)}{2m}}$$

B) Encuentre la energía total del sistema asociada con la vibración relativa a su centro de masa después de que se retira la fuerza F.

SOLUCIÓN

Analizar La energía de vibración es toda la energía del sistema, distinta de la energía cinética asociada con el movimiento traslacional del centro de masa. Para encontrar la energía vibratoria, se aplica la ecuación de conservación de la energía. La energía cinética del sistema se puede expresar como $K = K_{CM} + K_{vib}$, donde K_{vib} es la energía cinética de los bloques en relación con el centro de masa debida a su vibración. La energía potencial del sistema es U_{vib}, que es la energía potencial almacenada en el resorte cuando la separación de los bloques es algún valor distinto de L.

Exprese la ecuación 8.2 para este sistema:

$$2)\quad \Delta K_{CM} + \Delta K_{vib} + \Delta U_{vib} = W$$

[4] El ejemplo 9.15 fue inspirado en parte por C. E. Mungan, “A primer on work–energy relationships for introductory physics”, *The Physics Teacher,* 43 p. 10, 2005.

Exprese la ecuación 2) en una forma alternativa y note que $K_{vib} + U_{vib} = E_{vib}$:

$$\Delta K_{CM} + \Delta E_{vib} = W$$

Los valores iniciales de la energía cinética del centro de masa y la energía vibratoria del sistema son cero:

$$K_{CM} + E_{vib} = W = Fx_1$$

Resuelva para la energía vibratoria y use el resultado en el inciso A):

$$E_{vib} = Fx_1 - K_{CM} = Fx_1 - \frac{1}{2}(2m){v_{CM}}^2 = F\frac{(x_1 - x_2)}{2}$$

Finalizar Ninguna de las dos respuestas en este ejemplo depende de la longitud del resorte, la constante del resorte o el intervalo de tiempo. Note también que la magnitud x_1 del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada es diferente de la magnitud $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ del desplazamiento del centro de masa del sistema. Esta diferencia recuerda que el desplazamiento en la definición del trabajo es la del punto de aplicación de la fuerza.

9.8 Propulsión de cohetes

Cuando los vehículos ordinarios como los automóviles se impulsan, la fuerza impulsora para el movimiento es la fricción. En el caso del automóvil, la fuerza impulsora es la fuerza que ejerce el camino sobre el auto. Sin embargo, un cohete que se mueve en el espacio no tiene camino contra el cual empujar. Por lo tanto, la fuente de la propulsión de un cohete debe ser algo distinto de la fricción. **La operación de un cohete depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un sistema de partículas, donde el sistema es el cohete más su combustible expulsado.**

La propulsión de cohetes es comprensible al considerar primero al arquero que está de pie sobre hielo sin fricción, en el ejemplo 9.1. Imagine que el arquero dispara varias flechas horizontalmente. Por cada flecha disparada, el arquero recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta. Mientras más flechas dispare, el arquero se mueve cada más rápido a través del hielo.

En forma similar, conforme un cohete se mueve en el espacio libre, su cantidad de movimiento lineal cambia cuando una parte de su masa se expulsa en la forma de gases de escape. **Ya que a los gases se les da cantidad de movimiento cuando se expulsan del motor, el cohete recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta.** Por lo tanto, el cohete se acelera como resultado del "empujón", o empuje, de los gases de escape. En el espacio libre, el centro de masa del sistema (cohete más gases expulsados) se mueve uniformemente, independiente del proceso de propulsión.[5]

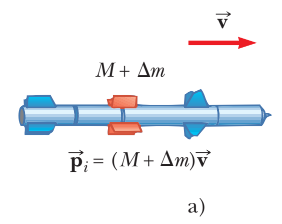
Suponga que en algún tiempo t la magnitud de la cantidad de movimiento de un cohete más su combustible es $(M + \Delta m)v$, donde v es la rapidez del cohete en relación con la Tierra (figura 9.23a). En un intervalo de tiempo breve Δt, el cohete expulsa combustible de masa Δm. Al final de este intervalo, la masa del cohete es M y su rapidez es $v + \Delta v$, donde Δv es el cambio en rapidez del cohete (figura 9.23b). Si el combustible se expulsa con una rapidez v_e en relación con el cohete (el subíndice e representa *escape* y v_e usualmente se llama *rapidez de escape*), la velocidad del combustible relativa a la Tierra es $v - v_e$. Si la cantidad de movimiento inicial total del sistema se iguala a la cantidad de movimiento final total, se obtiene

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

Al simplificar esta expresión se obtiene

$$M\Delta v = v_e \Delta m$$

Si ahora se toma el límite conforme Δt tiende a cero, se tiene $\Delta v \rightarrow dv$ y $\Delta m \rightarrow dm$. Además, el aumento en la masa de escape dm corresponde a una igual disminución en la masa



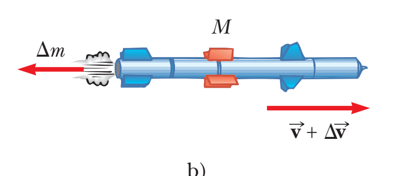


Figura 9.23 Propulsión de cohete. a) La masa inicial del cohete más todo su combustible es $M + \Delta m$ en un tiempo t, y su rapidez es v. b) En un tiempo $t + \Delta t$, la masa del cohete se redujo a M y se expulsó una cantidad de combustible Δm. La rapidez del cohete aumenta por una cantidad Δv.



Cortesía de NASA

La fuerza del dispositivo manual impulsado por nitrógeno permite a un astronauta moverse libremente en el espacio sin correas restrictivas, con el uso de la fuerza de empuje proveniente del nitrógeno expulsado.

[5] El cohete y el arquero representan casos del inverso de una colisión perfectamente inelástica: la cantidad de movimiento se conserva, pero la energía cinética del sistema cohete–gas expulsado aumenta (a costa de energía potencial química en el combustible), como lo hace la energía cinética del sistema arquero–flecha (a costa de energía potencial de las comidas previas del arquero).

del cohete, así que $dm = -dM$. Note que dM es negativo porque representa una disminución en masa, de modo que $-dM$ es un número positivo. Al usar este hecho se obtiene

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM \tag{9.42}$$

Ahora divida la ecuación entre M e integre, tomando la masa inicial del cohete más combustible como M_i y la masa final del cohete más su combustible restante como M_f. El resultado es

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Expresión para propulsión de cohete ▶

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \tag{9.43}$$

que es la expresión básica para la propulsión de cohetes. Primero, la ecuación 9.43 señala que el aumento en la rapidez del cohete es proporcional a la rapidez de escape v_e de los gases expulsados. Por lo tanto, la rapidez de escape debe ser muy alta. Segundo, el aumento en la rapidez del cohete es proporcional al logaritmo natural de la proporción M_i/M_f. En consecuencia, esta proporción debe ser tan grande como sea posible, es decir, la masa del cohete sin combustible debe ser tan pequeña como sea posible y el cohete debe llevar tanto combustible como sea posible.

El **empuje** en el cohete es la fuerza que ejercen sobre él los gases de escape expulsados. A partir de la segunda ley de Newton y de la ecuación 9.42 se obtiene la siguiente expresión para el empuje:

$$\text{Empuje} = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \tag{9.44}$$

Esta expresión muestra que el empuje aumenta conforme la rapidez de escape aumenta y conforme aumenta la relación de cambio de masa (llamada *rapidez de consumo*).

EJEMPLO 9.16 Combate de incendios

Dos bomberos deben aplicar una fuerza total de 600 N para estabilizar una manguera que descarga agua a una proporción de 3 600 L/min. Estime la rapidez del agua conforme sale de la boquilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conforme el agua sale de la boquilla, actúa en una forma similar a los gases que se expulsan del motor de un cohete. Como resultado, una fuerza (empuje) actúa sobre los bomberos en una dirección opuesta a la dirección de movimiento del agua. En este caso se quiere que el extremo de la manguera sea una partícula en equilibrio, en lugar de que acelere como en el caso del cohete. En consecuencia, los bomberos deben aplicar una fuerza de magnitud igual al empuje en la dirección opuesta para mantener fijo el extremo de la manguera.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en el que se usan valores conocidos en una ecuación deducida en esta sección. El agua sale a 3 600 L/min, que es 60 L/s. Al saber que 1 L de agua tiene una masa de 1 kg, se estima que aproximadamente 60 kg de agua salen de la boquilla cada segundo.

Use la ecuación 9.44 para el empuje: $$\text{Empuje} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right|$$

Sustituya los valores conocidos: $$600\text{ N} = |v_e(60\text{ kg/s})|$$

Resuelva para la rapidez de escape: $$v_e = 10\text{ m/s}$$

EJEMPLO 9.17 **Un cohete en el espacio**

Un cohete que se mueve en el espacio, lejos de todos los otros objetos, tiene una rapidez de 3.0×10^3 m/s en relación con la Tierra. Sus motores se encienden y el combustible se expulsa en una dirección opuesta al movimiento del cohete con una rapidez de 5.0×10^3 m/s en relación con el cohete.

A) ¿Cuál es la rapidez del cohete en relación con la Tierra una vez que la masa del cohete se reduce a la mitad de su masa antes de la ignición?

SOLUCIÓN

Conceptualizar A partir de la discusión en esta sección y las escenas de las películas de ciencia ficción, uno puede imaginar fácilmente el cohete acelerando a una mayor rapidez conforme el motor funciona.

Categorizar Este es un problema de sustitución en el que se usan los valores conocidos en la ecuación deducida en esta sección.

Resuelva la ecuación 9.43 para la velocidad final y sustituya los valores conocidos:

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})\ln\left(\frac{M_i}{0.5M_i}\right)$$

$$= \boxed{6.5 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

B) ¿Cuál es el empuje sobre el cohete si quema combustible en una proporción de 50 kg/s?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 9.44 y el resultado del inciso A), y note que $dM/dt = 50$ kg/s:

$$\text{Empuje} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) = \boxed{2.5 \times 10^5 \text{ N}}$$

Resumen

DEFINICIONES

La **cantidad de movimiento lineal** $\vec{\mathbf{p}}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \quad \textbf{(9.2)}$$

El **impulso** que se imparte a una partícula mediante una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es igual a la integral en el tiempo de la fuerza:

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}} dt \quad \textbf{(9.9)}$$

En una **colisión inelástica** no se conserva la energía cinética total del sistema de partículas en colisión. En una **colisión perfectamente inelástica** las partículas en colisión quedan unidas después de la colisión. En una **colisión elástica** se conserva la energía cinética del sistema.

El vector de posición del **centro de masa** de un sistema de partículas se define como

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \quad \textbf{(9.31)}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema y $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El vector de posición del centro de masa de un objeto extendido se obtiene a partir de la expresión integral

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}}\, dm \quad \textbf{(9.34)}$$

La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas es

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M} \quad \textbf{(9.35)}$$

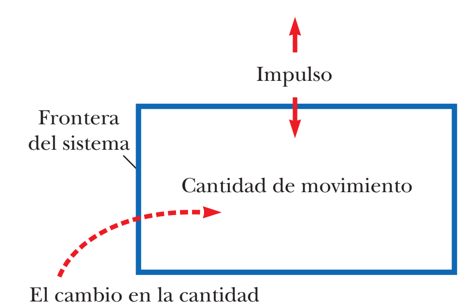
La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas es

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} \quad \textbf{(9.39)}$$

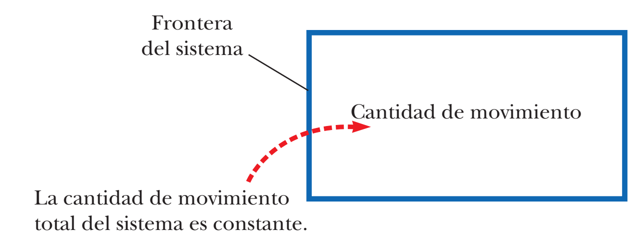
donde $\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$ es la aceleración del centro de masa y la suma es sobre todas las fuerzas externas. El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante en el sistema.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Sistema no aislado (cantidad de movimiento). Si un sistema interactúa con su entorno en el sentido de que hay una fuerza externa sobre el sistema, el comportamiento del sistema se describe mediante el **teorema impulso–cantidad de movimiento**:

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \quad \textbf{(9.40)}$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento). El principio de **conservación de cantidad de movimiento lineal** indica que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado (sin fuerzas externas) se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas entre los integrantes del sistema:

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \left(\text{cuando} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0\right) \quad \textbf{(9.41)}$$

En el caso de un sistema de dos partículas, este principio se expresa como

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} \quad \textbf{(9.5)}$$

El sistema puede ser aislado en términos de cantidad de movimiento pero no aislado en términos de energía, como en el caso de colisiones inelásticas.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. a) ¿Una fuerza neta mayor ejercida sobre un objeto, siempre produce un cambio mayor en la cantidad de movimiento del objeto, en comparación con una fuerza neta más pequeña? Explique. b) ¿Una fuerza neta mayor siempre produce un cambio mayor en energía cinética que una fuerza neta más pequeña? Explique.
2. **O i)** La cantidad de movimiento de cierto objeto se hace cuatro veces más grande en magnitud. ¿En qué factor cambió su energía cinética? a) 16, b) 8, c) 4, d) 2, e) 1. **ii)** La energía cinética de un objeto se hace cuatro veces mayor. ¿En qué factor cambió la magnitud de su cantidad de movimiento? a) 16, b) 8, c) 4, d) 2, e) 1.
3. **O i)** Si dos partículas tienen cantidades de movimiento iguales, ¿sus energías cinéticas son iguales? a) sí, b) no, c) si y sólo si sus masas son iguales. **ii)** Si dos partículas tienen energías cinéticas iguales, ¿sus cantidades de movimiento son iguales? a) sí, b) no, c) si y sólo si sus masas son iguales, d) si y sólo si sus masas y direcciones de movimiento son iguales.
4. **O** Dos partículas de diferentes masas parten del reposo. La misma fuerza neta actúa en ambas mientras se mueven sobre distancias iguales. **i)** ¿Cómo se comparan sus energías cinéticas finales? a) La partícula de mayor masa tiene más energía cinética. b) La partícula de menor masa tiene más energía cinética. c) Las partículas tienen iguales energías cinéticas. d) Cualquier partícula puede tener más energía cinética. **ii)** ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? a) La partícula de mayor masa tiene más cantidad de movimiento. b) La partícula de menor masa tiene más cantidad de movimiento. c) Las partículas tienen iguales cantidades de movimiento. d) Cualquier partícula puede tener más cantidad de movimiento.
5. Mientras está en movimiento, una pelota de beisbol lanzada porta energía cinética y cantidad de movimiento. a) ¿Porta una fuerza que puede ejercer sobre cualquier objeto que golpee? b) ¿La pelota de beisbol entrega más energía cinética al objeto que golpea que la que portaba la bola inicialmente? c) ¿La pelota de beisbol entrega al objeto que golpea más cantidad de movimiento que la que porta la bola inicialmente? Explique sus respuestas.
6. **O** Un balón de basquetbol se lanza hacia el aire, cae libremente y rebota en el suelo de madera. Desde el momento después de que el jugador lo libera, hasta que la bola llega a la parte superior de su rebote, ¿cuál es el sistema más pequeño para el que se conserva la cantidad de movimiento? a) el balón, b) el balón más el jugador, c) el balón más el suelo, d) el balón más la Tierra, e) la cantidad de movimiento no se conserva.
7. Una bomba, inicialmente en reposo, explota en muchos pedazos. a) ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema? b) ¿Se conserva la energía cinética del sistema? Explique.
8. Usted está de pie perfectamente quieto y enseguida da un paso hacia adelante. Antes del paso su cantidad de movimiento era cero, pero después tiene cierta cantidad de movimiento. ¿En este caso se viola el principio de conservación de cantidad de movimiento?
9. **O** Un gran camión distribuidor de estiércol rueda por un camino vecinal. En una colisión perfectamente inelástica, un pequeño auto deportivo choca el camión por detrás. **i)** ¿Cuál vehículo experimenta un cambio en cantidad de movimiento de mayor magnitud? a) El automóvil. b) El camión de estiércol. c) Los cambios de cantidad de movimiento son del mismo tamaño. d) Podría ser cualquiera. **ii)** ¿Cuál vehículo experimenta un mayor cambio en energía cinética? a) El automóvil. b) El camión de estiércol. c) Los cambios de energía cinética son del mismo tamaño. d) Podría ser cualquier vehículo.
10. Un tirador experimentado, con la culata del arma contra su hombro, dispara un rifle mientras está de pie. Si la cantidad de movimiento hacia adelante de una bala es la misma que la cantidad de movimiento hacia atrás del arma, ¿por qué no es tan peligroso ser golpeado por el arma que por la bala?
11. **O** Una bola está suspendida mediante una cuerda que se une a un punto fijo sobre un bloque de madera que está vertical. La bola se jala hacia atrás, como se muestra en la figura P9.11, y se libera. En el ensayo a), la bola rebota elásticamente a causa del bloque. En el ensayo b), cinta de dos lados hace que la bola se pegue al bloque. **i)** ¿En cuál caso, a) o b), la bola tiene más probabilidad de derribar el bloque? O c) ¿no hay diferencia? O d) ¿podría ser cualquier caso, dependiendo de otros factores? **ii)** ¿En cuál caso, a) o b), hay un mayor aumento temporal de temperatura en la bola y el trozo de madera adyacente? O c) ¿es la misma para ambos? O d) ¿no hay aumento de temperatura?

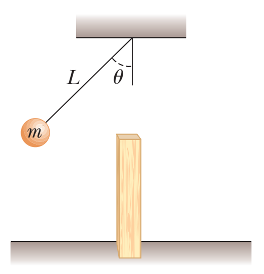


Figura P9.11

12. Un saltador de garrocha cae desde una altura de 6.0 m sobre un colchón de espuma de caucho. ¿Puede calcular su rapidez inmediatamente antes de llegar al colchón? ¿Puede calcular la fuerza que ejerce el colchón sobre él? Explique.
13. Dos estudiantes sostienen verticalmente una gran sábana. Un tercer estudiante, que resulta ser el lanzador estrella del equipo de beisbol de la escuela, lanza un huevo a la sábana. Explique por qué el huevo no se rompe cuando golpea la sábana, sin importar su rapidez inicial. (Si intenta esta demostración, asegúrese de que el lanzador golpee la sábana cerca de su centro, y no permita que el huevo caiga al suelo después de atraparlo.)
14. **O** Usted está de pie sobre un trineo con forma de platillo, en reposo, en medio de una pista de patinaje de hielo sin fricción. Su compañero de laboratorio le lanza un pesado *frisbee*. Usted realiza diferentes acciones en ensayos experimentales sucesivos. Clasifique las siguientes situaciones en orden de acuerdo con su rapidez final, de mayor a menor. Si su rapidez final es la misma en dos casos, déles igual clasificación. a) Atrapa el *frisbee* y se queda con él. b) Atrapa el *frisbee* y lo lanza de regreso a su compañero. c) Atrapa el *frisbee* y lo lanza a una tercera persona al lado en un ángulo recto. d) Falla la atrapada y apenas toca al *frisbee*, de modo que continúa en su dirección original más lentamente. e) Atrapa el *frisbee* y lo lanza de modo que se mueve verticalmente hacia arriba sobre su cabeza. f) Atrapa

el *frisbee* mientras viene del sur, da la vuelta y lo lanza al norte varias veces más rápido. g) Atrapa el *frisbee* y lo pone en reposo sobre el hielo.

15. Una persona equilibra una regleta en una posición horizontal sobre los dedos índice extendidos. Lentamente junta los dos dedos. La regleta permanece equilibrada y los dedos siempre unidos en la marca de 50 cm sin importar sus posiciones originales. (¡Inténtelo!) Explique.

16. **O** Mientras se ensambla un tren, una máquina de piso libera un vagón de mercancías en movimiento en lo alto de un montecillo. El vagón rueda suavemente y sin fricción. Los conmutadores están configurados para cambiarlo de vía a una pista recta a nivel, donde se acopla con un vagón de plataforma de menor masa, originalmente en reposo, de modo que los dos vagones ruedan juntos sin fricción. Considere los dos vagones como un sistema desde el momento de liberación del vagón de mercancías hasta que ambos ruedan juntos. a) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? b) ¿Se conserva la cantidad de movimiento? A continuación, considere el proceso del vagón de mercancías que gana rapidez conforme rueda por el montecillo. Para el vagón de mercancías y la Tierra como sistema, c) ¿se conserva la energía mecánica? d) ¿Se conserva la cantidad de movimiento? Por último, considere los dos vagones como un sistema a medida que el vagón de mercancías frena en el proceso de acoplamiento. e) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? f) ¿Se conserva la cantidad de movimiento?

17. Un malabarista lanza tres bolas en un ciclo continuo. Cualquier bola está en contacto con sus manos durante un quinto del tiempo. Describa el movimiento del centro de masa de las tres bolas. ¿Qué fuerza promedio ejerce el malabarista sobre una bola mientras él la toca?

18. ¿El centro de masa de un cohete en espacio libre acelera? Explique. ¿La rapidez de un cohete puede superar la rapidez de escape del combustible? Explique.

19. Sobre el tema de las siguientes posiciones, establezca su propia visión y argumente para apoyarla. a) La mejor teoría de movimiento es que la fuerza causa aceleración. b) La verdadera medida de la efectividad de una fuerza es el trabajo que realiza, y la mejor teoría de movimiento es que el trabajo invertido sobre un objeto cambia su energía. c) La verdadera medida del efecto de una fuerza es el impulso, y la mejor teoría del movimiento es que el impulso impartido a un objeto cambia su cantidad de movimiento.

Problemas

Sección 9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

1. Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) Encuentre las componentes *x* y *y* de su cantidad de movimiento. b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.

2. ● Un niño de 65.0 kg y su hermana de 40.0 kg, ambos con patines, están frente a frente en reposo. La niña empuja duro al niño y lo envía hacia atrás con velocidad de 2.90 m/s hacia el oeste. Ignore la fricción. a) Describa el movimiento consecutivo de la niña. b) ¿Cuánta energía química se convierte en energía mecánica en los músculos de la niña? c) ¿La cantidad de movimiento del sistema niño–niña se conserva en el proceso de empujar? ¿Cómo puede ser, con fuerzas grandes en acción? ¿Cómo puede ser, sin movimiento anticipado y con mucho movimiento posterior?

3. ¿Qué tan rápido puede poner en movimiento a la Tierra? En particular, cuando salta recto hacia arriba tan alto como puede, ¿cuál es el orden de magnitud de la máxima rapidez de retroceso que le da a la Tierra? Modele la Tierra como un objeto perfectamente sólido. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

4. ● Dos bloques de masas *M* y 3*M* se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero se ensambla a uno de ellos, y los bloques se empujan juntos con el resorte entre ellos (figura P9.4). Una cuerda que inicialmente mantiene a los bloques juntos se quema; después de esto, el bloque de masa 3*M* se mueve hacia la derecha con una rapidez de 2.00 m/s. a) ¿Cuál es la velocidad del bloque de masa *M*? b) Encuentre la energía potencial elástica original del sistema, considerando $M = 0.350$ kg. c) ¿La energía original está en el resorte o en la cuerda? Explique su respuesta. d) ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva en el proceso de rompimiento? ¿Cómo puede ser, con fuerzas grandes en acción? ¿Cómo puede ser, sin movimiento anticipado y mucho movimiento posterior?

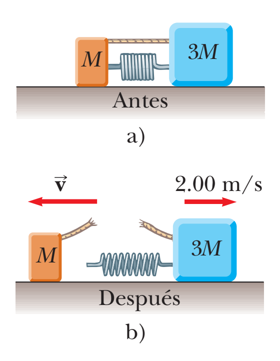


Figura P9.4

5. a) Una partícula de masa *m* se mueve con cantidad de movimiento de magnitud *p*. Demuestre que la energía cinética de la partícula está dada por $K = p^2/2m$. b) Exprese la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula en términos de su energía cinética y masa.

Sección 9.2 Impulso y cantidad de movimiento

6. ● Un amigo afirma que, en tanto tenga puesto su cinturón de seguridad, puede sostener a un niño de 12.0 kg en una

colisión frontal a 60 mi/h con una pared de ladrillos en la que el compartimiento de pasajeros del automóvil se detiene en 0.050 0 s. ¿Esta afirmación es cierta? Explique por qué experimentará una fuerza violenta durante la colisión, que arrancará al niño de sus brazos. Evalúe el tamaño de esta fuerza. (Un niño siempre debe estar en un asiento especial, protegido con un cinturón de seguridad en el asiento trasero de un automóvil.)

7. En la figura P9.7 se muestra una curva fuerza–tiempo estimada para una pelota de beisbol golpeada por un bat. A partir de esta curva, determine a) el impulso entregado a la pelota, b) la fuerza promedio ejercida sobre la pelota y c) la fuerza máxima que se ejerce sobre la pelota.

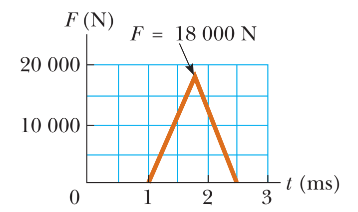


Figura P9.7

8. Una bola de 0.150 kg de masa se deja caer desde el reposo a una altura de 1.25 m. Rebota en el suelo para alcanzar una altura de 0.960 m. ¿Qué impulso le da el piso a la bola?

9. Una bola de acero de 3.00 kg golpea una pared con una rapidez de 10.0 m/s en un ángulo de 60.0° con la superficie. Rebota con la misma rapidez y ángulo (figura P9.9). Si la bola está en contacto con la pared durante 0.200 s, ¿cuál es la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la bola?

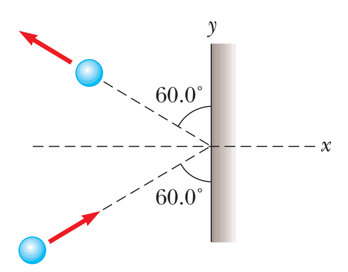


Figura P9.9

10. Un jugador de tenis recibe un tiro con la bola (0.060 0 kg) que viaja horizontalmente a 50.0 m/s y regresa el tiro con la bola viajando horizontalmente a 40.0 m/s en la dirección opuesta. a) ¿Cuál es el impulso que la raqueta de tenis entrega a la bola? b) ¿Qué trabajo realiza la raqueta sobre la bola?

11. La magnitud de la fuerza neta que se ejerce en la dirección x sobre una partícula de 2.50 kg varía en el tiempo como se muestra en la figura P9.11. Encuentre: a) el impulso de la fuerza, b) la velocidad final que logra la partícula si originalmente está en reposo, c) su velocidad final si su velocidad original es −2.00 m/s y d) la fuerza promedio ejercida sobre la partícula durante el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s.

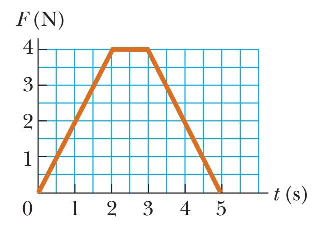


Figura P9.11

12. Una *plataforma de fuerza* es una herramienta que se usa para analizar el rendimiento de los atletas al medir la fuerza vertical que el atleta ejerce sobre el suelo como función del tiempo. Desde el reposo, una atleta de 65.0 kg salta hacia la plataforma desde una altura de 0.600 m. Mientras está en contacto con la plataforma durante el intervalo de tiempo $0 < t < 0.800$ s, la fuerza que ejerce sobre ella se describe mediante la función

$$F = (9\ 200\ \text{N/s})t - (11\ 500\ \text{N/s}^2)t^2$$

a) ¿Qué impulso recibió la atleta desde la plataforma? b) ¿Con qué rapidez llegó a la plataforma? c) ¿Con qué rapidez la dejó? d) ¿A qué altura saltó al dejar la plataforma?

13. ● Un deslizador de masa m es libre de deslizarse a lo largo de una pista de aire horizontal. Se empuja contra un lanzador en un extremo de la pista. Modele el lanzador como un resorte ligero con constante de fuerza k comprimido una distancia x. El deslizador se libera desde el reposo. a) Muestre que el deslizador logra una rapidez de $v = x(k/m)^{1/2}$. b) ¿Un deslizador de mayor o menor masa logra una mayor rapidez? c) Demuestre que el impulso impartido al deslizador está dado por la expresión $x(km)^{1/2}$. d) ¿Un impulso mayor se imparte a una masa grande o pequeña? e) ¿Se invierte más trabajo sobre una masa grande o pequeña?

14. Agua cae sin salpicar con una rapidez de 0.250 L/s desde una altura de 2.60 m en una cubeta de 0.750 kg sobre una báscula. Si la cubeta originalmente está vacía, ¿qué lee la báscula 3.00 s después de que el agua comienza a acumularse en ella?

Sección 9.3 Colisiones en una dimensión

15. Una bala de 10.0 g se dispara en un bloque de madera fijo (m = 5.00 kg). La bala se incrusta en el bloque. La rapidez de la combinación bala más madera inmediatamente después de la colisión es 0.600 m/s. ¿Cuál fue la rapidez original de la bala?

16. Un vagón de ferrocarril de 2.50×10^4 kg de masa se mueve con una rapidez de 4.00 m/s. Choca y se acopla con otros tres vagones acoplados, cada uno de la misma masa que el vagón solo y se mueven en la misma dirección con una rapidez inicial de 2.00 m/s. a) ¿Cuál es la rapidez de los cuatro vagones inmediatamente después de la colisión? b) ¿Cuánta energía se transforma en energía interna en la colisión?

17. ● Cuatro vagones, cada uno de 2.50×10^4 kg de masa, se acoplan y avanzan a lo largo de pistas horizontales con rapidez v_i hacia el sur. Un actor de cine muy fuerte, que viaja en el segundo vagón, desacopla el vagón frontal y le da un gran empujón, lo que aumenta su rapidez a 4.00 m/s hacia el sur. Los tres vagones restantes continúan moviéndose hacia el sur, ahora a 2.00 m/s. a) Encuentre la rapidez inicial de los vagones. b) ¿Cuánto trabajo hizo el actor? c) Establezca la correspondencia entre el proceso descrito aquí y el proceso del problema 16.

18. Como se muestra en la figura P9.18 (página 262), una bala de masa m y rapidez v atraviesa la esfera de un péndulo de masa M. La bala sale con una rapidez de $v/2$. La esfera del péndulo está suspendida mediante una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable. ¿Cuál es el valor mínimo de v tal que la esfera del péndulo apenas se balanceará para lograr un círculo vertical completo?

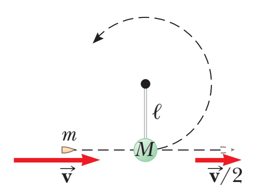


Figura P9.18

19. Dos bloques son libres de deslizarse a lo largo de la pista de madera sin fricción *ABC*, que se muestra en la figura P9.19. El bloque de masa $m_1 = 5.00$ kg se libera desde *A*. De su extremo frontal sobresale el polo norte de un poderoso imán, que repele el polo norte de un imán idéntico incrustado en el extremo posterior del bloque de masa $m_2 = 10.0$ kg, inicialmente en reposo. Los dos bloques nunca se tocan. Calcule la altura máxima a la que se eleva m_1 después de la colisión elástica.

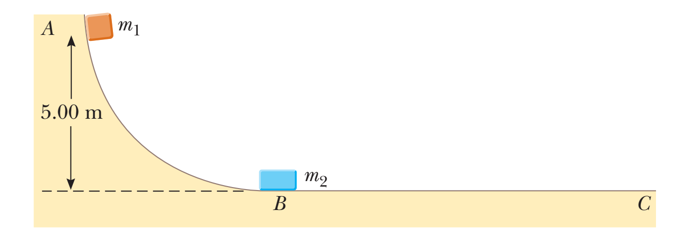


Figura P9.19

20. Una pelota de tenis de 57.0 g de masa se sostiene justo arriba de un balón de basquetbol de 590 g de masa. Con sus centros verticalmente alineados, ambos se liberan desde el reposo en el mismo momento, para caer una distancia de 1.20 m, como se muestra en la figura P9.20. a) Encuentre la magnitud de la velocidad hacia abajo con la que el balón llega al suelo. Suponga una colisión elástica con el suelo que instantáneamente invierte la velocidad del balón mientras la pelota de tenis aún se mueve hacia abajo. A continuación, las dos bolas se encuentran en una colisión elástica. b) ¿A qué altura rebota la pelota de tenis?



Figura P9.20

21. Una niña de 45.0 kg está de pie sobre una tabla que tiene una masa de 150 kg. La tabla, originalmente en reposo, es libre de deslizarse sobre un lago congelado que constituye una superficie de soporte plana y sin fricción. La niña comienza a caminar a lo largo de la tabla con una velocidad constante de $1.50\hat{\mathbf{i}}$ m/s en relación con la tabla. a) ¿Cuál es su velocidad en relación con la superficie de hielo? b) ¿Cuál es la velocidad de la tabla en relación con la superficie del hielo?

22. Una bala de 7.00 g, cuando se dispara desde un arma en un bloque de madera de 1.00 kg sostenido en un tornillo de banco, penetra el bloque a una profundidad de 8.00 cm. Este bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción, y una segunda bala de 7.00 g se dispara desde el arma en el bloque. En este caso, ¿a qué profundidad penetra la bala en el bloque?

23. Un neutrón en un reactor nuclear hace una colisión frontal elástica con el núcleo de un átomo de carbono inicialmente en reposo. a) ¿Qué fracción de la energía cinética del neutrón se transfiere al núcleo de carbono? b) La energía cinética inicial del neutrón es 1.60×10^{-13} J. Encuentre su energía cinética final y la energía cinética del núcleo de carbono después de la colisión. (La masa del núcleo de carbono es casi 12.0 veces la masa del neutrón.)

24. ● a) Tres carros de masas 4.00 kg, 10.0 kg y 3.00 kg, se mueven sobre una pista horizontal sin fricción con magnitudes de velocidad de 5.00 m/s, 3.00 m/s y 4.00 m/s, como se muestra en la figura P9.24. Acopladores de velcro hacen que los carros queden unidos después de chocar. Encuentre la velocidad final del tren de tres carros. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Su respuesta requiere que todos los carros choquen y se unan en el mismo momento? ¿Qué sucedería si chocan en diferente orden?

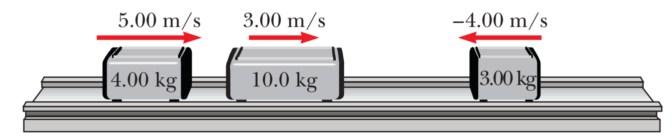


Figura P9.24

25. Una porción de arcilla pegajosa de 12.0 g es arrojada horizontalmente a un bloque de madera de 100 g al inicio en reposo sobre una superficie horizontal. La arcilla se pega al bloque. Después del impacto, el bloque se desliza 7.50 m antes de llegar al reposo. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.650, ¿cuál fue la rapidez de la masilla inmediatamente antes del impacto?

Sección 9.4 Colisiones en dos dimensiones

26. ● En un juego de futbol americano, un corredor de 90.0 kg que corre al este con una rapidez de 5.00 m/s es detenido por un oponente de 95.0 kg que corre al norte con una rapidez de 3.00 m/s. a) Explique por qué la tacleada exitosa constituye una colisión perfectamente inelástica. b) Calcule la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la tacleada. c) Determine la energía mecánica que desaparece como resultado de la colisión. Explique la energía perdida.

27. Una bola de billar que se mueve a 5.00 m/s golpea una bola fija de la misma masa. Después de la colisión, la primera bola se mueve, a 4.33 m/s, en un ángulo de 30.0° respecto de la línea de movimiento original. Si supone una colisión elástica (e ignora la fricción y el movimiento rotacional), encuentre la velocidad de la bola golpeada después de la colisión.

28. ● Dos automóviles de igual masa se aproximan a una intersección. Un vehículo viaja con velocidad de 13.0 m/s hacia el este y el otro viaja al norte con rapidez v_{2i}. Ningún conductor ve al otro. Los vehículos chocan en la intersección y quedan unidos, dejando marcas de derrape paralelas a un ángulo de 55.0° al noreste. La rapidez límite para ambos caminos es de 35 mi/h y el conductor del vehículo que se movía al norte afirma que él estaba dentro del límite de rapidez cuando ocurrió la colisión. ¿Dice la verdad? Explique su razonamiento.

29. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con una rapidez de 5.00 m/s. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo

largo de una dirección que forma un ángulo de 37.0° con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.

30. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con rapidez v_i. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.

31. Un objeto de 3.00 kg de masa, que se mueve con una velocidad inicial de $5.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s, choca y se une a un objeto de 2.00 kg de masa con una velocidad inicial de $-3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Encuentre la velocidad final del objeto compuesto.

32. Dos partículas con masas m y $3m$ se mueven una hacia la otra a lo largo del eje x con la misma rapidez inicial v_i. La partícula m viaja hacia la izquierda y la partícula $3m$ viaja hacia la derecha. Se someten a una colisión oblicua elástica tal que la partícula m se mueve hacia abajo después de la colisión en ángulo recto desde su dirección inicial. a) Encuentre las magnitudes de velocidad finales de las dos partículas. b) ¿Cuál es el ángulo θ al que se fuga la partícula $3m$?

33. Un núcleo atómico inestable de 17.0×10^{-27} kg de masa, inicialmente en reposo, se desintegra en tres partículas. Una de las partículas, de 5.00×10^{-27} kg de masa, se mueve en la dirección y con una rapidez de 6.00×10^{6} m/s. Otra partícula, de 8.40×10^{-27} kg de masa, se mueve en la dirección x con una rapidez de 4.00×10^{6} m/s. Encuentre a) la velocidad de la tercera partícula y b) el aumento de energía cinética en el proceso.

34. La masa del disco azul en la figura P9.34 es 20.0% mayor que la masa del disco verde. Antes de chocar, los discos se aproximan mutuamente con cantidades de movimiento de igual magnitud y direcciones opuestas, y el disco verde tiene una rapidez inicial de 10.0 m/s. Encuentre la rapidez que tiene cada disco después de la colisión, si la mitad de la energía cinética del sistema se convierte en energía interna durante la colisión.

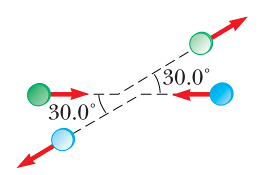


Figura P9.34

Sección 9.5 El centro de masa

35. Cuatro objetos se sitúan a lo largo del eje y del modo siguiente: un objeto de 2.00 kg se ubica a +3.00 m, un objeto de 3.00 kg está a +2.50 m, un objeto de 2.50 kg está en el origen y un objeto de 4.00 kg está en −0.500 m. ¿Dónde está el centro de masa de estos objetos?

36. La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg, y la masa de la Luna es 7.36×10^{22} kg. La distancia de separación, medida entre sus centros, es 3.84×10^{8} m. Localice el centro de masa del sistema Tierra–Luna, medido desde el centro de la Tierra.

37. A una pieza uniforme de hoja de acero se le da la forma como se muestra en la figura P9.37. Calcule las coordenadas x y y del centro de masa de la pieza.

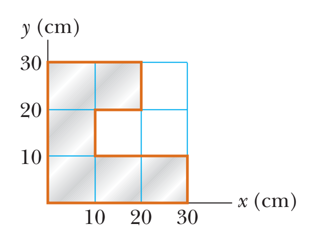


Figura P9.37

38. a) Considere un objeto extendido cuyas diferentes porciones tienen distintas elevaciones. Suponga que la aceleración en caída libe es uniforme sobre el objeto. Pruebe que la energía potencial gravitacional del sistema objeto–Tierra está dada por $U_g = Mgy_{CM}$, donde M es la masa total del objeto y y_{CM} es la elevación de su centro de masa sobre el nivel de referencia elegido. b) Calcule la energía potencial gravitacional asociada con una rampa construida con piedra a nivel del suelo con 3 800 kg/m^3 de densidad y ancho de 3.60 m en todas partes. En una vista lateral, la rampa parece un triángulo rectángulo con 15.7 m de altura en la cima y 64.8 m de base (figura P9.38).

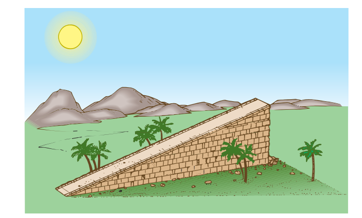


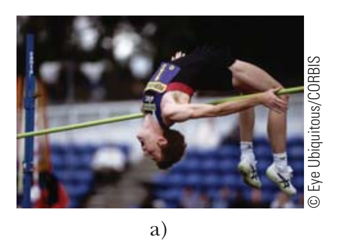
Figura P9.38

39. Una barra de 30.0 cm de longitud tiene densidad lineal (masa por longitud) dada por

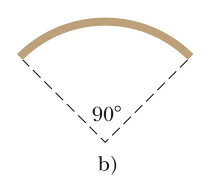
$$\lambda = 50.0 \text{ g/m} + 20.0x \text{ g/m}^2$$

donde x es la distancia desde un extremo, medida en metros. a) ¿Cuál es la masa de la barra? b) ¿A qué distancia del extremo $x = 0$ está su centro de masa?

40. En los Juegos Olímpicos de verano de 1968, el saltador de altura de la Universidad de Oregon, Dick Fosbury, introdujo una nueva técnica de salto de altura llamada "salto Fosbury". Así elevó el récord mundial por casi 30 cm y actualmente lo usan casi todos los saltadores de clase mundial. En esta técnica, el saltador pasa sobre la barra con la cara hacia arriba mientras arquea su espalda tanto como sea posible, como se muestra en la figura P9.40a. Esta acción coloca su centro de masa fuera de su cuerpo, bajo su espalda. Conforme su cuerpo pasa sobre la barra, su centro de masa pasa por abajo de la barra. Ya que una entrada de energía dada implica cierta elevación para su centro de masa, la acción de arquear la espalda significa que



a)



b)

Figura P9.40

su cuerpo está más alto que si su espalda estuviese recta. Como modelo, considere que el saltador es una barra delgada uniforme de longitud L. Cuando la barra está recta, su centro de masa está en su centro. Ahora doble la barra en un arco circular de modo que subtienda un ángulo de 90.0° en el centro del arco, como se muestra en la figura P9.40b. En esta configuración, ¿a qué distancia, afuera de la barra, está el centro de masa?

Sección 9.6 Movimiento de un sistema de partículas

41. Una partícula de 2.00 kg tiene una velocidad $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s, y una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Encuentre a) la velocidad del centro de masa y b) la cantidad de movimiento total del sistema.

42. El vector de posición de una partícula de 3.50 g que se mueve en el plano xy varía en el tiempo de acuerdo con $\vec{\mathbf{r}}_1 = (3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})t + 2\hat{\mathbf{j}}t^2$. Al mismo tiempo, el vector de posición de una partícula de 5.50 g varía como $\vec{\mathbf{r}}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{i}}t^2 - 6\hat{\mathbf{j}}t$, donde t está en s y r en cm. En $t = 2.50$ s, determine: a) el vector de posición del centro de masa, b) la cantidad de movimiento lineal del sistema, c) la velocidad del centro de masa, d) la aceleración del centro de masa y e) la fuerza neta que se ejerce sobre el sistema de dos partículas.

43. Romeo (77.0 kg) entretiene a Julieta (55.0 kg) al tocar su guitarra desde la parte trasera de su bote en reposo sobre agua calma, a 2.70 m de Julieta, quien está enfrente del bote. Después de la serenata, Julieta se mueve con cuidado hacia la parte trasera del bote (alejándose de la playa) para plantar un beso en la mejilla de Romeo. ¿Cuánto se mueve el bote de 80.0 kg hacia la playa que está enfrente?

44. Una bola de 0.200 kg de masa tiene una velocidad de $1.50\hat{\mathbf{i}}$ m/s; una bola de 0.300 kg de masa tiene una velocidad de $-0.400\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Se encuentran en una colisión frontal elástica. a) Halle sus velocidades después de la colisión. b) Halle la velocidad de su centro de masa antes y después de la colisión.

Sección 9.7 Sistemas deformables

45. ● Para un proyecto de tecnología, un estudiante construyó un vehículo, de 6.00 kg de masa total, que se mueve por sí solo. Como se muestra en la figura P9.45, corre sobre dos orugas ligeras que pasan alrededor de cuatro ruedas ligeras. Un carrete se acopla a uno de los ejes, y una cuerda originalmente enrollada sobre el carrete pasa sobre una polea unida al vehículo para soportar una carga elevada. Después de que el vehículo se libera desde el reposo, la carga desciende lentamente, desenrolla la cuerda para girar el eje y hace que el vehículo se mueva hacia adelante. La fricción es despreciable en la polea y los cojinetes del eje. La oruga no se desliza sobre las ruedas o el suelo. El carrete tiene una forma cónica de modo que la carga desciende a una rapidez baja constante mientras el vehículo se mueve horizontalmente a través del suelo con aceleración constante, y alcanza velocidad final $3.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s. a) ¿El suelo imparte impulso al vehículo? Si es así, ¿cuánto? b) ¿El suelo realiza trabajo sobre el vehículo? Si es así, ¿cuánto? c) ¿Tiene sentido decir que la cantidad de movimiento final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde? d) ¿Tiene sentido decir que la energía cinética final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde? e) ¿Se puede decir que una fuerza particular causa la aceleración hacia adelante del vehículo? ¿Qué la causa?

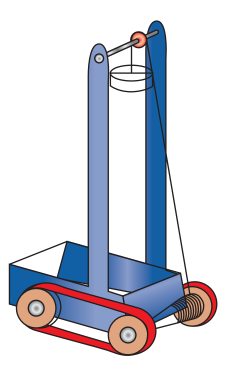


Figura P9.45

46. ● Una persona de 60.0 kg dobla sus rodillas y luego salta recto hacia arriba. Después de que sus pies dejan el suelo, su movimiento no es afectado por la resistencia del aire y su centro de masa se eleva un máximo de 15.0 cm. Modele el suelo como completamente sólido y sin movimiento. a) ¿El suelo imparte impulso a la persona? b) ¿El suelo realiza trabajo sobre la persona? c) ¿Con qué cantidad de movimiento deja el suelo la persona? d) ¿Tiene sentido decir que esta cantidad de movimiento viene del suelo? Explique. e) ¿Con qué energía cinética deja el suelo la persona? f) ¿Tiene sentido decir que esta energía proviene del suelo? Explique.

47. ● Una partícula está suspendida de un poste en lo alto de un carro mediante una cuerda ligera de longitud L, como se muestra en la figura P9.47a. El carro y la partícula inicialmente se mueven hacia la derecha con rapidez constante v_i, con la cuerda vertical. Súbitamente, el carro llega al reposo cuando choca y se une a un amortiguador, como se muestra en la figura P9.47b. La partícula suspendida se balancea a través de un ángulo θ. a) Demuestre que la rapidez original del carro se calcula a partir de $v_i = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$. b) Encuentre la rapidez inicial implicada por $L = 1.20$ m y $\theta = 35.0°$. c) ¿El amortiguador aún ejerce una fuerza horizontal en el carro cuando la partícula colgante está en su ángulo máximo desde la vertical? ¿En qué momento del movimiento observable el amortiguador deja de ejercer una fuerza horizontal en el carro?

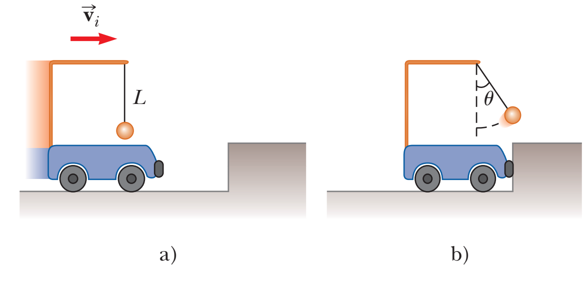


Figura P9.47

48. Sobre una pista de aire horizontal, un deslizador de masa m lleva un poste con forma de Γ. El poste soporta una pequeña esfera densa, también de masa m, que cuelga justo arriba de lo alto del deslizador en una cuerda de longitud L. El deslizador y la esfera inicialmente están en reposo con la cuerda vertical. (La figura P9.47a muestra un carro y una esfera igualmente conectados.) Una fuerza horizontal constante, de magnitud F, se aplica al deslizador, y lo mueve un desplazamiento x_1; después se quita la fuerza. Durante el intervalo de tiempo cuando la fuerza se aplica, la esfera se mueve a través de un desplazamiento con componente horizontal x_2. a) Encuentre la componente horizontal de la velocidad del centro de masa

del sistema deslizador–esfera cuando la fuerza se retira. b) Después de quitar la fuerza, el deslizador continúa moviéndose sobre la pista y la esfera se balancea atrás y adelante, ambos sin fricción. Encuentre una expresión para el mayor ángulo que la cuerda forma con la vertical.

49. ● Sobre una banda transportadora cae arena desde una tolva fija en una proporción de 5.00 kg/s, como se muestra en la figura P9.49. La banda transportadora está sostenida por rodillos sin fricción. Se mueve con una rapidez constante de 0.750 m/s bajo la acción de una fuerza horizontal externa constante $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ que proporciona el motor que impulsa la banda. Encuentre: a) la relación de cambio de la cantidad de movimiento de la arena en la dirección horizontal, b) la fuerza de fricción ejercida por la banda sobre la arena, c) la fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$, d) el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ en 1 s, y e) la energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal. f) ¿Por qué son diferentes las respuestas en d) y e)?

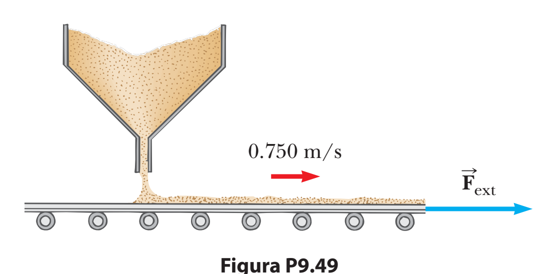


Figura P9.49

Sección 9.8 Propulsión de cohetes

50. Los motores de cohete a escala se dimensionan por el empuje, duración de empuje e impulso total, entre otras características. Un motor de cohete a escala tamaño C5 tiene un empuje promedio de 5.26 N, una masa de combustible de 12.7 g y una masa inicial de 25.5 g. La duración de su combustión es 1.90 s. a) ¿Cuál es la rapidez de escape promedio del motor? b) Este motor se coloca en el cuerpo de un cohete de 53.5 g de masa. ¿Cuál es la velocidad final del cohete si se dispara en el espacio exterior? Suponga que el combustible se quema a una proporción constante.

51. La primera etapa del vehículo espacial *Saturno V* consumió combustible y oxidante a la proporción de 1.50×10^4 kg/s, con una rapidez de escape de 2.60×10^3 m/s. a) Calcule el empuje producido por este motor. b) Encuentre la aceleración que tiene el vehículo justo cuando despega de la plataforma de lanzamiento sobre la Tierra, si considera la masa inicial del vehículo como 3.00×10^6 kg. *Nota:* Debe incluir la fuerza gravitacional para resolver b).

52. *Ciencia de cohetes.* Un cohete tiene masa total $M_i = 360$ kg, incluidos 330 kg de combustible y oxidante. En el espacio interestelar, parte del reposo en la posición $x = 0$, enciende su motor en el tiempo $t = 0$ y pone empuje con rapidez relativa $v_e = 1\,500$ m/s con la relación constante $k = 2.50$ kg/s. El combustible durará un tiempo de quema real de 330 kg/(2.5 kg/s) = 132 s, pero defina un "tiempo de agotamiento proyectado" como $T_p = M_i/k = 360$ kg/(2.5 kg/s) = 144 s (que sería el tiempo de quema si el cohete pudiera usar su carga y tanques de combustible, e incluso las paredes de la cámara de combustión como combustible). a) Demuestre que, durante la quema, la velocidad del cohete como función del tiempo se conoce por

$$v(t) = -v_e \ln\left(1 - \frac{t}{T_p}\right)$$

b) Haga una gráfica de la velocidad del cohete como función del tiempo para tiempos que van de 0 a 132 s. c) Demuestre que la aceleración del cohete es

$$a(t) = \frac{v_e}{T_p - t}$$

d) Grafique la aceleración como función del tiempo. e) Demuestre que la posición del cohete es

$$x(t) = v_e(T_p - t)\ln\left(1 - \frac{t}{T_p}\right) + v_e t$$

f) Grafique la posición durante la quema como función del tiempo.

53. ● Un cohete en el espacio profundo será capaz de impulsar una carga total (carga más armazón del cohete y motor) de 3.00 toneladas métricas a una rapidez de 10 000 m/s. a) Tiene un motor y combustible diseñados para producir una rapidez de escape de 2 000 m/s. ¿Cuánto combustible más oxidante se requiere? b) Si un combustible y diseño de motor dieran una rapidez de escape de 5 000 m/s, ¿qué cantidad de combustible y oxidante se requeriría para la misma tarea? Esta rapidez de escape es 2.50 veces mayor que la del inciso a). Explique por qué la masa del combustible requerido es 2.50 veces menor, o mayor que eso, o incluso más pequeña.

Problemas adicionales

54. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. Un resorte con constante de fuerza k se une al extremo posterior del segundo deslizador. El primer deslizador, de masa m_1, tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1$, y el segundo deslizador, de masa m_2, se mueve más lentamente, con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_2$, como se muestra en la figura P9.54. Cuando m_1 choca con el resorte unido a m_2 y comprime el resorte a su máxima compresión $x_{máx}$, la velocidad de los deslizadores es $\vec{\mathbf{v}}$. En términos de $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, m_1, m_2 y k, encuentre a) la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en máxima compresión, b) la máxima compresión $x_{máx}$ y c) la velocidad de cada deslizador después de que m_1 pierde contacto con el resorte.

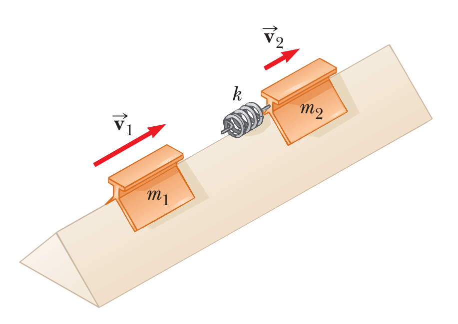


Figura P9.54

55. Un astronauta de 80.0 kg da una caminata espacial para trabajar en los motores de su nave, que va a la deriva por el espacio con una velocidad constante. El astronauta, que quiere tener una mejor vista del Universo, se empuja contra la nave y más tarde se encuentra 30.0 m atrás de la nave. Sin un propulsor o correa, la única forma de regresar a la nave es lanzar su llave de 0.500 kg directamente lejos de la nave. Si lanza la llave con una rapidez de 20.0 m/s en relación con la nave, ¿después de qué intervalo de tiempo el astronauta alcanza la nave?

56. ● Un envejecido actor de Hollywood (80.0 kg de masa) fue clonado, pero la réplica genética dista de la perfección. El clon tiene una masa diferente m, su presencia en el escenario es

deficiente y usa un lenguaje grosero. El clon, que sirve como doble del actor, está de pie en la orilla de un risco de 36.0 m de alto, junto a un árbol robusto. El actor está de pie en lo alto de un Humvee, 1.80 m sobre el nivel del suelo, y sostiene una soga tensa unida a la rama de un árbol directamente arriba del clon. Cuando el director grita "acción", el actor parte del reposo y se balancea hacia abajo en la soga sin fricción. El actor está momentáneamente oculto de la cámara en la parte baja del arco, donde se somete a una colisión elástica frontal con el clon, a quien envía al otro lado del risco. Maldiciendo, el clon va en caída libre al océano. El actor es acusado por hacer caer grotescamente al clon y a usted lo llaman como testigo experto en el sensacional juicio. a) Encuentre la componente horizontal R del desplazamiento del clon como dependiente de m. Evalúe R b) para $m = 79.0$ kg y c) para $m = 81.0$ kg. d) ¿Qué valor de m da un alcance de 30.0 m? e) ¿Cuál es el valor máximo posible para R, y f) a qué valor de m corresponde? ¿Cuáles son g) los valores mínimos de R y h) el valor correspondiente de m? i) Para el sistema actor–clon–Tierra, ¿la energía mecánica se conserva en cada parte de la secuencia de acción? ¿Este principio es suficiente para resolver el problema? Explique. j) Para el mismo sistema, ¿se conserva la cantidad de movimiento? Explique cómo se usa este principio. k) **¿Qué pasaría si?** Demuestre que R no depende del valor de la aceleración gravitacional. ¿Es notable este resultado? Establezca cómo puede dar sentido a esto.

57. Se dispara una bala de masa m hacia un bloque de masa M inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura h (figura P9.57). La bala permanece en el bloque y, después de impactar el bloque, aterriza a una distancia d desde la parte más baja de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

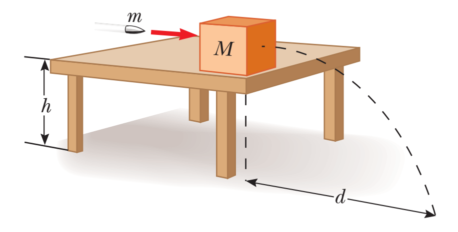


Figura P9.57

58. Un bloque pequeño de masa $m_1 = 0.500$ kg se libera desde el reposo en lo alto de una cuña sin fricción con forma curva, de masa $m_2 = 3.00$ kg, la cual se apoya sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P9.58a. Cuando el bloque deja la cuña, se mide su velocidad de 4.00 m/s hacia la derecha, como se muestra en la figura. a) ¿Cuál es la velocidad de la cuña después de que el bloque llega a la superficie horizontal? b) ¿Cuál es la altura h de la cuña?

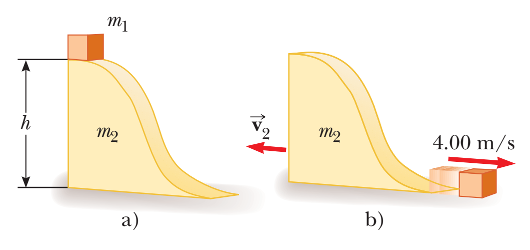


Figura P9.58

59. ● Una esfera de 0.500 kg, que se mueve con una velocidad conocida por $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}} + 1.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s, golpea a otra esfera de 1.50 kg de masa que se mueve con una velocidad inicial de $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}} - 3.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. a) La velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión está dada por $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} - 8.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión (elástica, inelástica o perfectamente inelástica). b) Ahora suponga que la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-0.250\hat{\mathbf{i}} + 0.750\hat{\mathbf{j}} - 2.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión. c) **¿Qué pasaría si?** Tome la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión como $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre el valor de a y la velocidad de la esfera de 1.50 kg después de una colisión elástica.

60. Un bombero de 75.0 kg se desliza hacia abajo en un poste mientras una fuerza de fricción constante de 300 N retarda su movimiento. Una plataforma horizontal de 20.0 kg está soportada por un resorte en la parte baja del poste para amortiguar la caída. El bombero parte del reposo 4.00 m arriba de la plataforma y la constante del resorte es 4 000 N/m. Encuentre a) la rapidez del bombero inmediatamente antes de chocar con la plataforma y b) la distancia máxima que se comprime el resorte. Suponga que la fuerza de fricción actúa durante todo el movimiento.

61. ● George de la Selva, con masa m, se balancea en una liana ligera que cuelga de la rama fija de un árbol. Una segunda liana de igual longitud cuelga del mismo punto, y un gorila de mayor masa M se balancea en ella en la dirección opuesta. Ambas lianas están horizontales cuando los primates parten desde el reposo en el mismo momento. George y el gorila se encuentran en el punto más bajo de su balanceo. Cada uno tiene miedo de que una liana se rompa, así que se abrazan mutuamente y cuelgan. Se balancean juntos hacia arriba y llegan a un punto donde las lianas forman un ángulo de 35.0° con la vertical. a) Encuentre el valor de la proporción m/M. b) **¿Qué pasaría si?** Intente el siguiente experimento en casa. Amarre un imán y un tornillo de acero a extremos opuestos de una cuerda. Sostenga fijo el centro de la cuerda para representar la rama del árbol y reproduzca un modelo de los movimientos de George y el gorila. ¿Qué cambios en su análisis lo harán aplicable a esta situación? **¿Qué pasaría si?** A continuación suponga que el imán tiene la fuerza para atraer notablemente el tornillo a través de una distancia de unos cuantos centímetros. Después el tornillo se moverá más rápido inmediatamente antes de pegarse al imán. ¿Esta intensidad magnética adicional hace una diferencia?

62. ● Una estudiante realiza un experimento en el péndulo balístico con el uso de un aparato similar al que se muestra en la figura 9.9b. Ella obtiene los siguientes datos promedio: $h = 8.68$ cm, $m_1 = 68.8$ g y $m_2 = 263$ g. Los símbolos se refieren a las cantidades en la figura 9.9a. a) Determine la rapidez inicial v_{1A} del proyectil. b) La segunda parte de su experimento es obtener v_{1A} al disparar el mismo proyectil horizontalmente (con el péndulo retirado de la trayectoria) y medir su posición horizontal final x y distancia de caída y (figura P9.62). Demuestre que la rapidez inicial del proyectil se relaciona con x y y mediante la ecuación

$$v_{1A} = \frac{x}{\sqrt{2y/g}}$$

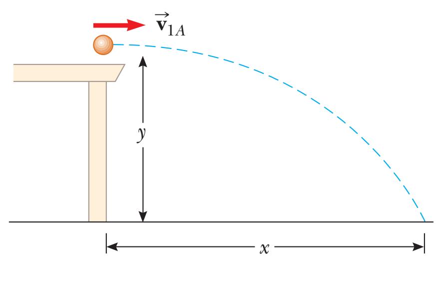


Figura P9.62

¿Qué valor numérico obtiene para v_{1A} en función de sus valores observados de $x = 257$ cm y $y = 85.3$ cm? ¿Qué factores pueden explicar la diferencia en este valor comparado con el obtenido en el inciso a)?

63. ● Lazarus Carnot, un general de artillería, condujo el proyecto militar de Napoleón. Carnot usó un péndulo balístico para medir las magnitudes de velocidad de disparo de balas de cañón. En los símbolos definidos en el ejemplo 9.6, comprobó que la relación de la energía cinética inmediatamente después de la colisión respecto a la energía cinética inmediatamente antes de $m_1/(m_1 + m_2)$. a) Realice la prueba usted mismo. b) Si la bala de cañón tiene 9.60 kg de masa y el bloque (un tronco de árbol) tiene 214 kg de masa, ¿qué fracción de la energía original permanece mecánica después de la colisión? c) ¿Cuál es la relación de la cantidad de movimiento inmediatamente después de la colisión respecto a la cantidad de movimiento inmediatamente antes de? d) Un estudiante cree que una pérdida tan grande de energía mecánica debe acompañarse de al menos una pequeña pérdida de cantidad de movimiento. ¿Cómo convencería a este estudiante de la verdad? El hijo del general Carnot, Sadi, fue el segundo ingeniero más importante en la historia de las ideas; su obra se estudiará en el capítulo 22.

64. ● Perseguido por lobos feroces, está en un trineo sin caballos, y se desliza sin fricción a través de un lago cubierto de hielo. Usted toma una acción descrita por estas ecuaciones:

$$(270 \text{ kg})(7.50 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}} = (15.0 \text{ kg})(-v_{1f}\hat{\mathbf{i}}) + (255 \text{ kg})(v_{2f}\hat{\mathbf{i}})$$

$$v_{1f} + v_{2f} = 8.00 \text{ m/s}$$

a) Complete el enunciado del problema, proporcione los datos e identifique las incógnitas. b) Encuentre los valores de v_{1f} y v_{2f}. c) Encuentre el trabajo que hizo.

65. **Problema de repaso.** Un resorte ligero, con constante de fuerza 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm y se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha. Ambos bloques están en reposo sobre una superficie horizontal. Los bloques se liberan simultáneamente de modo que el resorte tiende a separarlos. Encuentre la velocidad máxima que logra cada bloque si el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es a) 0, b) 0.100 y c) 0.462. Suponga que el coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción cinética en cada caso.

66. Considere como un sistema al Sol con la Tierra en una órbita circular alrededor de aquél. Encuentre la magnitud del cambio en la velocidad del Sol en relación con el centro de masa del sistema durante un periodo de 6 meses. Ignore la influencia de otros objetos del espacio. Puede obtener los datos astronómicos necesarios al final del libro.

67. Una bala de 5.00 g, que se mueve con una rapidez inicial de 400 m/s, se dispara y pasa a través de un bloque de 1.00 kg, como se muestra en la figura P9.67. El bloque, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, se conecta a un resorte con constante de fuerza 900 N/m. El bloque se mueve 5.00 cm hacia la derecha después del impacto. Encuentre a) la rapidez con que la bala sale del bloque y b) la energía mecánica que se convierte en energía interna en la colisión.

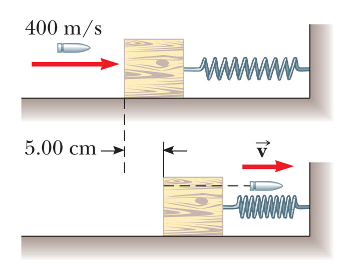


Figura P9.67

68. ● **Problema de repaso.** Existen (podría decirse) tres teorías recíprocas del movimiento: la segunda ley de Newton, que afirma que la fuerza total en una partícula causa su aceleración; el teorema trabajo–energía cinética, que afirma que el trabajo total en una partícula causa su cambio en energía cinética; y el teorema impulso–cantidad de movimiento, que establece que el impulso total en una partícula causa su cambio en cantidad de movimiento. En este problema, compare predicciones de las tres teorías en un caso particular. Un objeto de 3.00 kg tiene velocidad $7.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Después, una fuerza total de $12.0\hat{\mathbf{i}}$ N actúa sobre el objeto durante 5.00 s. a) Calcule la velocidad final del objeto, con el teorema impulso–cantidad de movimiento. b) Calcule su aceleración a partir de $\vec{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i)/\Delta t$. c) Calcule su aceleración a partir de $\vec{\mathbf{a}} = \Sigma\,\vec{\mathbf{F}}/m$. d) Encuentre el desplazamiento vectorial del objeto a partir de $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$. e) Encuentre el trabajo invertido en el objeto a partir de $W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$. f) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\vec{\mathbf{v}}_f \cdot \vec{\mathbf{v}}_f$. g) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + W$. h) Establezca el resultado de comparar las respuestas de los incisos b) y c), y las respuestas a los incisos f) y g).

69. Una cadena de longitud L y masa total M se libera desde el reposo con su extremo inferior apenas tocando lo alto de una mesa, como se muestra en la figura P9.69a. Encuentre la fuerza que ejerce la mesa sobre la cadena después de que la cadena cae una distancia x, como se muestra en la figura P9.69b. (Suponga que cada eslabón llega al reposo en el instante en que llega a la mesa.)

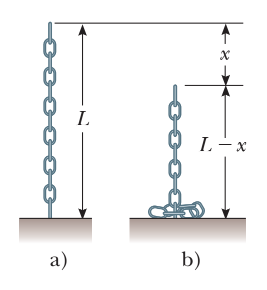


Figura P9.69

Respuestas a las preguntas rápidas

9.1 d). Dos objetos idénticos ($m_1 = m_2$) que viajan con la misma rapidez ($v_1 = v_2$) tienen las mismas energías cinéticas y las mismas magnitudes de cantidad de movimiento. Sin embargo, también es posible, para combinaciones particulares de masas y velocidades, satisfacer $K_1 = K_2$ pero no $p_1 = p_2$. Por ejemplo, un objeto de 1 kg que se mueve a 2 m/s tiene la misma energía cinética que un objeto de 4 kg que se mueve a 1 m/s, pero es claro que los dos no tienen las mismas cantidades de movimiento. Ya que no se tiene información acerca de masas y magnitudes de velocidad, no se puede elegir entre a), b) o c).

9.2 b), c), a). Mientras más lento viaje la bola, más fácil será de atrapar. Si la cantidad de movimiento de la pelota grande y pesada es la misma que la cantidad de movimiento de la pelota de beisbol, la rapidez de la pelota para gimnasia debe ser 1/10 la rapidez de la pelota de beisbol porque la pelota grande y pesada tiene 10 veces la masa. Si las energías cinéticas son las mismas, la rapidez de la pelota para gimnasia debe ser $1/\sqrt{10}$ la rapidez de la pelota de beisbol debido al término de rapidez al cuadrado en la ecuación para K. La pelota para gimnasia es más difícil de atrapar cuando tiene la misma rapidez que la pelota de beisbol.

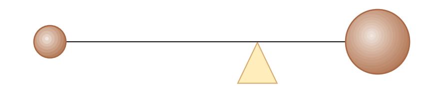
9.3 **i)**, c), e). El objeto 2 tiene una mayor aceleración debido a su masa más pequeña. Por lo tanto, recorre la distancia d en un intervalo de tiempo más breve. Aun cuando la fuerza que se aplica a los objetos 1 y 2 es la misma, el cambio en cantidad de movimiento es menor para el objeto 2 porque Δt es menor. El trabajo $W = Fd$ invertido en ambos objetos es el mismo porque tanto F como d son los mismos en los dos casos. En consecuencia, $K_1 = K_2$. **ii)**, b), d). El mismo impulso se aplica a ambos objetos, de modo que experimentan el mismo cambio en cantidad de movimiento. El objeto 2 tiene una mayor aceleración debido a su masa más pequeña. Debido a eso, la distancia que cubre el objeto 2 en el intervalo de tiempo es mayor que la del objeto 1. Como resultado, sobre el objeto 2 se consume más trabajo y $K_2 > K_1$.

9.4 a) Los tres son iguales. Ya que el pasajero fue llevado desde la rapidez inicial del automóvil a un alto total, el cambio en cantidad de movimiento (igual al impulso) es el mismo sin importar qué detiene al pasajero. b) Tablero, cinturón de seguridad, bolsa de aire. El tablero detiene al pasajero muy rápidamente en una colisión frontal, lo que resulta en una fuerza muy grande. El cinturón de seguridad toma un poco más de tiempo, así que la fuerza es más pequeña. Usada junto con el cinturón de seguridad, la bolsa de aire puede extender aún más el tiempo de frenado del pasajero, en especial para su cabeza, que de otro modo chicotearía hacia adelante.

9.5 a). Si toda la energía cinética inicial se transforma o transfiere del sistema, nada se mueve después de la colisión. En consecuencia, la cantidad de movimiento final del sistema necesariamente es cero y la cantidad de movimiento inicial del sistema por lo tanto debe ser cero. Aunque b) y d) las condiciones *juntas* serían suficientes, ninguna de ellas *sola* lo hace.

9.6 b). Ya que la cantidad de movimiento del sistema de dos bolas se conserva, $\vec{\mathbf{p}}_{Ti} + 0 = \vec{\mathbf{p}}_{Tf} + \vec{\mathbf{p}}_B$. Y que la bola de tenis de mesa rebota desde la bola de boliche mucho más masiva aproximadamente con la misma rapidez, $\vec{\mathbf{p}}_{Tf} = -\vec{\mathbf{p}}_{Ti}$. En consecuencia, $\vec{\mathbf{p}}_B = 2\vec{\mathbf{p}}_{Ti}$. La energía cinética se puede expresar como $K = p^2/2m$. Debido a la masa mucho mayor de la bola de boliche, su energía cinética es mucho menor que la de la bola de tenis de mesa.

9.7 b). La pieza con el mango tendrá menos masa que la pieza que constituye el extremo del bat. Para ver por qué, tome el origen de coordenadas como el centro de masa antes de que el bat se corte. Sustituya cada pieza cortada por una pequeña esfera ubicada en el centro de masa de cada pieza. La esfera que representa la pieza del mango está más lejos del origen, pero el producto de menos masa y mayor distancia equilibra el producto de mayor masa y menor distancia para la pieza del extremo, como se muestra.



9.8 **i)**, a). Este efecto es el mismo que el nadador que se clava desde la balsa, recién discutido. El sistema crucero–pasajeros está aislado. Si los pasajeros comienzan todos a correr en una dirección, la rapidez del crucero aumenta (¡una pequeña cantidad!) en la otra dirección. **ii)**, b). Una vez que dejan de correr, la cantidad de movimiento del sistema es la misma que era antes de que comenzaran a correr; no se puede cambiar la cantidad de movimiento de un sistema aislado mediante fuerzas internas. En caso de que esté pensando que los pasajeros podrían correr hacia la popa repetidamente para sacar ventaja del aumento de rapidez *mientras* corren, ¡recuerde que frenarán la embarcación cada vez que regresen a la proa!

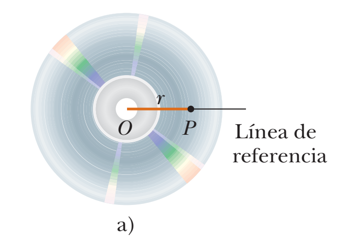


El pasatiempo malayo *gasing* es el giro de trompos que llegan a tener masas de hasta 5 kg. Los jugadores profesionales giran sus trompos de modo que puedan dar vueltas durante más de una hora antes de detenerse. En este capítulo se estudiará el movimiento rotacional de objetos como estos trompos. (Cortesía Turismo Malasia)

10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo

El movimiento de un objeto extendido, como una rueda que gira en torno a su eje, no se puede explicar al representar el objeto como una partícula: en cualquier momento diferentes partes del objeto tienen distintas velocidades y aceleraciones lineales. Sin embargo, el movimiento de un objeto extendido se analiza al representarlo como un conjunto de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración lineales.

Al tratar con un objeto en rotación, la explicación se simplifica mucho al suponer que el objeto es rígido. Un **objeto rígido** no es deformable; es decir, las ubicaciones relativas de todas las partículas de que está compuesto permanecen constantes. Todos los objetos reales son deformables en cierta medida; no obstante, el modelo de objeto rígido es útil en muchas situaciones en que la deformación es despreciable.



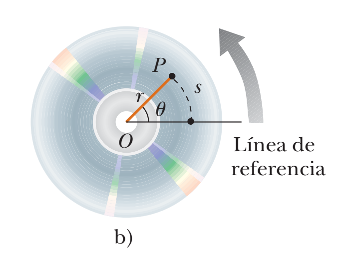


Figura 10.1 Disco compacto que gira en torno a un eje fijo a través de O perpendicular al plano de la figura. a) Para definir la posición angular del disco, se elige una línea de referencia fija. Una partícula en P se ubica a una distancia r desde el eje de rotación en O. b) Conforme el disco da vueltas, una partícula en P se mueve a través de una longitud de arco s sobre una trayectoria circular de radio r.

10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

La figura 10.1 ilustra una vista desde arriba de un disco compacto, o CD, en rotación. El disco da vueltas en torno a un eje fijo perpendicular al plano de la figura que pasa a través del centro del disco en O. Un pequeño elemento del disco modelado como partícula en P está a una distancia fija r desde el origen y gira en torno a él en un círculo de radio r. (De hecho, *toda* partícula en el disco experimenta movimiento circular en torno a O.) Es conveniente representar la posición de P con sus coordenadas polares (r, θ), donde r es la

distancia desde el origen a P y θ se mide *contra las manecillas del reloj* desde cierta línea de referencia fija en el espacio, como se muestra en la figura 10.1a. En esta representación, el ángulo θ cambia en el tiempo mientras r permanece constante. A medida que la partícula se mueve a lo largo del círculo desde la línea de referencia, que está a un ángulo $\theta = 0$, se mueve a través de una longitud de arco s, como en la figura 10.1b. La longitud de arco s se relaciona con el ángulo θ mediante

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{10.1b}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.1
Recuerde el radián

En las ecuaciones rotacionales, *debe* usar ángulos expresados en radianes. No caiga en la trampa de usar ángulos medidos en grados en las ecuaciones rotacionales.

Ya que θ es la relación de una longitud de arco y el radio del círculo, es un número puro. Sin embargo, por lo general, a θ se le da la unidad artificial **radián** (rad), donde **un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco**. Ya que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$, se sigue de la ecuación 10.1b que 360° corresponde a un ángulo de $(2\pi r/r)$ rad $= 2\pi$ rad. Por tanto, 1 rad $= 360°/2\pi \approx 57.3°$. Para convertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes, se usa π rad $= 180°$, de modo que

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180°}\,\theta(\text{grados})$$

Por ejemplo, 60° es igual a $\pi/3$ rad y 45° es igual a $\pi/4$ rad.

Ya que el disco en la figura 10.1 es un objeto rígido, a medida que la partícula se mueve a través de un ángulo θ desde la línea de referencia, cualquier otra partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo θ. En consecuencia, **se puede asociar el ángulo θ con todo el objeto rígido así como con una partícula individual,** que permite definir la *posición angular* de un objeto rígido en su movimiento rotacional. Se elige una línea de referencia sobre el objeto, tal como una línea que conecte O y una partícula elegida sobre el objeto. La **posición angular** del objeto rígido es el ángulo θ entre esta línea de referencia sobre el objeto y la línea de referencia fija en el espacio, que con frecuencia se elige como el eje x. Tal identificación es similar a la forma en que se define la posición de un objeto en movimiento traslacional como la distancia x entre el objeto y la posición de referencia, que es el origen, $x = 0$.

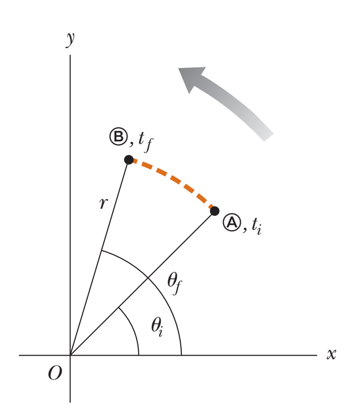


Figura 10.2 Una partícula sobre un objeto rígido en rotación se mueve de Ⓐ a Ⓑ a lo largo del arco de un círculo. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, la línea radial de longitud r se mueve a través de un desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

Conforme la partícula en cuestión sobre el objeto rígido viaja de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ en un intervalo de tiempo Δt, como en la figura 10.2, la línea de referencia fija al objeto cubre un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Esta cantidad $\Delta\theta$ se define como el **desplazamiento angular** del objeto rígido:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

La rapidez a la que se presenta este desplazamiento angular puede variar. Si el objeto rígido gira rápidamente, este desplazamiento puede ocurrir en un intervalo breve de tiempo. Si da vueltas lentamente, este desplazamiento se presenta en un intervalo de tiempo más largo. Estas diferentes relaciones de rotación se cuantifican al definir la **rapidez angular promedio** ω_{prom} (letra griega omega) como la relación del desplazamiento angular de un objeto rígido al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el desplazamiento:

Rapidez angular promedio ▶

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{10.2}$$

En analogía con la rapidez lineal, la **rapidez angular instantánea** ω se define como el límite de la rapidez angular promedio conforme Δt tiende a cero:

Rapidez angular instantánea ▶

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

La rapidez angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que se pueden escribir como s^{-1} porque los radianes son adimensionales. ω se considera positiva cuando θ aumenta (movimiento contra las manecillas del reloj en la figura 10.2) y negativa cuando θ disminuye (en sentido de las manecillas del reloj en la figura 10.2).

Pregunta rápida 10.1 Un objeto rígido da vueltas en un sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a un eje fijo. Cada uno de los siguientes pares de cantidades representa una posición angular inicial y una posición angular final del objeto rígido. **i)** ¿Cuál de los conjuntos *sólo* puede ocurrir si el objeto rígido da vueltas a través de más de 180°? a) 3 rad, 6 rad, b) −1 rad, 1 rad, c) 1 rad, 5 rad. **ii)** Suponga que el cambio en posición angular para cada uno de estos pares de valores se presenta en 1 s. ¿Cuál opción representa la rapidez angular promedio más baja?

Si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt, el objeto tiene una aceleración angular. La **aceleración angular promedio** α_{prom} (letra griega alfa) de un objeto rígido en rotación se define como la relación de cambio en la rapidez angular respecto al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el cambio en la rapidez angular:

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{10.4}$$

◄ Aceleración angular promedio

En analogía con la aceleración lineal, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{10.5}$$

◄ Aceleración angular instantánea

La aceleración angular tiene unidades de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2), o simplemente s^{-2}. Note que α es positivo cuando un objeto rígido que gira contra las manecillas del reloj aumenta su velocidad o cuando un objeto rígido que gira en sentido de las manecillas del reloj disminuye su velocidad durante cierto intervalo de tiempo.

Cuando un objeto rígido en rotación respecto a un eje *fijo*, **cada partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo determinado y tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular**. Es decir, las cantidades θ, ω y α caracterizan el movimiento rotacional de todo el objeto rígido así como las partículas individuales en el objeto.

La posición angular (θ), la rapidez angular (ω) y la aceleración angular (α) son análogas a la posición traslacional (x), la rapidez traslacional (v) y la aceleración traslacional (a). Las variables θ, ω y α difieren dimensionalmente de las variables x, v y a sólo por un factor que tiene la unidad de longitud. (Vea la sección 10.3.)

No se especificó dirección alguna para la rapidez angular y la aceleración angular. Estrictamente hablando, ω y α son las magnitudes de los vectores velocidad angular y aceleración angular[1] $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, respectivamente, y siempre deben ser positivos. No obstante, porque se considera rotación respecto a un eje fijo, se puede usar notación no vectorial e indicar las direcciones de los vectores al asignar un signo positivo o negativo a ω y α como se explicó anteriormente respecto de las ecuaciones 10.3 y 10.5. Para rotación respecto a un eje fijo, la única dirección que específica el movimiento rotacional esla dirección a lo largo del eje de rotación. Por lo tanto, las direcciones de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ son a lo largo de este eje. Si una partícula da vueltas en el plano *xy* como en la figura 10.2, la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ para la partícula es afuera del plano del diagrama cuando la rotación es contraria a las manecillas del reloj y hacia el plano del diagrama cuando la rotación es en sentido de las manecillas del reloj. Para ilustrar esta convención, es apropiado usar la *regla de la mano derecha* que se demuestra en la figura 10.3. Cuando los cuatro dedos de la mano derecha se enrollan en la dirección de rotación, el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. La dirección de $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ se sigue de su definición $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \equiv d\vec{\boldsymbol{\omega}}/dt$. Está en la misma dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si la rapidez angular aumenta en el tiempo, y es antiparalela a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si la rapidez angular disminuye en el tiempo.

[1] Aunque no se verificó en este caso, la velocidad angular instantánea y la aceleración angular instantánea son cantidades vectoriales, pero los correspondientes valores promedio no lo son porque los desplazamientos no se suman como cantidades vectoriales para rotaciones finitas.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.2
Especifique su eje

Al resolver problemas de rotación, debe especificar un eje de rotación. Esta nueva característica no existe en el estudio del movimiento traslacional. La elección es arbitraria, pero una vez que la hace, debe mantener dicha elección sin ceder en todo el problema. En algunos problemas, la situación física sugiere un eje natural, como el centro de la rueda de un automóvil. En otros problemas, puede no haber una opción obvia, y debe ejercitar su juicio.

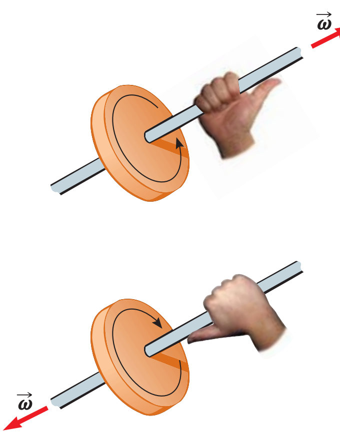


Figura 10.3 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular.

10.2 Cinemática rotacional: Objeto rígido bajo aceleración angular constante

Cuando un objeto rígido da vueltas respecto a un eje fijo, con frecuencia se somete a una aceleración angular constante. Por lo tanto, se genera un nuevo modelo de análisis para movimiento rotacional llamado **objeto rígido bajo aceleración angular constante**. Este modelo es el análogo rotacional del modelo de partícula bajo aceleración constante. En esta sección se desarrollan las correspondencias cinemáticas para este modelo. Al escribir la ecuación 10.5 en la forma $d\omega = \alpha\, dt$ e integrar desde $t_i = 0$ hasta $t_f = t$ se obtiene

Ecuaciones cinemáticas rotacionales ▶

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)} \tag{10.6}$$

donde ω_i es la rapidez angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.6 permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto en cualquier tiempo posterior t. Al sustituir la ecuación 10.6 en la ecuación 10.3 e integrar una vez más, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)} \tag{10.7}$$

donde θ_i es la posición angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.7 permite encontrar la posición angular θ_f del objeto en cualquier tiempo posterior t. Al eliminar t de las ecuaciones 10.6 y 10.7 se obtiene

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)} \tag{10.8}$$

Esta ecuación permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto rígido para cualquier valor de su posición angular θ_f. Si se elimina α entre las ecuaciones 10.6 y 10.7, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)} \tag{10.9}$$

Note que estas expresiones cinemáticas para el objeto rígido bajo aceleración angular constante son de la misma forma matemática que para una partícula bajo aceleración constante (capítulo 2). Se generan a partir de las ecuaciones para movimiento traslacional al hacer las sustituciones $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$ y $a \rightarrow \alpha$. La tabla 10.1 compara las ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.3

¿Tal como la traslación?

Las ecuaciones 10.6 a la 10.9 y la tabla 10.1 sugieren que la cinemática rotacional es tal como la cinemática traslacional. Esto es casi cierto, con dos diferencias clave. 1) En la cinemática rotacional, debe especificar un eje de rotación (ver Prevención de riesgos ocultos 10.2). 2) En movimiento rotacional, el objeto regresa a su orientación original; por lo tanto, se le puede preguntar el número de revoluciones hecho por un objeto rígido. Este concepto no tiene significado en el movimiento traslacional.

Pregunta rápida 10.2 Considere de nuevo los pares de posiciones angulares para el objeto rígido de la pregunta rápida 10.1. Si el objeto parte del reposo en la posición angular inicial, se mueve contra las manecillas del reloj con aceleración angular constante y llega a la posición angular final con la misma rapidez angular en los tres casos, ¿para cuál opción la aceleración angular es la más alta?

TABLA 10.1

Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional bajo aceleración constante

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

EJEMPLO 10.1 **Rueda en rotación**

Una rueda da vueltas con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2.

A) Si la rapidez angular de la rueda es 2.00 rad/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento angular da vueltas la rueda en 2.00 s?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 10.1. Imagine que el disco compacto se mueve con su rapidez angular que crece en una relación constante. El cronómetro se inicia cuando el disco en rotación a 2.00 rad/s. Esta imagen mental es un modelo para el movimiento de la rueda en este ejemplo.

Categorizar La frase "con aceleración angular constante" dice que se use el modelo de objeto rígido bajo aceleración constante.

Analizar Ordene la ecuación 10.7 de modo que exprese el desplazamiento angular del objeto:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Sustituya los valores conocidos para encontrar el desplazamiento angular en $t = 2.00$ s:

$$\Delta\theta = (2.00 \text{ rad/s})(2.00 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})^2$$

$$= \boxed{11.0 \text{ rad}} = (11.0 \text{ rad})(57.3°/\text{rad}) = \boxed{630°}$$

B) ¿Cuántas revoluciones dio la rueda durante este intervalo de tiempo?

SOLUCIÓN

Multiplique el desplazamiento que encontró en el inciso A) por un factor de conversión para encontrar el número de revoluciones:

$$\Delta\theta = 630°\left(\frac{1 \text{ rev}}{360°}\right) = \boxed{1.75 \text{ rev}}$$

C) ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda en $t = 2.00$ s?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.6 para encontrar la rapidez angular en $t = 2.00$ s:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 2.00 \text{ rad/s} + (3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})$$

$$= \boxed{9.00 \text{ rad/s}}$$

Finalizar También se podría obtener este resultado con la ecuación 10.8 y los resultados del inciso A). (¡Inténtelo!)

¿Qué pasaría si? Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante de 3.50 m/s^2. Si la velocidad de la partícula es 2.00 m/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento se mueve la partícula en 2.00 s? ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 2.00$ s?

Respuesta Advierta que estas preguntas son análogos traslacionales a los incisos A) y C) del problema original. La solución matemática sigue exactamente la misma forma. Para el desplazamiento,

$$\Delta x = x_f - x_i = v_i t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$= (2.00 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(3.50 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 = 11.0 \text{ m}$$

y para la velocidad

$$v_f = v_i + at = 2.00 \text{ m/s} + (3.50 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 9.00 \text{ m/s}$$

No hay análogo traslacional a la parte B) porque el movimiento traslacional bajo aceleración constante no es repetitivo.

10.3 Cantidades angulares y traslacionales

De esta sección se deducen algunas relaciones útiles entre la rapidez y la aceleración angulares de un objeto rígido en rotación y la rapidez y la aceleración traslacionales de un punto en el objeto. Para hacerlo, debe tener en mente que, cuando un objeto rígido

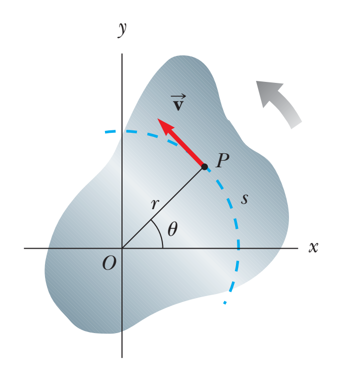


Figura 10.4 A medida que un objeto rígido da vueltas en torno al eje fijo a través de O, el punto P tiene una velocidad tangencial $\vec{\mathbf{v}}$ que siempre es tangente a la trayectoria circular de radio r.

da vueltas respecto a un eje fijo, como en la figura 10.4, **toda partícula del objeto se mueve en un círculo cuyo centro está en el eje de rotación**.

Ya que el punto P en la figura 10.4 se mueve en un círculo, el vector velocidad traslacional $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es tangente a la trayectoria circular y por ende se llama *velocidad tangencial*. La magnitud de la velocidad tangencial del punto P es por definición la rapidez tangencial $v = ds/dt$, donde s es la distancia que recorre este punto medida a lo largo de la trayectoria circular. Al recordar que $s = r\theta$ (ecuación 10.1a) y notar que r es constante, se obtiene

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Ya que $d\theta/dt = \omega$ (vea la ecuación 10.3), se sigue que

$$v = r\omega \qquad \textbf{(10.10)}$$

Es decir, la rapidez tangencial de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular de dicho punto desde el eje de rotación, multiplicada por la rapidez angular. En consecuencia, aunque cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez *angular*, no todo punto tiene la misma rapidez *tangencial* porque r no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto. La ecuación 10.10 muestra que la rapidez tangencial de un punto sobre el objeto en rotación aumenta a medida que uno se mueve alejándose del centro de rotación, como se esperaría por intuición. Por ejemplo, el extremo exterior de un palo de golf que se balancea se mueve mucho más rápido que el mango.

La aceleración angular del objeto rígido en rotación se puede relacionar con la aceleración tangencial del punto P al tomar la derivada en el tiempo de v:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

Relación entre aceleración tangencial y angular ▶

$$a_t = r\alpha \qquad \textbf{(10.11)}$$

Es decir, la componente tangencial de la aceleración traslacional de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular del punto desde el eje de rotación, multiplicada por la aceleración angular.

En la sección 4.4 se encontró que un punto que se mueve en una trayectoria circular se somete a una aceleración radial a_r dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta v^2/r (figura 10.5). Ya que $v = r\omega$ para un punto P en un objeto en rotación, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular como

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad \textbf{(10.12)}$$

El vector aceleración total en el punto es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_r$, donde la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_r$ es la aceleración centrípeta a_c. Ya que $\vec{\mathbf{a}}$ es un vector que tiene una componente radial y una componente tangencial, la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ en el punto P sobre el objeto rígido en rotación es

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \qquad \textbf{(10.13)}$$

Figura 10.5 A medida que un objeto rígido gira respecto a un eje fijo a través de O, el punto P experimenta una componente tangencial de aceleración traslacional a_t y una componente radial de aceleración traslacional a_r. La aceleración traslacional de este punto es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_r$.

Pregunta rápida 10.3 Alex y Brian viajan en un carrusel. Alex viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Brian, quien viaja en un caballo interior. **i)** Cuando el carrusel en rotación a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Alex? a) el doble de la de Brian, b) la misma que la de Brian, c) la mitad de la de Brian, d) imposible de determinar. **ii)** Cuando el carrusel en rotación con una rapidez angular constante, describa la rapidez tangencial de Alex con la misma lista de opciones.

EJEMPLO 10.2 Reproductor de CD

En un disco compacto (figura 10.6), la información de audio se almacena digitalmente en una serie de depresiones (pits) y áreas planas en la superficie del disco. Las alternaciones entre depresiones y áreas planas sobre la superficie representan unos y ceros binarios a leer por el reproductor de CD y convertir de regreso en ondas sonoras. Las depresiones y áreas planas se detectan mediante un sistema que consiste de un láser y lentes. La longitud de una cadena de unos y ceros que representa una porción de información es la misma en cualquier parte del disco, ya sea que la información esté cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior. De modo que, para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema láser–lente en el mismo intervalo de tiempo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la posición del lente debe ser constante. De acuerdo con la ecuación 10.10, la rapidez angular debe variar a medida que el sistema láser–lente se mueve radialmente a lo largo del disco. En un reproductor de CD común, la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema láser–lente es 1.3 m/s.

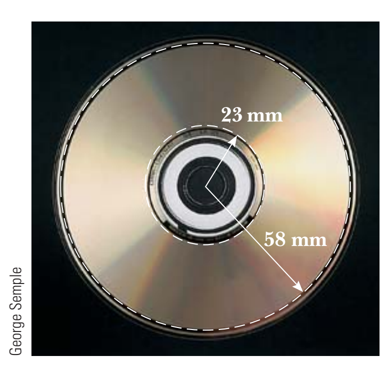


Figura 10.6 (Ejemplo 10.2) Disco compacto.

A) Encuentre la rapidez angular del disco en revoluciones por minuto cuando la información se lee desde la primera pista más interna ($r = 23$ mm) y la pista final más externa ($r = 58$ mm).

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.6 muestra una fotografía de un disco compacto. Recorra con su dedo el círculo marcado "23 mm" en un intervalo de tiempo de aproximadamente 3 s. Ahora recorra con su dedo el círculo marcado "58 mm" en el mismo intervalo de tiempo. Advierta cuán rápido se mueve su dedo en relación con la página alrededor del círculo más grande. Si su dedo representa el láser que lee el disco, se mueve sobre la superficie del disco mucho más rápido en el círculo exterior que en el círculo interior.

Categorizar Esta parte del ejemplo se clasifica como un simple problema de sustitución. En partes posteriores, se necesitará para identificar modelos de análisis.

Aplique la ecuación 10.10 para encontrar la rapidez angular que da la rapidez tangencial requerida en la posición de la pista interna:

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{2.3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 57 \text{ rad/s}$$

$$= (57 \text{ rad/s})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = \boxed{5.4 \times 10^2 \text{ rev/min}}$$

Haga lo mismo para la pista exterior:

$$\omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{5.8 \times 10^{-2} \text{ m}} = 22 \text{ rad/s} = \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ rev/min}}$$

El reproductor de CD ajusta la rapidez angular ω del disco dentro de este intervalo de modo que la información se mueve por el lente objetivo en una relación constante.

B) El máximo tiempo de reproducción de un disco de música estándar es 74 min y 33 s. ¿Cuántas revoluciones realiza el disco durante dicho tiempo?

SOLUCIÓN

Categorizar Del inciso A), la rapidez angular disminuye a medida que el disco se reproduce. Suponga que disminuye de manera estable, con α constante. Por lo tanto se puede usar el modelo de objeto rígido bajo aceleración angular constante.

Analizar Si $t = 0$ es el instante cuando el disco comienza su rotación, con rapidez angular de 57 rad/s, el valor final del tiempo t es (74 min)(60 s/min) + 33 s = 4 473 s. Se busca el desplazamiento angular $\Delta\theta$ durante este intervalo de tiempo.

Aplique la ecuación 10.9 para encontrar el desplazamiento angular del disco en $t = 4\,473$ s:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

$$= \tfrac{1}{2}(57 \text{ rad/s} + 22 \text{ rad/s})(4\,473 \text{ s}) = 1.8 \times 10^5 \text{ rad}$$

Convierta este desplazamiento angular a revoluciones:

$$\Delta\theta = (1.8 \times 10^5 \text{ rad})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = \boxed{2.8 \times 10^4 \text{ rev}}$$

C) ¿Cuál es la aceleración angular del disco compacto sobre el intervalo de tiempo de 4 473 s?

SOLUCIÓN

Categorizar De nuevo modele el disco como un objeto rígido bajo aceleración angular constante. En este caso, la ecuación 10.6 da el valor de la aceleración angular constante. Otra aproximación es usar la ecuación 10.4 para encontrar la aceleración angular promedio. En este caso, no se supone que la aceleración angular sea constante. La respuesta es la misma de ambas ecuaciones; sólo la interpretación del resultado es diferente.

Analizar Use la ecuación 10.6 para encontrar la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22 \text{ rad/s} - 57 \text{ rad/s}}{4\,473 \text{ s}} = -7.8 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

Finalizar El disco experimenta una disminución muy gradual en su rapidez de rotación, como se espera del largo intervalo de tiempo requerido para que la rapidez angular cambie del valor inicial al valor final. En realidad, la aceleración angular del disco no es constante. El problema 20 le permite explorar el comportamiento del tiempo real de la aceleración angular.

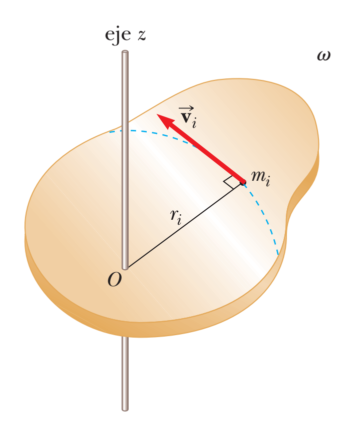


Figura 10.7 Un objeto rígido en rotación en torno al eje z con rapidez angular ω. La energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. La energía cinética total del objeto se llama energía cinética rotacional.

10.4 Energía cinética rotacional

En el capítulo 7 se definió la energía cinética de un objeto como la energía asociada con su movimiento a través del espacio. Un objeto rotatorio en torno a un eje fijo permanece estacionario en el espacio, así que no hay energía cinética asociada con el movimiento traslacional. No obstante, las partículas individuales que conforman el objeto en rotación se mueven a través del espacio; siguen trayectorias circulares. En consecuencia, con el movimiento rotacional hay energía cinética asociada.

Considere un objeto como un conjunto de partículas y suponga que da vueltas en torno a un eje fijo z con una rapidez angular ω. La figura 10.7 muestra al objeto en rotación e identifica una partícula sobre el objeto ubicada a una distancia r_i del eje de rotación. Si la masa de la i–ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i, su energía cinética es

$$K_i = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

Para continuar, recuerde que aunque cada partícula en el objeto rígido tiene la misma rapidez angular ω, las magnitudes de velocidad tangenciales individuales dependen de la distancia r_i desde el eje de rotación de acuerdo con la ecuación 10.10. La energía cinética *total* del objeto rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

Esta expresión se puede escribir en la forma

$$K_R = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \quad \textbf{(10.14)}$$

donde ω^2 se factorizó de la suma porque es común a toda partícula. Esta expresión se simplifica al definir la cantidad entre paréntesis como el **momento de inercia I**:

Momento de inercia ▶

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad \textbf{(10.15)}$$

De la definición de momento de inercia,[2] se ve que tiene dimensiones de ML^2 (kg·m^2 en unidades del SI). Con esta notación, la ecuación 10.14 se convierte

Energía cinética rotacional ▶

$$K_R = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \textbf{(10.16)}$$

Aunque comúnmente la cantidad $\frac{1}{2}I\omega^2$ se refiere como **energía cinética rotacional**, no es una forma nueva de energía. Es energía cinética ordinaria porque se deduce de una suma

[2] Los ingenieros civiles usan el momento de inercia para caracterizar las propiedades elásticas (rigidez) de estructuras tales como las vigas de carga. En consecuencia, con frecuencia es útil incluso en un contexto no rotacional.

sobre energías cinéticas individuales de las partículas contenidas en el objeto rígido. La forma matemática de la energía cinética conocida por la ecuación 10.16 es conveniente cuando se trata con movimiento rotacional, siempre que se sepa cómo calcular I.

Es importante reconocer la analogía entre la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ asociada con el movimiento traslacional y la energía cinética rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$. Las cantidades I y ω en el movimiento rotacional son análogas a m y v en el movimiento traslacional, respectivamente. (De hecho, I toma el lugar de m y ω toma el lugar de v cada vez que se compara una ecuación de movimiento traslacional con su contraparte rotacional.) El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional, tal como la masa es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento traslacional.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.4

No hay un solo momento de inercia

Existe una gran diferencia entre masa y momento de inercia. La masa es una propiedad inherente de un objeto. El momento de inercia de un objeto depende de su elección del eje de rotación. Por lo tanto, no hay un solo valor del momento de inercia para un objeto. Existe un valor *mínimo* del momento de inercia, que es el calculado en torno a un eje que pasa a través del centro de masa del objeto.

EJEMPLO 10.3 Cuatro objetos en rotación

Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano xy (figura 10.8). Se supondrá que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

A) Si el sistema da vueltas en torno al eje y (figura 10.8a) con una rapidez angular ω, encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.

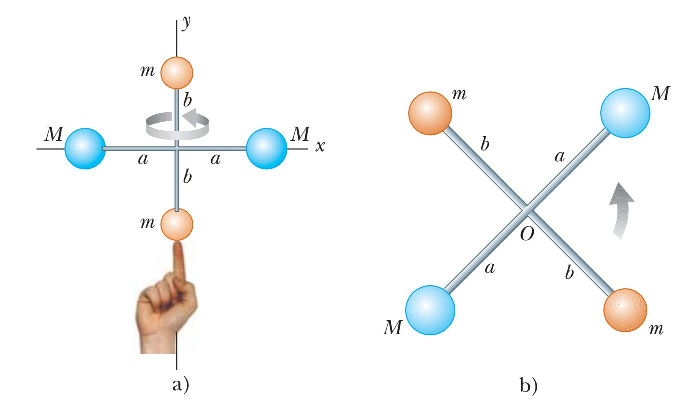


Figura 10.8 (Ejemplo 10.3) Cuatro esferas forman un bastón inusual. a) El bastón rota en torno al eje y. b) El bastón rota en torno al eje z.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.8 es una representación gráfica que ayuda a formar ideas del sistema de esferas y cómo gira.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución porque es una aplicación directa de las definiciones analizadas en esta sección.

Aplique la ecuación 10.15 al sistema:

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.16:

$$K_R = \tfrac{1}{2}I_y\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

Que las dos esferas de masa m no entren en este resultado tiene sentido, porque no tienen movimiento en torno al eje de rotación; por tanto, no tienen energía cinética rotacional. Por similitud, se espera que el momento de inercia en torno al eje x sea $I_x = 2mb^2$ con una energía cinética rotacional en torno a dicho eje de $K_R = mb^2\omega^2$.

B) Suponga que el sistema da vueltas en el plano xy en torno a un eje (el eje z) a través de O (figura 10.8b). Calcule el momento de inercia y la energía cinética rotacional en torno a este eje.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 10.15 a este nuevo eje de rotación:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.16:

$$K_R = \tfrac{1}{2}I_z\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

Al comparar los resultados de los incisos A) y B), se concluye que el momento de inercia y, por lo tanto, la energía cinética rotacional asociada con una rapidez angular dada depende del eje de rotación. En la parte B) se espera que el resultado incluya las cuatro esferas y distancias porque las cuatro esferas están girando en el plano xy. En función del teorema trabajo–energía cinética, el que la energía cinética rotacional del inciso A) sea menor que la del inciso B) indica que requeriría menos trabajo poner el sistema en rotación en torno al eje y que en torno al eje z.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la masa M es mucho mayor que m? ¿Cómo se comparan las respuestas a los incisos A) y B)?

Respuesta Si $M >> m$, en tal caso m se puede despreciar y el momento de inercia y la energía cinética rotacional en el inciso B) se vuelven

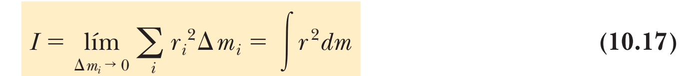
$$I_z = 2Ma^2 \quad \text{y} \quad K_R = Ma^2\omega^2$$

que son lo mismo que las respuestas en el inciso A). Si las masas m de las dos esferas anaranjadas en la figura 10.8 son despreciables, dichas esferas se pueden retirar de la figura y las rotaciones en torno a los ejes y y z son equivalentes.

10.5 Cálculo de momentos de inercia

El momento de inercia de un objeto extendido se evalúa al considerar el objeto dividido en muchos elementos pequeños, cada uno de los cuales tiene masa Δm_i. Se usa la definición $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ y se toma el límite de esta suma a medida que $\Delta m_i \rightarrow 0$. En este límite, la suma se convierte en una integral sobre el volumen del objeto:

Momento de inercia de un objeto rígido ▶

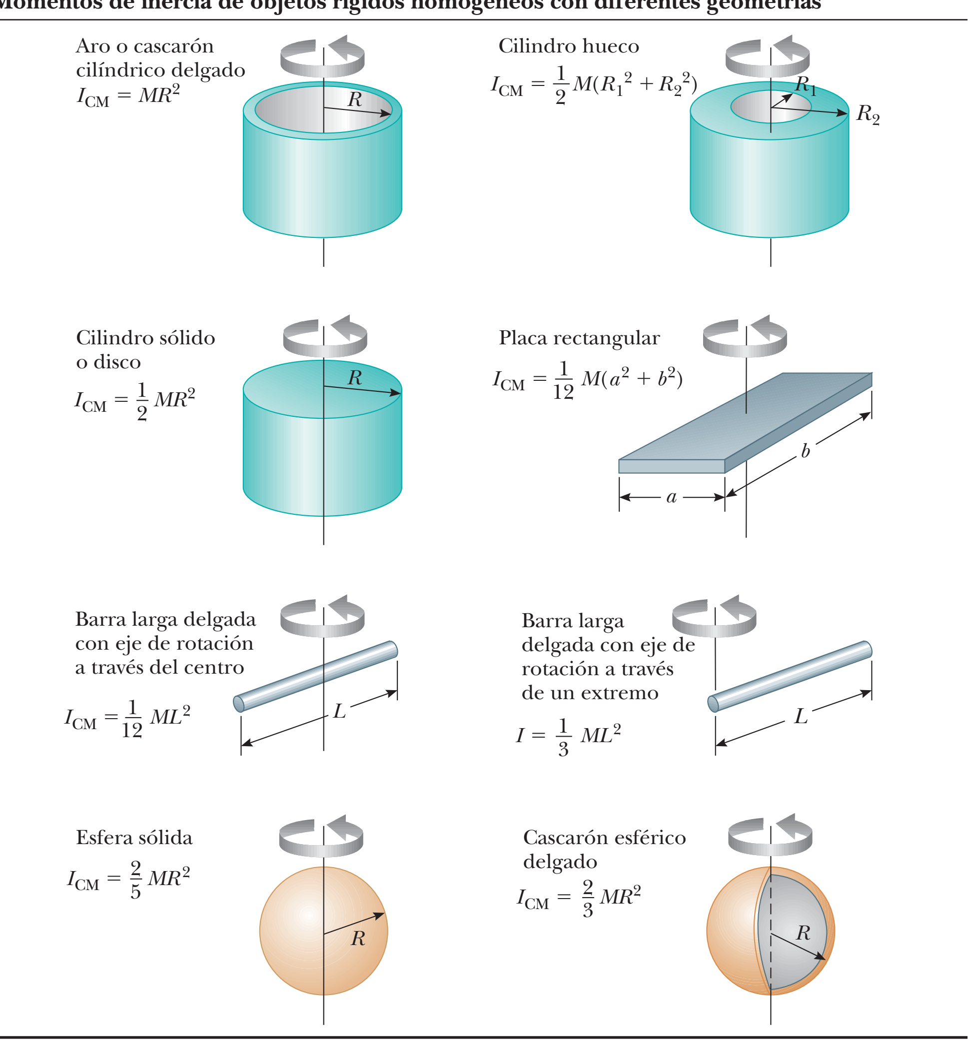


$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 \, dm \qquad \textbf{(10.17)}$$

Por lo común es más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen de los elementos en lugar de su masa, y es fácil hacer dicho cambio al usar la ecuación 1.1,

TABLA 10.2

Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías



$\rho \equiv m/V$, donde ρ es la densidad del objeto y V su volumen. De esta ecuación, la masa de un pequeño elemento es $dm = \rho\ dV$. Al sustituir este resultado en la ecuación 10.17 se obtiene

$$I = \int \rho r^2\ dV$$

Si el objeto es homogéneo, ρ es constante y la integral se puede evaluar para una geometría conocida. Si ρ no es constante, se debe conocer su variación con la posición para completar la integración.

La densidad conocida por $\rho = m/V$ a veces se conoce como *densidad de masa volumétrica* porque representa masa por unidad de volumen. Con frecuencia se usan otras formas de expresar la densidad. Por ejemplo, cuando se trata con una hoja de grosor uniforme t, se puede definir una *densidad de masa superficial* $\sigma = \rho t$, que representa *masa por unidad de área*. Por último, cuando la masa se distribuye a lo largo de una barra de área de sección transversal uniforme A, a veces se usa la *densidad de masas lineal* $\lambda = M/L = \rho A$, que es la *masa por unidad de longitud*.

La tabla 10.2 proporciona los momentos de inercia para algunos objetos respecto a ejes específicos. Los momentos de inercia de objetos rígidos con geometría simple (gran simetría) son relativamente fáciles de calcular siempre que el eje de rotación coincida con un eje de simetría, como en los ejemplos siguientes.

Pregunta rápida 10.4 Una sección de tubería hueca y un cilindro sólido tienen los mismos radio, masa y longitud. Ambos dan vueltas en torno a su largo eje central con la misma rapidez angular. ¿Cuál objeto tiene la mayor energía cinética rotacional? a) La tubería hueca. b) El cilindro sólido. c) Tienen la misma energía cinética rotacional. d) Es imposible de determinar.

EJEMPLO 10.4 Barra rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud L y masa M (figura 10.9) en torno a un eje perpendicular a la barra (el eje y) y que pasa a través de su centro de masa.

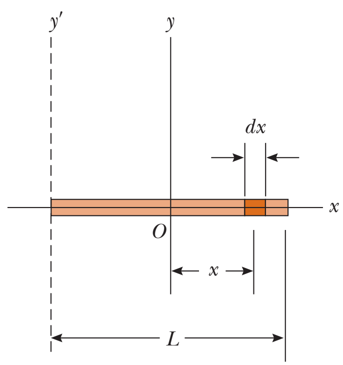


Figura 10.9 (Ejemplo 10.4) Barra rígida uniforme de longitud L. El momento de inercia en torno al eje y es menor que en el eje y'. Este último eje se examina en el ejemplo 10.6.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que con sus dedos hace girar la barra de la figura 10.9 en torno a su punto medio. Si tiene una regleta a la mano, úsela para simular el giro de una barra delgada.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, que usa la definición de momento de inercia en la ecuación 10.17. Como con cualquier problema de cálculo, la solución supone reducir el integrando a una sola variable.

El elemento de longitud sombreado dx en la figura 10.9 tiene una masa dm igual a la masa por unidad de longitud λ multiplicada por dx.

Exprese dm en términos de dx:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L}\,dx$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.17 con $r^2 = x^2$:

$$I_y = \int r^2\ dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\,\frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\ dx$$

$$= \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \boxed{\tfrac{1}{12}ML^2}$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

EJEMPLO 10.5 Cilindro sólido uniforme

Un cilindro sólido uniforme tiene un radio R, masa M y longitud L. Calcule su momento de inercia en torno a su eje central (el eje z en la figura 10.10).

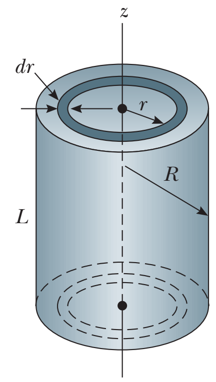


Figura 10.10 (Ejemplo 10.5) Cálculo de I en torno al eje z para un cilindro sólido uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Para simular esta situación, imagine que hace girar una lata de jugo congelado en torno a su eje central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, con el uso de la definición de momento de inercia. Como con el ejemplo 10.4, se debe reducir el integrando a una sola variable.

Es conveniente dividir el cilindro en muchos cascarones cilíndricos, cada uno con radio r, grosor dr y longitud L, como se muestra en la figura 10.10. La densidad del cilindro es ρ. El volumen dV de cada cascarón es su área de sección transversal multiplicada por su longitud: $dV = L\,dA = L(2\pi r)\,dr$.

Exprese dm en términos de dr:

$$dm = \rho dV = 2\pi\rho L r\,dr$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.17:

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2(2\pi\rho L r\,dr) = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

Use el volumen total $\pi R^2 L$ del cilindro para expresar su densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

Sustituya este valor en la expresión para I_z:

$$I_z = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right) L R^4 = \tfrac{1}{2}MR^2$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasa si la longitud del cilindro en la figura 10.10 aumenta a $2L$, mientras la masa M y el radio R se mantienen fijos? ¿Cómo cambia el momento de inercia del cilindro?

Respuesta Observe que el resultado para el momento de inercia de un cilindro no depende de L, la longitud del cilindro. Se aplica igualmente bien a un largo cilindro y a un disco plano que tengan los mismos masa M y radio R. Debido a eso, el momento de inercia del cilindro no sería afectado por cambiar su longitud.

El cálculo de momentos de inercia de un objeto en torno a un eje arbitrario puede ser complicado, incluso para un objeto considerablemente simétrico. Por fortuna, el uso de un importante teorema, llamado **teorema de ejes paralelos**, con frecuencia simplifica el cálculo.

Para generar el teorema de ejes paralelos, suponga que un objeto da vueltas en torno al eje z, como se muestra en la figura 10.11. El momento de inercia no depende de cómo se distribuye la masa a lo largo del eje z; como se encontró en el ejemplo 10.5, el momento de inercia de un cilindro es independiente de su longitud. Imagine colapsar el objeto tridimensional en un objeto plano como en la figura 10.11b. En este proceso imaginario, toda la masa se mueve paralela al eje z hasta que se encuentra en el plano xy. Las coordenadas del centro de masa del objeto ahora son x_{CM}, y_{CM} y $z_{CM} = 0$. Sea el elemento de masa dm que tiene coordenadas $(x, y, 0)$. Ya que este elemento está a una distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del eje z, el momento de inercia en torno al eje z es

$$I = \int r^2\,dm = \int (x^2 + y^2)\,dm$$

Se pueden relacionar las coordenadas x, y del elemento de masa dm a las coordenadas de este mismo elemento ubicadas en un sistema coordenado que tenga el centro de masa del objeto como su origen. Si las coordenadas del centro de masa son x_{CM}, y_{CM} y $z_{CM} = 0$

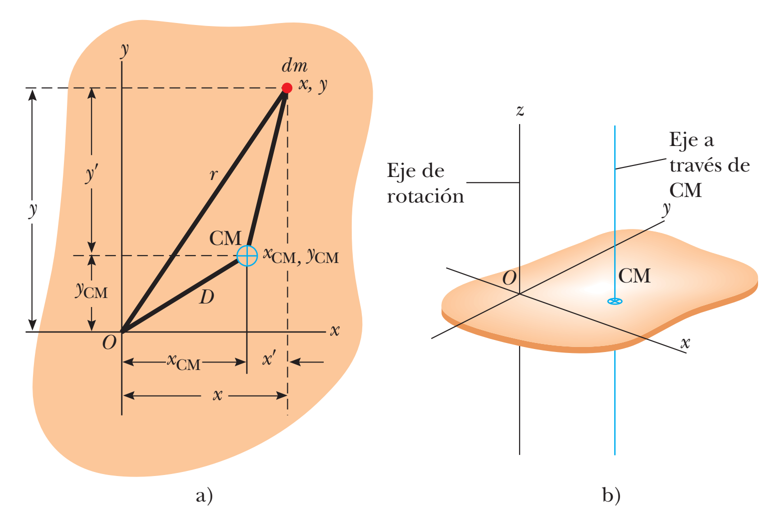


Figura 10.11 a) Teorema de ejes paralelos. Si el momento de inercia en torno a un eje perpendicular a la figura a través del centro de masa es I_{CM}, el momento de inercia en torno al eje z es $I_z = I_{CM} + MD^2$. b) Dibujo en perspectiva que muestra el eje z (el eje de rotación) y el eje paralelo a través del centro de masa.

en el sistema coordenado original con centro en O, se ve en la figura 10.11a que las correspondencias entre las coordenadas no primas y primas son $x = x' + x_{CM}$, $y = y' + y_{CM}$, y $z = z' = 0$. Por lo tanto,

$$I = \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2]\,dm$$

$$= \int [(x')^2 + (y')^2]\,dm + 2x_{CM}\int x'\,dm + 2y_{CM}\int y'\,dm + (x_{CM}^{\;2} + y_{CM}^{\;2})\int dm$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia I_{CM} en torno a un eje que es paralelo al eje z y pasa a través del centro de masa. Las segundas dos integrales son cero porque, por definición del centro de masa, $\int x'\,dm = \int y'\,dm = 0$. La última integral es simplemente MD^2 porque $\int dm = M$ y $D^2 = x_{CM}^{\;2} + y_{CD}^{\;2}$. En consecuencia, se concluye que

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{10.18}$$

◄ Teorema de ejes paralelos

EJEMPLO 10.6 Aplicación del teorema de ejes paralelos

Considere una vez más la barra rígida uniforme de masa M y longitud L que se muestra en la figura 10.9. Encuentre el momento de inercia de la barra en torno a un eje perpendicular a la barra a través de un extremo (el eje y' en la figura 10.9).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que hace girar la barra en torno al punto final en lugar de hacerlo en el punto medio. Si tiene una regleta a la mano, inténtelo y note el grado de dificultad al girarlo alrededor del extremo en comparación con girarlo alrededor del centro.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, que supone el teorema de ejes paralelos.

Por intuición, se espera que el momento de inercia sea mayor que el resultado $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ del ejemplo 10.4 porque hay masa hasta una distancia L lejos del eje de rotación, mientras que la distancia más lejana en el ejemplo 10.4 fue sólo $L/2$. La distancia entre el eje del centro de masa y el eje y' es $D = L/2$.

Use el teorema de ejes paralelos: $I = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

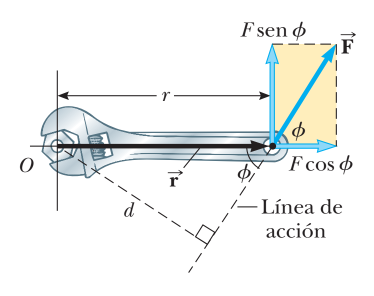


Figura 10.12 La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ tiene una mayor tendencia de rotación en torno a un eje a través de O a medida que F aumenta y a medida que el brazo de momento d aumenta. La componente F sen ϕ tiende a dar vueltas la llave en torno a O.

10.6 Momento de torsión

Imagine que intenta dar vuelta una puerta y aplica una fuerza de magnitud F, perpendicular a la superficie de la puerta cerca de las bisagras y luego en diferentes distancias desde las bisagras. Usted logrará una relación de rotación más rápida para la puerta al aplicar la fuerza cerca de la perilla que al aplicarla cerca de las bisagras.

Cuando se ejerce una fuerza en un objeto rígido que se articula en torno a un eje, el objeto tiende a dar vuelta en torno a dicho eje. La tendencia de una fuerza a dar vuelta un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada **momento de torsión** $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ (letra griega tau). El momento de torsión es un vector, pero aquí sólo se considerará su magnitud y en el capítulo 11 se explorará su naturaleza vectorial.

Considere la llave de la figura 10.12 que se quiere dar vuelta en torno a un eje perpendicular a la página y a través del centro del tornillo. La fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ actúa a un ángulo ϕ con la horizontal. La magnitud del momento de torsión asociada con la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se define mediante la expresión

$$\tau \equiv rF \operatorname{sen} \phi = Fd \tag{10.19}$$

donde r es la distancia entre el eje de rotación y el punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}$ y d es la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de $\vec{\mathbf{F}}$. (La *línea de acción* de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende hacia ambos extremos del vector que representa la fuerza. La línea discontinua que se extiende desde la cola de $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 10.12 es parte de la línea de acción de $\vec{\mathbf{F}}$.) A partir del triángulo recto de la figura 10.12 que tiene la llave como su hipotenusa, se ve que $d = r \operatorname{sen} \phi$. La cantidad d se llama **brazo de momento** (o *brazo de palanca*) de $\vec{\mathbf{F}}$.

Brazo de momento ►

En la figura 10.12, la única componente de $\vec{\mathbf{F}}$ que tiende a causar rotación de la llave en torno a un eje a través de O es F sen ϕ, la componente perpendicular a la línea dibujada desde el eje de rotación hacia el punto de aplicación de la fuerza. La componente horizontal $F\cos\phi$, dado que su línea de acción pasa a través de O, no tiene tendencia a producir rotación en torno a un eje que pase a través de O. De la definición de momento de torsión, la tendencia la rotación aumenta a medida que F aumenta y a medida que d aumenta, lo que explica por qué es más fácil dar vuelta a una puerta si se empuja por la perilla en lugar de hacerlo en un punto cerca de las bisagras. También podemos aplicar un empujón casi perpendicular a la puerta, tanto como sea posible, de tal modo que ϕ esté cerca de 90°. Empujar de manera lateral en la perilla de la puerta ($\phi = 0$) no causará que ésta dé vuelta.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.5

El momento de torsión depende de su elección del eje

Como el momento de inercia, no hay un valor único del momento de torsión sobre un objeto. Su valor depende de su elección del eje de rotación.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura 10.13, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O. En este ejemplo, $\vec{\mathbf{F}}_2$ el objeto tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj y $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiende a dar vuelta contra las manecillas del reloj. Se usa la convención de que el signo del momento de torsión que resulta de una fuerza es positivo si la tendencia a girar de la fuerza es contra las manecillas del reloj y negativo si la tendencia a girar es en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, en la figura 10.13, el momento de torsión resultante de $\vec{\mathbf{F}}_1$, que tiene un brazo de momento d_1, es positivo e igual a $+F_1d_1$; el momento de torsión de $\vec{\mathbf{F}}_2$ es negativo e igual a $-F_2d_2$. En consecuencia, el momento de torsión *neto* en torno a un eje a través de O es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1d_1 - F_2d_2$$

No se debe confundir el momento de torsión con la fuerza. Las fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento traslacional, como se describió mediante la segunda ley de Newton. Las fuerzas también pueden causar un cambio en el movimiento rotacional, pero la efectividad de las fuerzas en causar este cambio depende tanto de las magnitudes de las fuerzas como de los brazos de momento de las fuerzas, en la combinación que se llama *momento de torsión*. El momento de torsión tiene unidades de fuerza por longitud (newton metros en unidades del SI) y se debe reportar en estas unidades. No confunda momento de torsión y trabajo, que tiene las mismas unidades pero son conceptos muy diferentes.

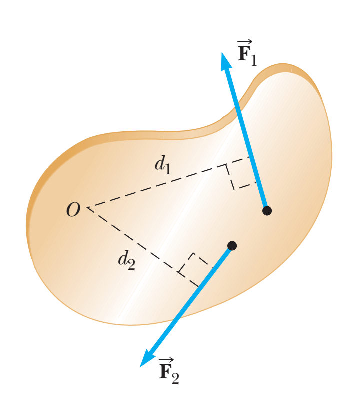


Figura 10.13 La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiende a dar vuelta el objeto contra las manecillas del reloj en torno a un eje a través de O, y $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj.

Pregunta rápida 10.5 **i)** Si usted intenta aflojar un obstinado tornillo de una pieza de madera con un destornillador y fracasa, ¿debe encontrar un destornillador con un mango a) más largo, o b) más gordo? **ii)** Si intenta aflojar un tornillo terco de una pieza de metal con una llave y fracasa, ¿debe encontrar una llave con un mango a) más largo o b) más gordo?

EJEMPLO 10.7 **El momento de torsión neto sobre un cilindro**

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura 10.14, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una soga enrollada en torno al tambor, que tiene radio R_1, ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{T}}_1$ hacia la derecha sobre el cilindro. Una soga enrollada en torno a la parte central, que tiene radio R_2, ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{T}}_2$ hacia abajo sobre el cilindro.

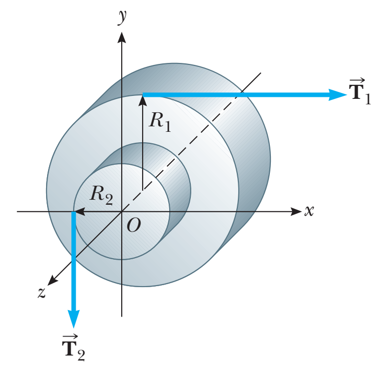


Figura 10.14 (Ejemplo 10.7) Un cilindro sólido articulado en torno al eje *z* a través de *O*. El brazo de momento $\vec{\mathbf{T}}_1$ es R_1, y el brazo de momento de $\vec{\mathbf{T}}_2$ es R_2.

A) ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa en el cilindro en torno al eje de rotación (que es el eje *z* en la figura 10.14)?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el cilindro en la figura 10.14 es un eje en una máquina. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}_2$ podría aplicarse mediante una banda transportadora enrollada en torno al tambor. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}_1$ podría aplicarse mediante un freno de fricción a la superficie de la parte central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en el que se evalúa el momento de torsión neto con el uso de la ecuación 10.19.

El momento de torsión debido a $\vec{\mathbf{T}}_1$ en torno al eje de rotación es $-R_1T_1$. (El signo es negativo porque el momento de torsión tiende a producir rotación en sentido de las manecillas del reloj.) El momento de torsión debido a $\vec{\mathbf{T}}_2$ es $+R_2T_2$. (El signo es positivo porque el momento de torsión tiende a producir rotación contra las manecillas del reloj del cilindro.)

Evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de rotación:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2T_2 - R_1T_1$$

Como una verificación rápida, observe que si las dos fuerzas son de igual magnitud, el momento de torsión neto es negativo porque $R_1 > R_2$. Si parte del reposo con ambas fuerzas de igual magnitud actuando sobre él, el cilindro daría vuelta en sentido de las manecillas del reloj porque $\vec{\mathbf{T}}_1$ sería más efectivo para girarlo de lo que sería $\vec{\mathbf{T}}_2$.

B) Suponga $T_1 = 5.0$ N, $R_1 = 1.0$ m, $T_2 = 15.0$ N y $R_2 = 0.50$ m. ¿Cuál es el momento de torsión neto en torno al eje de rotación, y de qué forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?

SOLUCIÓN

Sustituya los valores conocidos:

$$\sum \tau = (0.50 \text{ m})(15 \text{ N}) - (1.0 \text{ m})(5.0 \text{ N}) = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ya que este momento de torsión es positivo, el cilindro comienza a dar vuelta en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

10.7 Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

En el capítulo 5 aprendió que una fuerza neta sobre un objeto ocasiona una aceleración del objeto y que la aceleración es proporcional a la fuerza neta. Estos hechos son la base del modelo de partícula bajo una fuerza neta cuya representación matemática es la segunda ley de Newton. En esta sección se muestra el análogo rotacional de la segunda ley de Newton: la aceleración angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es proporcional al momento de torsión neto que actúa en torno a dicho eje. Sin embargo, antes de explicar el caso más complejo de rotación de un objeto rígido, es instructivo discutir primero el caso de una partícula móvil en una trayectoria circular en torno de algún punto fijo bajo la influencia de una fuerza externa.

Considere una partícula de masa *m* rotativa en un círculo de radio *r* bajo la influencia de una fuerza neta tangencial $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}_t$ y una fuerza neta radial $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}_r$, como se muestra en la figura 10.15. La fuerza neta radial hace que la partícula se mueva en la trayectoria circular con una aceleración centrípeta. La fuerza tangencial proporciona una aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$ y

$$\sum F_t = ma_t$$

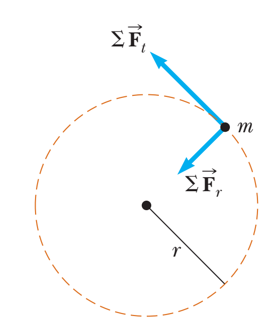


Figura 10.15 Una partícula que da vueltas en un círculo bajo la influencia de una fuerza tangencial neta $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}_t$. También debe estar presente una fuerza neta $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}_r$ en la dirección radial para mantener el movimiento circular.

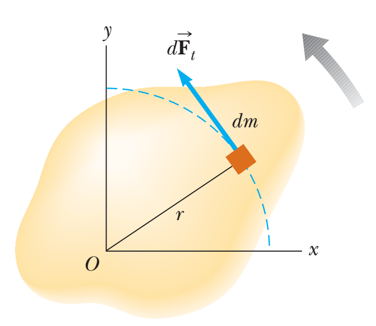


Figura 10.16 Un objeto rígido giratorio en torno a un eje a través de O. Cada elemento de masa dm da vueltas en torno al eje con la misma aceleración angular α.

La magnitud del momento de torsión neto debida a $\sum \vec{\mathbf{F}}_t$ en la partícula en torno a un eje a través del centro del círculo es

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r$$

Ya que la aceleración tangencial se relaciona con la aceleración angular a través de la correspondencia $a_t = r\alpha$ (ecuación 10.11), el momento de torsión neto se expresa como

$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

Recuerde de la ecuación 10.15 que mr^2 es el momento de inercia de la partícula en torno al eje z que pasa a través del origen, de modo que

$$\sum \tau = I\alpha \qquad \textbf{(10.20)}$$

Es decir, **el momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular**, y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. Advierta que $\sum \tau = I\alpha$ tiene la misma forma matemática que la segunda ley de movimiento de Newton, $\sum F = ma$.

Ahora la explicación se extenderá a un objeto rígido de forma arbitraria rotativo en torno a un eje fijo, como en la figura 10.16. El objeto puede considerarse como un número infinito de elementos de masa dm de tamaño infinitesimal. Si sobre el objeto se impone un sistema coordenado cartesiano, cada elemento de masa da vueltas en un círculo en torno al origen y cada uno tiene una aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$ producida por una fuerza tangencial externa $d\vec{\mathbf{F}}_t$. Para cualquier elemento determinados, se sabe de la segunda ley de Newton que

$$dF_t = (dm)a_t$$

El momento de torsión $d\tau$ asociado con la fuerza $d\vec{\mathbf{F}}_t$ actúa en torno al origen y se conoce por

$$d\tau = r\,dF_t = a_t r\,dm$$

Ya que $a_t = r\alpha$, la expresión para $d\tau$ se convierte en

$$d\tau = \alpha r^2\,dm$$

Aunque cada elemento de masa del objeto rígido debe tener una diferente aceleración traslacional $\vec{\mathbf{a}}_t$, todos ellos tienen la *misma* aceleración angular α. Con esto en mente, se puede integrar la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto $\sum \tau$ en torno a un eje a través de O debido a las fuerzas externas:

$$\sum \tau = \int \alpha r^2\,dm = \alpha \int r^2\,dm$$

donde α se puede sacar de la integral porque es común a todos los elementos de masa. De la ecuación 10.17 se sabe que $\int r^2$ es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación a través de O y, por ende, la expresión para $\sum \tau$ se convierte en

El momento de torsión es proporcional a la aceleración angular ▶

$$\sum \tau = I\alpha \qquad \textbf{(10.21)}$$

Esta ecuación para un objeto rígido es la misma que para una partícula móvil en una trayectoria circular (ecuación 10.20). El momento de torsión neto en torno al eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del objeto, con un factor de proporcionalidad I, una cantidad que depende del eje de rotación y del tamaño y la forma del objeto. La ecuación 10.21 es la representación matemática del modelo de análisis de un **objeto rígido bajo un momento de torsión neto**, el análogo rotacional a la partícula bajo una fuerza neta.

Por último, note que el resultado $\sum \tau = I\alpha$ también se aplica cuando las fuerzas que actúan sobre los elementos de masa tienen componentes radiales así como componentes tangenciales. Esto es porque la línea de acción de todas las componentes radiales debe pasar a través del eje de rotación; en consecuencia, todas las componentes radiales producen momento de torsión cero en torno a dicho eje.

Pregunta rápida 10.6 Enciende su taladro eléctrico y descubre que el intervalo de tiempo para que la broca giratoria llegue al reposo debido al momento de torsión friccionante en el taladro es Δt. Sustituye la broca con una más grande que resulta en la duplicación

del momento de inercia de todo el mecanismo giratorio del taladro. Cuando esta broca más grande da vueltas a la misma rapidez angular que la primera y el taladro se apaga, el momento de torsión friccionante permanece igual que para la situación previa. ¿Cuál es el intervalo de tiempo para que esta segunda broca llegue al reposo? a) 4 Δt, b) 2 Δt, c) Δt, d) 0.5 Δt, e) 0.25 Δt, f) imposible de determinar.

EJEMPLO 10.8 Barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 10.17. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido?

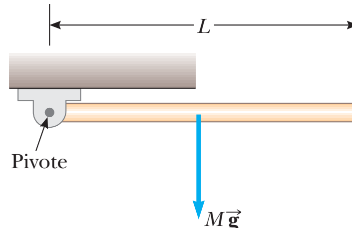


Figura 10.17 (Ejemplo 10.8) Una barra es libre de dar vuelta en torno a un pivote en el extremo izquierdo. La fuerza gravitacional sobre la barra actúa en su centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en lo que le sucede a la barra de la figura 10.17 cuando se libera. Da vueltas en sentido de las manecillas del reloj en torno al pivote en el extremo izquierdo.

Categorizar La barra se clasifica como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto. El momento de torsión se debe sólo a la fuerza gravitacional sobre la barra si se elige que el eje de rotación pase a través del pivote en la figura 10.17. *No se puede* clasificar la barra como un objeto rígido bajo aceleración angular constante porque el momento de torsión ejercido sobre la barra y, por lo tanto, la aceleración angular de la barra, varían con su posición angular.

Analizar La única fuerza que contribuye al momento de torsión en torno a un eje a través del pivote es la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$ que se ejerce sobre la barra. (La fuerza que ejerce el pivote sobre la barra tiene momento de torsión cero en torno al pivote, porque su brazo de momento es cero.) Para calcular el momento de torsión sobre la barra, se supone que la fuerza gravitacional actúa en el centro de masa de la barra, como se muestra en la figura 10.17.

Escriba una expresión para la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza gravitacional en torno a un eje a través del pivote:

$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

Aplique la ecuación 10.21 para obtener la aceleración angular de la barra:

$$1)\qquad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Use la ecuación 10.11 con $r = L$ para encontrar la aceleración traslacional inicial del extremo rígido de la barra:

$$a_t = L\alpha = \tfrac{3}{2}g$$

Finalizar Estos valores son los valores *iniciales* de las aceleraciones angular y traslacional. Una vez que la barra comienza a dar vuelta, la fuerza gravitacional ya no es perpendicular a la barra y los valores de las dos aceleraciones disminuyen y cambian a cero en el momento en que la barra pasa a través de la orientación vertical.

¿Qué pasaría si? ¿Y si se coloca una moneda en el extremo de la barra y después se libera la barra? ¿La moneda permanecería en contacto con la barra?

Respuesta El resultado para la aceleración inicial de un punto sobre el extremo de la barra muestra que $a_t > g$. Una moneda sin apoyo cae con aceleración g. De este modo, si se coloca una moneda en el extremo de la barra y luego se libera la barra, ¡el extremo de la barra cae más rápido que la moneda! La moneda no permanece en contacto con la barra. (¡Intente esto con una moneda y una regleta!)

La cuestión ahora es encontrar la ubicación sobre la barra a la que se puede colocar una moneda que *permanecerá* en contacto en cuanto ambas comiencen a caer. Para encontrar la aceleración traslacional de un punto arbitrario sobre la barra a una distancia $r < L$ desde el punto del pivote, se combina la ecuación 1) con la ecuación 10.11:

$$a_t = r\alpha = \frac{3g}{2L}r$$

Para que la moneda permanezca en contacto con la barra, el caso límite es que la aceleración traslacional es igual a la que se espera de la gravedad:

$$a_t = g = \frac{3g}{2L}r$$

$$r = \tfrac{2}{3}L$$

Debido a eso, una moneda colocada más cerca del pivote a menos de dos tercios de la longitud de la barra permanece en contacto con la barra que cae, pero una moneda más lejos de este punto pierde contacto.

EJEMPLO CONCEPTUAL 10.9 Chimeneas que caen y bloques tambaleantes

Cuando una chimenea alta cae, con frecuencia se rompe en alguna parte a lo largo de su longitud antes de golpear el suelo, como se muestra en la figura 10.18. ¿Por qué?



Figura 10.18 (Ejemplo conceptual 10.9) Una chimenea que cae se rompe en algún punto a lo largo de su longitud.

SOLUCIÓN

Cuando la chimenea da vuelta en torno a su base, cada porción más alta de la chimenea cae con una aceleración tangencial más grande que la porción debajo de ella, de acuerdo con la ecuación 10.11. La aceleración angular aumenta a medida que la chimenea se inclina más. Al final, las porciones más altas de la chimenea experimentan una aceleración mayor que la aceleración que podría resultar sólo de la gravedad; esta situación es similar a la que se describió en el ejemplo 10.8. Sólo puede ocurrir si dichas porciones se jalan hacia abajo por otra fuerza además de la fuerza gravitacional. La fuerza que lo ocasiona es la fuerza de corte de las porciones más bajas de la chimenea. Al final, la fuerza de corte que proporciona esta aceleración es mayor a lo que puede soportar la chimenea, y la chimenea se rompe. Lo mismo sucede con una torre alta de bloques de juguete de los niños. Pida prestados algunos bloques a un niño y construya tal torre. Empújela y observe cómo se separa en algún punto antes de golpear el suelo.

EJEMPLO 10.10 Aceleración angular de una rueda

Una rueda de radio R, masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como en la figura 10.10. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa m. Calcule la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del objeto y la tensión en la cuerda.

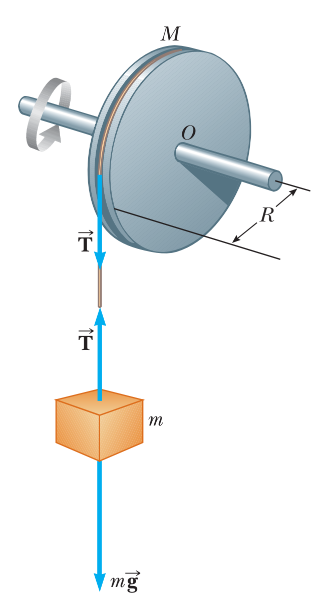


Figura 10.19 (Ejemplo 10.10) Un objeto cuelga de una cuerda enrollada alrededor de una rueda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el objeto es una cubeta en un antiguo pozo de los deseos. Está amarrada a una cuerda que pasa alrededor de un cilindro equipado con una manivela para elevar la cubeta. Después de elevar la cubeta, el sistema se libera y la cubeta acelera hacia abajo mientras la cuerda se desenrolla del cilindro.

Categorizar El objeto se modela como una partícula bajo una fuerza neta. La rueda se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto.

Analizar La magnitud del momento de torsión que actúa sobre la rueda en torno a su eje de rotación es $\tau = TR$, donde T es la fuerza que ejerce la cuerda sobre el borde de la rueda. (La fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la rueda y la fuerza normal que ejerce el eje sobre la rueda, ambas, pasan a través del eje de rotación y no producen momento de torsión.)

Escriba la ecuación 10.21:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Resuelva para α y sustituya el momento de torsión neto:

$$1) \qquad \alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{TR}{I}$$

Aplique la segunda ley de Newton al movimiento del objeto y considere la dirección hacia abajo como positiva:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

Resuelva para la aceleración a:

$$2) \qquad a = \frac{mg - T}{m}$$

Las ecuaciones 1) y 2) tienen tres incógnitas: α, a y T. Ya que el objeto y la rueda están conectados mediante una cuerda que no desliza, la aceleración traslacional del objeto suspendido es igual a la aceleración tangencial de un punto sobre el borde de la rueda. Debido a eso, la aceleración angular α de la rueda y la aceleración traslacional del objeto se relacionan mediante $a = R\alpha$.

Use este hecho junto con las ecuaciones 1) y 2):

$$3) \qquad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

Resuelva para la tensión T:

$$4) \qquad T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 2) y resuelva para a:

$$5) \qquad a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

Use $a = R\alpha$ y la ecuación 5) para resolver para α:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$

Finalizar Este problema se concluye al imaginar el comportamiento del sistema en algunos límites extremos.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la rueda se volviese tan pesada que I se volviera muy grande? ¿Qué sucede con la aceleración a del objeto y la tensión T?

Respuesta Si la rueda se vuelve infinitamente pesada, se puede imaginar que el objeto de masa m simplemente colgará de la cuerda sin causar el giro de la rueda.

Esto se puede demostrar matemáticamente al tomar el límite $I \to \infty$. Entonces la ecuación 5) se convierte en

$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)} \rightarrow 0$$

lo que concuerda con la conclusión conceptual de que el objeto colgará en reposo. Además, la ecuación 4) se convierte en

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} \rightarrow \frac{mg}{1 + 0} = mg$$

que es consistente porque el objeto simplemente cuelga en reposo en equilibrio entre la fuerza gravitacional y la tensión en la cuerda.

10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

Hasta este punto de la explicación del movimiento rotacional en este capítulo, el enfoque fundamental ha sido sobre un planteamiento que involucra fuerza, lo que conduce a una descripción del momento de torsión sobre un objeto rígido. En la sección 10.4 se explicó

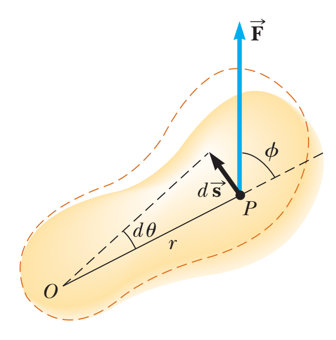


Figura 10.20 Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a P.

la energía cinética rotacional de un objeto rígido. Ahora se extiende la explicación de dicha energía inicial y se verá cómo una aproximación energética es útil para resolver problemas rotacionales.

Comience por considerar la correspondencia entre el momento de torsión que actúa en un objeto rígido y su movimiento rotacional resultante a fin de generar expresiones para la potencia y un análogo rotacional con el teorema trabajo–energía cinética. Observe el objeto rígido articulado en O en la figura 10.20. Suponga que una sola fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica en P, donde $\vec{\mathbf{F}}$ yace en el plano de la página. El trabajo consumido en el objeto por $\vec{\mathbf{F}}$ a medida que su punto de aplicación da vueltas a través de una distancia infinitesimal $ds = r\,d\theta$ es

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (F \operatorname{sen} \phi) r\, d\theta$$

donde $F \operatorname{sen} \phi$ es la componente tangencial de $\vec{\mathbf{F}}$ o, en otras palabras, la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento. Note que el vector componente radial de $\vec{\mathbf{F}}$ no realiza trabajo sobre el objeto porque es perpendicular al desplazamiento del punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}$.

Ya que la magnitud del momento de torsión debida a $\vec{\mathbf{F}}$ en torno a un eje a través de O es definida como $rF \operatorname{sen} \phi$, por la ecuación 10.19, el trabajo consumido por la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$dW = \tau\, d\theta \qquad \textbf{(10.22)}$$

La rapidez a la que $\vec{\mathbf{F}}$ realiza trabajo a medida que el objeto rota en torno al eje fijo a través del ángulo $d\theta$ en un intervalo de tiempo dt es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que dW/dt es la potencia instantánea $\mathcal{P}$ (vea la sección 8.5) entregada por la fuerza y $d\theta/dt = \omega$, esta expresión se reduce a

Potencia entregada a un objeto rígido en rotación ▶

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \qquad \textbf{(10.23)}$$

Esta ecuación es análoga a $\mathcal{P} = Fv$ en el caso del movimiento traslacional, y la ecuación 10.22 es análoga a $dW/F_x\, dx$.

Al estudiar el movimiento traslacional, los modelos de acuerdo con la aproximación energética pueden ser extremadamente útiles para describir el comportamiento de un sistema. De lo aprendido del movimiento traslacional, se espera que, cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo invertido por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Para probar este hecho, comience con $\sum \tau = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo, es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\,\omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\sum \tau\, d\theta = dW$ se obtiene

$$\sum \tau d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total invertido por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotativo

Teorema trabajo–energía cinética para movimiento rotacional ▶

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}I\omega_i^{\,2} \qquad \textbf{(10.24)}$$

donde la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f. La ecuación 10.24 es el **teorema trabajo–energía cinética para movimiento rotacional**. Similar al teorema trabajo–energía cinética en movimiento traslacional (sección 7.5), este teorema afirma que el trabajo neto invertido por fuerzas externas en un objeto rígido simétrico en rotación en torno a un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Este teorema es una forma del modelo de sistema no aislado explicado en el capítulo 8. En el sistema del objeto rígido se invierte trabajo, que representa una transferencia de energía a través de la frontera del sistema que aparece como un aumento en la energía cinética rotacional del objeto.

TABLA 10.3

Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
Rapidez angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez traslacional $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración traslacional $a = dv/dt$
Momento de torsión neto $\Sigma\,\tau = I\alpha$	Fuerza neta $\Sigma\,F = ma$
Si $\alpha =$ constante $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si $a =$ constante $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $\mathcal{P} = \tau\omega$	Potencia $\mathcal{P} = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento lineal $p = mv$
Momento de torsión neto $\Sigma\,\tau = dL/dt$	Fuerza neta $\Sigma F = dp/dt$

En general, es posible combinar este teorema con la forma traslacional del teorema trabajo–energía cinética del capítulo 7. Por lo tanto, el trabajo neto invertido por fuerzas externas sobre un objeto es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinética traslacional y rotacional. Por ejemplo, cuando un pitcher lanza una pelota de beisbol, el trabajo invertido por la mano del pitcher aparece como energía cinética asociada con la pelota móvil a través del espacio, así como energía cinética rotacional asociada con el giro de la bola.

Además del teorema trabajo–energía cinética, también se aplican otros principios de energía a situaciones rotacionales. Por ejemplo, si un sistema que involucra objetos rotativos se aísla y dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se pueden usar el modelo de sistema aislado y el principio de conservación de la energía mecánica para analizar el sistema como en el ejemplo 10.11 siguiente.

Por último, en algunas situaciones una aproximación energética no proporciona suficiente información para resolver el problema y se debe combinar con un planteamiento de cantidad de movimiento. Tal caso se ilustra en el ejemplo 10.14 de la sección 10.9.

La tabla 10.3 menciona las diversas ecuaciones que explican características del movimiento rotacional con las expresiones análogas para movimiento traslacional. Las últimas dos ecuaciones de la tabla 10.3, que involucran cantidad de movimiento angular L, se explican en el capítulo 11 y se incluyen sólo por motivo de integridad.

EJEMPLO 10.11 Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo (figura 10.21). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

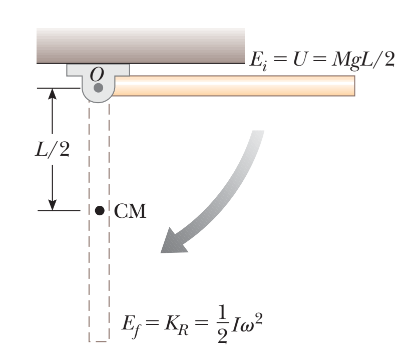


Figura 10.21 (Ejemplo 10.11) Una barra rígida uniforme con centro de giro en O da vueltas en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 10.21 e imagine que la barra giratoria hacia abajo a través de un cuarto de vuelta en torno al pivote en el extremo izquierdo. También regresa a ver el ejemplo 10.8. Esta situación física es la misma.

Categorizar Como se mencionó en el ejemplo 10.8, la aceleración angular de la barra no es constante. Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas para rotación (sección 10.2) no se pueden usar para resolver este ejemplo. El sistema de la barra y la Tierra se clasifica como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas actuantes y usa el principio de conservación de energía mecánica.

Analizar Elija la configuración en que la barra cuelga recta hacia abajo, como la configuración de referencia para energía potencial gravitacional y asigne un valor de cero para esta configuración. Cuando la barra está en la posición horizontal, no tiene energía cinética rotacional. La energía potencial del sistema en esta configuración respecto a la configuración de referencia es $MgL/2$ porque el centro de masa de la barra está a una altura $L/2$ más alto que su posición en la configuración de referencia. Cuando la barra llega a su posición más baja, la energía del sistema es enteramente energía rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia de la barra en torno a un eje que pasa a través del pivote.

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}MgL$$

Resuelva para ω y use $I = \frac{1}{3}ML^2$ (vea la tabla 10.2) para la barra:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.10 y el resultado del inciso A):

$$v_{\text{CM}} = r\omega = \frac{L}{2}\,\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

Ya que r para el punto más bajo en la barra es el doble de lo que es para el centro de masa, el punto más bajo tiene rapidez tangencial que el centro de masa:

$$v = 2v_{\text{CM}} = \sqrt{3gL}$$

Finalizar La configuración inicial en este ejemplo es la misma que en el ejemplo 10.8. Sin embargo, en el ejemplo 10.8, sólo se podría encontrar la aceleración angular inicial de la barra. Una aplicación energética en el ejemplo actual permite encontrar información adicional, la rapidez angular de la barra en otro instante de tiempo.

EJEMPLO 10.12 Energía y la máquina de Atwood

Dos cilindros que tienen masas diferentes m_1 y m_2 están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 10.22. La polea tiene un radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. La cuerda no se desliza sobre la polea y el sistema se libera desde el reposo. Encuentre las magnitudes de velocidad traslacionales de los cilindros después de que el cilindro 2 desciende una distancia h, y encuentre la rapidez angular de la polea en este momento.

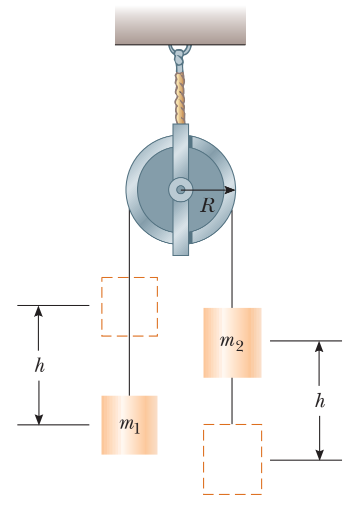


Figura 10.22 (Ejemplo 10.12) Una máquina de Atwood con una polea pesada.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya se vieron ejemplos que involucran la máquina de Atwood, así que el movimiento de los objetos en la figura 10.22 debe ser fácil de visualizar.

Categorizar Ya que la cuerda no se desliza, la polea da vueltas en torno al eje. Se puede despreciar la fricción en el eje porque el radio del eje es pequeño en relación con el de la polea. Por tanto, el momento de torsión friccionante es mucho menor que el momento de torsión neto aplicado por los dos cilindros siempre que sus masas sean significativamente diferentes. En consecuencia, el sistema que consiste en los dos cilindros, la polea y la Tierra es un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en acción; debido a eso, la energía mecánica del sistema se conserva.

Analizar La configuración cero para energía potencial gravitacional se define como la que existe cuando el sistema se libera desde el reposo. De la figura 10.22 se ve que el

descenso del cilindro 2 se asocia con una disminución en la energía potencial del sistema y que la elevación del cilindro 1 representa un aumento en energía potencial.

Escriba una ecuación de conservación de energía para el sistema: $K_f + U_f = K_i + U_i$

Sustituya para cada una de las energías: $(\frac{1}{2}m_1 v_f^2 + \frac{1}{2}m_2 v_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2) + (m_1 gh - m_2 gh) = 0 + 0$

Use $v_f = R\omega_f$ para sustituir por ω_f:

$$\frac{1}{2}m_1 v_f^2 + \frac{1}{2}m_2 v_f^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v_f^2 = m_2 gh - m_1 gh$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = m_2 gh - m_1 gh$$

Resuelva para v_f:

$$1) \quad v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}$$

Use $v_f = R\omega_f$ para resolver para ω_f:

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}$$

Finalizar Cada uno de los cilindros se modela como una partícula bajo aceleración constante porque experimenta una fuerza neta constante. Piense qué necesitaría hacer para usar la ecuación 1) para encontrar la aceleración de uno de los cilindros y reducir el resultado de modo que coincida con el resultado del ejemplo 5.9. ¡En tal caso hágalo y vea si funciona!

10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

En esta sección se trata el movimiento de un objeto rígido que rueda a lo largo de una superficie plana. En general, tal movimiento es complejo. Por ejemplo, suponga que un cilindro rueda sobre una trayectoria recta tal que el eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio. Como exhibe la figura 10.23, un punto sobre el borde del cilindro se mueve en una trayectoria compleja llamada *cicloide*. Sin embargo, se pueden simplificar el tema al concentrarse en el centro de la masa en lugar de hacerlo en un punto en el borde del objeto rodante. Como se muestra en la figura 10.23, el centro de masa se mueve en línea recta. Si un objeto como un cilindro rueda sin deslizarse sobre la superficie (llamado *movimiento de rodamiento puro*), existe una correspondencia simple entre sus movimientos rotacional y traslacional.

Considere un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal (figura 10.24). Conforme el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ,

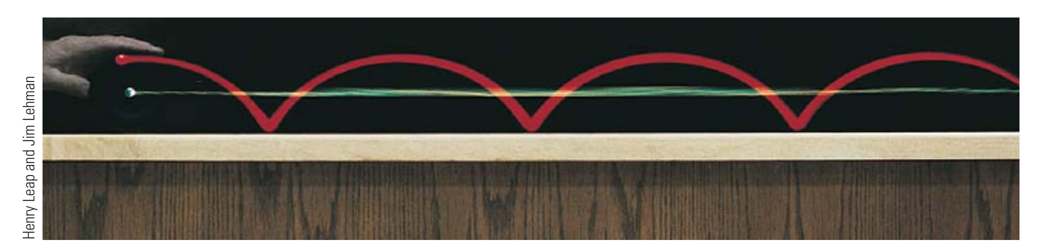

Henry Leap and Jim Lehman

Figura 10.23 Una fuente de luz en el centro de un cilindro en rodamiento y otra en un punto en el borde ilustran las diferentes trayectorias que toman estos dos puntos. El centro se mueve en una línea recta (línea verde), mientras que el punto en el borde se mueve en la trayectoria llamada cicloide (curva roja).

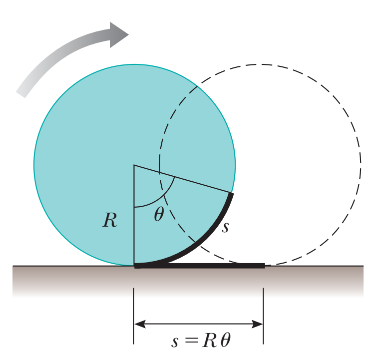


Figura 10.24 Para movimiento de rodamiento puro, a medida que el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ, su centro se traslada una distancia lineal $s = R\theta$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.6

La ecuación 10.25 parece familiar

La ecuación 10.25 parece muy similar a la ecuación 10.10, así que asegúrese de ser claro con la diferencia. La ecuación 10.10 da la rapidez *tangencial* de un punto en un objeto *giratorio* ubicado a una distancia r de un eje de rotación fijo si el objeto está girando con rapidez angular ω. La ecuación 10.25 da la rapidez *traslacional* del centro de masa de un objeto *en rodamiento* de radio R rodando con rapidez angular ω.

su centro de masa se mueve una distancia lineal $s = R\theta$ (vea la ecuación 10.1a). Por lo tanto, la rapidez traslacional del centro de masa para movimiento de rodamiento puro se conoce por

$$v_{\text{CM}} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad \textbf{(10.25)}$$

donde ω es la rapidez angular del cilindro. La ecuación 10.25 se cumple siempre que un cilindro o esfera rueda sin deslizarse y es la **condición para movimiento de rodamiento puro.** La magnitud de la aceleración lineal del centro de masa para movimiento de rodamiento puro es

$$a_{\text{CM}} = \frac{dv_{\text{CM}}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \quad \textbf{(10.26)}$$

donde α es la aceleración angular del cilindro.

Imagine que está móvil junto con un objeto que rueda con rapidez v_{CM}, y permanece en un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del objeto. Mientras observa el objeto, lo verá en rotación pura alrededor de su centro de masa. La figura 10.25a muestra las velocidades de puntos a la cabeza, en el centro y en la parte baja del objeto según lo observa. Además de estas velocidades, cada punto sobre el objeto se mueve en la misma dirección con rapidez v_{CM} respecto a la superficie sobre la que rueda. La figura 10.25b muestra estas velocidades para un objeto que no gira. En el marco de referencia en reposo respecto de la superficie, la velocidad de un punto determinado sobre el objeto es la suma de las velocidades que se muestran en las figuras 10.25a y 10.25b. La figura 10.25c muestra los resultados de sumar estas velocidades.

Observe que el punto de contacto entre la superficie y el cilindro en la figura 10.25c tiene una rapidez traslacional cero. En este instante, el objeto que rueda es móvil en exactamente la misma forma que si la superficie se retirara y el objeto fuera articulado en el punto P y girara en torno a un eje que pasa a través de P. La energía cinética total de este objeto que se piensa que está girando se expresa como

$$K = \tfrac{1}{2}I_P\,\omega^2 \quad \textbf{(10.27)}$$

donde I_P es el momento de inercia en torno a un eje de rotación a través de P.

Ya que el movimiento objeto que se piensa que está girando es el mismo en este instante que el del verdadero objeto en rodamiento, la ecuación 10.27 también da la energía cinética del objeto en rodamiento. Al aplicar el teorema de ejes paralelos, se puede sustituir $I_P = I_{\text{CM}} + MR^2$ en la ecuación 10.27 para obtener

$$K = \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \tfrac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Al usar $v_{\text{CM}} = R\omega$, esta ecuación se puede expresar como

Energía cinética total de un objeto en rodamiento ▶

$$K = \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \tfrac{1}{2}M{v_{\text{CM}}}^2 \quad \textbf{(10.28)}$$

El término $\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\,\omega^2$ representa la energía cinética rotacional del cilindro en torno a su centro de masa, y el término $\frac{1}{2}M{V_{\text{CM}}}^2$ representa la energía cinética que tendría el cilindro si

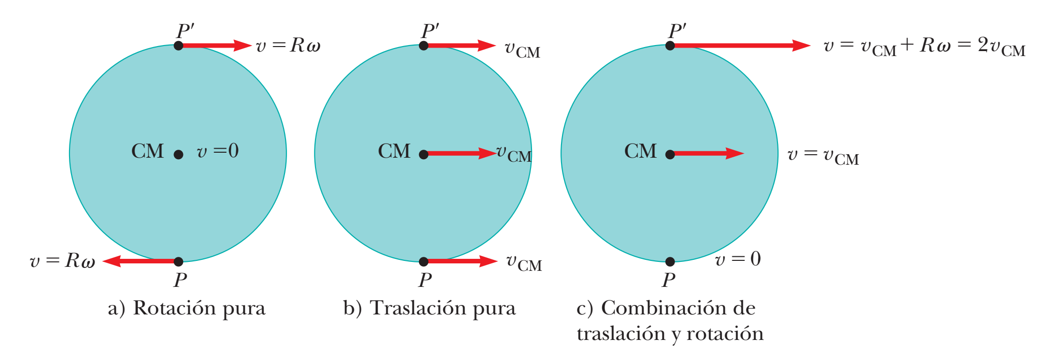


Figura 10.25 El movimiento de un objeto que rueda se puede modelar como una combinación de traslación pura y rotación pura.

sólo se trasladara a través del espacio sin girar. En consecuencia, la **energía cinética total de un objeto en rodamiento es la suma de la energía cinética rotacional en torno al centro de masa y la energía cinética traslacional del centro de masa.** Este enunciado es consistente con la situación que se ilustra en la figura 10.25, que muestra que la velocidad de un punto en el objeto es la suma de la velocidad del centro de masa y la velocidad tangencial en torno al centro de masa.

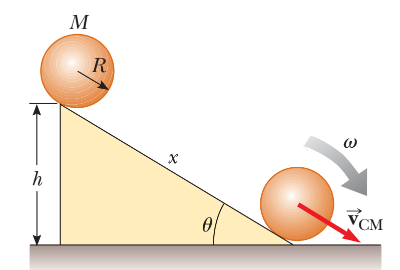


Figura 10.26 Una esfera rueda por un plano inclinado. La energía mecánica del sistema esfera–Tierra se conserva si no se presenta deslizamiento.

Se pueden usar métodos energéticos para tratar una clase de problemas concernientes con el movimiento de rodamiento de un objeto sobre un plano inclinado rugoso. Por ejemplo, considere la figura 10.26, que muestra una esfera que rueda sin deslizarse después de liberarla desde el reposo en la parte superior del plano. El movimiento de rodamiento acelerado sólo es posible si una fuerza de fricción está presente entre la esfera y el plano para producir un momento de torsión neto en torno al centro de masa. A pesar de la presencia de fricción, no se presenta pérdida de energía mecánica, porque el punto de contacto está en reposo en relación con la superficie en cualquier instante. (Por otra parte, si la esfera se deslizara, la energía mecánica del sistema esfera–plano inclinado–Tierra se perdería debido a la fuerza no conservativa de la fricción cinética.)

En realidad, la *fricción de rodamiento* hace que la energía mecánica se transforme en energía interna. La fricción de rodamiento se debe a deformaciones de la superficie y el objeto que rueda. Por ejemplo, las llantas de los automóviles se flexionan conforme ruedan sobre una autopista, lo que representa una transformación de energía mecánica en energía interna. La autopista también se deforma una pequeña cantidad, lo que representa una fricción de rodamiento adicional. En los modelos de resolución de problemas se ignora la fricción de rodamiento a menos que se establezca de otro modo.

Al usar $v_{CM} = R\omega$ para movimiento de rodamiento puro, la ecuación 10.28 se puede expresar como

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)v_{CM}^2 \qquad \textbf{(10.29)}$$

Para el sistema esfera–Tierra, la configuración cero de energía potencial gravitacional se define cuando la esfera está en la parte baja del plano inclinado. Por lo tanto, la conservación de energía mecánica produce

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)v_{CM}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)}\right]^{1/2} \qquad \textbf{(10.30)}$$

Pregunta rápida 10.7 Una bola rueda sin deslizarse por un plano inclinado A, partiendo del reposo. Al mismo tiempo, una caja parte del reposo y se desliza por el plano inclinado B, que es idéntico al plano A excepto que no tiene fricción. ¿Cuál llega primero al fondo? a) La bola. b) La caja. c) Ambas. d) Imposible de determinar.

EJEMPLO 10.13 Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado

Para la esfera sólida que se muestra en la figura 10.26, calcule la rapidez traslacional del centro de masa en la parte baja del plano y la magnitud de la aceleración traslacional del centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que rueda la esfera por el plano inclinado. En su mente compárela con un libro que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción. Quizá ha experimentado con objetos rodando hacia abajo por planos y es posible que esté tentado a pensar que la esfera se movería más rápido en el plano que el libro. No obstante, ¡*no* ha experimentado con objetos que se deslizan hacia abajo por planos inclinados *sin fricción*! Así que, ¿cuál objeto llegará primero a la parte baja? (Vea la pregunta rápida 10.7.)

Categorizar La esfera y la Tierra se modelan como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en acción. Este modelo es el que condujo a la ecuación 10.30, así que se puede usar dicho resultado.

Analizar Evalúe la rapidez del centro de masa de la esfera a partir de la ecuación 10.30:

$$1)\quad v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(\frac{2}{5}MR^2/MR^2\right)}\right]^{1/2} = \left(\tfrac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

Este resultado es menor que $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez que tendría un objeto si simplemente se deslizara por el plano sin girar. (Elimine la rotación al hacer $I_{CM} = 0$ en la ecuación 10.30.)

Para calcular la aceleración traslacional del centro de masa, note que el desplazamiento vertical de la esfera se relaciona con la distancia x que se mueve a lo largo del plano mediante la correspondencia $h = x \operatorname{sen} \theta$.

Aplique esta relación para escribir la ecuación 1):

$$v_{CM}{}^2 = \tfrac{10}{7}gx \operatorname{sen} \theta$$

Escriba la ecuación 2.17 para un objeto que parte del reposo y se mueve una distancia x:

$$v_{CM}{}^2 = 2a_{CM}x$$

Iguale las dos expresiones anteriores para encontrar a_{CM}:

$$a_{CM} = \tfrac{5}{7}g \operatorname{sen} \theta$$

Finalizar Tanto la rapidez como la aceleración del centro de masa son *independientes* de la masa y el radio de la esfera. Es decir: **todas las esferas homogéneas sólidas experimentan la misma rapidez y aceleración en un plano inclinado determinado**. Intente verificar esta afirmación experimentalmente con bolas de diferentes tamaños, como una canica y una bola de croquet.

Si tuviera que repetir el cálculo de la aceleración para una esfera hueca, un cilindro sólido o un aro, obtendría resultados similares que sólo diferirían en el factor enfrente de $g \operatorname{sen} \theta$. Los factores constantes que aparecen en las expresiones para v_{CM} y a_{CM} sólo dependen del momento de inercia en torno al centro de masa para el objeto específico. En todos los casos, la aceleración del centro de masa es *menor* que $g \operatorname{sen} \theta$, el valor que tendría la aceleración si el plano no tuviera fricción y no ocurriera rodamiento.

EJEMPLO 10.14 Jalar un carrete[3]

Un carrete simétrico de masa m y radio R está en reposo sobre una mesa horizontal con fricción (figura 10.27). Con su mano en una cuerda sin masa enrollada alrededor del eje de radio r, jala del carrete con una fuerza horizontal constante de magnitud T hacia la derecha. Como resultado, el carrete rueda sin deslizarse una distancia L a lo largo de la mesa sin fricción de rodamiento.

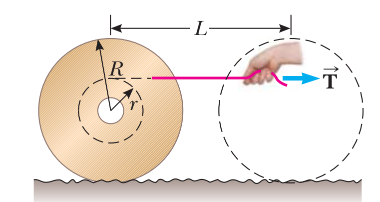


Figura 10.27 (Ejemplo 10.14) Un carrete en reposo sobre una mesa horizontal. Una cuerda está enrollada alrededor del eje y una mano lo jala hacia la derecha.

A) Encuentre la rapidez traslacional final del centro de masa del carrete.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 10.27 para visualizar el movimiento del carrete cuando jala la cuerda. Para que el carrete ruede una distancia L, note que su mano en la cuerda debe jalar una distancia *diferente* de L.

Categorizar El carrete es un objeto rígido bajo un momento de torsión neto, pero el momento de torsión incluye la fuerza de fricción, acerca de la que no sabe nada. Por lo tanto, un planteamiento en función del modelo de objeto rígido bajo momento de torsión neto no será exitoso. Su mano realiza trabajo en el carrete y la cuerda, que forman un sistema no aislado. Vea si una aproximación respecto al modelo de sistema no aislado es fructífero.

[3] El ejemplo 10.14 lo inspiró en parte C. E. Mungan, "A primer on work–energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher*, 43, p. 10, 2005.

Analizar El único tipo de energía que cambia en el sistema es la energía cinética del carrete. No hay fricción de rodamiento, de modo que no hay cambio en la energía interna. La única forma en que la energía cruza la frontera del sistema es mediante el trabajo realizado por su mano en la cuerda. La fuerza de fricción estática no invierte trabajo en la parte baja del carrete porque el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de ningún desplazamiento.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2:

$$1)\quad W = \Delta K = \Delta K_{\text{trans}} + \Delta K_{\text{rot}}$$

donde W es el trabajo invertido en la cuerda por su mano. Para hallar este trabajo, necesita encontrar el desplazamiento de su mano durante el proceso.

Primero encuentre la longitud de la cuerda que se desenrolla del carrete. Si el carrete rueda una distancia L, el ángulo total que da vuelta es $\theta = L/R$. El eje también da vueltas a través de este ángulo.

Use la ecuación 10.1a para encontrar la longitud de arco total que gira el eje:

$$\ell = r\theta = \frac{r}{R}L$$

Este resultado también da la longitud de la cuerda que se jala del eje. Su mano se moverá esta distancia *más* la distancia L a través de la que se mueve el carrete. Por lo tanto, la magnitud del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada por su mano es $\ell + L = L(1 + r/R)$.

Evalúe el trabajo realizado por su mano sobre la cuerda:

$$2)\quad W = TL\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$TL\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \tfrac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

donde I es el momento de inercia del carrete en torno a su centro de masa y v_{CM} y ω son los valores finales después de que la rueda recorre una distancia L.

Aplique la condición de rodamiento sin deslizamiento $\omega = v_{\text{CM}}/R$:

$$TL\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \tfrac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \tfrac{1}{2}I\frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2}$$

Resuelva para v_{CM}:

$$3)\quad v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)}}$$

B) Encuentre el valor de la fuerza de fricción f.

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que la fuerza de fricción no realiza trabajo, no se le puede evaluar de un planteamiento energético. El carrete se modela como un sistema no aislado, pero esta vez en términos de cantidad de movimiento. La cuerda aplica una fuerza a través de la frontera del sistema, lo que resulta en un impulso en el sistema. Ya que las fuerzas en el carrete son constantes, el centro de masa del carrete se modela como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Escriba el teorema impulso–cantidad de movimiento (ecuación 9.40) para el carrete:

$$4)\quad (T - f)\Delta t = m(v_{\text{CM}} - 0) = mv_{\text{CM}}$$

Para una partícula bajo aceleración constante que parte del reposo, la ecuación 2.14 dice que la velocidad promedio del centro de masa es la mitad de la velocidad final.

Use la ecuación 2.2 para encontrar el intervalo de tiempo para el centro de masa del carrete para mover una distancia L desde el reposo a una rapidez final v_{CM}:

$$5) \quad \Delta t = \frac{L}{v_{CM,\,prom}} = \frac{2L}{v_{CM}}$$

Sustituya la ecuación 5) en la ecuación 4):

$$(T - f)\frac{2L}{v_{CM}} = mv_{CM}$$

Resuelva para la fuerza de fricción f:

$$f = T - \frac{mv_{CM}^2}{2L}$$

Sustituya v_{CM} de la ecuación 3):

$$f = T - \frac{m}{2L}\left[\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)}\right]$$

$$= T - T\frac{(1 + r/R)}{(1 + I/mR^2)} = T\left[1 - \frac{(1 + r/R)}{(1 + I/mR^2)}\right]$$

Finalizar ¡Note que podría usar el teorema impulso–cantidad de movimiento para el movimiento traslacional del carrete mientras ignora que el carrete está girando! Este hecho demuestra el poder de la creciente lista de planteamientos para resolver problemas.

Resumen

DEFINICIONES

La **posición angular** de un objeto rígido se define como el ángulo θ entre una línea de referencia unida al objeto y una línea de referencia fija en el espacio. El **desplazamiento angular** de una partícula móvil en una trayectoria circular o un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es $\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$.

La **rapidez angular instantánea** de una partícula móvil en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \qquad \textbf{(10.3)}$$

La **aceleración angular instantánea** de una partícula móvil en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} \qquad \textbf{(10.5)}$$

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, cada parte del objeto tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.

El **momento de inercia de un sistema de partículas** se define como

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \qquad \textbf{(10.15)}$$

donde m_i es la masa de la i–ésima partícula y r_i es su distancia desde el eje de rotación.

La magnitud del **momento de torsión** asociado con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto a un distancia r desde el eje de rotación es

$$\tau \equiv rF\,\text{sen}\,\phi = Fd \qquad \textbf{(10.19)}$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza y el vector fuerza, y d es el brazo de momento de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, la posición angular, la rapidez angular y la aceleración angular se relacionan con la posición, la rapidez y la aceleración traslacionales mediante las relaciones

$$s = r\theta \qquad \textbf{(10.1a)}$$

$$s = r\omega \qquad \textbf{(10.10)}$$

$$s = r\alpha \qquad \textbf{(10.11)}$$

Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo con rapidez angular ω, su **energía cinética rotacional** se puede escribir

$$K_R = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \textbf{(10.16)}$$

donde I es el momento de inercia en torno al eje de rotación.

El **momento de inercia de un objeto rígido** es

$$I = \int r^2 \, dm \qquad \textbf{(10.17)}$$

donde r es la distancia desde el elemento de masa dm hasta el eje de rotación.

La rapidez a la que una fuerza externa realiza trabajo para girar un objeto rígido en torno a un eje fijo, o la **potencia** entregada, es

$$\mathcal{P} = \tau\omega \qquad \textbf{(10.23)}$$

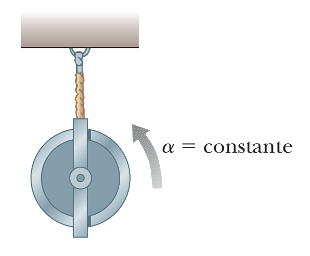
Si sobre un objeto rígido se consume trabajo y el único resultado del trabajo es rotación en torno a un eje fijo, el trabajo neto consumido por las fuerzas externas para girar el objeto es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto:

$$\sum W = \tfrac{1}{2}I\omega_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}I\omega_i^{\,2} \qquad \textbf{(10.24)}$$

La **energía cinética total** de un objeto rígido que rueda sobre una superficie rugosa sin deslizamiento es igual a la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa más la energía cinética traslacional del centro de masa:

$$K = \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^{\,2} \qquad \textbf{(10.28)}$$

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



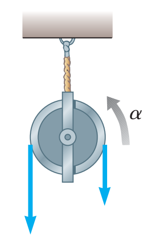
Objeto rígido bajo aceleración angular constante. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo bajo aceleración angular constante, uno puede aplicar las ecuaciones de la cinemática que son análogas a las del movimiento traslacional de una partícula bajo aceleración constante:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad \textbf{(10.6)}$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \textbf{(10.7)}$$

$$\omega_f^{\,2} = \omega_i^{\,2} + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \qquad \textbf{(10.8)}$$

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \qquad \textbf{(10.9)}$$



Objeto rígido bajo momento de torsión neto. Si sobre un objeto rígido libre que da vueltas en torno a un eje fijo actúa un momento de torsión externo neto, el objeto se somete a una aceleración angular α, donde

$$\sum \tau = I\alpha \qquad \textbf{(10.21)}$$

Esta ecuación es el análogo rotacional a la segunda ley de Newton en el modelo de partícula bajo una fuerza neta.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Cuál es la rapidez angular del segundero de un reloj? ¿Cuál es la dirección de $\vec{\omega}$ cuando ve un reloj que cuelga de una pared vertical? ¿Cuál es la magnitud del vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ del segundero?

2. Una hoja de un par de tijeras da vueltas contra las manecillas del reloj en el plano xy. ¿Cuál es la dirección de $\vec{\omega}$? ¿Cuál es la dirección de $\vec{\alpha}$ si la magnitud de la velocidad angular disminuye con el tiempo?

3. **O** Una rueda se mueve con aceleración angular constante de 3 rad/s^2. En diferentes momentos su rapidez angular es -2 rad/s, 0 y $+2$ rad/s. En estos momentos, analice la magnitud de la componente tangencial de la aceleración y la magnitud de la componente radial de aceleración para un punto sobre el borde de la rueda. Clasifique los siguientes seis elementos de mayor a menor: a) $|a_t|$ cuando $\omega = -2$ rad/s, b) $|a_r|$ cuando $\omega = -2$ rad/s, c) $|a_t|$ cuando $\omega = 0$, d) $|a_r|$ cuando $\omega = 0$, e) $|a_t|$ cuando $\omega = 2$ rad/s, f) $|a_r|$ cuando $\omega = 2$ rad/s. Si dos elementos son iguales, muéstrelos como iguales en su clasificación. Si una cantidad es igual a cero, muéstrelo en su clasificación.

4. **O i)** Suponga que las llantas estándar de un automóvil se sustituyen con llantas 1.30 veces mayores en diámetro. En tal caso, ¿cuál será la lectura del velocímetro? a) 1.69 veces mayor, b) 1.30 veces mayor, c) exacta, d) 1.30 veces menor, e) 1.69 veces menor, d) inexacta por un factor impredecible. **ii)** ¿Cuál será la economía de combustible del automóvil en millas por galón o km/L? a) 1.69 veces mejor, b) 1.30 veces mejor, c) esencialmente la misma, d) 1.30 veces peor, e) 1.69 veces peor.

5. **O** La figura 10.8 muestra un sistema de cuatro partículas unidas mediante barras rígidas ligeras. Suponga $a = b$ y M es un poco mayor que m. **i)** ¿Respecto a cuál de los ejes coordenados el sistema tiene el menor momento de inercia? a) El eje x. b) El eje y. c) El eje z. d) El momento de inercia tiene el mismo valor pequeño para dos ejes. e) El momento de inercia es el mismo para todos los ejes. **ii)** ¿En torno a cuál eje el sistema tiene el mayor momento de inercia? a) El eje x. b) El eje y. c) El eje z. d) El momento de inercia tiene el mismo gran valor para dos ejes, e) El momento de inercia es el mismo para todos los ejes.

6. Suponga que sólo dos fuerzas externas actúan sobre un objeto rígido estable y las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección. ¿Bajo qué condiciones el objeto comienza a dar vuelta?

7. **O** Como se muestra en la figura 10.19, un cordón está enrollado sobre un carrete cilíndrico montado sobre un eje fijo horizontal sin fricción. Se llevan a cabo dos experimentos. a) El cordón se jala con una fuerza constante de 50 N. b) Un objeto de 50 N de peso cuelga del cordón y se libera. ¿Las aceleraciones angulares son iguales en los dos experimentos? Si no, ¿en cuál experimento la aceleración angular es mayor en magnitud?

8. Explique cómo puede usar el aparato descrito en el ejemplo 10.10 para determinar el momento de inercia de la rueda. (Si la rueda no tiene una densidad de masa uniforme, el momento de inercia no necesariamente es igual a $\frac{1}{2}MR^2$.)

9. **O** Sobre un objeto se ejerce un momento de torsión neto constante distinto de cero. ¿Cuál de los siguientes *no* puede ser constante? Elija todos los que apliquen. a) Posición angular, b) velocidad angular, c) aceleración angular, d) momento de inercia, e) energía cinética, f) ubicación del centro de masa.

10. Con los resultados del ejemplo 10.10, ¿cómo calcularía la rapidez angular de la rueda y la rapidez lineal del contrapeso suspendido en $t = 2$ s, si supone que el sistema se libera desde el reposo en $t = 0$? ¿La expresión $v = R\omega$ es válida en esta situación?

11. Si una pequeña esfera de masa M se coloca al final de la barra en la figura 10.21, ¿el resultado para ω sería mayor, menor o igual que el valor obtenido en el ejemplo 10.11?

12. **O** Una esfera sólida de aluminio de radio R tiene momento de inercia I en torno a un eje a través de su centro. ¿Cuál es el momento de inercia en torno a un eje central de una esfera sólida de aluminio de radio $2R$? a) I, b) $2I$, c) $4I$, d) $8I$, e) $16I$, f) $32I$.

13. Explique porqué al cambiar el eje de rotación de un objeto cambia su momento de inercia.

14. Suponga que saca dos huevos del refrigerador, uno cocido y el otro crudo. Quiere determinar cuál es el huevo cocido sin romper los huevos. Esta determinación se puede hacer al girar los dos huevos sobre el suelo y comparar los movimientos rotacionales. ¿Cuál huevo gira más rápido? ¿Cuál huevo da vueltas de manera más uniforme? Explique.

15. ¿Cuál de las entradas de la tabla 10.2 se aplica para encontrar el momento de inercia de una larga tubería de desagüe recta giratoria en torno a su eje de simetría? ¿De un aro de bordado giratorio en torno a un eje a través de su centro y que es perpendicular a su plano? ¿De una puerta uniforme que gira en sus bisagras? ¿De una moneda que gira en torno a un eje a través de su centro y es perpendicular a sus caras?

16. ¿Es posible cambiar la energía cinética traslacional de un objeto sin cambiar su energía rotacional?

17. ¿Un objeto debe estar girando para tener un momento de inercia distinto de cero?

18. Si ve un objeto giratorio, ¿necesariamente existe un momento de torsión neto actuando sobre él?

19. **O** Una decoración cuelga del techo de su habitación en el extremo inferior de una cuerda. Su aburrido compañero de cuarto gira la decoración en sentido de las manecillas del reloj varias veces para enrollar la cuerda. Cuando su compañero la libera, la decoración comienza a girar contra las manecillas del reloj, lentamente al principio y después cada vez más rápido. Considere la dirección contra las manecillas del reloj como positiva y suponga que la fricción es despreciable. Cuando la cuerda está completamente desenrollada, el ornamento tiene su máxima rapidez de rotación. **i)** En este momento, ¿su aceleración angular es a) positiva, b) negativa o c) cero? **ii)** La decoración continúa girando, y enrolla la cuerda contra las manecillas del reloj mientras frena. En el momento, cuando finalmente se detiene, ¿su aceleración angular es a) positiva, b) negativa o c) cero?

20. El diámetro polar de la Tierra es ligeramente menor que el diámetro ecuatorial. ¿Cómo cambiaría el momento de inercia de la Tierra en torno a su eje de rotación, si algún material cerca del ecuador se retira y transfiere a las regiones polares para hacer de la Tierra una esfera perfecta?

21. **O** Un balón de basquetbol rueda sobre un suelo sin deslizarse, y su centro de masa móvil a cierta velocidad. Un bloque de hielo de la misma masa se pone a deslizarse a través del suelo con la misma rapidez a lo largo de una línea paralela. **i)** ¿Cómo se comparan sus energías? a) El balón tiene más energía cinética. b) El hielo tiene más energía cinética. c) Tienen energías cinéticas iguales. **ii)** ¿Cómo se comparan sus cantidades de movimiento? a) El balón tiene más cantidad de movimiento. b) El hielo tiene más cantidad de movimiento. c) Tienen iguales cantidades de movimiento. d) Sus cantidades de movimiento tienen iguales magnitudes pero son vectores diferentes. **iii)** Los dos objetos encuentran una rampa que se eleva hacia arriba. a) El balón viajará a mayor distancia sobre la rampa. b) El hielo viajará a mayor distancia sobre la rampa. c) Ambos viajarán igualmente muy arriba sobre la rampa.

22. Suponga que pone su libro de texto a deslizar sobre el suelo de un gimnasio con cierta rapidez inicial. Rápidamente deja de moverse debido a una fuerza de fricción que el suelo ejerce sobre él. A continuación, pone a rodar un balón de basquetbol con la misma rapidez inicial. Sigue rodando de un extremo del gimnasio al otro. ¿Por qué el balón rueda tanto? ¿La fricción afecta significativamente su movimiento?

23. Tres objetos de densidad uniforme (una esfera sólida, un cilindro sólido y un cilindro hueco) se colocan en lo alto de un plano inclinado (figura P10.23). Todos se liberan desde el reposo en la misma elevación y ruedan sin deslizarse. ¿Cuál objeto llega primero a la parte baja? ¿Cuál llega al último? Intente este experimento en casa y observe que el resultado es independiente de las masas y los radios de los objetos.

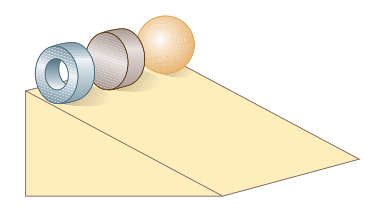


Figura P10.23

24. La figura P10.24 muestra una vista lateral de un triciclo infantil con llantas de caucho sobre una acera horizontal de concreto. Si una cuerda se une al pedal superior del extremo lejano y se jala hacia adelante horizontalmente, el triciclo rueda hacia adelante. En vez de ello, suponga que una cuerda se une al pedal inferior en el lado cercano y se jala hacia adelante horizontalmente, como se muestra en A. ¿El triciclo comienza a rodar? Si es así, ¿en qué dirección? Responda las mismas preguntas si a) la cuerda se jala hacia adelante y arriba como se muestra en B, b) la cuerda se jala recto hacia abajo como se muestra en C, y c) la cuerda se jala hacia adelante y abajo como se muestra en D. d) **¿Qué pasaría si?** La cuerda se amarra al borde de la rueda frontal y se jala arriba y atrás, como se muestra en E? e) Explique un patrón de razonamiento, con base en el diagrama, que facilite el responder estas preguntas. ¿Qué cantidad física debe evaluar?

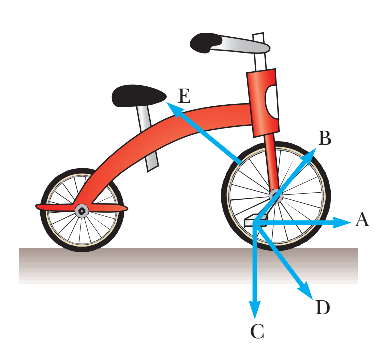


Figura P10.24

Problemas

Sección 10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

1. Durante cierto periodo, la posición angular de una puerta que se balancea se describe mediante $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.00t^2$, donde θ está en radianes y t en segundos. Determine la posición, rapidez y aceleración angulares de la puerta en a) a $t = 0$ y b) a $t = 3.00$ s.

2. Una barra en una bisagra parte del reposo y da vueltas con una aceleración angular $\alpha = (10 + 6t)$ rad/s^2, donde t está en segundos. Determine el ángulo en radianes que recorre la barra en los primeros 4.00 s.

Sección 10.2 Cinemática rotacional: Objeto rígido bajo aceleración angular constante

3. Una rueda parte del reposo y da vueltas con aceleración angular constante para alcanzar una rapidez angular de 12.0 rad/s en 3.00 s. Encuentre a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda y b) el ángulo en radianes que da vueltas en este intervalo de tiempo.

4. Una centrífuga en un laboratorio médico da vueltas a una rapidez angular de 3 600 rev/min. Cuando se apaga da vueltas a 50.0 revoluciones antes de llegar al reposo. Encuentre la aceleración angular constante de la centrífuga.

5. Un motor eléctrico que hace girar una rueda de molino a 100 rev/min se apaga. Después la rueda se mueve con aceleración angular negativa constante de 2.00 rad/s^2 de magnitud. a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la rueda llega al reposo? b) ¿Cuántos radianes gira mientras va frenando?

6. Una rueda giratoria requiere 3.00 s para dar vueltas 37.0 revoluciones. Su rapidez angular al final del intervalo de 3.00 s es 98.0 rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular constante de la rueda?

7. a) Encuentre la rapidez angular de la rotación de la Tierra sobre su eje. Mientras la Tierra gira hacia el este, se ve el cielo girar hacia el oeste a esta misma rapidez.

b) *Las lluviosas Pléyades occidentales*
Y buscan más allá del mar
La cabeza con la que soñaré
Que no soñará conmigo.

—A.E. Housman
(© Robert E. Symons)

Cambridge, Inglaterra, está a una longitud 0°, y Saskatoon, Saskatchewan, Canadá, está a una longitud 107° oeste. ¿Cuánto tiempo transcurre después de que las Pléyades se ponen en Cambridge hasta que dichas estrellas caen bajo el horizonte occidental en Saskatoon?

8. Un carrusel está estable. Un perro corre sobre el suelo justo afuera de la circunferencia del carrusel, y se mueve con una rapidez angular constante de 0.750 rad/s. El perro no cambia su ritmo cuando ve lo que ha estado buscando: un hueso que descansa en el borde del carrusel a un tercio de revolución enfrente de él. En el instante en que el perro ve el hueso ($t = 0$), el carrusel comienza a moverse en la dirección en que corre el animal, con una aceleración angular constante igual a 0.015 0 rad/s^2. a) ¿En qué tiempo el perro alcanzará el hueso? b) El confundido perro sigue corriendo y pasa el hueso. ¿Cuánto tiempo después de que el carrusel comienza a girar el perro y el hueso se emparejan por segunda vez?

9. La tina de una lavadora comienza su ciclo de giro, parte del reposo y gana rapidez angular de manera estable durante 8.00 s, momento en que gira a 5.00 rev/s. En este punto, la persona que lava abre la tapa y un interruptor de seguridad apaga la máquina. La tina frena lentamente hasta el reposo en 12.0 s. ¿Cuántas revoluciones realiza la tina mientras está en movimiento?

Sección 10.3 Cantidades angulares y traslacionales

10. Un automóvil de carreras viaja en una pista circular de 250 m de radio. Si supone que el automóvil se mueve con una rapidez constante de 45.0 m/s, encuentre a) su rapidez angular y b) la magnitud y dirección de su aceleración.

11. Haga una estimación de un orden de magnitud del número de revoluciones que da en un año la llanta de un automóvil común. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

12. ● La figura P10.12 muestra el mecanismo conductor de una bicicleta que tiene ruedas de 67.3 cm de diámetro y manivela de pedal de 17.5 cm de largo. El ciclista pedalea a una cadencia estable de 76.0 rev/min. La cadena se engancha con un piñón frontal de 15.2 cm de diámetro y una cuerda de cadena trasera de 7.00 cm de diámetro. a) Calcule la rapidez de un eslabón de la cadena en relación con el cuadro de la bicicleta. b) Calcule la rapidez angular de las ruedas de la bicicleta. c) Calcule la rapidez de la bicicleta en relación con el camino. d) ¿Qué parte de la información, si alguna, no es necesaria para los cálculos?

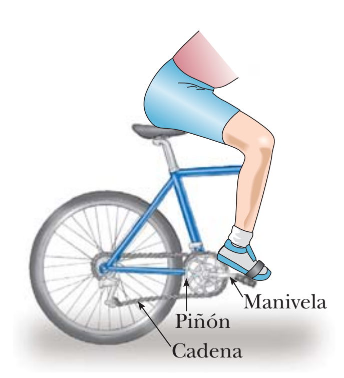


Figura P10.12

13. Una rueda de 2.00 m de diámetro se encuentra en un plano vertical y da vueltas con una aceleración angular constante de 4.00 rad/s^2. La rueda parte del reposo en $t = 0$ y el vector radio de cierto punto P sobre el borde forma un ángulo de 57.3° con la horizontal en este tiempo. En $t = 2.00$ s, encuentre a) la rapidez angular de la rueda, b) la rapidez tangencial y la aceleración total del punto P y c) la posición angular del punto P.

14. Un lanzador de disco (figura P10.14) acelera un disco desde el reposo a una rapidez de 25.0 m/s al girarlo 1.25 rev. Suponga que el disco se mueve en el arco de un círculo de 1.00 m de radio. a) Calcule la rapidez angular final del disco. b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, si supone que es constante. c) Calcule el intervalo de tiempo requerido para que el disco acelere desde el reposo a 25.0 m/s.



Figura P10.14

15. Un objeto pequeño con 4.00 kg de masa se mueve contra las manecillas del reloj con rapidez constante de 4.50 m/s en un círculo de 3.00 m de radio con centro en el origen. Comienza en el punto con vector de posición $(3.00\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}})$. Después se somete a un desplazamiento angular de 9.00 rad. a) ¿Cuál es su vector de posición? Use notación de vector unitario para todas las respuestas vectoriales. b) ¿En qué cuadrante se ubica la partícula y qué ángulo forma su vector de posición con el eje positivo x? c) ¿Cuál es su velocidad? d) ¿En qué dirección se mueve? Bosqueje sus vectores de posición, velocidad y aceleración. e) ¿Cuál es su aceleración? f) ¿Qué fuerza total se ejerce sobre el objeto?

16. Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo y alcanza un rapidez de 22.0 m/s en 9.00 s. Las llantas tienen 58.0 cm de diámetro y no se deslizan sobre el pavimento. a) Encuentre

el número de revoluciones que hace cada llanta durante este movimiento. b) ¿Cuál es la rapidez angular final de una llanta en revoluciones por segundo?

17. Un disco de 8.00 cm de radio da vueltas con una rapidez constante de 1 200 rev/min en torno a su eje central. Determine: a) su rapidez angular, b) la rapidez tangencial en un punto a 3.00 cm de su centro, c) la aceleración radial de un punto sobre el borde y d) la distancia total que recorre en 2.00 s un punto en el borde.

18. ● Una escalera recta se apoya contra la pared de una casa. La escalera tiene rieles de 4.90 m de largo, unidos mediante peldaños de 0.410 m de largo. Su extremo inferior está sobre suelo sólido pero inclinado de modo que la parte superior de la escalera está 0.690 m a la izquierda de donde debe estar, y es inseguro ascender por la escalera. Usted quiere poner una roca bajo un pie de la escalera para compensar la pendiente del terreno. a) ¿Cuál debe ser el grosor de la roca plana? b) ¿Usar las ideas de este capítulo hace más fácil explicar la solución al inciso a)? Explique su respuesta.

19. Un automóvil que viaja sobre una pista circular plana (sin peralte) acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración tangencial de 1.70 m/s^2. El automóvil recorre un cuarto del camino alrededor del círculo antes de derrapar de la pista. Determine el coeficiente de fricción estática entre el automóvil y la pista a partir de estos datos.

20. En el inciso B) del ejemplo 10.2, el disco compacto se modeló como un objeto rígido bajo aceleración angular constante para encontrar el desplazamiento angular total durante el tiempo de reproducción del disco. En realidad, la aceleración angular de un disco no es constante. En este problema, explore el tiempo real dependiente de la aceleración angular. a) Suponga que la pista en el disco es una espiral tal que bucles adyacentes de la pista están separados por una distancia pequeña h. Demuestre que el radio r de una porción conocida de la pista se proporciona por

$$r = r_i + \frac{h}{2\pi}\theta$$

donde r_i es el radio de la porción más interna de la pista y θ es el ángulo que el disco recorre para llegar a la posición de la pista de radio r. b) Demuestre que la rapidez de cambio del ángulo θ se conoce por

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r_i + (h/2\pi)\theta}$$

donde v es la rapidez constante con que la superficie del disco pasa el láser. c) A partir del resultado del inciso b), use integración para encontrar una expresión para el ángulo θ como función del tiempo. d) A partir del resultado del inciso c), use diferenciación para encontrar la aceleración angular del disco como función del tiempo.

Sección 10.4 Energía cinética rotacional

21. Las cuatro partículas de la figura P10.21 están conectadas mediante barras rígidas de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. El sistema da vueltas en el plano xy en torno al eje z con una rapidez angular de 6.00 rad/s. Calcule a) el momento de inercia del sistema en torno al eje z y b) la energía cinética rotacional del sistema.

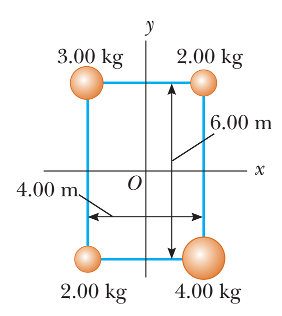


Figura P10.21

22. ● Barras rígidas de masa despreciable que yacen a lo largo del eje y conectan tres partículas (figura P10.22). El sistema da vueltas en torno al eje x con una rapidez angular de 2.00 rad/s. Encuentre a) el momento de inercia en torno al eje x y la energía cinética rotacional total evaluada a partir de $\frac{1}{2}I\omega^2$ y b) la rapidez tangencial de cada partícula y la energía cinética total evaluada a partir $\Sigma \frac{1}{2}m_i v_i^2$. c) Compare las respuestas para energía cinética en los incisos a) y b).

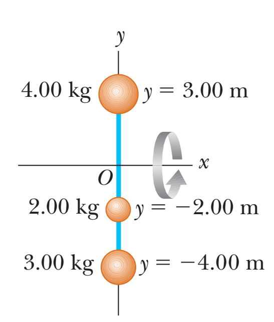


Figura P10.22

23. Dos bolas con masas M y m se conectan mediante una barra rígida de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la figura P10.23. Para un eje perpendicular a la barra, muestre que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa a través del centro de masa. Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM/(m + M)$.

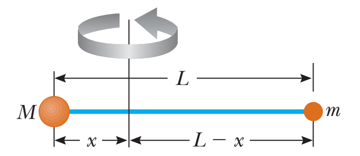


Figura P10.23

24. Mientras funciona un motor de gasolina, un volante que da vuelta con el cigüeñal almacena energía después de cada explosión de combustible para proporcionar la energía requerida para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En el motor de cierto tractor de pasto, suponga que un volante debe tener no más de 18.0 cm de diámetro. Su grosor, medido a lo largo de su eje de rotación, debe no ser mayor a 8.00 cm. El volante debe liberar 60.0 J de energía cuando su rapidez angular cae de 800 rev/min a 600 rev/min. Diseñe un volante de acero de refuerzo para satisfacer estos requisitos con la masa más pequeña que pueda lograr razonablemente. Suponga que el material tiene la densidad que se menciona en la tabla 14.1. Especifique la forma y masa del volante.

25. ● Una *war–wolf* o *trebuchet* (catapulta) es un dispositivo que se usó durante la edad media para lanzar rocas a los castillos, y ahora a veces se usa para arrojar grandes vegetales y pianos como deporte. En la figura P10.25 se muestra un *trebuchet* simple. Modélelo como una barra rígida de masa despreciable de 3.00 m de largo que une partículas de 60.0 kg y 0.120 kg de masa en sus extremos. Puede dar vuelta sobre un eje horizontal sin fricción perpendicular a la barra y a 14.0 cm de la partícula con mayor masa. La barra se libera desde el reposo en una orientación horizontal. a) Encuentre la rapidez máxima que logra el objeto de 0.120 kg. b) Mientras el objeto de 0.120 kg gana rapidez, ¿se mueve con aceleración constante? ¿Se mueve con aceleración tangencial constante? ¿El *trebuchet* se mueve con aceleración angular constante? ¿Tiene cantidad de movimiento constante? ¿El sistema *trebuchet*–Tierra tiene energía mecánica constante?

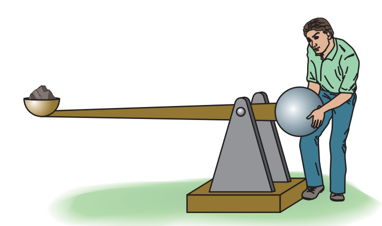


Figura P10.25

Sección 10.5 Cálculo de momentos de inercia

26. Tres delgadas barras idénticas, cada una de longitud L y masa m, se sueldan mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura P10.26. El ensamble da vueltas en torno a un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a la otra. Determine el momento de inercia de esta estructura.

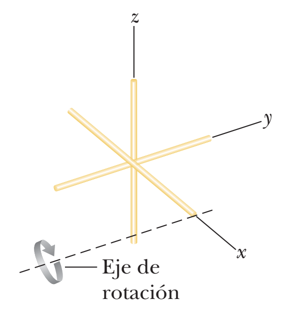


Figura P10.26

27. La figura P10.27 muestra una vista lateral de la llanta de un automóvil. Haga un modelo que tenga dos paredes laterales de grosor uniforme de 0.635 cm y una pared de huella de 2.50 cm de grosor uniforme y 20.0 cm de ancho. Suponga que el caucho tiene densidad uniforme igual a 1.10×10^3 kg/m^3. Encuentre su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro.

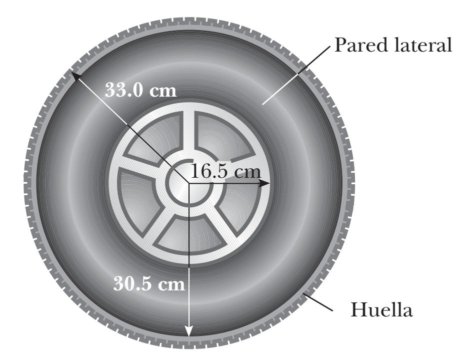


Figura P10.27

28. ● Una puerta delgada sólida uniforme tiene 2.20 m de altura, 0.870 m de ancho y 23.0 kg de masa. Encuentre su momento de inercia para rotación en sus bisagras. ¿Alguna parte de la información es innecesaria?

29. *¡Atención! ¡Giro de 180°!* Calcule una estimación de un orden de magnitud para el momento de inercia de su cuerpo mientras está de pie y da vuelta en torno a un eje vertical a través de lo alto de su cabeza y el punto a la mitad entre sus tobillos. En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

30. Muchas máquinas emplean levas para varios propósitos como abrir y cerrar válvulas. En la figura P10.30, la leva es un disco circular giratorio sobre un eje que no pasa a través del centro del disco. En la fabricación de la leva, primero se elabora un cilindro sólido uniforme de radio R. Luego se taladra un agujero fuera del centro, de radio $R/2$, paralelo al eje del cilindro y con centro en un punto a una distancia $R/2$ desde el centro del cilindro. Después la leva, de masa M, se desliza sobre la flecha circular y se suelda en su lugar. ¿Cuál es la energía cinética de la leva cuando gira con rapidez angular ω en torno al eje del árbol?

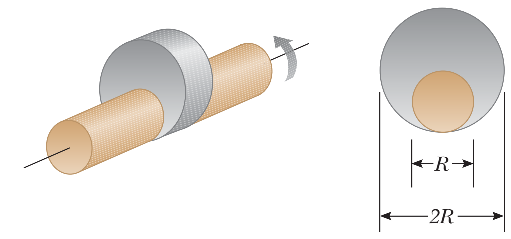


Figura P10.30

31. Con el procedimiento del ejemplo 10.4, pruebe que el momento de inercia en torno al eje y' de la barra rígida en la figura 10.9 es $\frac{1}{3}ML^2$.

Sección 10.6 Momento de torsión

32. La caña de pescar en la figura P10.32 forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión que ejerce el pez en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de las manos del pescador?

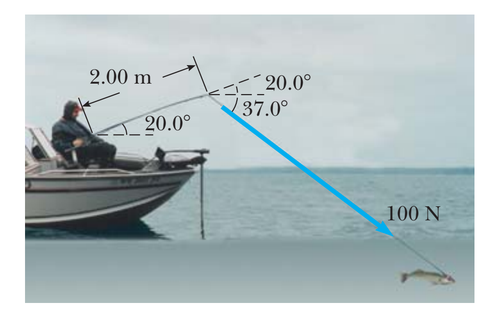


Figura P10.32

33. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura P10.33 en torno al eje a través de O, considerando a = 10.0 cm y b = 25.0 cm.

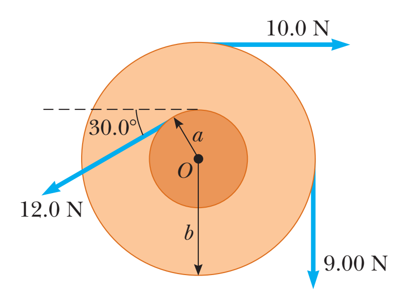


Figura P10.33

Sección 10.7 Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

34. Una rueda de molino tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. Parte del reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0.600 N·m que el motor ejerce sobre la rueda. a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su rapidez operativa final de 1 200 rev/min? b) ¿Cuántas revoluciones da mientras acelera?

35. Un avión a escala con 0.750 kg de masa está amarrado con un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de unión. a) Encuentre el momento de torsión que produce el empuje neto en torno al centro del círculo. b) Encuentre la aceleración angular del avión cuando está en vuelo a nivel. c) Encuentre la aceleración traslacional del avión tangente a su trayectoria de vuelo.

36. La combinación de una fuerza aplicada y una fuerza de fricción produce un momento de torsión total constante de 36.0 N · m sobre una rueda giratoria en torno a un eje fijo. La fuerza aplicada actúa durante 6.00 s. Durante este tiempo, la rapidez angular de la rueda aumenta de 0 a 10.0 rad/s. Después se retira la fuerza aplicada y la rueda llega al reposo en 60.0 s. Encuentre a) el momento de inercia de la rueda, b) la magnitud del momento de torsión friccionante y c) el número total de revoluciones de la rueda.

37. Un bloque de masa m_1 = 2.00 kg y un bloque de masa m_2 = 6.00 kg están conectados mediante una cuerda sin masa sobre una polea en la forma de un disco sólido que tiene radio R = 0.250 m y masa M = 10.0 kg. A estos bloques se les permite moverse sobre una cuña fija de ángulo θ = 30.0°, como se muestra en la figura P10.37. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques. Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determine a) la aceleración de los dos bloques y b) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.

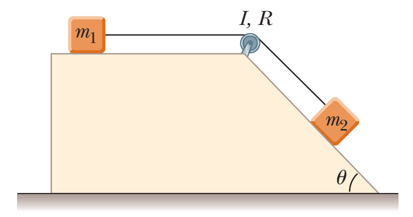


Figura P10.37

38. Una rueda de alfarero (un disco de piedra grueso de 0.500 m de radio y 100 kg de masa) gira libremente a 50.0 rev/min. El alfarero puede detener la rueda en 6.00 s al presionar un trapo húmedo contra el borde y ejercer una fuerza radialmente hacia adentro de 70.0 N. Encuentre el coeficiente efectivo de fricción cinética entre la rueda y el trapo.

39. Un motor eléctrico hace girar un volante mediante una banda transportadora que acopla una polea en el motor y una polea que está rígidamente unida al volante, como se muestra en la figura P10.39. El volante es un disco sólido con una masa de 80.0 kg y un diámetro de 1.25 m. Da vuelta sobre un eje sin fricción. Su polea tiene masa mucho más pequeña y un radio de 0.230 m. La tensión en el segmento superior (tenso) de la banda es 135 N, y el volante tiene una aceleración angular en sentido de las manecillas del reloj de 1.67 rad/s^2. Encuentre la tensión en el segmento inferior (flojo) de la banda.

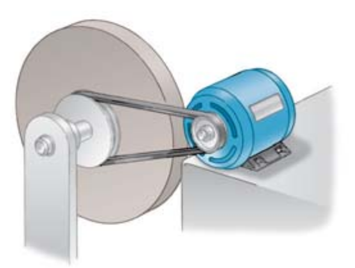


Figura P10.39

40. ● Un disco que tiene 100 kg·m^2 de momento de inercia es libre de dar vuelta sin fricción, partiendo del reposo, en torno a un eje fijo a través de su centro, como se muestra en la parte superior de la figura 10.19. Una fuerza tangencial cuya magnitud puede variar de $T = 0$ a $T = 50.0$ N se aplica a cualquier distancia que varíe de $R = 0$ a $R = 3.00$ m del eje de rotación. Encuentre un par de valores de T y R que hagan que el disco complete 2.00 revoluciones en 10.0 s. ¿Existe una respuesta, o no hay respuesta, o hay dos respuestas, o más de dos, o muchas, o un número infinito?

Sección 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

41. En una ciudad con un problema de contaminación de aire, un autobús no tiene motor de combustión. Corre con la energía que extrae de un gran volante que gira rápidamente bajo el suelo del autobús. En la terminal de autobuses, el volante se pone a girar a su máxima rapidez de rotación de 4 000 rev/min mediante un motor eléctrico. Cada vez que el autobús aumenta rapidez, el volante frena ligeramente. El autobús está equipado con frenos regenerativos de modo que el volante aumenta rapidez cuando el autobús frena. El volante es un cilindro sólido uniforme con 1 600 kg de masa y 0.650 m de radio. El cuerpo del autobús realiza trabajo contra la resistencia del aire y la resistencia de rodamiento a la relación promedio de 18.0 hp mientras viaja con una rapidez promedio de 40.0 km/h. ¿Cuánto puede viajar el autobús antes de que el volante tenga que ponerse a girar para aumentar la rapidez de nuevo?

42. El Big Ben, el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene una manecilla horaria de 2.70 m de largo con una masa



Figura P10.42 Problemas 42 y 76.



de 60.0 kg y un minutero de 4.50 m de largo con una masa de 100 kg (figura P10.42). Calcule la energía cinética rotacional total de las dos manecillas en torno al eje de rotación. (Modele las manecillas como largas barras delgadas.)

43. El trompo de la figura P10.43 tiene un momento de inercia igual a 4.00×10^{-4} kg · m^2 e inicialmente está en reposo. Es libre de dar vueltas en torno al eje estable AA'. Una cuerda, enrollada alrededor de una espiga a lo largo del eje del trompo, se jala en tal forma que mantiene una tensión constante de 5.57 N. Si la cuerda no se desliza mientras se desenrolla de la espiga, ¿cuál es la rapidez angular del trompo después de jalar 80.0 cm de cuerda de la espiga?

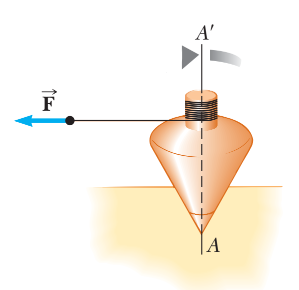


Figura P10.43

44. ● Considere el sistema que se muestra en la figura P10.44 con $m_1 = 20.0$ kg, $m_2 = 12.5$ kg, $R = 0.200$ m y la masa de la polea uniforme $M = 5.00$ kg. El objeto m_2 descansa sobre el suelo y el objeto m_1 está 4.00 m sobre el suelo cuando se libera del reposo. El eje de la polea no tiene fricción. La cuerda es ligera, no se estira y no se desliza sobre la polea. Calcule el intervalo de tiempo requerido para que m_1 golpee el suelo. ¿Cómo cambiaría su respuesta si la polea no tuviera masa?

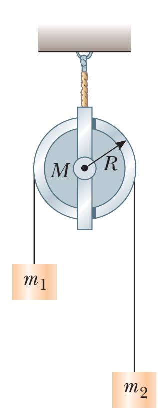


Figura P10.44

45. En la figura P10.45, el bloque deslizante tiene una masa de 0.850 kg, el contrapeso tiene una masa de 0.420 kg y la polea es un cilindro hueco con una masa de 0.350 kg, radio interior de 0.020 0 m y radio exterior de 0.030 0 m. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie horizontal es 0.250. La polea gira sin fricción sobre su eje. La cuerda ligera no se estira y no se desliza sobre la polea. El bloque tiene una velocidad de 0.820 m/s hacia la polea cuando pasa a través de una fotopuerta. a) Use métodos energéticos para predecir su rapidez después de que se mueve a una segunda fotopuerta, a 0.700 m de distancia. b) Encuentre la rapidez angular de la polea en el mismo momento.

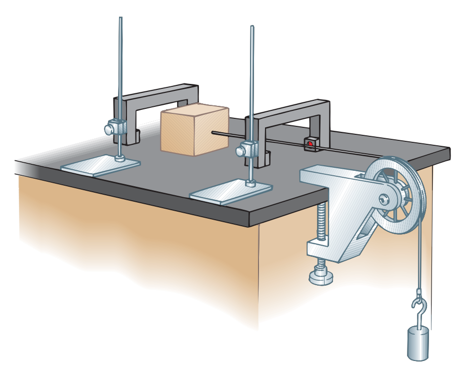


Figura P10.45

46. Una barra cilíndrica de 24.0 cm de largo con 1.20 kg de masa y 1.50 cm de radio, tiene una bola de 8.00 cm de diámetro y 2.00 kg de masa unida a un extremo. El arreglo originalmente es vertical y estable, con la bola en lo alto. El sistema es libre de girar en torno al extremo inferior de la barra después de darle un ligero codazo. a) Después de que la barra da vuelta 90°, ¿cuál es su energía cinética rotacional? b) ¿Cuál es la rapidez angular de la barra y la bola? c) ¿Cuál es la rapidez lineal de la bola? d) ¿Cómo se compara esta rapidez con la rapidez si la bola cae libremente la misma distancia de 28 cm?

47. Un objeto con un peso de 50.0 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de un carrete de 0.250 m de radio y 3.00 kg de masa. El carrete es un disco sólido, libre de dar vueltas en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa a través de su centro. El objeto suspendido se libera 6.00 m sobre el suelo. a) Determine la tensión en la cuerda, la aceleración del objeto y la rapidez con la que el objeto golpea el suelo. b) Verifique su última respuesta con el uso del principio de conservación de la energía para encontrar la rapidez con la que el objeto golpea el suelo.

48. Un carrusel horizontal de 800 N es un disco sólido de 1.50 m de radio, que parte del reposo mediante una fuerza horizontal constante de 50.0 N aplicada tangencialmente al borde del disco. Encuentre la energía cinética del disco después de 3.00 s.

49. Este problema describe un método experimental para determinar el momento de inercia de un objeto con forma irregular tal como la carga para un satélite. La figura P10.49 muestra un contrapeso de masa m suspendido mediante una cuerda enrollada alrededor de un carrete de radio r, que forma parte de una tornamesa que sostiene al objeto. La tornamesa puede dar vuelta sin fricción. Cuando el contrapeso se libera desde el reposo, desciende una distancia h y adquiere una rapidez v. Demuestre que el momento de inercia I del aparato giratorio (incluida la tornamesa) es $mr^2(2gh/v^2 - 1)$.

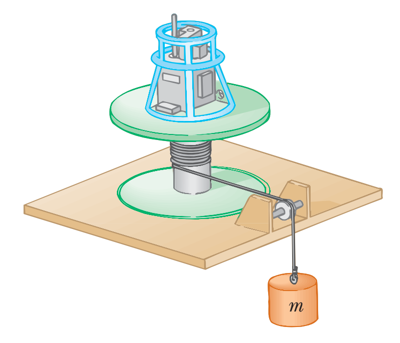


Figura P10.49

50. La cabeza de una cortadora de pasto tiene 100 g de cuerda devanados en un carrete cilíndrico ligero con diámetro interior de 3.00 cm y diámetro exterior de 18.0 cm, como se muestra en la figura P10.50. La cuerda tiene una densidad lineal de 10.0 g/m. Una sola hebra de la cuerda se extiende 16.0 cm desde el borde exterior del carrete. a) Cuando se enciende, la cortadora aumenta su velocidad de 0 a 2 500 rev/min en 0.215 s. a) ¿Qué potencia promedio entrega el motor de la cortadora a la cabeza mientras acelera? b) Cuando la cortadora corta pasto, gira a 2 000 rev/min y el pasto ejerce una fuerza tangencial promedio de 7.65 N sobre el extremo exterior de la cuerda, que todavía está a una distancia radial de 16.0 cm desde el borde exterior del carrete, ¿cuál es la potencia entregada a la cabeza bajo carga?

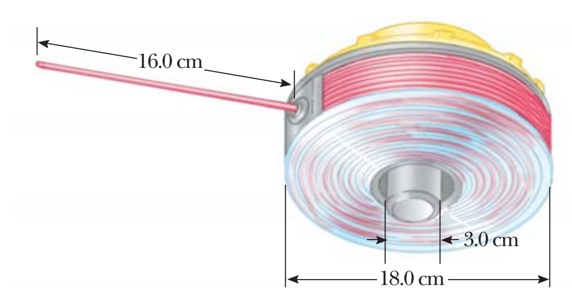


Figura P10.45

51. a) Un disco sólido uniforme de radio R y masa M es libre de dar vuelta sobre un pivote sin fricción a través de un punto sobre su borde (figura P10.51). Si el disco se libera desde el reposo en la posición que se muestra por el círculo azul, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco llega a la posición indicada por el círculo a rayas? b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo en el disco en la posición a rayas? c) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso a) con un aro uniforme.

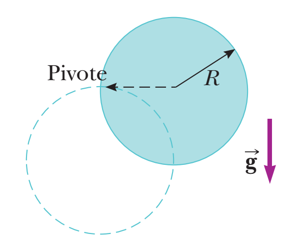


Figura P10.51

Sección 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

52. ● Una esfera sólida se libera de una altura h desde lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Calcule la rapidez de la esfera cuando llega a la parte baja del plano inclinado a) en el caso en que rueda sin deslizarse y b) en el caso que se desliza sin fricción sin rodar. c) Compare los intervalos de tiempo requeridos para llegar al fondo en los casos a) y b).

53. Un cilindro de 10.0 kg de masa rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. En cierto instante su centro de masa tiene una rapidez de 10.0 m/s. Determine a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa y c) su energía total.

54. ● Un cubo uniforme de masa m y longitud de lado r se desliza con rapidez v sobre una superficie horizontal con fricción despreciable. Después el cubo se mueve sobre un plano inclinado uniforme que forma un ángulo θ con la horizontal. Un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizarse con su centro de masa móvil con rapidez v y encuentra un plano inclinado del mismo ángulo de inclinación pero con suficiente fricción que el cilindro continúa rodando sin deslizarse. a) ¿Cuál objeto recorrerá mayor distancia arriba del plano? b) Encuentre la diferencia entre las distancias máximas que los objetos viajan por el plano. c) ¿Cuál es la explicación para esta diferencia en las distancias recorridas?

55. a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Compare esta aceleración con la de un aro uniforme. b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que se requiere para mantener movimiento de rodamiento puro para el disco?

56. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan lado a lado en lo alto de un plano inclinado de altura h. Si se liberan desde el reposo al mismo tiempo y rueda sin deslizarse, ¿cuál objeto alcanza primero la parte baja? Verifique su respuesta al calcular sus magnitudes de velocidad cuando llegan a la parte baja en término de h.

57. ● Una lata metálica que contiene sopa de hongos condensada tiene 215 g de masa, 10.8 cm de alto y 6.38 cm de diámetro. Se coloca en reposo sobre su lado en lo alto de un plano inclinado de 3.00 m de largo que está a 25.0° con la horizontal y luego se libera para rodar recto hacia abajo. Llega a la parte baja del plano después de 1.50 s. Si supone conservación de energía mecánica, calcule el momento de inercia de la lata. ¿Qué parte de la información, si alguna, es innecesaria para calcular la solución?

58. ● Una pelota de tenis es una esfera hueca con una pared delgada. Se pone a rodar sin deslizarse a 4.03 m/s sobre una sección horizontal de una pista, como se muestra en la figura P10.58. Rueda alrededor del interior de un bucle circular vertical de 90.0 cm de diámetro y finalmente deja la pista en un punto 20.0 cm abajo de la sección horizontal. a) Encuentre la rapidez de la pelota en lo alto del bucle. Demuestre que no caerá de la pista. b) Encuentre su rapidez mientras deja la pista. **¿Qué pasaría si?** c) Suponga que la fricción estática entre la pelota y la pista es despreciable, de modo que la pelota se desliza en lugar de rodar. ¿Su rapidez por lo tanto sería mayor, menor o igual en lo alto del bucle? Explique.

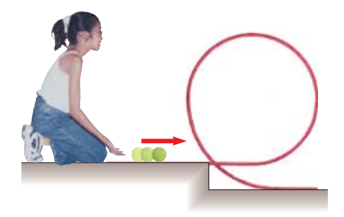


Figura P10.58

Problemas adicionales

59. Como se muestra en la figura P10.59, las chimeneas que se derrumban con frecuencia se rompen a la mitad de la caída porque el mortero entre los ladrillos no puede soportar mucho esfuerzo de corte. Conforme la chimenea comienza a caer, las fuerzas de corte deben actuar sobre las secciones superiores para acelerarlas tangencialmente de modo que puedan mantener la rotación de la parte más baja de la pila. Por simplicidad, modele la chimenea como una barra uniforme de longitud ℓ

articulada en el extremo inferior. La barra parte del reposo en una posición vertical (con el eje sin fricción en la parte baja) y cae bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué fracción de la longitud de la barra tiene una aceleración tangencial mayor que g sen θ, donde θ es el ángulo que la chimenea forma con el eje vertical?

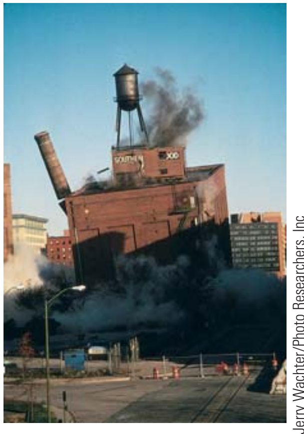


Figura P10.59 Un sitio de demolición de edificio en Baltimore, Maryland. A la izquierda está una chimenea, la mayor parte oculta por el edificio, que se rompió en su camino hacia abajo. Compare con la figura 10.18.

60. **Problema de repaso.** Una batidora consiste en tres delgadas barras, cada una de 10.0 cm de longitud. Las barras divergen de un eje central, separadas unas de otras en 120°, y todas giran en el mismo plano. Una bola se une al final de cada barra. Cada bola tiene área de sección transversal de 4.00 cm^2 y está tan moldeada que tiene un coeficiente de arrastre de 0.600. Calcule la potencia de entrada que se requiere para girar la batidora a 1 000 rev/min a) en aire y b) en agua.

61. Una cuerda de nailon ligero de 4.00 m de largo se devana alrededor de un carrete cilíndrico uniforme de 0.500 m de radio y 1.00 kg de masa. El carrete se monta sobre un eje sin fricción e inicialmente está en reposo. La cuerda se jala del carrete con una aceleración constante de 2.50 m/s^2 de magnitud. a) ¿Cuánto trabajo se consumió en el carrete cuando éste llega a una rapidez angular de 8.00 rad/s? b) Si supone que hay suficiente cuerda en el carrete, ¿cuánto tarda el carrete en llegar a esta rapidez angular? c) ¿Hay suficiente cuerda en el carrete?

62. ● Un sistema de elevador en un edificio alto consiste en un carro de 800 kg y un contrapeso de 950 kg, unido mediante un cable que pasa sobre una polea de 280 kg de masa. La polea, llamada roldana, es un cilindro sólido de 0.700 m de radio que gira sobre un eje horizontal. El cable tiene masa comparativamente pequeña y longitud constante. No se desliza sobre la roldana. El carro y el contrapeso se mueven verticalmente, uno junto al otro dentro del mismo eje. Un número n de personas, cada una de 80.0 kg de masa, viajan en el carro del elevador móvil hacia arriba a 3.00 m/s y se aproximan al piso donde debe detenerse el carro. Como una medición de conservación de energía, una computadora desconecta el motor eléctrico del elevador justo en el momento correcto de modo que el sistema roldana–carro–contrapeso se desliza libremente sin fricción y llega al reposo en el piso deseado. Ahí es atrapado por un simple cerrojo, en lugar de un freno pesado. a) Determine la distancia d que el carro se desliza hacia arriba como función de n. Evalúe la distancia para b) $n = 2$, c) $n = 12$ y d) $n = 0$. e) ¿La expresión en el inciso a) se aplica a todos los valores enteros de n o sólo para qué valores? Explique. f) Describa la forma de una gráfica de d con n. g) ¿Algunos datos son innecesarios para la solución? Explique. h) Contraste el significado de la conservación de energía que se usó en el enunciado de este problema y como se usó en el capítulo 8. i) Encuentre la magnitud de la aceleración del carro del elevador que se desliza, dependiente de n.

63. ● La figura P10.63 es una fotografía de un aspersor. Su rotor consiste en tres tubos metálicos que se llenan con agua cuando una manguera se conecta a la base. A medida que el agua rocía desde los hoyos en los extremos de los brazos y el hoyo cerca del centro de cada brazo, el ensamble con los tres brazos da vueltas. Para analizar esta situación, haga las siguientes suposiciones: 1) Los brazos se modelan como delgadas barras rectas, cada una de longitud L. 2) El agua que viene del hoyo a la distancia ℓ desde el centro rocía horizontalmente, paralelo al suelo y perpendicular al brazo. 3) El agua emitida de los hoyos en los extremos de los brazos rocía radialmente hacia afuera desde el centro del rotor. Cuando está lleno con agua, cada brazo tiene masa m. El centro del ensamble no tiene masa. El agua expulsada de un hoyo a la distancia ℓ desde el centro causa una fuerza de empuje F sobre el brazo que contiene el hoyo. El montaje para el ensamble del rotor de tres brazos ejerce un momento de torsión friccionante que se describe mediante $\tau = -b\omega$, donde ω es la rapidez angular del ensamble. a) Imagine que el aspersor está en operación. Encuentre una expresión para la rapidez angular constante con la que da vueltas el ensamble *después* de completar un periodo inicial de aceleración angular. Su expresión debe estar en términos de F, ℓ y b. b) Imagine que el rociador ha estado en reposo y apenas se enciende. Encuentre una expresión para la aceleración angular *inicial* del rotor, esto es, la aceleración angular cuando los brazos están llenos con agua y el ensamble apenas comienza a moverse desde el reposo. Su expresión debe estar en términos de F, ℓ, m y L. c) Ahora, dé un paso hacia la realidad a partir del modelo simplificado. Los brazos en realidad están doblados como se muestra en la fotografía. Por lo tanto, el agua proveniente de los extremos de los brazos en realidad no se rocía radialmente. ¿Cómo afectará este hecho la rapidez angular constante con la que el ensamble da vueltas en el inciso a)? En realidad, ¿será mayor, menor o no cambia? Proporcione un argumento convincente para su respuesta. d) ¿Cómo el doblez de los brazos, descritos en el inciso c), afectará la aceleración angular en el inciso b)? En realidad, ¿será mayor, menor o no cambia? Proporcione un argumento convincente para su respuesta.

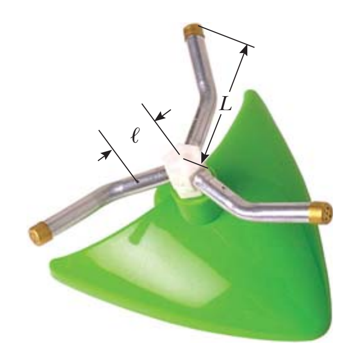


Figura P10.63

64. Un eje gira a 65.0 rad/s en el tiempo $t = 0$. De ahí en adelante, su aceleración angular se conoce por

$$\alpha = -10.0 \text{ rad/s}^2 - 5.00t \text{ rad/s}^2$$

donde t es el tiempo transcurrido. a) Encuentre su rapidez angular en $t = 3.00$ s. b) ¿Cuánto ha girado en estos 3 s?

65. Una barra larga uniforme de longitud L y masa M se articula en torno a un eje horizontal sin fricción a través de un extremo. La barra se libera, casi del reposo en una posición vertical, como se muestra en la figura P10.65. En el instante cuando la barra está horizontal, encuentre: a) su rapidez angular, b) la magnitud de su aceleración angular, c) las componentes x y y de la aceleración de su centro de masa y d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje.

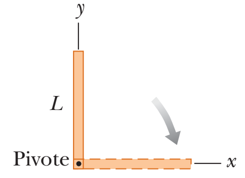


Figura P10.65

66. Un cordón se enrolla alrededor de una polea de masa m y radio r. El extremo libre del cordón está conectado a un bloque de masa M. El bloque parte del reposo y luego se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es μ. a) Use métodos energéticos para mostrar que la rapidez del bloque como función de la posición d por el plano es

$$v = \sqrt{\frac{4gdM(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{m + 2M}}$$

b) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque en términos de μ, m, M, g y θ.

67. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta ponchada. Una amiga gira la otra rueda, de 0.381 m de radio, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.67). Una gota que salta de la llanta en una vuelta alcanza $h = 54.0$ cm sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente vuelta se eleva 51.0 cm sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda. A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

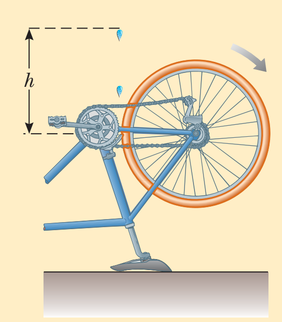


Figura P10.67 Problemas 67 y 68.

68. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta ponchada. Una amiga gira la otra rueda, de radio R, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.67). Una gota que salta de la llanta en una vuelta se eleva una distancia h_1 sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente vuelta se eleva una distancia $h_2 < h_1$ sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda. A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

69. Un carrete uniforme hueco tiene radio interior $R/2$, radio exterior R y masa M (figura P10.69). Está montado de modo que da vueltas sobre un eje horizontal fijo. Un contrapeso de masa m se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. El contrapeso cae desde el reposo en $t = 0$ a una posición y en el tiempo t. Demuestre que el momento de torsión debido a las fuerzas de fricción entre carrete y eje es

$$\tau_f = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - M\frac{5y}{4t^2}\right]$$

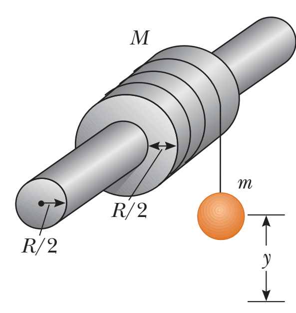


Figura P10.69

70. a) ¿Cuál es la energía cinética rotacional de la Tierra en torno a su eje de giro? Modele la Tierra como una esfera uniforme y use datos de los forros del texto. b) La energía cinética rotacional de la Tierra disminuye de manera estable debido a la fricción de las mareas. Encuentre el cambio en un día, si supone que el periodo rotacional aumenta 10.0 μs cada año.

71. Dos bloques, como se muestra en la figura P10.71, están conectados mediante una cuerda de masa despreciable que pasa sobre una polea de 0.250 m de radio y momento de inercia I. El bloque sobre el plano inclinado sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de 2.00 m/s^2. a) Determine T_1 y T_2, las tensiones en las dos partes de la cuerda. b) Encuentre el momento de inercia de la polea.

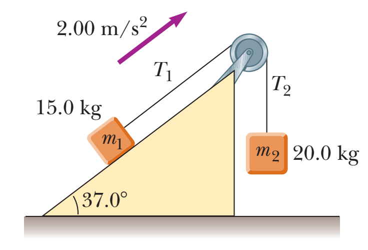


Figura P10.71

72. El carrete que se muestra en la figura P10.72 tiene radio R y momento de inercia I. Un extremo del bloque de masa m se conecta a un resorte con constante de fuerza k, y el otro extremo se amarra a una cuerda enrollada alrededor del carrete. El eje del carrete y el plano inclinado no tienen fricción. El

carrete se enrolla contra las manecillas del reloj de modo que el resorte se estira una distancia d desde su posición no estirada y luego el carrete se libera desde el reposo. a) Encuentre la rapidez angular del carrete cuando el resorte nuevamente está en su posición normal (no estirada). b) Evalúe numéricamente la rapidez angular en este punto, considere $I = 1.00$ kg·m^2, $R = 0.300$ m, $k = 50.0$ N/m, $m = 0.500$ kg, $d = 0.200$ m y $\theta = 37.0°$.

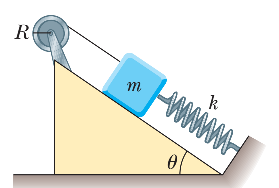


Figura P10.72

73. Como resultado de la fricción, la rapidez angular de una rueda cambia con el tiempo de acuerdo con

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$$

donde ω_0 y σ son constantes. La rapidez angular cambia de 3.50 rad/s en $t = 0$ a 2.00 rad/s en $t = 9.30$ s. Use esta información para determinar σ y ω_0. Luego determine a) la magnitud de la aceleración angular en $t = 3.00$ s, b) el número de revoluciones que da la rueda en los primeros 2.50 s y c) el número de revoluciones que da antes de llegar al reposo.

74. Una demostración común, que se ilustra en la figura P10.74, consiste en una bola que descansa en un extremo de una tabla uniforme de longitud ℓ, con bisagras en el otro extremo y elevada a un ángulo θ. Una taza ligera se une a la tabla en r_c de modo que atrapará la bola cuando la barra de soporte se retire súbitamente. a) Demuestre que la bola retrasará su caída a la de la tabla que cae cuando θ sea menor que 35.3°. b) Si supone que la tabla tiene 1.00 m de largo y se sostiene a este ángulo límite, demuestre que la taza debe estar a 18.4 cm del extremo que se mueve.

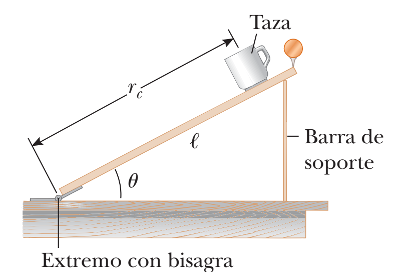


Figura P10.74

75. ● Un alto edificio se ubica en el ecuador de la Tierra. Mientras la Tierra da vueltas, una persona en el piso superior del edificio se mueve más rápido que alguien en el suelo en relación con un marco de referencia inercial porque la última persona está más cerca del eje de la Tierra. En consecuencia, si un objeto se deja caer desde el piso superior al suelo, que está a una distancia h por abajo, aterriza al este del punto verticalmente abajo de donde se dejó caer. a) ¿A qué distancia al este aterrizará el objeto? Exprese su respuesta en términos de h, g y la rapidez angular ω de la Tierra. Ignore la resistencia del aire y suponga que la aceleración en caída libre es constante en este intervalo de alturas. b) Evalúe el desplazamiento hacia el este para $h = 50.0$ m. c) A su juicio, ¿está justificado ignorar este aspecto del *efecto Coriolis* en el estudio previo de la caída libre?

76. La manecilla horaria y el minutero del Big Ben, el reloj de la torre del Parlamento en Londres, miden 2.70 m y 4.50 m de largo y tienen masas de 60.0 kg y 100 kg, respectivamente (vea la figura P10.42). **i)** Determine el momento de torsión total debido al peso de estas manecillas en torno al eje de rotación cuando la hora es a) 3:00, b) 5:15, c) 6:00, d) 8:20 y e) 9:45. (Modele las manecillas como largas barras delgadas uniformes.) **ii)** Determine todas las horas cuando el momento de torsión total en torno al eje de rotación sea cero. Determine las horas al segundo más cercano y resuelva numéricamente una ecuación trascendental.

77. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a una barra fija (figura P10.77). Demuestre que a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco, b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$ y c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$ después de que el disco descendió una distancia h. Verifique su respuesta a el inciso a) con el planteamiento energético.

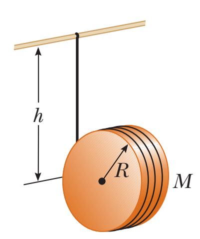


Figura P10.77

78. Una esfera sólida uniforme de radio r se coloca en la superficie interior de un tazón hemisférico con radio R mucho mayor. La esfera se libera desde el reposo a un ángulo θ con la vertical y rueda sin deslizarse (figura P10.78). Determine la rapidez angular de la esfera cuando llega al fondo del tazón.

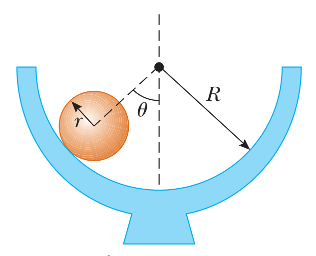


Figura P10.78

79. Una esfera sólida de masas m y radio r rueda sin deslizarse a lo largo de la pista que se muestra en la figura P10.79. Parte del reposo con el punto más bajo de la esfera a una altura h

sobre la parte baja del bucle de radio R, mucho mayor que r. a) ¿Cuál es el valor mínimo de h (en términos de R) tal que la esfera completa el bucle? b) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza neta sobre la esfera en el punto P si $h = 3R$?

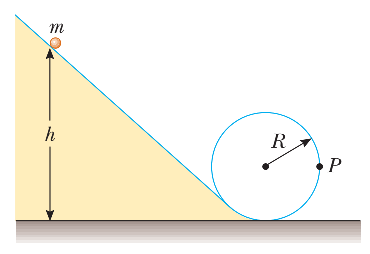


Figura P10.79

80. Una barra delgada de 0.630 kg de masa y 1.24 m de longitud está en reposo, colgando verticalmente de una bisagra fuerte fija en su extremo superior. Súbitamente se le aplica una fuerza impulsiva horizontal $(14.7\hat{\mathbf{i}})$ N. a) Suponga que la fuerza actúa en el extremo inferior de la barra. Encuentre la aceleración de su centro de masa y la fuerza horizontal que ejerce la bisagra. b) Suponga que la fuerza actúa en el punto medio de la barra. Encuentre la aceleración de este punto y la reacción horizontal de la bisagra. c) ¿Dónde se puede aplicar el impulso de modo que la bisagra no ejerza fuerza horizontal? Este punto se llama *centro de percusión*.

81. a) Una delgada barra de longitud h y masa M se mantiene verticalmente con su extremo inferior descansando sobre una superficie horizontal sin fricción. Luego la barra se libera para caer libremente. Determine la rapidez de su centro de masa justo antes de golpear la superficie horizontal. b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la barra tiene un eje fijo en su extremo inferior. Determine la rapidez del centro de masa de la barra justo antes de golpear la superficie.

82. Después de la cena de acción de gracias, su tío cae en un profundo sueño, sentado justo frente al aparato de televisión. Un travieso nieto equilibra una pequeña uva esférica en lo alto de su cabeza calva, que en sí tiene la forma de una esfera. Después de que todos los niños han tenido tiempo de reír nerviosamente, la uva parte del reposo y rueda sin deslizarse. La uva pierde contacto con la calva de su tío cuando la línea radial que la une con el centro de curvatura forma ¿qué ángulo con la vertical?

83. Un carrete de alambre de masa M y radio R se desenrolla bajo una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ (figura P10.83). Si supone que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, demuestre que a) la aceleración del centro de masa es $4\vec{\mathbf{F}}/3M$ y b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* e igual en magnitud a $F/3$.

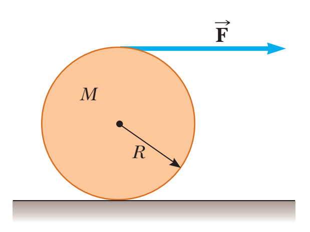


Figura P10.83

c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizarse, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa después de que rodó una distancia d?

84. Un tablón con masa $M = 6.00$ kg monta sobre lo alto de dos rodillos cilíndricos sólidos idénticos que tienen $R = 5.00$ cm y $m = 2.00$ kg (figura P10.84). Al tablón lo jala una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ de 6.00 N de magnitud aplicada al extremo del tablón y perpendicular a los ejes de los cilindros (que son paralelos). Los cilindros ruedan sin deslizarse sobre una superficie plana. Tampoco hay deslizamiento entre los cilindros y el tablón. a) Encuentre la aceleración del tablón y de los rodillos. b) ¿Qué fuerzas de fricción actúan?

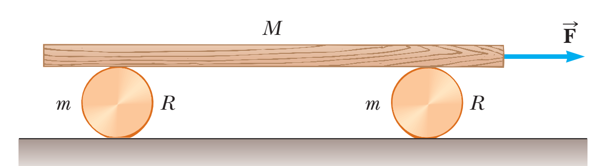


Figura P10.84

85. Un carrete de hilo consiste en un cilindro de radio R_1 con tapas laterales de radio R_2, como se muestra en la vista lateral que se ilustra en la figura P10.85. La masa del carrete, incluido el hilo, es m, y su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro es I. El carrete se coloca sobre una superficie horizontal rugosa de modo que rueda sin deslizarse cuando una fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que actúa hacia la derecha se aplica al extremo libre del hilo. Demuestre que la magnitud de la fuerza de fricción que ejerce la superficie sobre el carrete se conoce por

$$f = \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2}\right)T$$

Determine la dirección de la fuerza de fricción.

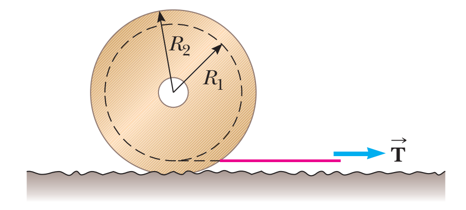


Figura P10.85

86. ● Un gran rollo de papel higiénico, de radio inicial R, yace sobre una larga superficie horizontal con el extremo exterior del papel clavado a la superficie. Al rollo se le da un pequeño empujón ($v_i \approx 0$) y comienza a desenrollarse. Suponga que el rollo tiene una densidad uniforme y que la energía mecánica se conserva en el proceso. a) Determine la rapidez del centro de masa del rollo cuando su radio disminuye a r. b) Calcule un valor numérico para esta rapidez en $r = 1.00$ mm, si supone $R = 6.00$ m. c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué le ocurre a la energía del sistema cuando el papel se desenrolla por completo?

Respuestas a las preguntas rápidas

10.1 **i)**, c). Para una rotación de más de 180°, el desplazamiento angular debe ser mayor que $\pi = 3.14$ rad. Los desplazamientos angulares en las tres opciones son a) 6 rad − 3 rad = 3 rad, b) 1 rad − (−1) rad = 2 rad y c) 5 rad − 1 rad = 4 rad. **ii)**, b). Ya que todos los desplazamientos angulares se presentan en el mismo intervalo de tiempo, el desplazamiento con el valor más bajo estará asociado con la rapidez angular promedio más baja.

10.2 b). En la ecuación 10.8, las magnitudes de velocidad inicial y final son iguales en los tres casos. Como resultado, la aceleración angular es inversamente proporcional al desplazamiento angular. En consecuencia, la mayor aceleración angular se asocia con el menor desplazamiento angular.

10.3 **i)**, b). El sistema de la plataforma, Alex, y Brian es un objeto rígido, así que todos los puntos en el objeto rígido tienen la misma rapidez angular. **ii)**, a). La rapidez tangencial es proporcional a la distancia radial desde el eje de rotación.

10.4 a). Casi toda la masa de la tubería está a la misma distancia del eje de rotación, de modo que tiene un momento de inercia más grande que el cilindro sólido.

10.5 **i)**, b). El mango más gordo del destornillador le da un brazo de momento más grande y aumenta el momento de torsión que puede aplicar con una cierta fuerza de su mano. **ii)**, a). El mango más largo de la llave le da un brazo de momento más grande y aumenta el momento de torsión que puede aplicar con una cierta fuerza de su mano.

10.6 b). Con el doble de momento de inercia y el mismo momento de torsión friccionante, hay la mitad de aceleración angular. Con la mitad de la aceleración angular, requerirá el doble de largo para cambiar la rapidez a cero.

10.7 b). Toda la energía potencial gravitacional del sistema caja–Tierra se transforma en energía cinética de traslación. Para la bola, parte de la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra se transforma en energía cinética rotacional, lo que deja menos para energía cinética traslacional, de modo que la bola se mueve colina abajo más lentamente que la caja.



Una clavadista competitiva experimenta una rotación durante un clavado. Ella logra girar a una rapidez más alta cuando dobla su cuerpo y forma con él un paquete más pequeño, esto se debe al principio de conservación de cantidad de movimiento angular, como se explica en este capítulo. (The Image Bank/Getty Images)

11 Cantidad de movimiento angular

El tema central de este capítulo es la cantidad de movimiento angular, una cantidad que tiene un papel clave en la dinámica rotacional. En analogía con el principio de conservación de cantidad de movimiento lineal para un sistema aislado, la cantidad de movimiento angular de un sistema se conserva si sobre el sistema no actúan momentos de torsión externos. Como la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal, la ley de conservación de cantidad de movimiento angular es una ley fundamental de la física, igualmente válida para sistemas relativistas y cuánticos.

11.1 Producto vectorial y momento de torsión

Una importante consideración al definir la cantidad de movimiento angular es el proceso de multiplicar dos vectores mediante la operación llamada *producto vectorial.* El producto vectorial se introducirá al considerar la naturaleza vectorial del momento de torsión.

Considere una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto rígido en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ (figura 11.1). Como se vio en la sección 10.6, la *magnitud* del momento de torsión debido a esta fuerza en torno a un eje a través del origen es $rF \operatorname{sen} \phi$, donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. El eje en torno al que $\vec{\mathbf{F}}$ tiende a producir rotación es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$.

El vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se relaciona con los dos vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. Es posible establecer una correspondencia matemática entre $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ al usar una operación matemática llamada **producto vectorial** o **producto cruz**:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad (11.1)$$

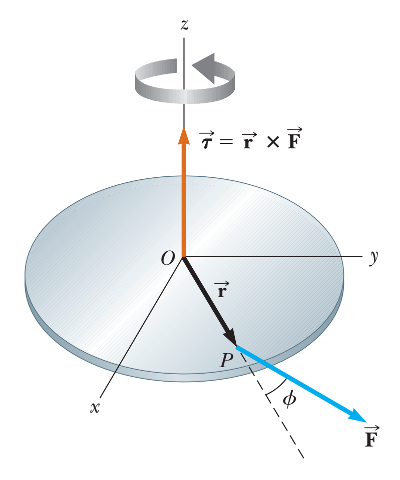


Figura 11.1 El vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ y el vector fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 11.1

El producto cruz es un vector

Recuerde que el resultado de tomar un producto cruz entre dos vectores es *un tercer vector*. La ecuación 11.3 sólo da la magnitud de este vector.

Ahora se dará una definición formal del producto vectorial. Dados dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, el **producto vectorial** $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ se define como un tercer vector $\vec{\mathbf{C}}$, que tiene una magnitud de AB sen θ, donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Es decir, si $\vec{\mathbf{C}}$ se conoce por

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad \textbf{(11.2)}$$

su magnitud es

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{(11.3)}$$

La cantidad AB sen θ es igual al área del paralelogramo formado por $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, como se muestra en la figura 11.2. La *dirección* de $\vec{\mathbf{C}}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y la mejor forma de determinar esta dirección es usar la regla de la mano derecha, que se ilustra en la figura 11.2. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de $\vec{\mathbf{A}}$ y luego "se enrollan" hacia $\vec{\mathbf{B}}$ a través del ángulo θ. La dirección del pulgar recto hacia arriba es la dirección de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$. Debido a la notación, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ con frecuencia se lee " $\vec{\mathbf{A}}$ cruz $\vec{\mathbf{B}}$", por esto el término *producto cruz.*

Algunas propiedades del producto vectorial que se siguen de su definición son:

Propiedades del producto vectorial ▶

1. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial *no* es conmutativo. En vez de ello, el orden en que los dos vectores se multiplican en un producto cruz es importante:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} \quad \textbf{(11.4)}$$

   Por lo tanto, si cambia el orden de los vectores en un producto cruz, debe cambiar el signo. Esta correspondencia se verifica fácilmente con la regla de la mano derecha.

2. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 0$ o $180°$), en tal caso $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$; en consecuencia, se sigue que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$.
3. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, en tal caso $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB$.
4. El producto vectorial obedece la ley distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}} \quad \textbf{(11.5)}$$

5. La derivada del producto cruz respecto de alguna variable como t es

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \quad \textbf{(11.6)}$$

   donde es importante mantener el orden multiplicativo de los términos en el lado derecho a la vista de la ecuación 11.4.

Se deja como ejercicio (problema 10) demostrar a partir de las ecuaciones 11.3 y 11.4, y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ obedecen las siguientes reglas:

Productos cruz de vectores unitarios ▶

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \textbf{(11.7a)}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \quad \textbf{(11.7b)}$$

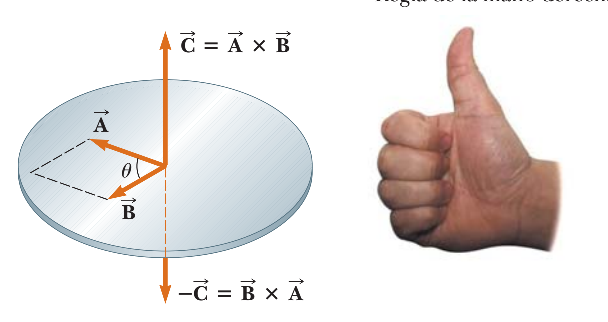


Figura 11.2 El producto vectorial $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es un tercer vector $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene una magnitud AB sen θ igual al área del paralelogramo que se muestra. La dirección de $\vec{\mathbf{C}}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \quad \textbf{(11.7c)}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \quad \textbf{(11.7d)}$$

Los signos son intercambiables en los productos cruz. Por ejemplo, $\vec{\mathbf{A}} \times (-\vec{\mathbf{B}}) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ o $\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{j}}) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$.

El producto cruz de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se expresa en la forma de determinantes siguiente:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Expandir estos determinantes da como resultado

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}} \quad \textbf{(11.8)}$$

Conocida la definición del producto cruz, ahora se puede asignar una dirección al vector momento de torsión. Si la fuerza se encuentra en el plano *xy*, como en la figura 11.1, el momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se representa mediante un vector paralelo al eje *z*. La fuerza en la figura 11.1 crea un momento de torsión que tiende a dar vuelta al objeto contra las manecillas del reloj en torno al eje *z*; la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es hacia *z* creciente, y por lo tanto $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ está en la dirección *z* positiva. Si en la figura 11.1 se invierte la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ estaría en la dirección *z* negativa.

Pregunta rápida 11.1 ¿Cuál de los siguientes enunciados acerca de la correspondencia entre la magnitud del producto cruz de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores es verdadero? a) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es mayor que *AB*. b) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es menor que *AB*. c) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser mayor o menor que *AB*, dependiendo del ángulo entre los vectores. d) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser igual a *AB*.

EJEMPLO 11.1 El producto vectorial

Dos vectores que se encuentran en el plano *xy* se conocen por las ecuaciones $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y verifique que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conocidas las notaciones en vectores unitarios de los vectores, piense en qué direcciones apuntan los vectores en el espacio. Imagine el paralelogramo que se muestra en la figura 11.2 para estos vectores.

Categorizar Ya que se usa la definición del producto cruz explicada en esta sección, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Escriba el producto cruz de los dos vectores:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

Realice la multiplicación:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Para verificar que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$, evalúe $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

Realice la multiplicación:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}}) \times 2\hat{\mathbf{i}} + (-\hat{\mathbf{i}}) \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 3\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0 - 3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} + 0 = -7\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo tanto, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$. Como un método alternativo para encontrar $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, podría usar la ecuación 11.8. ¡Inténtelo!

EJEMPLO 11.2 El vector momento de torsión

Una fuerza de $\vec{\mathbf{F}} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ N se aplica a un objeto que es articulada en torno a un eje fijo alineado a lo largo del eje coordenado z. La fuerza se aplica a un punto ubicado en $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Encuentre el vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conocidas las notaciones en vectores unitarios, piense en las direcciones de los vectores fuerza y de posición. Si esta fuerza se aplicara en esta posición, ¿en qué dirección giraría un objeto con eje en el origen?

Categorizar Ya que se usa la definición del producto cruz explicado en esta sección, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Configure el vector momento de torsión con la ecuación 11.1:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\text{ m}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\text{ N}]$$

Realice la multiplicación:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\text{ N}\cdot\text{m}$$

Use las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [0 + 12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}} + 0]\text{ N}\cdot\text{m} = 2.0\hat{\mathbf{k}}\text{ N}\cdot\text{m}$$

Note que tanto $\vec{\mathbf{r}}$ como $\vec{\mathbf{F}}$ están en el plano xy. Como se esperaba, el vector momento de torsión es perpendicular a este plano, y tiene sólo una componente z. Se siguieron las reglas para cifras significativas que se explicaron en la sección 1.6, lo que condujo a una respuesta con dos cifras significativas. Se perdió algo de precisión porque se terminó por restar dos números cercanos.

11.2 Cantidad de movimiento angular: el sistema no aislado

Imagine un poste recto, rígido y vertical a través del hielo en un lago helado (figura 11.3). Una patinadora se desliza rápidamente hacia el poste, sin chocar con él. Conforme se acerca al poste, estira su mano y lo sujeta, una acción que la hace moverse en una trayectoria circular alrededor del poste. Así como la idea de la cantidad de movimiento lineal ayuda a analizar el movimiento traslacional, un análogo rotacional, la *cantidad de movimiento angular*, ayuda a analizar el movimiento de esta patinadora y otros objetos que experimentan movimiento rotacional.



Figura 11.3 Mientras la patinadora pasa al lado del poste, se sujeta de él, lo que la hace girar rápidamente alrededor del poste en una trayectoria circular.

En el capítulo 9 se desarrolló la forma matemática de la cantidad de movimiento lineal y después se procedió a mostrar cómo esta nueva cantidad era valiosa en la resolución de problemas. Para la cantidad de movimiento angular se seguirá un procedimiento similar.

Considere una partícula de masa m ubicada en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ y móvil con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ como en la figura 11.4. Al describir el movimiento traslacional se encontró que la fuerza neta en la partícula es igual a la relación de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento lineal, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$ (véase la ecuación 9.3). Tome el producto cruz de cada lado de la ecuación 9.3 con $\vec{\mathbf{r}}$, lo que da el momento de torsión neto en la partícula en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Ahora agregue al lado derecho el término $(d\vec{\mathbf{r}}/dt \times \vec{\mathbf{p}})$, que es cero porque $d\vec{\mathbf{r}}/dt = \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ son paralelos. En consecuencia

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}$$

El lado derecho de esta ecuación se reconoce como la derivada de $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ (véase la ecuación 11.6). Por lo tanto,

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})}{dt} \quad \textbf{(11.9)}$$

que es muy similar en forma a la ecuación 9.3, $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$. Este resultado sugiere que la combinación $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ participa en la misma disertación, en el movimiento rotacional, así como $\vec{\mathbf{p}}$ en el movimiento traslacional. A esta combinación se le conoce como *cantidad de movimiento angular* de la partícula:

La cantidad de **movimiento angular** instantánea $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula en relación con un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula $\vec{\mathbf{r}}$ y su cantidad de movimiento lineal instantánea $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \quad \textbf{(11.10)}$$

◄ Cantidad de movimiento angular de una partícula

Ahora la ecuación 11.9 se puede escribir como

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \quad \textbf{(11.11)}$$

que es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$. El momento de torsión hace que la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ cambie, tal como la fuerza hace que cambie la cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$. La ecuación 11.11 afirma que **el momento de torsión que actúa sobre una partícula es igual a la relación de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula.**

Note que la ecuación 11.11 sólo es válida si $\Sigma \vec{\boldsymbol{\tau}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se miden en torno al mismo eje. Además, **la expresión es válida para cualquier eje fijo en un marco inercial.**

La unidad del **SI** de la cantidad de movimiento angular es $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Note también que tanto la magnitud como la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ dependen de la elección del eje. Al seguir la regla de la mano derecha, se ve que la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. En la figura 11.4, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ están en el plano xy, así que $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z. Ya que $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ es

$$L = mvr \operatorname{sen} \phi \quad \textbf{(11.12)}$$

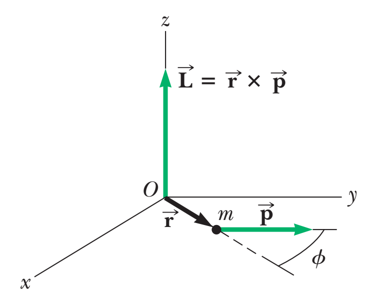


Figura 11.4 La cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ ubicada en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ es un vector conocido por $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$. El valor de $\vec{\mathbf{L}}$ depende del eje en torno al que se mida y es un vector perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{r}}$ como a $\vec{\mathbf{p}}$.

donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. Se sigue que L es cero cuando $\vec{\mathbf{r}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{p}}$ ($\phi = 0$ o 180°). En otras palabras, cuando la velocidad traslacional de la partícula es a lo largo de una línea que pasa a través del eje, la partícula tiene cantidad de movimiento angular cero respecto al eje. Por otra parte, si $\vec{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{p}}$ ($\phi = 90°$), en tal caso $L = mvr$. En dicho instante, la partícula se mueve exactamente como si estuviera en el borde de una rueda giratoria en torno al eje en un plano definido por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 11.2

¿La rotación es necesaria para la cantidad de movimiento angular?

Se puede definir cantidad de movimiento angular incluso si la partícula no se mueve en una trayectoria circular. Aun cuando una partícula se mueva en una línea recta tiene cantidad de movimiento angular en torno a cualquier eje desplazado de la trayectoria de la partícula.

Pregunta rápida 11.2 Recuerde a la patinadora descrita al principio de esta sección. Considere que su masa es m. **i)** ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular en relación con el poste en el instante en que está a una distancia d del poste si ella patinara directamente hacia él con rapidez v? a) cero, b) mvd, c) imposible de determinar. **ii)** ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular en relación con el poste en el instante en que está a una distancia d del poste si patinara con rapidez v a lo largo de una trayectoria recta que está a una distancia perpendicular a desde el poste? a) cero, b) mvd, c) mva, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 11.3 Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular

Una partícula se mueve en el plano *xy* en una trayectoria circular de radio *r*, como se muestra en la figura 11.5. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular en relación con un eje a través de *O* cuando su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}$.

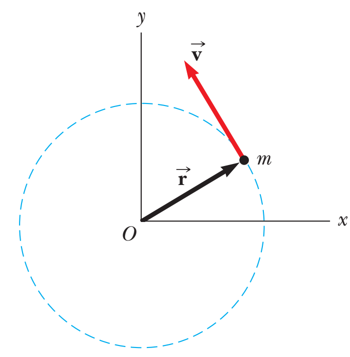


Figura 11.5 (Ejemplo 11.3) Una partícula móvil en un círculo de radio *r* tiene una cantidad de movimiento angular en torno a un eje a través de *O* que tiene magnitud *mvr*. El vector $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ apunta hacia *afuera* de la página.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La cantidad de movimiento lineal de la partícula cambia en dirección (pero no en magnitud). Por lo tanto, debe estar tentado a concluir que la cantidad de movimiento angular de la partícula siempre cambia. Sin embargo, en esta situación, este no es el caso. Vea por qué.

Categorizar Use la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula explicada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 11.12 para evaluar la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$:

$$L = mvr \operatorname{sen} 90° = mvr$$

Este valor de L es constante porque los tres factores a la derecha son constantes. La dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ también es constante, aun cuando la dirección de $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ siga cambiando. Para verificar esta afirmación, aplique la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ en la figura 11.5. Su pulgar apunta hacia arriba y se aleja de la página, así que esta es la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$. En consecuencia, se puede escribir la expresión vectorial $\vec{\mathbf{L}} = (mvr)\hat{\mathbf{k}}$. Si la partícula se moviera en sentido de las manecillas del reloj, $\vec{\mathbf{L}}$ apuntaría hacia abajo y adentro de la página y $\vec{\mathbf{L}} = -(mvr)\hat{\mathbf{k}}$. **Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante en torno a un eje a través del centro de su trayectoria.**

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas

En la sección 9.6 se mostró que la segunda ley de Newton para una partícula se podía extender a un sistema de partículas, lo que resulta en

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}}{dt}$$

Dicha ecuación establece que la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal total del sistema. Vea si es posible hacer un enunciado similar para movimiento rotacional. La cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas en torno a algún eje se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento angulares de las partículas individuales:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

donde la suma vectorial es sobre las n partículas del sistema.

La derivación de esta ecuación respecto al tiempo produce

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$$

donde se usó la ecuación 11.11 para sustituir la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de cada partícula con el momento de torsión neto en la partícula.

Los momentos de torsión que actúan sobre las partículas del sistema son aquellos asociados con fuerzas internas entre las partículas y aquellos asociados con fuerzas externas. Sin embargo, el momento de torsión neto asociado con todas las fuerzas internas es cero. Recuerde que la tercera ley de Newton dice que las fuerzas internas entre las partículas del sistema son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si supone que estas fuerzas se encuentran a lo largo de la línea de separación de cada par de partículas, el momento de torsión total alrededor de algún eje que pasa a través de un origen O debido a cada

par de fuerza acción–reacción es cero (es decir: el brazo de momento d, desde O hasta la línea de acción de las fuerzas, es igual para ambas partículas y las fuerzas están en direcciones opuestas). Por lo tanto, en la suma el momento de torsión interno neto es cero. Se concluye que la cantidad de movimiento angular total de un sistema varía con el tiempo sólo si un momento de torsión externo neto actúa sobre el sistema:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \qquad \textbf{(11.13)}$$

◄ El momento de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema

De hecho esta ecuación es el análogo rotacional de $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = d\vec{\mathbf{p}}_{tot}/\,dt$ para un sistema de partículas. La ecuación 11.13 es la representación matemática de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema no aislado. Si un sistema no es aislado en el sentido que existe un momento de torsión neto sobre él, el momento de torsión es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular.**

Aunque no se comprueba en este caso, este enunciado es verdadero sin importar el movimiento del centro de masa. Incluso se aplica si el centro de masa acelera, siempre que el momento de torsión y la cantidad de movimiento angular se evalúen en relación con un eje a través del centro de masa.

EJEMPLO 11.4 Un sistema de objetos

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 11.6. El radio de la polea es R, y la masa del borde delgado es M. Los rayos de la polea tienen masa despreciable. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los dos objetos, con los conceptos de cantidad de movimiento angular y momento de torsión.

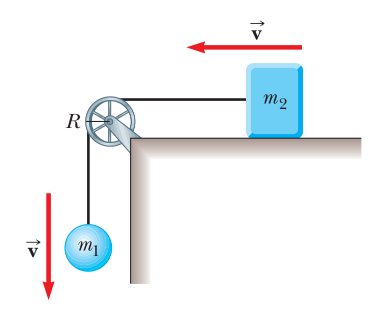


Figura 11.6 (Ejemplo 11.4) Cuando el sistema se libera, la esfera se mueve hacia abajo y el bloque se mueve hacia la izquierda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando el sistema se libera, el bloque se desliza hacia la izquierda, la esfera cae hacia abajo y la polea de vueltas contra las manecillas del reloj. Esta situación es similar a problemas que se han resuelto con anterioridad, excepto que ahora se quiere usar un planteamiento de cantidad de movimiento angular.

Categorizar El bloque, la polea y la esfera se identifican como un sistema no aislado, sujeto al momento de torsión externo debido a la fuerza gravitacional en la esfera. Calcule la cantidad de movimiento angular en torno a un eje que coincida con el eje de la polea. La cantidad de movimiento angular del sistema incluye la de dos objetos (la esfera y el bloque) con movimiento traslacional y un objeto (la polea) que se somete a rotación pura.

Analizar En cualquier instante de tiempo, la esfera y el bloque tienen una rapidez común v, así que la cantidad de movimiento angular de la esfera es m_1vR y la del bloque es m_2vR. Al mismo instante, todos los puntos sobre el borde de la polea también se mueven con rapidez v, de modo que la cantidad de movimiento angular de la polea es MvR.

Ahora aborde el momento de torsión externo total que actúa sobre el sistema en torno al eje de la polea. Ya que tiene un brazo de momento cero, la fuerza que ejerce el eje sobre la polea no contribuye al momento de torsión. Además, la fuerza normal que actúa sobre el bloque se equilibra mediante la fuerza gravitacional $m_2\vec{\mathbf{g}}$, así que dichas fuerzas no contribuyen al momento de torsión. La fuerza gravitacional $m_1\vec{\mathbf{g}}$ que actúa sobre la esfera produce un momento de torsión en torno al eje, igual en magnitud a m_1gR, donde R es el brazo de momento de la fuerza en torno al eje. Este resultado es el momento de torsión externo total en torno al eje de la polea; esto es, $\Sigma\tau_{\text{ext}} = m_1gR$.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento angular total del sistema:

$$1)\quad L = m_1vR + m_2vR + MvR = (m_1 + m_2 + M)vR$$

Sustituya esta expresión y el momento de torsión externo total en la ecuación 11.13:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1gR = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + M)vR]$$

$$2)\quad m_1gR = (m_1 + m_2 + M)R\frac{dv}{dt}$$

Al reconocer que $dv/dt = a$, resuelva la ecuación 2) para a:
$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$

Finalizar Al evaluar el momento de torsión neto en torno al eje, no se incluyeron las fuerzas que la cuerda ejerce en los objetos porque dichas fuerzas son internas al sistema en consideración. En vez de ello, el sistema se analizó como un todo. Sólo los momentos de torsión *externos* contribuyen al cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema.

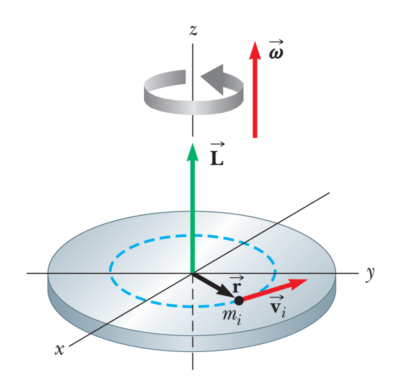


Figura 11.7 Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje, la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ está en la misma dirección que la velocidad angular $\vec{\omega}$, de acuerdo con la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio

En el ejemplo 11.4 se consideró la cantidad de movimiento angular de un sistema deformable. Ahora la atención se restringe a un sistema no deformable, un objeto rígido. Considere un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo que coincide con el eje z de un sistema coordenado, como se muestra en la figura 11.7. Determine la cantidad de movimiento angular de este objeto. Cada *partícula* del objeto da vueltas en el plano xy en torno al eje z con una rapidez angular ω. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i en torno al eje z es $m_i v_i r_i$. Ya que $v_i = r_i\omega$ (ecuación 10.10), la magnitud de la cantidad de movimiento angular de esta partícula se expresa como

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

El vector $\vec{L}_i$ se dirige a lo largo del eje z, como el vector $\vec{\omega}$.

Ahora se puede encontrar la cantidad de movimiento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto al tomar la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

$$L_z = I\omega \tag{11.14}$$

donde $\sum_i m_i r_i^2$ es el momento de inercia I del objeto en torno al eje z (ecuación 10.15).

Ahora derive la ecuación 11.14 respecto al tiempo, y note que I es constante para un objeto rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \tag{11.15}$$

donde α es la aceleración angular relativa al eje de rotación. Ya que dL_z/dt es igual al momento de torsión externo neto (véase la ecuación 11.13), la ecuación 11.15 se expresa como

Forma rotacional de la segunda ley de Newton ▶

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \tag{11.16}$$

Esto es, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia en torno al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto en relación con dicho eje. Este resultado es el mismo que en la ecuación 10.21, que fue deducido con el uso de un planteamiento de fuerza, pero la ecuación 11.16 se dedujo mediante el concepto de cantidad de movimiento angular. Esta ecuación también es válida para un objeto rígido giratorio en torno a un eje móvil siempre que el eje en movimiento 1) pase a través del centro de masa y 2) sea un eje de simetría.

Si un objeto simétrico da vueltas en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa, puede escribir la ecuación 11.14 en forma vectorial como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, donde $\vec{L}$ es la cantidad de movimiento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación. Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si $\vec{L}$ representa la componente de cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.[1]

[1] En general, la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$ no siempre es válida. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje *arbitrario*, por lo tanto $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ puede apuntar en diferentes direcciones. En este caso, el momento de inercia no se trata como un escalar. En un sentido estricto, $\vec{L} = I\vec{\omega}$ sólo se aplica a objetos rígidos de cualquier forma que dan vueltas en torno a uno de tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales*) a través del centro de masa. Este concepto se explica en textos de mecánica más avanzados.

Pregunta rápida 11.3 Una esfera sólida y una esfera hueca tienen la misma masa y radio. Ambas giran con la misma rapidez angular. ¿Cuál tiene la mayor cantidad de movimiento angular? a) la esfera sólida, b) la esfera hueca, c) ambas tienen la misma cantidad de movimiento angular, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 11.5 Bola de boliche

Estime la magnitud de la cantidad de movimiento angular de una bola de boliche que gira a 10 rev/s, como se muestra en la figura 11.8.

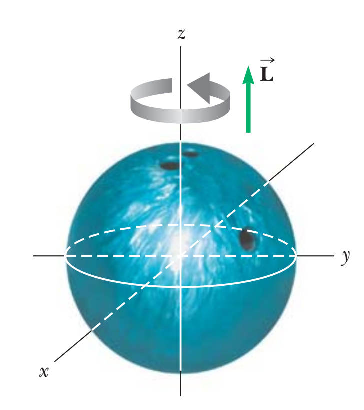


Figura 11.8 (Ejemplo 11.5) Una bola de boliche que da vueltas en torno al eje z en la dirección que se muestra tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ en la dirección z positiva. Si la dirección de rotación se invierte, $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z negativa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine girar una bola de boliche sobre el suelo uniforme de un boliche. Ya que una bola de boliche es relativamente pesada, la cantidad de movimiento angular debe ser relativamente grande.

Categorizar La cantidad de movimiento angular se evalúa con la ecuación 11.14, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Comience por hacer algunas estimaciones de los parámetros físicos relevantes y modele la bola como una esfera sólida uniforme. Una bola de boliche representativa puede tener una masa de 7.0 kg y un radio de 12 cm.

Evalúe el momento de inercia de la bola en torno a un eje a través de su centro, a partir de la tabla 10.2:

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(7.0 \text{ kg})(0.12 \text{ m})^2 = 0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Evalúe la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la ecuación 11.14:

$$L_z = I\omega = (0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(10 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev}) = 2.53 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Debido a lo burdo de las estimaciones, sólo se debe conservar una cifra significativa, así que $L_z = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

EJEMPLO 11.6 El sube y baja

Un padre de masa m_f y su hija de masa m_d se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancias desde el eje en el centro (figura 11.9). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa M y longitud ℓ y se articula sin fricción. En cierto momento, la combinación da vueltas en un plano vertical con una rapidez angular ω.

A) Encuentre una expresión para la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

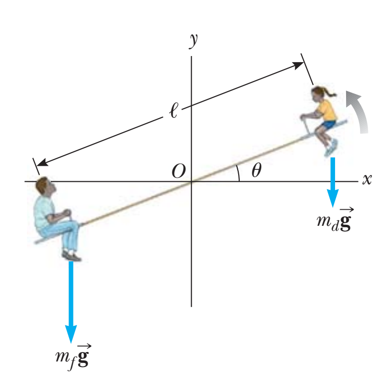


Figura 11.9 (Ejemplo 11.6) Un padre y su hija demuestran la cantidad de movimiento angular sobre un sube y baja.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un eje de rotación que pasa a través del eje en O en la figura 11.9. El sistema giratorio tiene cantidad de movimiento angular en torno a dicho eje.

Categorizar Ignore cualquier movimiento de los brazos o piernas del padre y la hija y represéntelos como partículas. Por lo tanto, el sistema se modela como un objeto rígido. Esta primera parte del ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El momento de inercia del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de las tres componentes: el sube y baja y los dos individuos. Se puede remitir a la tabla 10.2 para obtener la expresión para el momento de inercia de la barra y usar la expresión de partícula $I = mr^2$ para cada persona.

Encuentre el momento de inercia total del sistema en torno al eje z a través de O:

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

Encuentre la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L = I\omega = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega$$

B) Encuentre una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando el sube y baja forma un ángulo θ con la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por lo general, los padres son más pesados que las hijas, así que el sistema no está en equilibrio y tiene una aceleración angular. Se espera que la aceleración angular sea positiva en la figura 11.9.

Categorizar El sistema se identifica como no aislado debido al momento de torsión externo asociado con la fuerza gravitacional. De nuevo se identifica un eje de rotación que pasa a través del pivote en O en la figura 11.9.

Analizar Para encontrar la aceleración angular del sistema en cualquier ángulo θ, primero calcule el momento de torsión neto sobre el sistema y luego use $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ para obtener una expresión para α.

Evalúe el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre el padre:

$$\tau_f = m_f g \frac{\ell}{2} \cos\theta \quad (\vec{\boldsymbol{\tau}}_f \text{ afuera de la página})$$

Evalúe el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre la hija:

$$\tau_d = -m_d g \frac{\ell}{2} \cos\theta \quad (\vec{\boldsymbol{\tau}}_d \text{ hacia la página})$$

Evalúe el momento de torsión neto ejercido sobre el sistema:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = \frac{1}{2}(m_f - m_d)g\ell\cos\theta$$

Use la ecuación 11.16 e I del inciso A) para encontrar α:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{2(m_f - m_d)g\cos\theta}{\ell\,[(M/3) + m_f + m_d]}$$

Finalizar Para un padre más pesado que su hija, la aceleración angular es positiva, como se esperaba. Si el sube y baja comienza con una orientación horizontal ($\theta = 0$) y se libera, la rotación es contra las manecillas del reloj en la figura 11.9 y el extremo del padre del sube y baja cae, lo que es consistente con la experiencia cotidiana.

¿Qué pasaría si? Imagine que el padre se mueve hacia adentro del sube y baja a una distancia d desde el eje para intentar equilibrar los dos lados. ¿Cuál es la aceleración angular del sistema en este caso, cuando se libera desde un ángulo arbitrario θ?

Respuesta La aceleración angular del sistema debe disminuir si el sistema está más equilibrado.

Encuentre el momento de inercia total en torno al eje z a través de O para el sistema modificado:

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 + m_f d^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_d\right) + m_f d^2$$

Encuentre el momento de torsión neto ejercido sobre el sistema en torno a un eje a través de O:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = m_f g d\cos\theta - \frac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta$$

Encuentre la nueva aceleración angular del sistema:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{m_f g d\cos\theta - \frac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta}{(\ell^2/4)\,[(M/3) + m_d] + m_f d^2}$$

El sube y baja se equilibra cuando la aceleración angular es cero. En esta situación, tanto padre como hija pueden empujar desde el suelo y elevarse al punto más alto posible.

Encuentre la posición requerida del padre al hacer $\alpha = 0$:

$$\alpha = \frac{m_f g d \cos\theta - \frac{1}{2} m_d g \ell \cos\theta}{(\ell^2/4)[(M/3) + m_d] + m_f d^2} = 0$$

$$m_f g d \cos\theta - \tfrac{1}{2} m_d g \ell \cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell$$

En el raro caso en que el padre y la hija tengan la misma masa, el padre se ubica el final del sube y baja, $d = \ell/2$.

11.4 El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

En el capítulo 9 se encontró que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado; es decir, si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero. Se tiene una ley de conservación análoga en el movimiento rotacional:

> La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

◄ Conservación de cantidad de movimiento angular

Este enunciado es el principio de **conservación de cantidad de movimiento angular** y es la base de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema aislado**. Este principio se sigue directamente de la ecuación 11.13, que indica que si

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \qquad \textbf{(11.17)}$$

por lo tanto

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f \qquad \textbf{(11.18)}$$

Para un sistema aislado que consiste en algunas partículas, esta ley de conservación se escribe como $\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \Sigma\, \vec{\mathbf{L}}_n$ = constante, donde el índice n denota la n–ésima partícula en el sistema.

Si un sistema giratorio aislado es deformable, de modo que su masa se somete a redistribución en alguna forma, el momento de inercia del sistema cambia. Ya que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema es $L = I\omega$ (ecuación 11.14), la conservación de la cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I y ω permanezca constante. Por lo tanto, un cambio en I para un sistema aislado requiere un cambio en ω. En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante} \qquad \textbf{(11.19)}$$

Esta expresión es válida tanto para rotación en torno a un eje fijo, como para rotación en torno a un eje a través del centro de masa de un sistema móvil en tanto dicho eje permanezca fijo en la dirección. Sólo se requiere que el momento de torsión externo neto sea cero.

Muchos ejemplos demuestran conservación de cantidad de movimiento angular para un sistema deformable. Usted ha observado a un patinador artístico girar al final de un programa (figura 11.10). La rapidez angular del patinador es grande cuando sus manos y pies están cerca del tronco de su cuerpo. Si se ignora la fricción entre el patinador y el hielo, no existen momentos de torsión externos sobre el patinador. El momento de inercia de su cuerpo aumenta mientras sus manos y pies se mueven alejándose de su cuerpo al final del giro. De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, su rapidez angular debe disminuir. En forma similar, cuando los clavadistas o acróbatas quieren hacer piruetas, jalan manos y pies cerca de su cuerpo para que dé vuelta





Figura 11.10 La cantidad de movimiento angular se conserva mientras el patinador artístico ruso, Evgeni Plushenko, participa durante los Campeonatos Mundiales de Patinaje Artístico 2004. Cuando sus brazos y piernas están cerca de su cuerpo, su momento de inercia es pequeño y su rapidez angular es grande. Para frenar al final de su giro, mueve brazos y piernas hacia afuera, lo que aumenta su momento de inercia.

a una rapidez mayor, como en la fotografía de apertura de este capítulo. En estos casos, la fuerza externa debida a la gravedad actúa a través del centro de masa y, por tanto, no ejerce momento de torsión en torno a un eje a través de este punto. En consecuencia, las cantidades de momento angular en torno al centro de masa debe conservarse; es decir, $I_i \omega_i = I_f \omega_f$. Por ejemplo, cuando los clavadistas quieren duplicar su rapidez angular, deben reducir su momento de inercia a la mitad de su valor inicial.

En la ecuación 11.18 se tiene una tercera versión del modelo de sistema aislado. Ahora se puede afirmar que la energía, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema aislado se conservan.

$$\text{Para un sistema aislado} \begin{cases} E_i = E_f & \text{(si no hay transferencia de energía)} \\ \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f & \text{(si la fuerza externa neta es cero)} \\ \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f & \text{(si el momento de torsión externo neto es cero)} \end{cases}$$

Pregunta rápida 11.4 Una clavadista salta del trampolín y cae hacia el agua con el cuerpo recto y en rotación lenta. Jala sus brazos y piernas hacia una apretada posición plegada. **i)** ¿Qué le ocurre a su rapidez angular? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Permanece igual. d) Es imposible determinar. **ii)** De la misma lista de opciones, ¿qué le sucede a la energía cinética rotacional de su cuerpo?

EJEMPLO 11.7 Formación de una estrella de neutrones

Una estrella da vueltas con un periodo de 30 días en torno a un eje a través de su centro. Después de que la estrella experimenta una explosión supernova, el núcleo estelar, que tiene un radio de 1.0×10^4 km, colapsa en una estrella de neutrones de 3.0 km de radio. Determine el periodo de rotación de la estrella de neutrones.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio en el movimiento de la estrella de neutrones es similar al del patinador descrito anteriormente, pero en dirección inversa. Conforme la masa de la estrella se acerca al eje de rotación, se espera que la estrella gire más rápido.

Categorizar Suponga que durante el colapso del núcleo estelar, 1) no actúa momento de torsión externo sobre él, 2) permanece esférico con la misma distribución de masa relativa y 3) su masa permanece constante. La estrella se clasifica como un sistema aislado. No se conoce la distribución de masa de la estrella, pero se supuso que la distribución es simétrica, así que el momento de inercia se expresa como kMR^2, donde k es alguna constante numérica. (De la tabla 10.2, por ejemplo, se ve que $k = \frac{2}{5}$ para una esfera sólida y $k = \frac{2}{3}$ para un cascarón esférico.)

Analizar Use el símbolo T para el periodo, con T_i como el periodo inicial de la estrella y T_f como el periodo de la estrella de neutrones. El periodo es el intervalo de tiempo que se requiere para que un punto sobre el ecuador de la estrella dé una revolución completa alrededor del eje de rotación. La rapidez angular de la estrella se conoce por $\omega = 2\pi/T$.

Escriba la ecuación 11.19 para la estrella:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

Use $\omega = 2\pi/T$ para reescribir esta ecuación en términos de los periodos inicial y final:

$$I_i\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = I_f\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

Sustituya los momentos de inercia en la ecuación precedente:

$$kMR_i^2\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = kMR_f^2\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

Resuelva para el periodo final de la estrella:

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i$$

Sustituya valores numéricos:

$$T_f = \left(\frac{3.0 \text{ km}}{1.0 \times 10^4 \text{ km}}\right)^2 (30 \text{ días}) = 2.7 \times 10^{-6} \text{ días} = \boxed{0.23 \text{ s}}$$

Finalizar De hecho la estrella de neutrones da vuelta más rápido después de que colapsa, como se predijo. Se mueve muy rápido; de hecho, gira aproximadamente cuatro veces cada segundo.

EJEMPLO 11.8 El carrusel

Una plataforma horizontal con la forma de un disco da vueltas libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción (figura 11.11). La plataforma tiene una masa $M = 100$ kg y un radio $R = 2.0$ m. Una estudiante, cuya masa es $m = 60$ kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2.0 rad/s cuando el estudiante está en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto $r = 0.50$ m desde el centro?

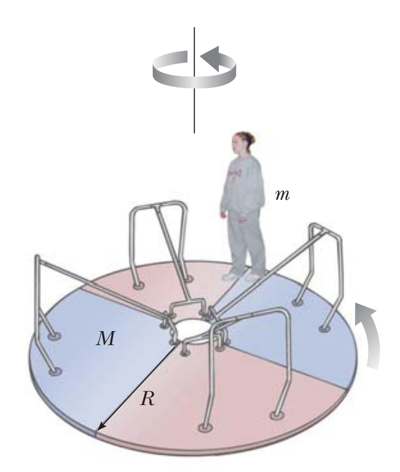


Figura 11.11 (Ejemplo 11.8) Conforme la estudiante camina hacia el centro de la plataforma giratoria, la rapidez angular del sistema aumenta porque la cantidad de movimiento angular del sistema permanece constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio de rapidez en este caso es similar al del patinador que gira y a la estrella de neutrones en los ejemplos precedentes. Este problema es diferente porque parte del momento de inercia del sistema cambia (el de la estudiante) mientras la otra parte permanece fijo (el de la plataforma).

Categorizar Ya que la plataforma da vueltas sobre un eje sin fricción, el sistema de la estudiante y la plataforma se identifica como un sistema aislado.

Analizar Denote el momento de inercia de la plataforma como I_p y el de la estudiante como I_s. La estudiante se modela como partícula.

Encuentre el momento de inercia inicial I_i del sistema (estudiante más plataforma) en torno al eje de rotación:

$$I_i = I_{pi} + I_{si} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

Encuentre el momento de inercia del sistema cuando la estudiante camina a la posición $r < R$:

$$I_f = I_{pf} + I_{sf} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Aplique la ley de conservación de cantidad de movimiento angular al sistema:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Sustituya los momentos de inercia:

$$(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_i = (\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_f$$

Resuelva para la rapidez angular final:

$$\omega_f = \left(\frac{\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_i$$

Sustituya valores numéricos:

$$\omega_f = \left[\frac{\tfrac{1}{2}(100 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 + (60 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2}{\tfrac{1}{2}(100 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 + (60 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2}\right](2.0 \text{ rad/s})$$

$$\omega_f = \left(\frac{440 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{215 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}\right)(2.0 \text{ rad/s}) = \boxed{4.1 \text{ rad/s}}$$

Finalizar Como se esperaba, la rapidez angular aumenta. Lo más rápido que este sistema podría girar sería cuando la estudiante se mueve al centro de la plataforma. Haga este cálculo para demostrar que esta rapidez angular máxima es 4.4 rad/s. Note que la actividad descrita en este problema es de cuidado, como se explicó en relación con la fuerza de Coriolis en la sección 6.3.

¿Qué pasaría si? ¿Y si usted mide la energía cinética del sistema antes y después de que la estudiante camine hacia adentro? ¿La energía cinética inicial y la energía cinética final son iguales?

Respuesta Es posible que esté tentado a decir que sí, porque el sistema está aislado. Sin embargo, recuerde que la energía se puede transformar de varias maneras, así que debe tener cuidado ante una pregunta de energía.

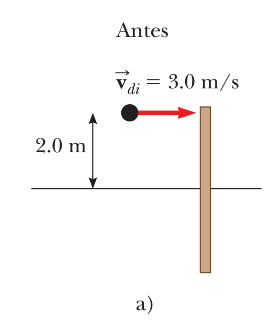
Encuentre la energía cinética inicial: $K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{1}{2}(440 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(2.0 \text{ rad/s})^2 = 880 \text{ J}$

Encuentre la energía cinética final: $K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}(215 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(4.1 \text{ rad/s})^2 = 1.81 \times 10^3 \text{ J}$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema *aumenta*. La estudiante debe realizar trabajo para moverse ella misma más hacia al centro de rotación, así que esta energía cinética adicional viene de la energía potencial química en el cuerpo de la estudiante.

EJEMPLO 11.9 Colisión de disco y bastón

Un disco de 2.0 kg, que viaja a 3.0 m/s, golpea un bastón de 1.0 kg y 4.0 m de longitud que se encuentra plano sobre hielo casi sin fricción, como se muestra en la vista superior de la figura 11.12a. Suponga que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su línea de movimiento original. Encuentre la rapidez traslacional del disco, la rapidez traslacional del bastón y la rapidez angular del bastón después de la colisión. El momento de inercia del bastón en torno a su centro de masa es 1.33 kg · m^2.



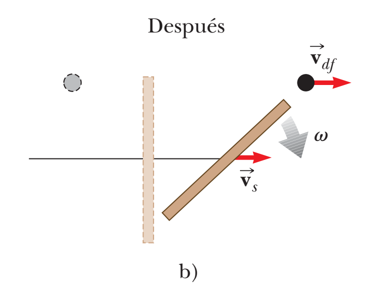


Figura 11.12 (Ejemplo 11.9) Vista superior de un disco que golpea un bastón en una colisión elástica. a) Antes de la colisión, el disco se mueve hacia el bastón. b) La colisión hace que el bastón dé vuelta y se mueva a la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine la figura 11.12a e imagine lo que sucede después de que el disco golpea el bastón. La figura 11.12b muestra lo que puede esperar: el disco continúa moviéndose con una rapidez más lenta y el bastón está tanto en movimiento traslacional como rotacional. Suponga que el disco no se desvía de su línea de movimiento original porque la fuerza que ejerce el bastón sobre el disco es paralela a la trayectoria original del disco.

Categorizar Ya que el hielo no tiene fricción, el disco y el bastón forman un sistema aislado. Además, ya que la colisión se supuso elástica, la energía, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del sistema se conservan.

Analizar Note primero que se tienen tres incógnitas, así que se requieren tres ecuaciones para resolver simultáneamente.

Aplique al sistema la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal: $m_d v_{di} = m_d v_{df} + m_s v_s$

Sustituya los valores conocidos: $(2.0 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s}) = (2.0 \text{ kg})v_{df} + (1.0 \text{ kg})v_s$

Reordene la ecuación: 1) $6.0 \text{ kg}\cdot\text{m/s} - (2.0 \text{ kg})v_{df} = (1.0 \text{ kg})v_s$

Ahora aplique la ley de conservación de cantidad de movimiento angular para el sistema y use un eje que pase a través del centro del bastón como eje de rotación. La componente de cantidad de movimiento angular del disco a lo largo del eje perpendicular al plano del hielo es negativa. (La regla de la mano derecha muestra que $\vec{\mathbf{L}}_d$ apunta hacia dentro del hielo.)

Aplique conservación de cantidad de movimiento angular al sistema: $-rm_d v_{di} = -rm_d v_{df} + I\omega$

Sustituya los valores conocidos:

$$-(2.0\text{ m})(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s}) = -(2.0\text{ m})(2.0\text{ kg})v_{df} + (1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$-12\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = -(4.0\text{ kg}\cdot\text{m})v_{df} + (1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

Divida la ecuación entre 1.33 kg · m^2 y reordene:

$$2)\quad -9.0\text{ rad/s} + (3.0\text{ rad/m})v_{df} = \omega$$

Por último, la naturaleza elástica de la colisión dice que la energía cinética del sistema se conserva; en este caso, la energía cinética consiste en formas traslacional y rotacional.

Aplique conservación de energía cinética al sistema:

$$\tfrac{1}{2}m_d v_{di}^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_d v_{df}^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_s v_s^{\,2} + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Sustituya los valores conocidos:

$$\tfrac{1}{2}(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s})^2 = \tfrac{1}{2}(2.0\text{ kg})v_{df}^{\,2} + \tfrac{1}{2}(1.0\text{ kg})v_s^{\,2} + \tfrac{1}{2}(1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2$$

$$3)\quad 18\text{ m}^2/\text{s}^2 = 2.0v_{df}^{\,2} + v_s^{\,2} + (1.33\text{ m}^2)\omega^2$$

Resuelva las ecuaciones 1), 2) y 3) simultáneamente, se encuentra que $v_d =$ 2.3 m/s, $v_s =$ 1.3 m/s, y $\omega =$ −2.0 rad/s.

Finalizar Estos valores parecen razonables. El disco se mueve con más lentitud, después de la colisión, de lo que se movía antes de la colisión, y el bastón tiene una pequeña rapidez traslacional. La tabla 11.1 resume los valores inicial y final de las variables para el disco y el bastón, y verifica la conservación de cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular y energía cinética del sistema.

TABLA 11.1

Comparación de valores en el ejemplo 11.9 antes y después de la colisión

	v(m/s)	ω(rad/s)	p(kg · m/s)	L(kg · m^2/s)	K_{trans}(J)	K_{rot}(J)
Antes						
Disco	3.0	—	6.0	−12	9.0	—
Bastón	0	0	0	0	0	0
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	9.0	0
Después						
Disco	2.3	—	4.7	−9.3	5.4	—
Bastón	1.3	−2.0	1.3	−2.7	0.9	2.7
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	6.3	2.7

Nota: La cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética total del sistema se conservan.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la colisión entre el disco y el bastón es perfectamente inelástica? ¿Cómo cambia eso al análisis?

Respuesta En este caso, el disco se adhiere al final del bastón durante la colisión.

Altere el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal que conduce a la ecuación 1):

$$m_d v_{di} = (m_d + m_s)v_{CM}$$

$$(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s}) = (2.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg})v_{CM}$$

$$v_{CM} = 2.0\text{ m/s}$$

Elija el centro del bastón como el origen y encuentre la posición y del centro de masa a lo largo del bastón vertical:

$$y_{CM} = \frac{(2.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(0)}{(2.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg})} = 1.33\text{ m}$$

Por lo tanto, el centro de masa del sistema es 2.0 m − 1.33 m = 0.67 m desde el extremo superior del bastón.

Altere el principio de conservación de cantidad de movimiento angular que conduce a la ecuación 2) y evalúe las cantidades de movimiento angular en torno a un eje que pase a través del centro de masa del sistema:

$$-rm_d v_{di} = I_d\omega + I_s\omega$$

$$4) \quad -(0.67 \text{ m})m_d v_{di} = [m_d(0.67 \text{ m})^2]\omega + I_s\omega$$

Encuentre el momento de inercia del bastón en torno al centro de masa *del sistema*, a partir del teorema de ejes paralelos:

$$I_s = I_{CM} + MD^2$$
$$= 1.33 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (1.0 \text{ kg})(1.33 \text{ m})^2 = 3.1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Use estos resultados en la ecuación 4):

$$-(0.67 \text{ m})(2.0 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s}) = [(2.0 \text{ kg})(0.67 \text{ m})^2]\omega + (3.1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$-4.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = (4.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$\omega = \frac{-4.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{4.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} = -1.0 \text{ rad/s}$$

Evaluar la energía cinética total del sistema después de la colisión muestra que ésta es menor de lo que era antes de la colisión, porque en una colisión inelástica no se conserva la energía cinética.

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

Movimiento de precesión ▶

Una clase de movimiento insólito y fascinante que probablemente ha observado es el de un trompo que gira en torno a su eje de simetría, como se muestra en la figura 11.13a. Si el trompo gira rápidamente, el eje de simetría da vueltas en torno al eje *z*, barriendo un cono (véase la figura 11.13b). El movimiento del eje de simetría en torno a la vertical, conocido como **movimiento de precesión**, por lo general es lento en relación con el movimiento de giro del trompo.

Es muy natural preguntar por qué el trompo no cae. Ya que el centro de masa no está directamente arriba del centro de giro punto *O*, en el trompo actúa un momento de torsión neto en torno a un eje que pasa a través de *O*, un momento de torsión que resulta de la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$. El trompo ciertamente caerá si no está girando. Sin embargo, como gira, tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ que se dirige a lo largo de su eje de simetría. Se demostrará que este eje de simetría se mueve en torno al eje *z* (se presenta movimiento de precesión) porque el momento de torsión produce un cambio en la *dirección* del eje de simetría. Esta ilustración es un excelente ejemplo de la importancia de la naturaleza direccional de la cantidad de movimiento angular.

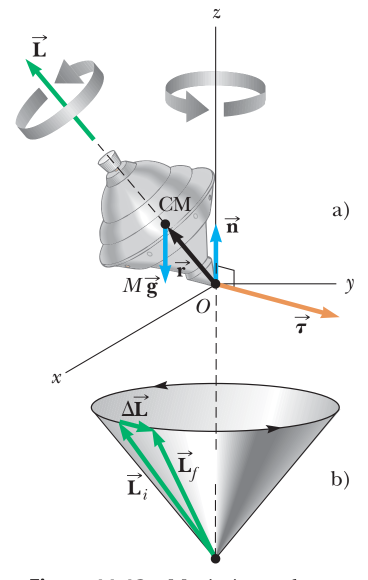


Figura 11.13 Movimiento de precesión de un trompo que gira en torno a su eje de simetría. a) Las únicas fuerzas externas que actúan en el trompo son la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$. La dirección de la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ es a lo largo del eje de simetría. La regla de la mano derecha indica que $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$ está en el plano *xy*. b) La dirección de $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ es paralela a la de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ en a). Ya que $\vec{\mathbf{L}}_f = \Delta\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{L}}_i$, el trompo precede en torno al eje *z*.

Las características esenciales del movimiento de precesión se ilustran al considerar el giroscopio simple que se muestra en la figura 11.14a. Las dos fuerzas que actúan en el giroscopio son la fuerza gravitacional hacia abajo $M\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que actúa hacia arriba en el centro de giro punto *O*. La fuerza normal no produce momento de torsión en torno a un eje que pasa a través del eje, porque su brazo de momento a través de dicho punto es cero. No obstante, la fuerza gravitacional no produce un momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$ en torno a un eje que pasa a través de *O*, donde la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{r}}$ y $M\vec{\mathbf{g}}$. Por necesidad, el vector $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se encuentra en un plano horizontal *xy* perpendicular al vector cantidad de movimiento angular. El momento de torsión neto y la cantidad de movimiento angular del giroscopio se relacionan mediante la ecuación 11.13:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Esta expresión muestra que, en el intervalo de tiempo infinitesimal *dt*, el momento de torsión distinto de cero produce un cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{\mathbf{L}}$, un cambio que está en la misma dirección que $\vec{\boldsymbol{\tau}}$. Por lo tanto, como el vector momento de torsión, $d\vec{\mathbf{L}}$ también debe ser perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. La figura 11.14b ilustra el movimiento de precesión resultante del eje de simetría del giroscopio. En un intervalo de tiempo *dt*, el cambio en cantidad de movimiento angular es $d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_f - \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\boldsymbol{\tau}}\,dt$. Ya que $d\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ no cambia ($|\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f|$). En vez de ello, lo que cambia

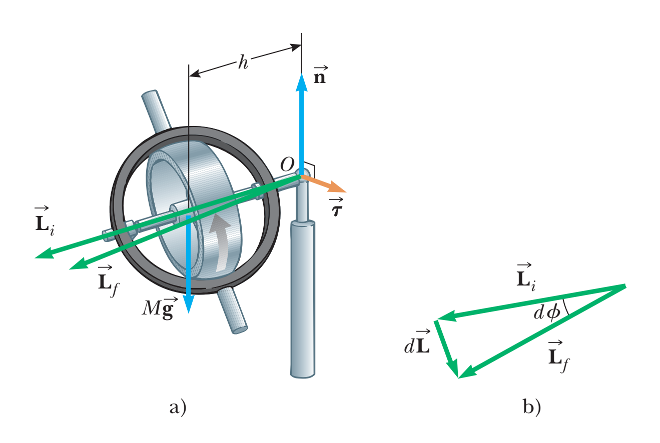


Figura 11.14 a) El movimiento de un giroscopio simple articulado a una distancia h de su centro de masa. La fuerza gravitacional $M\vec{g}$ produce un momento de torsión en torno al eje y este momento de torsión es perpendicular al eje. b) Vista superior de los vectores cantidad de movimiento angular inicial y final. El momento de torsión resulta en un cambio en cantidad de movimiento angular $d\vec{L}$ en una dirección perpendicular al eje. El eje barre un ángulo $d\phi$ en un intervalo de tiempo dt.

es la *dirección* de $\vec{L}$. Ya que el cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{L}$ es en la dirección de $\vec{\tau}$, que se encuentra en el plano *xy*, el giroscopio se somete a movimiento de precesión.

Para simplificar la descripción del sistema, se supone que la cantidad de movimiento angular total de la rueda en precesión es la suma de la cantidad de movimiento angular $I\vec{\omega}$ debida al giro y la cantidad de movimiento angular debida al movimiento del centro de masa en torno al eje. En este tratamiento, se despreciará la contribución del movimiento del centro de masa y se tomará la cantidad de movimiento angular total como simplemente $I\vec{\omega}$. En la práctica, esta aproximación es buena si $\vec{\omega}$ se hace muy grande.

El diagrama vectorial de la figura 11.14b muestra que, en el intervalo de tiempo dt, el vector cantidad de movimiento angular da vueltas a través de un ángulo $d\phi$, que también es el ángulo a través del que da vueltas el eje. A partir del triángulo vectorial formado por los vectores $\vec{L}_i$, $\vec{L}_f$ y $d\vec{L}$, se ve que

$$\operatorname{sen}(d\phi) \approx d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau\,dt}{L} = \frac{(Mgh)\;dt}{L}$$

donde se usó que, para valores pequeños de cualquier ángulo θ, sen $\theta \approx \theta$. Al dividir entre dt y usar la correspondencia $L = I\omega$, se encuentra que la rapidez a la que da vueltas el eje en torno al eje vertical es

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega} \qquad \textbf{(11.20)}$$

La rapidez angular ω_p se llama **frecuencia de precesión**. Este resultado sólo es válido cuando $\omega_p << \omega$. De otro modo, está involucrado un movimiento mucho más complicado. Como puede ver de la ecuación 11.20, la condición $\omega_p << \omega$ se satisface cuando ω es grande, es decir, cuando la rueda gira rápidamente. Además, note que la frecuencia de precesión disminuye conforme ω aumenta, es decir, conforme la rueda gira más rápido en torno a su eje de simetría.

Como ejemplo de la utilidad de los giroscopios, suponga que usted está en una nave en el espacio profundo y necesita alterar su trayectoria. Para encender los motores en la dirección correcta, necesita girar la nave. Sin embargo, ¿cómo gira una nave espacial en el espacio vacío? Una forma es tener pequeños motores cohete que encienden perpendicular al lado de la nave, lo que proporciona un momento de torsión en torno a su centro de masa. Tal configuración es deseable, y muchas naves tienen tales cohetes.

Sin embargo, considere otro método, que se relaciona con la cantidad de movimiento angular y no requiere el consumo de combustible. Suponga que la nave espacial porta un giroscopio que no gira, como en la figura 11.15a. En este caso, la cantidad de movimiento angular de la nave en torno a su centro de masa es cero. Suponga que el giroscopio se pone en rotación, lo que da al giroscopio una cantidad de movimiento angular distinta de cero. No hay momento de torsión externo sobre el sistema aislado (nave espacial y giroscopio), así que la cantidad de movimiento angular de este sistema debe permanecer cero de acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Este principio se satisface si la nave da vueltas en la dirección opuesta a la del giroscopio, de modo





Figura 11.15 a) Una nave espacial porta un giroscopio que no gira. b) Cuando el giroscopio se pone en rotación, la nave gira al otro lado de modo que la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

que se cancelan los vectores cantidad de movimiento angular del giroscopio y la nave, lo que resulta en ausencia de cantidad de movimiento angular del sistema. El resultado de girar el giroscopio, como en la figura 11.15b, ¡es que la nave da la vuelta! Al incluir tres giroscopios con ejes mutuamente perpendiculares, se logra cualquier rotación deseada en el espacio.

Este efecto creó una situación indeseable con la nave espacial *Voyager 2* durante su vuelo. La nave llevaba una grabadora cuyos carretes giraban a grandes magnitudes de velocidad. Cada vez que la grabadora se encendía, los carretes actuaban como giroscopios y la nave comenzaba una rotación indeseable en la dirección opuesta. ¡El mando de control de la misión tuvo que contrarrestar esta rotación al activar los cohetes de disparo lateral para detener la rotación!

Resumen

DEFINICIONES

Conocidos dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, el producto cruz $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es un vector $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene una magnitud

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{(11.3)}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. La dirección del vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

El momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ debido a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en torno a un eje a través del origen en un marco inercial se define como

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \quad \textbf{(11.1)}$$

La **cantidad de movimiento angular** $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula que tiene cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ en torno a un eje a través del origen es

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \quad \textbf{(11.10)}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es la posición vectorial de la partícula en relación con el origen.

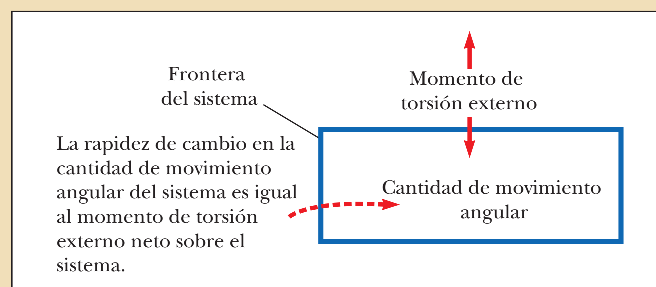
CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La componente z de la cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje z fijo es

$$L_z = I\omega \quad \textbf{(11.14)}$$

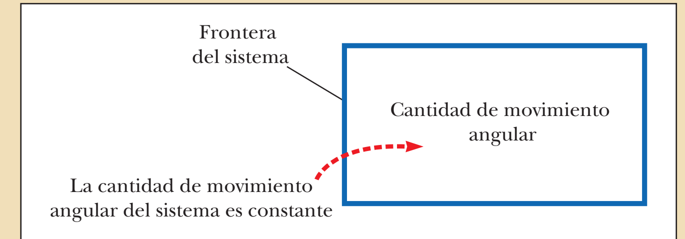
donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación y ω es su rapidez angular.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema interactúa con su ambiente en el sentido de que sobre el sistema existe un momento de torsión externo, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento angular:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \quad \textbf{(11.13)}$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema no experimenta momento de torsión externo desde el ambiente, la cantidad de movimiento angular total del sistema se conserva:

$$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f \quad \textbf{(11.18)}$$

Aplicar esta ley de conservación de la cantidad de movimiento angular a un sistema cuyo momento de inercia cambia produce

$$I_i\omega_i = I_f\,\omega_f = \text{constante} \quad \textbf{(11.19)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** ¿Es posible calcular el momento de torsión que actúa sobre un objeto rígido sin especificar un eje de rotación? ¿El momento de torsión es independiente de la ubicación del eje de rotación?

2. **O** El vector $\vec{\mathbf{A}}$ está en la dirección y negativa y el vector $\vec{\mathbf{B}}$ está en la dirección x negativa. **i)** ¿Cuál es la dirección de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$? a) y, b) $-y$, c) x, d) $-x$, e) z, f) $-z$, g) no hay dirección porque es cero, h) no hay dirección porque es un escalar. **ii)** ¿Cuál es la dirección de $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la h).

3. **O** Nombre tres direcciones perpendiculares como derecha, arriba y hacia usted, como puede nombrarlas cuando está frente a una pantalla de televisión que se encuentra en un plano vertical. Los vectores unitarios para estas direcciones son $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$, respectivamente. Para la cantidad $(-3\hat{\mathbf{u}}\text{ m} \times 2\hat{\mathbf{t}}\text{ N})$, identifique la magnitud, unidad y dirección, si la hay. **i)** La magnitud es a) 6, b) 3, c) 2, d) 0. **ii)** La unidad es a) newton metros, b) newtons, c) metros, d) no hay unidad. **iii)** La dirección es a) arriba, b) hacia usted, c) no hay dirección, d) arriba, e) alejándose de usted, f) izquierda, g) derecha.

4. **O** Sean las cuatro direcciones horizontales de la brújula norte, este, sur y oeste que se representan por los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. En forma vertical hacia arriba y abajo se representan como $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{d}}$. También identifique los vectores unitarios que están a la mitad entre dichas direcciones, como $\widehat{\mathbf{ne}}$ para noreste. Clasifique las magnitudes de los siguientes productos cruz de mayor a menor. Si algunas son iguales en magnitud, o iguales a cero, muéstrelo en su clasificación. a) $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}}$, b) $\hat{\mathbf{w}} \times \widehat{\mathbf{ne}}$, c) $\hat{\mathbf{u}} \times \widehat{\mathbf{ne}}$, d) $\hat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{nw}}$, e) $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}$.

5. Si el momento de torsión que actúa sobre una partícula en torno a cierto origen es cero, ¿qué puede decir acerca de su cantidad de movimiento angular en torno a dicho origen?

6. Una bola se lanza en tal forma que no gira en torno a su propio eje. ¿Este enunciado implica que la cantidad de movimiento angular es cero en torno a un origen arbitrario? Explique.

7. **O** A veces se pueden confundir los términos compuestos. Por ejemplo, una hormiga león no es un tipo de león sino más bien un tipo diferente de insecto. a) ¿La energía cinética rotacional es un tipo de energía cinética? b) ¿El momento de torsión es un tipo de fuerza? c) ¿La cantidad de movimiento angular es un tipo de cantidad de movimiento?

8. ¿Por qué un poste largo de equilibrio ayuda a alguien que camina en la cuerda floja?

9. **O** Una patinadora de hielo comienza a girar con sus brazos estirados a los lados. Se equilibra sobre la punta de un patín para girar sin fricción. Luego jala sus brazos en tal forma que su momento de inercia disminuye en un factor de dos. En el proceso de hacer esto, ¿qué sucede con su energía cinética? a) Aumenta en un factor de cuatro. b) Aumenta en un factor de dos. c) Permanece constante. d) Disminuye en un factor de dos. e) Disminuye en un factor de cuatro. f) Es cero porque su centro de masa es estable. g) Se somete a un cambio por una cantidad que obviamente depende de qué tan rápido la patinadora jala sus brazos hacia adentro.

10. En una grabadora el mecanismo impulsor jala la cinta para que pase por las cabezas de lectura y escritura con una rapidez constante. Considere el carrete del que se jala la cinta. Conforme la cinta se jala de él, el radio del rollo de cinta restante disminuye. ¿Cómo cambia con el tiempo el momento de torsión del carrete? ¿Cómo cambia con el tiempo la rapidez angular del carrete? Si el mecanismo impulsor se enciende de modo que la cinta recibe un súbito jalón con una gran fuerza, ¿la cinta tiene más probabilidad de romperse cuando se jala de un carrete casi lleno o de un carrete casi vacío?

11. **O** Un ratón mascota duerme cerca del borde este de una tornamesa horizontal estable que se apoya en un eje vertical sin fricción a través de su centro. El ratón despierta y comienza a caminar al norte sobre la tornamesa. **i)** Conforme da sus primeros pasos, ¿cuál es el desplazamiento del ratón en relación con el suelo fijo abajo? a) norte, b) sur, c) ninguno. **ii)** En este proceso, el punto sobre la tornamesa donde dormitaba el ratón experimenta ¿qué desplazamiento en relación con el suelo abajo? a) norte, b) sur, c) ninguno. **iii)** En este proceso para el sistema ratón–tornamesa, ¿se conserva la energía mecánica? **(iv)** ¿Se conserva la cantidad de movimiento? **v)** ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular?

12. **O** Una fiesta de empleados para una compañía muy exitosa presenta un carrusel con animales reales. La tornamesa horizontal no tiene motor, pero gira libremente sobre un eje vertical sin fricción a través de su centro. Dos ponis de igual masa están amarrados con una cuerda en puntos diametralmente opuestos sobre el borde. Los niños los desatan y las plácidas bestias comienzan a andar con dificultad uno hacia el otro a través de la tornamesa. **i)** Mientras camina, ¿qué sucede con la rapidez angular del carrusel? a) Aumenta. b) Permanece constante. c) Disminuye. Considere el sistema ponis–tornamesa en este proceso. **ii)** ¿La energía mecánica se conserva? **iii)** ¿La cantidad de movimiento se conserva? **iv)** ¿La cantidad de movimiento angular se conserva?

13. **O** Un disco horizontal con momento de inercia I_1 da vueltas con velocidad angular ω_0 sobre un eje vertical sin fricción. Un segundo disco horizontal, que tiene momento de inercia I_2 e inicialmente no gira, cae sobre el primero. Debido a fricción entre la superficie de los discos, los dos alcanzan la misma velocidad angular. ¿Cuál es? a) $I_1\omega_0/I_2$, b) $I_2\omega_0/I_1$, c) $I_1\omega_0/(I_1 + I_2)$, d) $I_2\omega_0/(I_1 + I_2)$, e) $(I_1 + I_2)\ \omega_0/I_1$, f) $(I_1 + I_2)\ \omega_0/I_2$.

14. En alguna competencia de motocicletas, los conductores pasan sobre pequeñas colinas y la motocicleta se convierte en aérea durante un corto intervalo de tiempo. Si el corredor de motocicleta mantiene el acelerador abierto mientras deja la colina y va al aire, la motocicleta tiende a dirigirse hacia arriba. ¿Por qué?

15. Si el calentamiento global continúa durante los siguientes 100 años, es probable que algo de hielo polar se funda y el agua escurrirá hacia el ecuador. ¿Cómo cambiaría eso el momento de inercia de la Tierra? ¿La duración del día (una revolución) aumentaría o disminuiría?

16. Un científico que llega a un hotel pide a un botones que lleve una pesada maleta. Cuando el botones rodea una esquina, la maleta se balancea súbitamente alejándose de él por alguna razón desconocida. El alarmado botones suelta la maleta y sale corriendo. ¿Qué podría haber en la maleta?

Problemas

Sección 11.1 Producto vectorial y momento de torsión

1. Conocidos $\vec{\mathbf{M}} = 6\,\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{N}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, calcule el producto vectorial $\vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{N}}$.

2. Los vectores 42.0 cm a 15.0° y 23.0 cm a 65.0° parten del origen. Ambos ángulos se miden contra las manecillas del reloj desde el eje *x*. Los vectores forman dos lados de un paralelogramo. a) Encuentre el área del paralelogramo. b) Encuentre la longitud de su diagonal más larga.

3. Dos vectores se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y b) el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

4. Dos vectores se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 6\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$. Evalúe las cantidades a) $\cos^{-1}[\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}/AB]$ y b) $\text{sen}^{-1}[|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|/AB]$. c) ¿Cuál da el ángulo entre los vectores?

5. El viento ejerce sobre una flor la fuerza horizontal de 0.785 N hacia el este. El tallo de la flor mide 0.450 m de largo y se inclina hacia el este, formando un ángulo de 14.0° con la vertical. Encuentre el vector momento de torsión de la fuerza del viento en torno a la base del tallo.

6. ● Un estudiante afirma que encontró un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tal que $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) \times \vec{\mathbf{A}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$. ¿Usted cree esta afirmación? Explique.

7. Suponga $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$?

8. ● Una partícula se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m y sobre ella se ejerce una fuerza conocida por $\vec{\mathbf{F}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ N. a) ¿Cuál es el momento de torsión que actúa sobre la partícula en torno al origen? b) ¿Hay otro punto respecto al cual el momento de torsión causado por esta fuerza en la partícula estará en la dirección opuesta con la mitad de la magnitud? ¿Puede haber más de uno de tales puntos? ¿Dicho punto se encuentra sobre el eje *y*? ¿Puede haber más de uno de tales puntos sobre el eje *y*? Determine el vector de posición de tal punto.

9. Dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ actúan a lo largo de los dos lados de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P11.9. El punto *O* es la intersección de las altitudes del triángulo. Encuentre una tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ a aplicar en *B* y a lo largo de *BC* tal que el momento de torsión total sea cero en torno al punto *O*. **¿Qué pasaría si?** ¿El momento de torsión total cambiará si $\vec{\mathbf{F}}_3$ se aplica no en *B* sino en cualquier otro punto a lo largo de *BC*?

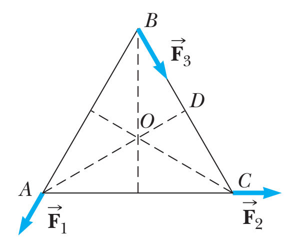


Figura P11.9

10. Use la definición del producto vectorial y las definiciones de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ para probar las ecuaciones 11.7. Suponga que el eje *x* apunta hacia la derecha, el eje *y* hacia arriba y el eje *z* es horizontal hacia usted (no alejándose de usted). Se dice que esta elección hace que el sistema coordenado sea un sistema *de mano derecha*.

Sección 11.2 Cantidad de movimiento angular: el sistema no aislado

11. Una barra rígida ligera de 1.00 m de largo une a dos partículas, con masas de 4.00 kg y 3.00 kg, en sus extremos. La combinación da vueltas en el plano *xy* en torno a un eje a través del centro de la barra (figura P11.11). Determine la cantidad de movimiento angular del sistema en torno al origen, cuando la rapidez de cada partícula sea 5.00 m/s.

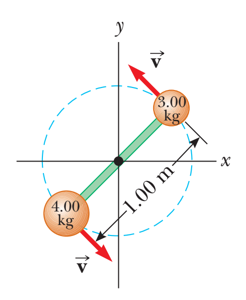


Figura P11.11

12. Una partícula de 1.50 kg se mueve en el plano *xy* con una velocidad de $\vec{\mathbf{v}} = (4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.60\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen cuando su vector de posición es $\vec{\mathbf{r}} = (1.50\hat{\mathbf{i}} + 2.20\hat{\mathbf{j}})$ m.

13. El vector de posición de una partícula de 2.00 kg de masa como función del tiempo se conoce por $\vec{\mathbf{r}} = (6.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00t\hat{\mathbf{j}})$ m. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen como función del tiempo.

14. Un péndulo cónico consiste de una plomada de masa *m* en movimiento en una trayectoria circular en un plano horizontal, como se muestra en la figura P11.14. Durante el movimiento, el alambre de soporte, de longitud ℓ, mantiene el ángulo constante θ con la vertical. Demuestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la plomada en torno al centro del círculo es

$$L = \left(\frac{m^2 g \ell^3 \,\text{sen}^4\theta}{\cos\theta}\right)^{1/2}$$

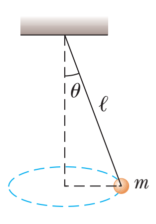


Figura P11.14

15. Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio R con una rapidez constante v, como se muestra en la figura P11.15. El movimiento comienza en el punto Q en el tiempo $t = 0$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al punto P como función del tiempo.

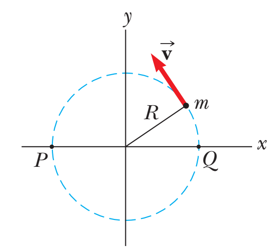


Figura P11.15 Problemas 15 y 30.

16. Un contrapeso de 4.00 kg se une a una cuerda ligera que se enreda alrededor de un carrete (consulte la figura 10.19). El carrete es un cilindro sólido uniforme de 8.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. a) ¿Cuál es el momento de torsión neto sobre el sistema en torno al punto O? b) Cuando el contrapeso tiene una rapidez v, el carrete tiene una rapidez angular $\omega = v/R$. Determine la cantidad de movimiento angular total del sistema en torno a O. c) Con el hecho de que $\vec{\tau} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$ y su resultado del inciso b), calcule la aceleración del contrapeso.

17. ● Una partícula de masa m se dispara con una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura P11.17. La partícula se mueve en el campo gravitacional de la Tierra. Encuentre la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen cuando la partícula está a) en el origen, b) en el punto más alto de su trayectoria y c) justo antes de golpear el suelo. d) ¿Qué momento de torsión hace que cambie su cantidad de movimiento angular?

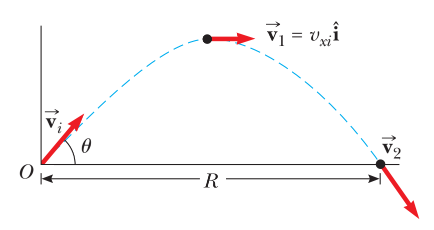


Figura P11.17

18. Con dirección justo hacia la cima de los Pikes Peak, un avión de 12 000 kg de masa vuela sobre las planicies de Kansas a una altitud casi constante de 4.30 km con velocidad constante de 175 m/s oeste. a) ¿Cuál es el vector cantidad de movimiento angular del avión en relación con una granja de trigo sobre el suelo directamente bajo el avión? b) ¿Este valor cambia a medida que el avión continúa su movimiento a lo largo de una línea recta? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular en relación con la cima de los Pikes Peak?

19. ● Una bola que tiene masa m está amarrada al extremo de un asta que está conectada al lado de un alto edificio en el punto P, que se muestra en la figura P11.19. La longitud del asta es ℓ y forma un ángulo θ con el eje x. La bola se afloja y comienza a caer con aceleración $-g\hat{\mathbf{j}}$. a) Determine la cantidad de movimiento angular de la bola en torno al punto P como función del tiempo. b) ¿Por qué razón física cambia la cantidad de movimiento angular? c) ¿Cuál es su relación de cambio?

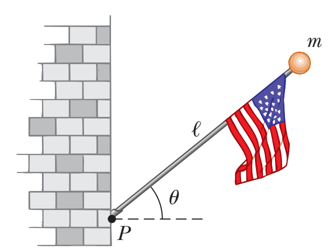


Figura P11.19

20. ● Una partícula de 5.00 kg parte del origen en el tiempo cero. Su velocidad como función del tiempo está dada por

$$\vec{\mathbf{v}} = (6\text{ m/s}^3)t^2\hat{\mathbf{i}} + (2\text{ m/s}^2)t\hat{\mathbf{j}}$$

a) Encuentre su posición como función del tiempo. b) Describa su movimiento cualitativamente. c) Encuentre su aceleración como función del tiempo. d) Halle la fuerza neta que se ejerce sobre la partícula como función del tiempo. e) Encuentre el momento de torsión neto en torno al origen que se ejerce sobre la partícula como función del tiempo. f) Halle la cantidad de movimiento angular de la partícula como función del tiempo. g) Encuentre la energía cinética de la partícula como función del tiempo. h) Encuentre la potencia inyectada en la partícula como función del tiempo.

Sección 11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio

21. Demuestre que la energía cinética de un objeto giratorio en torno a un eje fijo con cantidad de movimiento angular $L = I\omega$ se puede escribir como $K = L^2/2I$.

22. Una esfera sólida uniforme de 0.500 m de radio y 15.0 kg de masa gira contra las manecillas del reloj en torno a un eje vertical a través de su centro. Encuentre su vector cantidad de movimiento angular cuando su rapidez angular es 3.00 rad/s.

23. Un disco sólido uniforme de 3.00 kg de masa y 0.200 m de radio da vueltas en torno a un eje fijo perpendicular a su cara con frecuencia angular de 6.00 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación a) pasa a través de su centro de masa y b) pasa a través de un punto a la mitad entre el centro y el borde.

24. ● a) Modele la Tierra como una esfera uniforme. Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento de giro en torno a su eje. b) Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. c) ¿Los dos resultados de cantidad de movimiento angular son casi iguales o muy diferentes? ¿Cuál es mayor en magnitud? ¿En qué factor?

25. Una partícula de 0.400 kg de masa está unida a la marca de 100 cm de una regleta de 0.100 kg de masa. La regleta da vueltas sobre una mesa horizontal sin fricción con una rapidez angular de 4.00 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regleta se articula en torno a un eje a) perpendicular a la mesa a través de la marca de 50.0 cm y b) perpendicular a la mesa a través de la marca de 0 cm.

26. El Big Ben (figura P10.42), el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene manecillas horaria y minutero con longitudes de 2.70 m y 4.50 m y masas de 60.0 kg y 100 kg, respectivamente. Calcule la cantidad de movimiento angular de dichas manecillas en torno al punto central. Trate las manecillas como largas barras uniformes delgadas.

27. Se construye una estación espacial en forma de anillo hueco de 5.00×10^4 kg de masa. Los integrantes de la tripulación caminan sobre una cubierta formada por la superficie interior de la pared cilíndrica exterior del anillo, con 100 m de radio. En reposo, cuando se construyó, el anillo se puso a girar en torno a su eje de modo que las personas en el interior experimentan una aceleración en caída libre efectiva igual a g. (La figura P11.27 muestra el anillo junto con algunas otras partes que forman una aportación despreciable al momento de inercia total.) La rotación se logra al encender dos pequeños cohetes unidos tangencialmente a puntos opuestos sobre el exterior del anillo. a) ¿Qué cantidad de movimiento angular adquiere la estación espacial? b) ¿Durante qué intervalo de tiempo se deben encender los cohetes si cada uno ejerce un empuje de 125 N? c) Pruebe que el momento de torsión total sobre el anillo, multiplicado por el intervalo de tiempo que encontró en el inciso b), es igual al cambio en cantidad de movimiento angular encontrado en el inciso a). Esta igualdad representa el *teorema de impulso angular–cantidad de movimiento angular*.

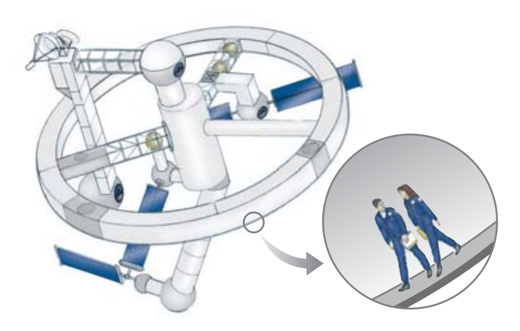


Figura P11.27 Problemas 27 y 38.

28. La distancia entre los centros de las ruedas de una motocicleta es 155 cm. El centro de masa de la motocicleta, incluido el conductor, está a 88.0 cm sobre el suelo y a la mitad entre las ruedas. Suponga que la masa de cada rueda es pequeña comparada con el cuerpo de la motocicleta. El motor sólo impulsa la rueda trasera. ¿Qué aceleración horizontal de la motocicleta hará que la rueda frontal se eleve del suelo?

Sección 11.4 El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

29. Un cilindro con momento de inercia I_1 da vueltas en torno a un eje vertical sin fricción con rapidez angular ω_i. Un segundo cilindro, con momento de inercia I_2 y que inicialmente no gira, cae sobre el primer cilindro (figura P11.29). Debido a la fricción entre las superficies, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular ω_f. a) Calcule ω_f. b) Demuestre que la energía cinética del sistema disminuye en esta interacción y calcule la proporción de la energía rotacional final a la inicial.

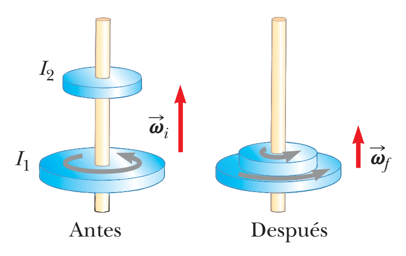


Figura P11.29

30. ● La figura P11.15 representa un pequeño disco plano con masa $m = 2.40$ kg que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Se mantiene en una órbita circular en torno a un eje fijo mediante una barra con masa despreciable y longitud $R = 1.50$ m, articulado en un extremo. Al inicio, el disco tiene una rapidez $v = 5.00$ m/s. Una bola de arcilla de 1.30 kg se deja caer verticalmente sobre el disco desde una pequeña distancia sobre éste y de inmediato se pega al disco. a) ¿Cuál es el nuevo periodo de rotación? b) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema disco–arcilla en torno al eje de rotación? c) ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva en el proceso de la arcilla que se pega al disco? d) ¿La energía mecánica del sistema se conserva en el proceso?

31. ● Una tornamesa cilíndrica uniforme de 1.90 m de radio y 30.0 kg de masa da vueltas contra las manecillas del reloj en un plano horizontal con una rapidez angular inicial de 4π rad/s. Los cojinetes fijos de la tornamesa no tienen fricción. Un bulto de barro de 2.25 kg de masa y tamaño despreciable se deja caer sobre la tornamesa desde una pequeña distancia sobre ésta y de inmediato se pega a la tornamesa en un punto a 1.80 m al este del eje. a) Encuentre la rapidez angular final del barro y la tornamesa. b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema tornamesa–barro? Explique y use resultados numéricos para verificar su respuesta. c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema? Explique su respuesta.

32. Un estudiante se sienta sobre un banco rotatorio libremente sosteniendo dos mancuernas, cada una de 3.00 kg de masa (figura P11.32). Cuando el estudiante extiende los brazos horizontalmente (figura P11.32a), las mancuernas están a 1.00 m del eje de rotación y el estudiante da vueltas con una rapidez angular de 0.750 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es de 3.00 kg·m^2 y se supone constante. El estudiante jala las mancuernas horizontalmente hacia adentro a una posición 0.300 m del eje de rotación (figura P11.32b). a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante. b) Encuentre la energía cinética del sistema rotatorio antes y después de jalar las mancuernas hacia adentro.

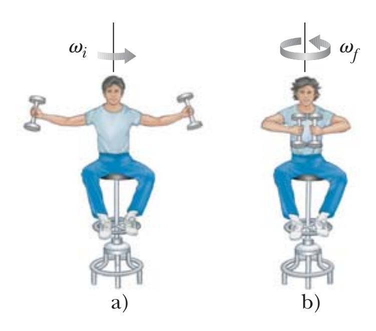


Figura P11.32

33. Un carrusel de jardín con radio $R = 2.00$ m tiene un momento de inercia $I = 250$ kg·m^2 y es rotatorio a 10.0 rev/min en torno a un eje vertical sin fricción. Frente al eje, un niño de 25.0 kg salta hacia el tiovivo y logra sentarse en el borde. ¿Cuál es la nueva rapidez angular del tiovivo?

34. ● Una barra uniforme de 300 g de masa y 50.0 cm de longitud rota en un plano horizontal en torno a una clavija fija vertical sin fricción a través de su centro. Dos pequeñas cuentas densas, cada una de masa m, se montan sobre la barra de modo que puedan deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al

inicio, las cuentas se sostienen mediante broches en posiciones a 10.0 cm en cada lado del centro, y el sistema está girando con una rapidez angular de 36.0 rad/s. Los broches se liberan simultáneamente y las cuentas se deslizan hacia afuera a lo largo de la barra. a) Encuentre la rapidez angular ω_f del sistema, dependiente de *m*, en el instante en que las cuentas se deslizan de los extremos de la barra. b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles para ω_f y los valores de *m* a los que corresponden? Describa la forma de una gráfica de ω_f con *m*.

35. ● Una mujer de 60.0 kg está de pie en el borde oeste de una tornamesa horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg · m^2 y un radio de 2.00 m. La tornamesa inicialmente está en reposo y es libre de dar vuelta en torno a un eje vertical sin fricción a través de su centro. Después la mujer comienza a caminar alrededor del borde en sentido de las manecillas del reloj (visto desde arriba del sistema) con una rapidez constante de 1.50 m/s en relación con la Tierra. a) Considere el sistema mujer–tornamesa mientras comienza el movimiento. ¿La energía mecánica del sistema se conserva? ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva? ¿La cantidad de movimiento angular del sistema se conserva? b) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular da vuelta la tornamesa? c) ¿Cuánta energía química convierte el cuerpo de la mujer en energía mecánica conforme la mujer se pone ella misma y a la tornamesa en movimiento?

36. Un disco de 80.0 g de masa y 4.00 cm de radio se desliza a través de una mesa de aire con una rapidez de 1.50 m/s, como se muestra en la figura P11.36a. Forma una colisión oblicua con un segundo disco de 6.00 cm de radio y 120 g de masa (inicialmente en reposo) tal que sus bordes apenas se tocan. Ya que sus bordes están recubiertos con pegamento de acción instantánea, los discos quedan unidos y giran después de la colisión (figura P11.36b). a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema relativa al centro de masa? b) ¿Cuál es la rapidez angular en torno al centro de masa?

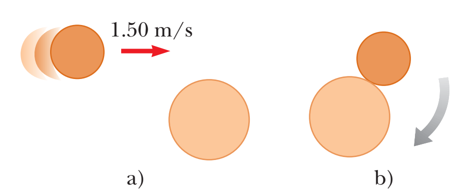


Figura P11.36

37. Un bloque de madera de masa *M*, que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable (figura P11.37). La barra se articula en el otro extremo. Una bala de masa *m*, que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la barra con rapidez *v*, golpea al bloque y queda incrustada en él. a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala–bloque? b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se convierte en energía interna en la colisión?

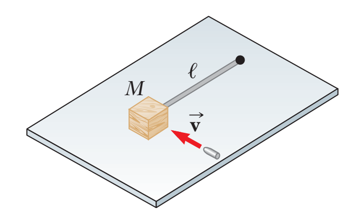


Figura P11.37

38. Una estación espacial con forma de rueda gigante tiene un radio de 100 m y un momento de inercia de 5.00×10^8 kg · m^2. Una tripulación de 150 personas vive en el borde, y la rotación de la estación hace que la tripulación experimente una aceleración aparente en caída libre de *g* (figura P11.27). Cuando 100 personas se mueven hacia el centro de la estación para una junta, la rapidez angular cambia. ¿Qué aceleración aparente en caída libre experimentan los tripulantes que permanecen en el borde? Suponga que la masa promedio de cada habitante es 65.0 kg.

39. ● Un tapón de barro pegajoso con masa *m* y velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$ se dispara a un cilindro sólido de masa *M* y radio *R* (figura P11.39). El cilindro inicialmente está en reposo y se monta sobre un eje horizontal fijo que corre a través de su centro de masa. La línea de movimiento del proyectil es perpendicular al eje y a una distancia $d < R$ desde el centro. a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo antes de que el barro golpee y se pegue a la superficie del cilindro. b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema barro–cilindro? Explique su respuesta. c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema barro–cilindro? Explique su respuesta.

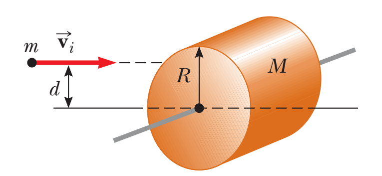


Figura P11.39

40. Una señal rectangular, uniforme y delgada cuelga verticalmente sobre la puerta de una tienda. La señal tiene bisagras con una barra horizontal estable a lo largo de su borde superior. La masa de la señal es 2.40 kg, y su dimensión vertical es 50.0 cm. La señal se balancea sin fricción, de modo que es un blanco tentador para niños armados con bolas de nieve. El máximo desplazamiento angular de la señal es 25.0° en ambos lados de la vertical. En un momento cuando la señal está vertical y se mueve a la izquierda, una bola de nieve de 400 g de masa, que viaja en sentido horizontal hacia la derecha con una velocidad de 160 cm/s, golpea perpendicularmente el borde inferior de la señal y se pega ahí. a) Calcule la rapidez angular de la señal justo antes del impacto. b) Calcule su rapidez angular inmediatamente después del impacto. c) ¿A qué ángulo máximo se balanceará la señal salpicada?

41. Suponga que un meteoro de 3.00×10^{13} kg, que se mueve a 30.0 km/s en relación con el centro de la Tierra, golpea la Tierra. ¿Cuál es el orden de magnitud de la máxima disminución posible en la rapidez angular de la Tierra debido a esta colisión? Explique su respuesta.

Sección 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

42. Una nave espacial está en el espacio vacío. Porta en cubierta un giroscopio con un momento de inercia $I_g = 20.0$ kg · m^2 en torno al eje del giroscopio. El momento de inercia de la nave espacial en torno al mismo eje es $I_s = 5.00 \times 10^5$ kg · m^2. Ni la nave espacial ni el giroscopio giran originalmente. El giroscopio se puede activar en un periodo despreciable de tiempo a una rapidez angular de 100 s^{-1}. Si la orientación de la nave debe cambiar en 30.0°, ¿durante qué intervalo de tiempo se debe hacer funcionar el giroscopio?

43. El vector cantidad de movimiento angular de un giroscopio en precesión barre un cono como se muestra en la figura 11.13b.

Su rapidez angular, llamada su frecuencia precesional, se conoce por $\omega_p = \tau/L$, donde τ es la magnitud del momento de torsión sobre el giroscopio y L es la magnitud de su cantidad de movimiento angular. En el movimiento llamado *precesión de los equinoccios*, el eje de rotación de la Tierra precede en torno a la perpendicular a su plano orbital con un periodo de 2.58×10^4 años. Modele la Tierra como una esfera uniforme y calcule el momento de torsión sobre la Tierra que provoca esta precesión.

Problemas adicionales

44. Todo mundo se queja de que no hay suficientes horas en un día. En un intento por componer esto, suponga que todas las personas en el mundo se alinean en el ecuador y comienzan a correr hacia el este a 2.50 m/s en relación con la superficie de la Tierra. ¿En cuánto aumenta la longitud de un día? Suponga que la población mundial es de 7.00×10^9 personas, con una masa promedio de 55.0 kg cada una, y que la Tierra es una esfera homogénea sólida. Además, puede usar la aproximación $1/(1 - x) \approx 1 + x$ para x pequeña.

45. Un juego de futbol americano se canceló por mal clima en Cleveland, y dos jugadores retirados se deslizan como niños sobre un estacionamiento cubierto de hielo sin fricción. William "Refrigerador" Perry, de 162 kg de masa, se desliza hacia la derecha a 8.00 m/s, y Doug Flutie, de 81.0 kg de masa, se desliza hacia la izquierda a 11.0 m/s a lo largo de la misma línea. Cuando se encuentran, se toman de las manos y se sujetan con fuerza. a) ¿Cuál es su velocidad inmediatamente después? b) ¿Qué fracción de su energía cinética original todavía es energía mecánica después de su colisión? Los atletas se divierten tanto que repiten la colisión con las mismas velocidades originales, pero esta vez moviéndose a lo largo de líneas paralelas separadas 1.20 m. En su aproximación más cercana se toman de los brazos y comienzan a girar en torno a su centro de masa común. Modele a los hombres como partículas y sus brazos como una cuerda que no se estira. c) Encuentre la velocidad de su centro de masa. d) Encuentre su rapidez angular. e) ¿Qué fracción de su energía cinética original todavía es energía mecánica después de ligar sus brazos?

46. ● Un patinador con su patineta se modelan como una partícula de 76.0 kg de masa, ubicada en su centro de masa. Como se muestra en la figura P8.37 del capítulo 8, el patinador parte del reposo en una posición encogida en un extremo de una media tubería (punto Ⓐ). La media tubería forma la mitad de un cilindro de 6.80 m de radio con su eje horizontal. En su descenso, el patinador se mueve sin fricción y mantiene su postura de modo que su centro de masa se mueve a través de un cuarto de círculo de 6.30 m de radio. a) Encuentre su rapidez en la parte baja de la media tubería (punto Ⓑ). b) Encuentre su cantidad de movimiento angular en torno al centro de curvatura. c) Inmediatamente después de pasar el punto Ⓑ, se pone de pie y eleva los brazos, lo que eleva su centro de gravedad de 0.500 m a 0.950 m sobre el concreto (punto Ⓒ). Explique por qué su cantidad de movimiento linear es constante en esta maniobra, mientras que su cantidad de movimiento lineal y su energía mecánica no son constantes. d) Encuentre su rapidez inmediatamente después de que se pone de pie, cuando su centro de masa se mueve en un cuarto de círculo de 5.85 m de radio. e) ¿Cuánta energía química en las piernas del patinador se convirtió en energía mecánica mientras se puso de pie? A continuación, el patinador se desliza hacia arriba con su centro de masa moviéndose en un cuarto de círculo de 5.58 m de radio. Su cuerpo está horizontal cuando pasa el punto Ⓓ, el extremo lejano de la media tubería. f) Encuentre su rapidez en esta posición. Por último se vuelve balístico y gira mientras su centro de masa se mueve en forma vertical. g) ¿Qué tan alto sobre el punto Ⓓ se eleva? h) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en el aire antes de tocar tierra, viendo hacia abajo y enconchado de nuevo, 2.34 m abajo del nivel del punto Ⓓ? i) Compare la solución a este problema con la solución al problema 8.37. ¿Cuál es más precisa? ¿Por qué? *Precaución:* No intente esta acrobacia sin la habilidad ni el equipo de protección requeridos ni en un canal de desagüe al que no tenga acceso legal.

47. Una barra rígida sin masa tiene tres partículas con masas iguales unidas a ella, como se muestra en la figura P11.47. La barra es libre de dar vuelta en un plano vertical en torno a un eje sin fricción perpendicular a la barra a través del punto P y se libera del reposo en la posición horizontal en $t = 0$. Si supone que se conocen m y d, encuentre: a) el momento de inercia del sistema (barra más partículas) en torno al eje, b) el momento de torsión que actúa sobre el sistema en $t = 0$, c) la aceleración angular del sistema en $t = 0$, d) la aceleración lineal de la partícula 3 en $t = 0$, e) la máxima energía cinética del sistema, f) la máxima rapidez angular alcanzada por la barra, g) la máxima cantidad de movimiento angular del sistema y h) la máxima rapidez alcanzada por la partícula 2.

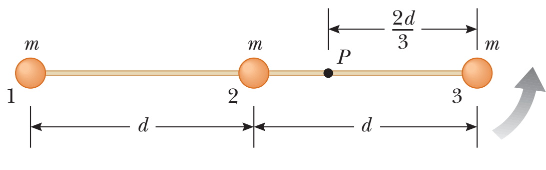


Figura P11.47

48. ● Una soga ligera pasa sobre una polea ligera sin fricción. Un extremo está unido a un racimo de plátanos de masa M y un mono de masa M escala por el otro extremo (figura P11.48). El mono escala la cuerda con la intención de llegar a los plátanos. a) Al tratar el sistema que consiste de mono, plátanos, soga y polea, evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de la polea. b) Use los resultados de a) y determine la cantidad de movimiento angular total en torno al eje de la polea y describa el movimiento del sistema. ¿El mono alcanzará los plátanos?

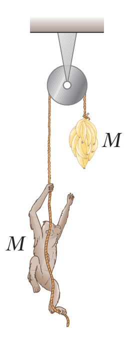


Figura P11.48

49. El cometa Halley se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica, su aproximación más cercana al Sol es más o menos 0.590 UA y su mayor distancia 35.0 UA (1 UA = distancia Tierra−Sol). La rapidez del cometa en la aproximación más cercana es 54.0 km/s. ¿Cuál es su rapidez cuando está más alejado del

Sol? La cantidad de movimiento angular del cometa en torno al Sol se conserva porque sobre el cometa no actúa momento de torsión. La fuerza gravitacional que ejerce el Sol tiene brazo de momento cero.

50. Un proyectil de masa m se mueve hacia la derecha con una rapidez v_i (figura P11.50a). El proyectil golpea y se pega al extremo de una barra estable de masa M y longitud d articulada en torno a un eje sin fricción a través de su centro (figura P11.50b). a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión. b) Determine la pérdida fraccional en energía mecánica debido a la colisión.

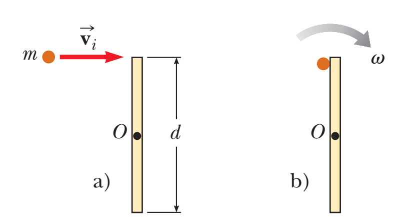


Figura P11.50

51. Un disco de masa m se amarra a una cuerda que pasa a través de un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (figura P11.51). El disco inicialmente orbita con rapidez v_i en un círculo de radio r_i. Luego la cuerda se jala lentamente desde abajo, lo que disminuye el radio del círculo a r. a) ¿Cuál es la rapidez del disco cuando el radio es r? b) Encuentre la tensión en la cuerda como función de r. c) ¿Cuánto trabajo W se realiza al mover m de r_i a r? *Nota:* La tensión depende de r. d) Obtenga valores numéricos para v, T y W cuando $r = 0.100$ m, $m = 50.0$ g, $r_i = 0.300$ m y $v_i = 1.50$ m/s.

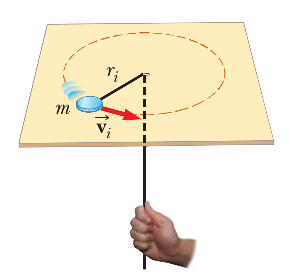


Figura P11.51

52. ● Dos niños juegan sobre los taburetes del mostrador de un restaurante. Sus pies no llegan a los reposapiés y lo alto de los taburetes tiene libertad de dar vuelta sin fricción sobre pedestales fijos al suelo. Uno de los niños atrapa una bola lanzada en un proceso descrito por la ecuación

$$(0.730 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(2.40\hat{\mathbf{j}} \text{ rad/s}) + (0.120 \text{ kg})(0.350\hat{\mathbf{i}} \text{ m}) \times (4.30\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}) = [0.730 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (0.120 \text{ kg})(0.350 \text{ m})^2]\,\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

a) Resuelva la ecuación para la incógnita $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. b) Complete el enunciado del problema al que se aplica esta ecuación. Su enunciado debe incluir la información numérica conocida y la especificación de la incógnita a determinar. c) ¿La ecuación podría describir igualmente bien al otro niño que lanza la bola? Explique su respuesta.

53. Dos astronautas (figura P11.53), cada uno con 75.0 kg de masa, están conectados mediante una cuerda de 10.0 m de masa despreciable. Están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de velocidad de 5.00 m/s. Al tratar a los astronautas como partículas, calcule a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema y b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, un astronauta acorta la distancia entre ellos a 5.00 m. c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de velocidad de los astronautas? e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? f) ¿Cuánto trabajo hace el astronauta al acortar la cuerda?

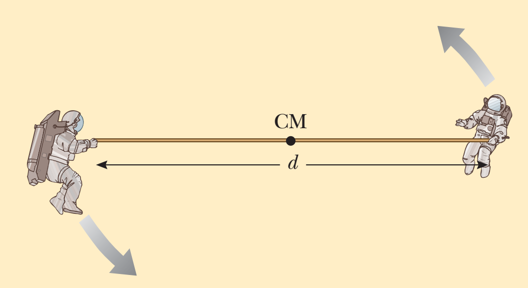
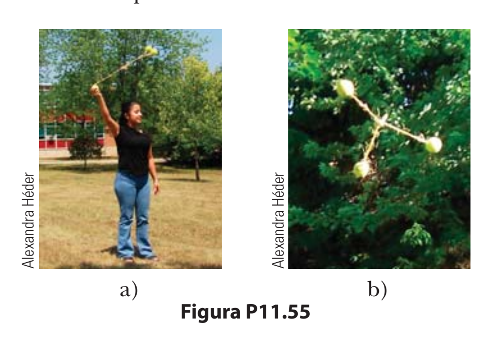


Figura P11.53 Problemas 53 y 54.

54. Dos astronautas (figura P11.53), cada uno con masa M, están conectados mediante una cuerda de longitud d que tiene masa despreciable. Están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de velocidad v. Al tratar a los astronautas como partículas, calcule a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema y b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, un astronauta acorta la distancia entre ellos a $d/2$. c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de velocidad de los astronautas? e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? f) ¿Cuánto trabajo hace el astronauta al acortar la cuerda?

55. ● Los nativos de Sudamérica usan *boleadoras* para cazar aves y animales. Una boleadora puede consistir de tres piedras, cada una con masa m, en los extremos de tres cuerdas ligeras, cada una con longitud ℓ. Los otros extremos de las cuerdas se amarran juntos para formar una Y. El cazador sostiene una piedra y gira las otras dos piedras sobre su cabeza (figura P11.55a). Ambas piedras se mueven juntas en un círculo horizontal de radio 2ℓ con rapidez v_0. En el momento en que el componente horizontal de su velocidad se dirige hacia la presa, el cazador suelta la piedra de su mano. A medida que la boleadora vuela a través del aire, las cuerdas rápidamente toman un ordenamiento estable con ángulos constantes de 120 grados entre ellas (figura P11.55b). En la dirección vertical, la boleadora está en caída libre. Las fuerzas gravitacionales que ejerce la Tierra hacen que la unión de las cuerdas se mueva con la aceleración descendente $\vec{\mathbf{g}}$. Usted puede ignorar el movimiento vertical mientras procede a describir el movimiento horizontal



a) b)

Figura P11.55

de la boleadora. En términos de m, ℓ, y v_0, calcule a) la magnitud de la cantidad de movimiento, b) la rapidez horizontal del centro de masa, c) la cantidad de movimiento angular en torno al centro de masa y d) la rapidez angular de la boleadora en torno a su centro de masa. Calcule la energía cinética de la boleadora e) en el instante de liberación y f) en su forma Y estable. g) Explique cómo se aplican las leyes de conservación a la boleadora mientras cambia su configuración. Robert Beichner sugirió la idea para este problema.

56. Un cubo sólido de madera, de lado $2a$ y masa M, descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a dar vuelta en torno a un eje fijo AB (figura P11.56). Una bala de masa m y rapidez v se dispara a la cara opuesta $ABCD$ a una altura de $4a/3$. La bala se incrusta en el cubo. Encuentre el valor mínimo de v que se requiere para voltear al cubo de modo que caiga sobre la cara $ABCD$. Suponga $m << M$.

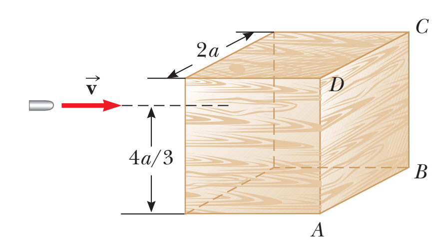


Figura P11.56

57. ● El calentamiento global causa preocupación porque incluso pequeños cambios en la temperatura de la Tierra pueden tener consecuencias significativas. Por ejemplo, si las capas de hielo polar de la Tierra se derritieran por completo, el agua adicional resultante en los océanos inundaría muchas áreas costeras. Calcule el cambio resultante en la duración de un día. Modele el hielo polar con una masa de 2.30×10^{19} kg y que forma dos discos planos de 6.00×10^5 m de radio. Suponga que el agua se dispersa en un delgado cascarón esférico irrompible después de derretirse. ¿Es apreciable el cambio en la duración de un día?

58. Un disco sólido uniforme se pone en rotación con una rapidez angular ω_i en torno a un eje a través de su centro. Mientras todavía gira con esta rapidez, el disco entra en contacto con una superficie horizontal y se libera como se muestra en la figura P11.58. a) ¿Cuál es la rapidez angular del disco una vez que tiene lugar el rodamiento puro? b) Encuentre la pérdida fraccionaria en energía cinética desde el momento en que se libera el disco hasta que ocurre rodamiento puro. *Sugerencia:* Considere momentos de torsión en torno al centro de masa.

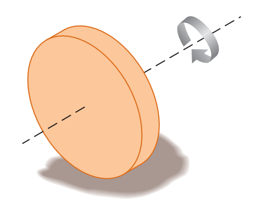


Figura P11.58 Problemas 58 y 59.

59. Suponga que a un disco sólido de radio R se le da una rapidez angular ω_i en torno a un eje a través de su centro y luego se baja a una superficie horizontal y se libera como se muestra en la figura P11.58. Además, suponga que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ. a) Demuestre que el intervalo de tiempo antes de que ocurra movimiento de rodamiento puro es $R\omega_i/3\mu g$. b) Demuestre que la distancia que recorre el disco antes de que se presente rodamiento puro es $R^2\omega_i^2/18\,\mu g$.

60. Un cubo sólido, de lado $2a$ y masa M, se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme $\vec{\mathbf{v}}$, como se muestra en la figura P11.60a. Golpea un pequeño obstáculo al final de la mesa, lo que hace que el cubo se incline como se muestra en la figura P11.60b. Encuentre el valor mínimo de $\vec{\mathbf{v}}$ tal que el cubo caiga de la mesa. El momento de inercia del cubo en torno a un eje a lo largo de uno de sus bordes es $8Ma^2/3$. *Nota:* El cubo se somete una colisión inelástica en el borde.

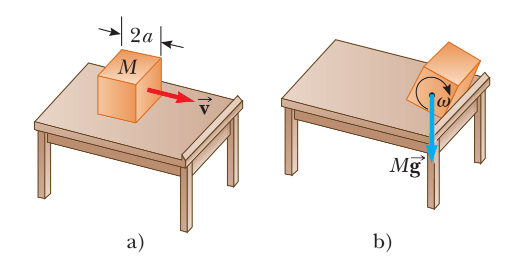


Figura P11.60

Respuestas a las preguntas rápidas

11.1 d). Debido a la función sen θ, $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es o igual o menor que AB, dependiendo del ángulo θ.

11.2 **i)**, a). Si $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ son paralelos o antiparalelos, la cantidad de movimiento angular es cero. Para una cantidad de movimiento angular distinta de cero, el vector cantidad de movimiento lineal debe estar corrido del eje de rotación. **ii)**, c). La cantidad de movimiento angular es el producto de la cantidad de movimiento lineal y la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea a lo largo de la que se encuentra el vector cantidad de movimiento lineal.

11.3 b). La esfera hueca tiene un mayor momento de inercia que la esfera sólida.

11.4 **i)**, a). La clavadista está en un sistema aislado, de modo que el producto $I\omega$ permanece constante. Puesto que su momento de inercia disminuye, su rapidez angular aumenta. **ii)**, a). A medida que el momento de inercia de la clavadista disminuye, la rapidez angular aumenta en el mismo factor. Por ejemplo, si i baja en un factor de 2, en tal caso ω sube en un factor de 2. La energía cinética rotacional varía como el cuadrado de ω. Si I se reduce a la mitad, en tal caso ω^2 aumenta en un factor de 4 y la energía aumenta en un factor de 2.



La Roca Equilibrada en el Arches National Park, Utah, es una gran roca de 3 000 000 kg que ha estado en equilibrio estable durante milenios. Tenía de vecina una compañera más pequeña, llamada "lasca del viejo bloque", que cayó durante el invierno de 1975. La Roca Equilibrada apareció en una de las primeras escenas de la película *Indiana Jones y la última cruzada*. En este capítulo se estudiarán las condiciones bajo las que un objeto está en equilibrio. (John W. Jewett Jr.)

12 Equilibrio estático y elasticidad

En los capítulos 10 y 11 se estudió la dinámica de los objetos rígidos. Parte de este capítulo aborda las condiciones en que un objeto rígido está en equilibrio. El término *equilibrio* implica que el objeto está en reposo o que su centro de masa se mueve con velocidad constante en relación con un observador en un marco de referencia inercial. Aquí sólo se trata con el primer caso, en el que el objeto está en *equilibrio estático*. El equilibrio estático representa una situación común en la práctica ingenieril, y los principios que involucra son de especial interés para ingenieros civiles, arquitectos e ingenieros mecánicos. Si es estudiante de ingeniería, sin duda llevará un curso avanzado de estática.

La última sección de este capítulo trata sobre la forma con que se deforman los objetos bajo condiciones de carga. Un objeto *elástico* regresa a su forma original cuando se quitan las fuerzas deformantes. Se definen muchas constantes elásticas, cada una correspondiente a un tipo diferente de deformación.

12.1 Objeto rígido en equilibrio

En el capítulo 5 se explicó el modelo de partícula en equilibrio, en el que una partícula se mueve con velocidad constante porque la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. La situación con objetos reales (extendidos) es más compleja, porque dichos objetos con frecuencia no se pueden modelar como partículas. Para que un objeto extendido esté en

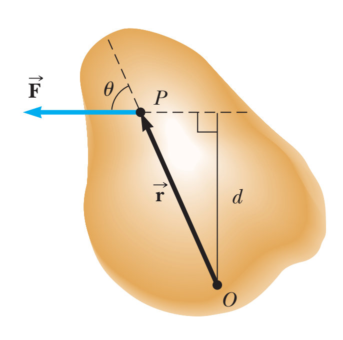


Figura 12.1 Una sola fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un objeto rígido en el punto P.

equilibrio, se debe satisfacer una segunda condición; la cual incluye el momento de torsión neto que actúa sobre el objeto extendido.

Considere una sola fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un objeto rígido, como se muestra en la figura 12.1. El efecto de la fuerza depende de la ubicación de su punto de aplicación P. Si $\vec{r}$ es el vector de posición de este punto relativo a O, el momento de torsión asociado con la fuerza $\vec{F}$ respecto a un eje a través de O se conoce por la ecuación 11.1:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Recuerde de la explicación del producto vectorial en la sección 11.1, que el vector $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Puede usar la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\vec{\tau}$, como se muestra en la figura 11.2. Por tanto, en la figura 12.1 $\vec{\tau}$ se dirige hacia usted afuera de la página.

Como puede ver de la figura 12.1, la tendencia de $\vec{F}$ a dar vuelta el objeto respecto a un eje a través de O depende del brazo de momento d, así como de la magnitud de $\vec{F}$. Recuerde que la magnitud de $\vec{\tau}$ es Fd (véase la ecuación 10.19). De acuerdo con la ecuación 10.21, el momento de torsión neto en un objeto rígido hace que se someta a una aceleración angular.

En esta explicación se investigan aquellas situaciones rotacionales en las cuales la aceleración angular de un objeto rígido es cero. Tal objeto está en **equilibrio rotacional**. Porque $\Sigma\, \tau = I\alpha$ para rotación alrededor de un eje fijo, la condición necesaria para equilibrio rotacional es que **el momento de torsión neto alrededor de algún eje debe ser cero**. Ahora se tienen dos condiciones necesarias para el equilibrio de un objeto:

1. La fuerza externa neta sobre el objeto debe ser igual a cero:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \textbf{(12.1)}$$

2. El momento de torsión externo neto sobre el objeto alrededor de *cualquier* eje debe ser cero:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad \textbf{(12.2)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 12.1
Momento de torsión cero

El momento de torsión neto cero no significa una ausencia de movimiento rotacional. Un objeto que rota con rapidez angular constante puede estar bajo la influencia de un momento de torsión neto de cero. Esta posibilidad es análoga a la situación traslacional: fuerza neta cero no significa una ausencia de movimiento traslacional.

Estas condiciones describen el modelo de análisis de **objeto rígido en equilibrio**. La primera condición es un enunciado del equilibrio traslacional; establece que la aceleración traslacional del centro de masa del objeto debe ser cero cuando se ve desde un marco de referencia inercial. La segunda condición es un enunciado de equilibrio rotacional; afirma que la aceleración angular en torno a cualquier eje debe ser cero. En el caso especial de **equilibrio estático**, que es el tema principal de este capítulo, el objeto en equilibrio está en reposo relativo con el observador y por eso no tiene rapidez traslacional o angular (es decir, $v_{CM} = 0$ y $\omega = 0$).

Pregunta rápida 12.1 Considere el objeto sometido a las dos fuerzas de la figura 12.2. Elija el enunciado correcto respecto a esta situación. a) El objeto está en equilibrio de fuerzas pero no en equilibrio de momento de torsión. b) El objeto está en equilibrio de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. c) El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

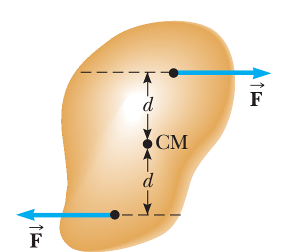


Figura 12.2 (Pregunta rápida 12.1) Dos fuerzas de igual magnitud se aplican a distancias iguales desde el centro de masa de un objeto rígido.

Pregunta rápida 12.2 Considere el objeto sometido a las tres fuerzas de la figura 12.3. Elija el enunciado correcto respecto a esta situación. a) El objeto está en equilibrio de fuerza pero no en equilibrio de momento de torsión. b) El objeto está en equilibrio

de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. c) El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

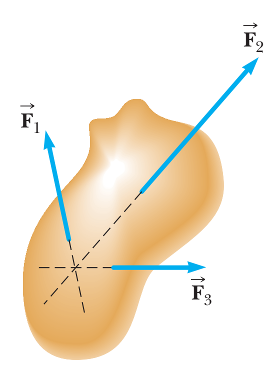


Figura 12.3 (Pregunta rápida 12.2) Tres fuerzas actúan en un objeto. Note que las líneas de acción de las tres fuerzas pasan a través de un punto común.

Las dos expresiones vectoriales conocidas por las ecuaciones 12.1 y 12.2 son equivalentes, en general, a seis ecuaciones escalares: tres de la primera condición para equilibrio y tres de la segunda (que corresponden a las componentes *x*, *y* y *z*). Por tanto, en un sistema complejo que involucra muchas fuerzas que actúan en varias direcciones, se podría enfrentar con resolver un conjunto de ecuaciones con muchas incógnitas. En este caso la discusión se restringe a situaciones en las que todas las fuerzas se encuentran en el plano *xy*. (Se dice que las fuerzas cuyas representaciones vectoriales están en el mismo plano son *coplanares*.) Con esta restricción, sólo debe lidiar con tres ecuaciones escalares. Dos vienen de equilibrar las fuerzas en las direcciones *x* y *y*. La tercera viene de la ecuación de momento de torsión, especialmente cuando el momento de torsión neto en torno a un eje perpendicular a través de *cualquier* punto en el plano *xy* debe ser cero. Por tanto, las dos condiciones del modelo del objeto rígido en equilibrio proporcionan las ecuaciones

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0 \tag{12.3}$$

donde la ubicación del eje de la ecuación del momento de torsión es arbitraria, como se demostrará ahora.

Sin importar el número de fuerzas que actúan, si un objeto está en equilibrio traslacional y el momento de torsión neto es cero en torno a un eje, el momento de torsión neto también debe ser cero en torno a cualquier otro eje. El eje puede pasar a través de un punto que está adentro o afuera de las fronteras del objeto. Considere un objeto sobre el que actúan muchas fuerzas tal que la fuerza resultante $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = 0$. La figura 12.4 describe esta situación (por claridad, sólo se muestran cuatro fuerzas). El punto de aplicación de $\vec{F}_1$ relativo a *O* se especifica mediante el vector de posición $\vec{r}_1$. De igual modo, los puntos de aplicación de $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ se especifican mediante $\vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots$ (no se muestran). El momento de torsión neto en torno a un eje a través de *O* es

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots$$

Ahora considere otro punto arbitrario *O*′ que tenga un vector de posición $\vec{r}\,'$ relativo a *O*. El punto de aplicación de $\vec{F}_1$ relativo a *O*′ se identifica mediante el vector $\vec{r}_1 - \vec{r}\,'$. Del mismo modo, el punto de aplicación de $\vec{F}_2$ relativo a *O*′ es $\vec{r}_2 - \vec{r}\,'$, y así sucesivamente. En consecuencia, el momento de torsión en torno a un eje a través de *O*′ es

$$\begin{aligned}\sum \vec{\tau}_{O'} &= (\vec{r}_1 - \vec{r}\,') \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}\,') \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}\,') \times \vec{F}_3 + \cdots \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots - \vec{r}\,' \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots)\end{aligned}$$

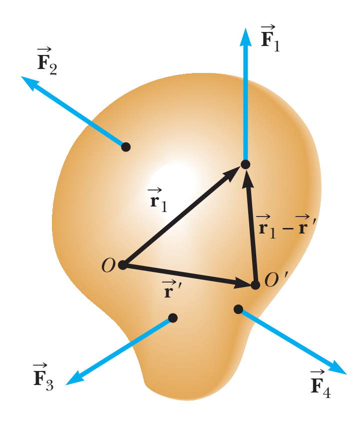


Figura 12.4 Construcción que muestra: si el momento de torsión neto es cero en torno a un eje a través del origen *O*, también es cero en torno a un eje a través de cualquier otro origen, como *O*′.

Ya que la fuerza neta se supone cero (teniendo en cuenta que el objeto está en equilibrio traslacional), el último término desaparece y se ve que el momento de torsión en torno a un eje a través de *O*′ es igual al momento de torsión en torno a un eje a través de *O*. Por tanto, **si un objeto está en equilibrio traslacional y el momento de torsión neto es cero en torno a un eje, el momento de torsión neto debe ser cero en torno a cualquier otro eje.**

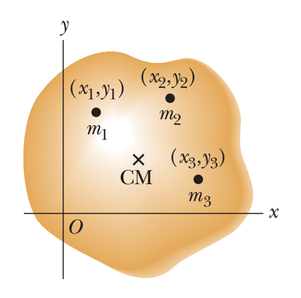


Figura 12.5 Un objeto se puede dividir en muchas pequeñas partículas, cada una con una masa y coordenadas específicas. Estas partículas sirven para ubicar el centro de masa.

12.2 Más acerca del centro de gravedad

Siempre que trate con un objeto rígido, una de las fuerzas que debe considerar es la fuerza gravitacional que actúa sobre él, y debe conocer el punto de aplicación de esta fuerza. Como aprendió en la sección 9.5, asociado con todo objeto hay un punto especial llamado centro de gravedad. La combinación de las diferentes fuerzas gravitacionales que actúan en todos los elementos de masa del objeto es equivalente a una sola fuerza gravitacional que actúa a través de este punto. Por lo tanto, para calcular el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional en un objeto de masa M, sólo necesita considerar la fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa en el centro de gravedad del objeto.

¿Cómo se encuentra este punto especial? Como se mencionó en la sección 9.5, si supone que $\vec{\mathbf{g}}$ es uniforme en el objeto, el centro de gravedad del objeto coincide con su centro de masa. Para ver por qué, considere un objeto con forma arbitraria que se encuentra en el plano xy, como se ilustra en la figura 12.5. Suponga que el objeto se divide en un gran número de partículas de masas m_1, m_2, m_3, . . . que tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), . . . En la ecuación 9.28 se definió la coordenada x del centro de masa de tal objeto como

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Se usa una ecuación similar para definir la coordenada y del centro de masa, al sustituir cada x con su contraparte y.

Ahora se examinará la situación desde otro punto de vista al considerar la fuerza gravitacional que se ejerce sobre cada partícula, como se muestra en la figura 12.6. Cada partícula contribuye con un momento de torsión en torno a un eje a través del origen igual en magnitud al peso mg de la partícula multiplicado por su brazo de momento. Por ejemplo, la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza $m_1\vec{\mathbf{g}}_1$ es $m_1g_1x_1$, donde g_1 es el valor de la aceleración gravitacional en la posición de la partícula de masa m_1. Lo que se quiere es ubicar el centro de gravedad, el punto en el que la aplicación de la simple fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ (donde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ es la masa total del objeto y $\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ es la aceleración debida a la gravedad en la posición del centro de gravedad) tiene el mismo efecto sobre la rotación que el efecto combinado de todas las fuerzas gravitacionales individuales $m_i\vec{\mathbf{g}}_i$. Al igualar el momento de torsión resultante de $M\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ que actúa en el centro de gravedad, con la suma de los momentos de torsión que actúan sobre las partículas individuales, se obtiene

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)g_{\text{CG}}x_{\text{CG}} = m_1g_1x_1 + m_2g_2x_2 + m_3g_3x_3 + \cdots$$

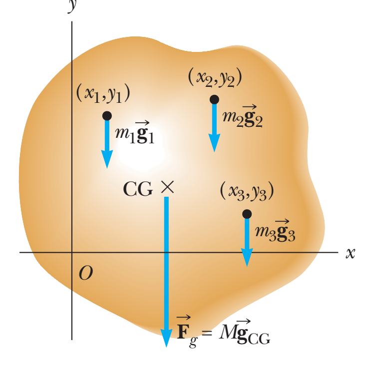


Figura 12.6 La fuerza gravitacional sobre un objeto se ubica en el centro de gravedad, que es la posición promedio de las fuerzas gravitacionales sobre todas las partículas de que está hecho el objeto.

Esta expresión revela la posibilidad de que el valor de g pueda en general variar sobre el objeto. Si se supone g uniforme sobre el objeto (como usualmente es el caso), los términos g se cancelan y se obtiene

$$x_{\text{CG}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \qquad \textbf{(12.4)}$$

Comparar este resultado con la ecuación 9.29 muestra que **el centro de gravedad se ubica en el centro de masa en tanto $\vec{\mathbf{g}}$ sea uniforme sobre todo el objeto**. Muchos ejemplos en la siguiente sección tratan con objetos homogéneos simétricos. El centro de gravedad para cualquiera de tales objetos coincide con su centro geométrico.

Pregunta rápida 12.3 Una regleta cuelga de una cuerda amarrada a la marca de 25 cm. Un objeto de 0.50 kg cuelga del extremo cero de la regleta y se equilibra horizontalmente. ¿Cuál es la masa de la regleta? a) 0.25 kg, b) 0.50 kg, c) 0.75 kg, d) 1.0 kg, e) 2.0 kg, f) imposible de determinar

---

12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático



Figura 12.7 Este soporte de una botella de vino es un sorprendente dispositivo de equilibrio estático. El centro de gravedad del sistema (botella más soporte) está directamente arriba del punto de soporte.

La fotografía del soporte de una botella de vino de la figura 12.7 muestra un ejemplo de un sistema mecánico en equilibrio que parece desafiar a la gravedad. Para que el sistema (soporte más botella) esté en equilibrio, la fuerza externa neta debe ser cero (véase la ecuación 12.1) y el momento de torsión externo neto debe ser cero (véase la ecuación 12.2). La segunda condición se satisface sólo cuando el centro de gravedad del sistema está directamente arriba del punto de soporte.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Objeto rígido en equilibrio**

Cuando analice un objeto rígido en equilibrio bajo la acción de muchas fuerzas externas, use el siguiente procedimiento.

1. *Conceptualizar.* Piense en el objeto que está en equilibrio e identifique todas las fuerzas que actúan sobre él. Imagine qué efecto tendría cada fuerza en la rotación del objeto si fuese la única fuerza en acción.

2. *Categorizar.* Confirme que el objeto en consideración es un objeto rígido en equilibrio.

3. *Analizar.* Dibuje un diagrama de cuerpo libre y etiquete todas las fuerzas externas que actúan en el objeto. Intente adivinar la dirección correcta de cada fuerza.

   Descomponga todas las fuerzas en componentes rectangulares y elija un sistema coordenado conveniente. Luego aplique la primera condición para el equilibrio, la ecuación 12.1. Recuerde seguir la pista de los signos de las diferentes fuerzas componentes.

   Elija un eje conveniente para calcular el momento de torsión neto sobre el objeto rígido. Recuerde que la elección del eje para la ecuación del momento de torsión es arbitraria; por lo tanto, elija un eje que simplifique sus cálculos tanto como sea posible. El eje más conveniente para calcular momentos de torsión es el que pasa a través de un punto en el que actúan muchas fuerzas, de modo que sus momentos de torsión en torno a este eje son cero. Si no conoce una fuerza o no necesita conocer una fuerza, conviene elegir un eje a través del punto en el que actúa dicha fuerza. Aplique la segunda condición para el equilibrio, ecuación 12.2.

   Resuelva las ecuaciones simultáneas para las incógnitas en términos de las cantidades conocidas.

4. *Finalizar.* Confirme que sus resultados sean consistentes con el diagrama de cuerpo libre. Si seleccionó una dirección que conduce a un signo negativo en su solución para una fuerza, no se alarme; simplemente significa que la dirección de la fuerza es la opuesta a la que supuso. Sume las fuerzas verticales y horizontales sobre el objeto y confirme que cada conjunto de componentes suma cero. Sume los momentos de torsión sobre el objeto y confirme que la suma es igual a cero.

EJEMPLO 12.1 **Nueva visita al sube y baja**

Un sube y baja consiste de un tablón uniforme de masa M y longitud ℓ que sostiene en reposo a un padre y su hija con masas m_f y m_d, respectivamente, como se muestra en la figura 12.8. El soporte (llamado *punto de apoyo*) está bajo el centro de gravedad del tablón, el padre a una distancia d del centro y la hija a una distancia $\ell/2$ del centro.

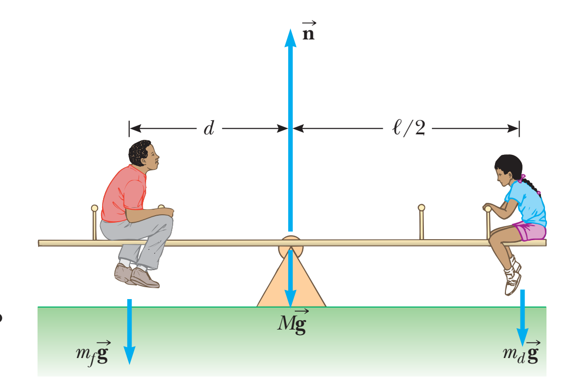


Figura 12.8 (Ejemplo 12.1) Un sistema en equilibrio.

A) Determine la magnitud de la fuerza hacia arriba $\vec{n}$ que ejerce el soporte sobre el tablón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Concentre su atención en el tablón y considere las fuerzas gravitacionales sobre el padre y la hija como fuerzas aplicadas directamente al tablón. La hija causaría una rotación en sentido de las manecillas del reloj sobre el tablón en torno al soporte, mientras que el padre causaría una rotación contra las manecillas del reloj.

Categorizar Ya que el texto del problema establece que el sistema está en reposo, el tablón se modela como un objeto rígido en equilibrio. Sin embargo, ya que sólo se necesitará la primera condición de equilibrio para resolver esta parte del problema, el tablón se modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Defina hacia arriba como la dirección y positiva y sustituya las fuerzas sobre el tablón en la ecuación 12.1:

$$n - m_f g - m_d g - Mg = 0$$

Resuelva para la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{n}}$:

$$n = m_f g + m_d g + Mg = \boxed{(m_f + m_d + M)g}$$

B) Determine dónde se debe sentar el padre para equilibrar el sistema en reposo.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del problema requiere la introducción de momento de torsión para encontrar la posición del padre, así que el tablón se modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar El centro de gravedad del tablón está en su centro geométrico, porque se dijo que el tablón es uniforme. Si se elige un eje de rotación perpendicular a la página, a través del centro de gravedad del tablón, los momentos de torsión producidos por $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional en torno a este eje son cero.

Sustituya en la ecuación 12.2 expresiones para los momentos de torsión sobre el tablón debidos al padre y la hija:

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\frac{\ell}{2} = 0$$

Resuelva para d:

$$d = \boxed{\left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell}$$

Finalizar Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 11.6 al evaluar la aceleración angular del sistema y ajustando la aceleración angular igual a cero.

¿Qué pasaría si? Suponga que se elige otro punto por donde pasa el eje de rotación. Por ejemplo, suponga que el eje es perpen-dicular a la página y pasa a través de la posición del padre. ¿Esto cambia los resultados de los incisos A) y B)?

Respuesta La parte A) no es afectada porque el cálculo de la fuerza neta no involucra un eje de rotación. En la parte B), conceptualmente se esperaría que no hubiera cambio si se elige un eje de rotación diferente, porque la segunda condición de equilibrio afirma que el momento de torsión es cero en torno a cualquier eje de rotación.

Verifique matemáticamente esta respuesta. Recuerde que el signo del momento de torsión asociado con una fuerza es positivo si dicha fuerza tiende a dar vuelta al sistema contra las manecillas del reloj, mientras que el signo del momento de torsión es negativo si la fuerza tiende a dar vuelta al sistema en sentido de las manecillas del reloj. Elija un eje de rotación que pase a través de la posición del padre.

Aplique la condición para equilibrio rotacional, $\Sigma\, \tau = 0$:

$$n(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Sustituya $n = (m_f + m_d + M)g$ del inciso A) y resuelva para d:

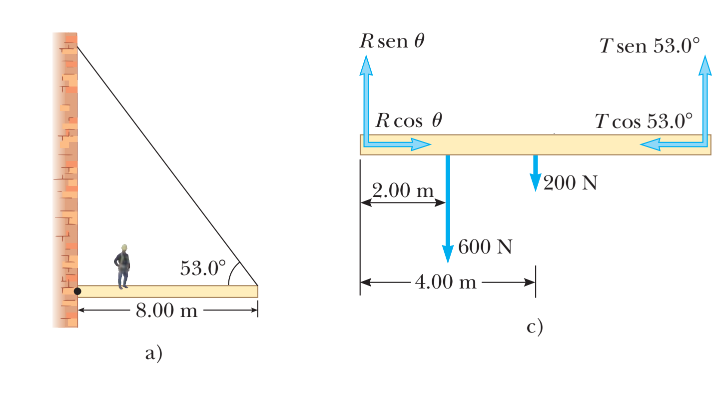
$$(m_f + m_d + M)g(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell$$

Este resultado está en concordancia con el que se obtuvo en la parte B).

EJEMPLO 12.2 De pie sobre una viga horizontal

Una viga horizontal uniforme con una longitud de 8.00 m y un peso de 200 N se une a un pared mediante una junta articulada. Su extremo lejano está sostenido mediante un cable que forma un ángulo de 53.0° con la viga (figura 12.9a). Una persona de 600 N está de pie a 2.00 m de la pared. Encuentre la tensión en el cable así como la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce la pared en la viga.



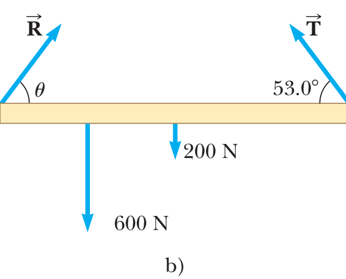


Figura 12.9 (Ejemplo 12.2) a) Una viga uniforme sostenida por un cable. Una persona camina hacia afuera sobre la viga. b) Diagrama de cuerpo libre para la viga. c) Diagrama de cuerpo libre para la viga que muestra las componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{T}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la persona de la figura 12.9a se mueve hacia afuera sobre la viga. Parece razonable que mientras más avance hacia afuera, mayor será el momento de torsión que aplique sobre el eje y la tensión en el cable debe ser mayor para equilibrar este momento de torsión.

Categorizar Ya que el sistema está en reposo, la viga se clasifica como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga: la fuerza gravitacional de 200 N, la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce el cable, la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ que ejerce la pared en el eje y la fuerza de 600 N que ejerce la persona sobre la viga. Dichas fuerzas se indican en el diagrama de cuerpo libre para la viga que se muestra en la figura 12.9b. Cuando se asignan direcciones a las fuerzas, a veces es útil imaginar qué sucedería si súbitamente se retira una fuerza. Por ejemplo, si de pronto desapareciera la pared, el extremo izquierdo de la viga se movería a la izquierda mientras comienza a caer. Este escenario dice que la pared no sólo sostiene la viga hacia arriba sino también presiona hacia afuera sobre ella. Por lo tanto, el vector $\vec{\mathbf{R}}$ se dibuja como se muestra en la figura 12.9b. La figura 12.9c muestra las componentes horizontal y vertical de $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{R}}$.

Sustituya expresiones para las fuerzas sobre la viga en la ecuación 12.1:

$$1)\quad \sum F_x = R\cos\theta - T\cos 53.0° = 0$$

$$2)\quad \sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta + T\,\text{sen}\,53.0° - 600\text{ N} - 200\text{ N} = 0$$

donde se eligió hacia la derecha y hacia arriba como las direcciones positivas. Puesto que R, T y θ son todas incógnitas, no se puede obtener una solución sólo a partir de estas expresiones. (Para resolver las incógnitas, el número de ecuaciones simultáneas debe ser igual al número de incógnitas.)

Ahora invoque la condición de equilibrio rotacional. Un eje conveniente a elegir para la ecuación de momento de torsión es el que pasa a través de la junta articulada. La característica que hace a este eje tan conveniente es que tanto la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ como la componente horizontal de $\vec{\mathbf{T}}$ tienen un brazo de momento cero; en consecuencia, dichas fuerzas no producen momento de torsión en torno a este eje. Los brazos de momento de las fuerzas de 600 N, 200 N y T sen 53.0° en torno a este eje son 2.00 m, 4.00 m y 8.00 m, respectivamente.

Sustituya expresiones para los momentos de torsión sobre la viga en la ecuación 12.2:

$$3)\quad \sum \tau = (T\,\text{sen}\,53.0°)(8.00\text{ m}) - (600\text{ N})(2.00\text{ m}) - (200\text{ N})(4.00\text{ m}) = 0$$

Resuelva para T:

$$T = 313\text{ N}$$

Sustituya este valor en las ecuaciones 1) y 2):

$$R\cos\theta - (313\text{ N})\cos 53.0° = 0$$

$$R\,\text{sen}\,\theta + (313\text{ N})\,\text{sen}\,53.0° - 600\text{ N} - 200\text{ N} = 0$$

Resuelva para $R\cos\theta$ y $R\,\text{sen}\,\theta$:

$$4)\quad R\cos\theta = (313\text{ N})\cos 53.0° = 188\text{ N}$$

$$5)\quad R\,\text{sen}\,\theta = 600\text{ N} + 200\text{ N} - (313\text{ N})\,\text{sen}\,53.0° = 550\text{ N}$$

Divida la ecuación 5) entre la ecuación 4):

$$\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \frac{550\text{ N}}{188\text{ N}} = 2.93$$

Determine el ángulo θ: $\theta = 71.1°$

Resuelva la ecuación 4) para R: $R = \frac{188 \text{ N}}{\cos \theta} = \frac{188 \text{ N}}{\cos 71.1°} = 580 \text{ N}$

Finalizar El valor positivo para el ángulo θ indica que la estimación de la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ fue precisa.

De haber seleccionado algún otro eje para la ecuación de momento de torsión, la solución pudo diferir en los detalles, pero las respuestas serían iguales. Por ejemplo, si hubiese elegido un eje a través del centro de gravedad de la viga, la ecuación del momento de torsión involucraría tanto a T como a R. Sin embargo, esta ecuación, junto con las ecuaciones 1) y 2), todavía se podría resolver para las incógnitas. ¡Inténtelo!

¿Qué pasaría si? ¿Y si la persona camina más lejos sobre la viga? ¿Cambia T? ¿Cambia R? ¿Cambia θ?

Respuesta T debe aumentar porque el peso de la persona ejerce un momento de torsión mayor en torno a la junta articulada, que debe contrarrestar un momento de torsión más grande en la dirección opuesta debido a un valor creciente de T. Si T aumenta, la componente vertical de $\vec{\mathbf{R}}$ disminuye para mantener equilibrio de fuerza en la dirección vertical. No obstante, el equilibrio de fuerza en la dirección horizontal requiere una componente horizontal creciente de $\vec{\mathbf{R}}$ para equilibrar la componente horizontal de la $\vec{\mathbf{T}}$ creciente. Este hecho sugiere que θ se vuelve más pequeño, pero es difícil predecir qué sucede con R. El problema 20 le pide explorar el comportamiento de R.

EJEMPLO 12.3 La escalera inclinada

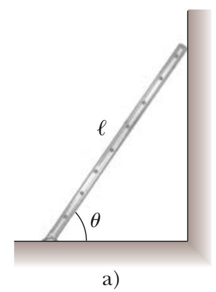
Una escalera uniforme de longitud ℓ descansa contra una pared vertical lisa (figura 12.10a). La masa de la escalera es m y el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo de $\mu_s = 0.40$. Encuentre el ángulo mínimo $\theta_{\text{mín}}$ en el que la escalera no se desliza.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en cualquier escalera que haya subido. ¿Prefiere una gran fuerza de fricción entre la parte baja de la escalera y la superficie o una pequeña? Si la fuerza de fricción es cero, ¿la escalera quedará levantada? Simule una escalera con una regla que se inclina contra una superficie vertical. ¿La regla se desliza en algunos ángulos y quedará levantada en otros?

Categorizar No es deseable que la escalera se deslice, así que se le modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar El diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la escalera se ilustra en la figura 12.10b. La fuerza que el suelo ejerce sobre la escalera es la suma vectorial de una fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción estática $\vec{\mathbf{f}}_s$. La fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ que ejerce la pared sobre la escalera es horizontal porque la pared no tiene fricción.



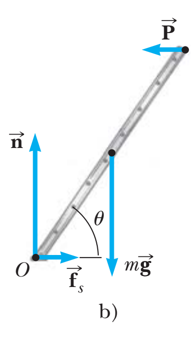


Figura 12.10 (Ejemplo 12.3) a) Una escalera uniforme en reposo que se apoya contra una pared lisa. El suelo es rugoso. b) Diagrama de cuerpo libre para la escalera.

Aplique a la escalera la primera condición para el equilibrio:

1) $\sum F_x = f_s - P = 0$

2) $\sum F_y = n - mg = 0$

Resuelva la ecuación 1) para P: 3) $P = f_s$

Resuelva la ecuación 2) para n: 4) $n = mg$

Cuando la escalera está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática debe tener su valor máximo, que se conoce por $f_{s,\,\text{máx}} = \mu_s n$. Combine esta ecuación con las ecuaciones 3) y 4):

$$P = f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = \mu_s mg$$

Aplique a la escalera la segunda condición para el equilibrio, y considere momentos de torsión en torno a un eje que pasa a través de O:

$$5)\quad \sum \tau_O = P\ell \text{ sen } \theta_{\text{mín}} - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_{\text{mín}} = 0$$

Resuelva para tan $\theta_{\text{mín}}$:

$$\frac{\text{sen }\theta_{\text{mín}}}{\cos\theta_{\text{mín}}} = \tan\theta_{\text{mín}} = \frac{mg}{2P} = \frac{mg}{2\mu_s mg} = \frac{1}{2\mu_s} = 1.25$$

Resuelva para el ángulo $\theta_{\text{mín}}$:

$$\theta_{\text{mín}} = \tan^{-1}(1.25) = 51°$$

Finalizar Note que el ángulo sólo depende del coeficiente de fricción, no de la masa o longitud de la escalera.

EJEMPLO 12.4 Superar una acera

A) Examine la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que una persona debe aplicar a la rueda principal de una silla de ruedas para que ruede sobre el borde de una acera (figura 12.11a). Esta rueda principal que entra en contacto con el borde tiene un radio r y la altura del borde es h.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en los accesos de los edificios para las sillas de ruedas. Por lo general, existen rampas que se construyen para los individuos en sillas de ruedas. Las estructuras escalonadas como los bordes de las aceras son serias barreras para una silla de ruedas.

Categorizar Imagine que la persona ejerce suficiente fuerza de modo que la parte baja de la rueda apenas pierde contacto con la superficie inferior y oscila en reposo. La rueda en esta situación se modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar Por lo general, las manos de la persona proporcionan la fuerza requerida a una rueda ligeramente más pequeña que es concéntrica con la rueda principal. Por simplicidad, suponga que el radio de esta segunda rueda es el mismo que el radio de la rueda principal. Estime un peso combinado de mg = 1 400 N para la persona y la silla de ruedas y elija un radio de rueda de r = 30 cm. Considere que la altura del borde de la acera es h = 10 cm. Suponga también que la silla de ruedas y el ocupante son simétricos y que cada rueda soporta un peso de 700 N. En tal caso proceda a analizar sólo una de las ruedas. La figura 12.11b muestra la geometría para una sola rueda.

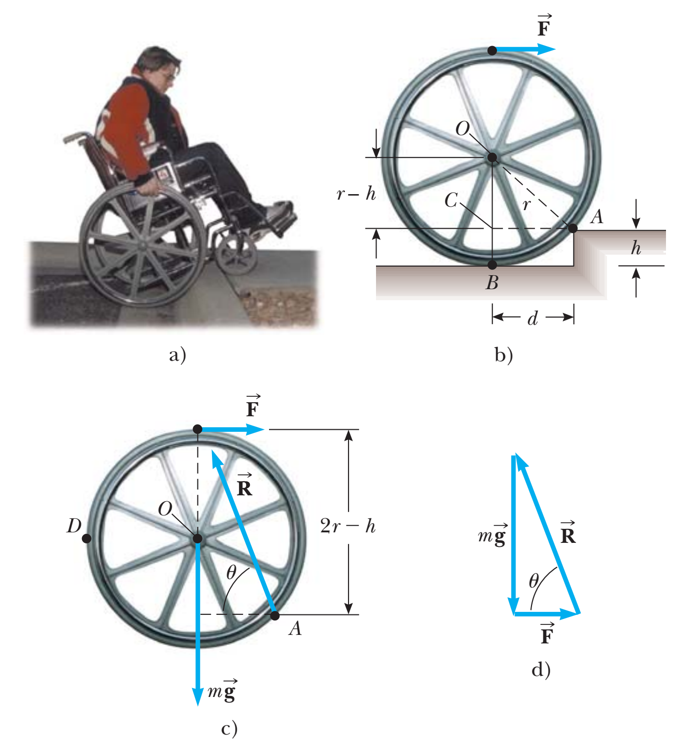


Figura 12.11 (Ejemplo 12.4) a) Una persona en una silla de ruedas intenta rodar sobre el borde de una acera. b) Detalles de la rueda y el borde. La persona aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ a lo alto de la rueda. c) Diagrama de cuerpo libre para la rueda cuando está a punto de elevarse. Tres fuerzas actúan sobre la rueda en este instante: $\vec{\mathbf{F}}$, que ejerce la mano; $\vec{\mathbf{R}}$, que ejerce el borde; y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$. d) La suma vectorial de las tres fuerzas externas que actúan sobre la rueda es cero.

Cuando la rueda está a punto de elevarse del pavimento, la fuerza normal que ejerce el suelo sobre la rueda en el punto B tiende a cero. En consecuencia, en este momento sólo actúan tres fuerzas en la rueda, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12.11c. La fuerza $\vec{\mathbf{R}}$, que es la fuerza que ejerce el borde de la acera en la rueda, actúa en el punto A, de modo que si se elige tener el eje de rotación pasando a través del punto A, no es necesario incluir $\vec{\mathbf{R}}$ en la ecuación de momento de torsión. El brazo de momento de $\vec{\mathbf{F}}$ relativo a un eje a través de A es $2r - h$ (véase la figura 12.11c).

Use el triángulo OAC de la figura 12.11b para encontrar el brazo de momento d de la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ que actúa sobre la rueda relativo a un eje a través del punto A:

$$1)\quad d = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

Aplique a la rueda la segunda condición para el equilibrio, considere momentos de torsión en torno a un eje a través de A:

$$2)\quad \sum \tau_A = mgd - F(2r - h) = 0$$

Sustituya para d de la ecuación 1):

$$mg\sqrt{2rh - h^2} - F(2r - h) = 0$$

Resuelva para F:

$$F = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}$$

Sustituya los valores conocidos:

$$F = \frac{(700\text{ N})\sqrt{2(0.3\text{ m})(0.1\text{ m}) - (0.1\text{ m})^2}}{2(0.3\text{ m}) - 0.1\text{ m}}$$

$$= \boxed{3 \times 10^2\text{ N}}$$

B) Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Aplique a la rueda la primera condición para el equilibrio:

$$\sum F_x = F - R\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$$

Divida la segunda ecuación por la primera:

$$\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{R\cos} = \tan\theta = \frac{mg}{F} = \frac{700\text{ N}}{300\text{ N}} = 2.33$$

Resuelva para el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1} 2.33 = \boxed{70°}$$

Use el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 12.11d para obtener R:

$$R = \sqrt{(mg)^2 + F^2} = \sqrt{(700\text{ N})^2 + (300\text{ N})^2} = \boxed{8 \times 10^2\text{ N}}$$

Finalizar Note que sólo se conservó un dígito como significativo. (El ángulo se escribió como 70°, ¡porque 7×10^{1}° es complicado!) Los resultados indican que la fuerza que se debe aplicar a cada rueda es sustancial. Puede estimar la fuerza que se requiere para rodar una silla de ruedas por una rampa de acceso representativa en la acera, para comparar.

¿Qué pasaría si? ¿Sería más fácil superar el borde si la persona sujeta la rueda en el punto D de la figura 12.11c y jala *hacia arriba*?

Respuesta Si la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ de la figura 12.11c se gira 90° contra las manecillas del reloj y se aplica en D, su brazo de momento es $d + r$. Llame a la magnitud de esta nueva fuerza F'.

Modifique la ecuación 2) para esta situación:

$$\sum \tau_A = mgd - F'(d + r) = 0$$

Resuelva esta ecuación para F' y sustituya para d:

$$F' = \frac{mgd}{d + r} = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}$$

Tome la relación de esta fuerza a la fuerza original que se calculó y exprese el resultado en términos de h/r, la relación de la altura del borde al radio de la rueda:

$$\frac{F'}{F} = \frac{\dfrac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}}{\dfrac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}} = \frac{2r - h}{\sqrt{2rh - h^2} + r} = \frac{2 - \left(\dfrac{h}{r}\right)}{\sqrt{2\left(\dfrac{h}{r}\right) - \left(\dfrac{h}{r}\right)^2} + 1}$$

Sustituya la razón $h/r = 0.33$ a partir de los valores conocidos:

$$\frac{F'}{F} = \frac{2 - 0.33}{\sqrt{2(0.33) - (0.33)^2} + 1} = 0.96$$

Este resultado dice que, *para estos valores*, es ligeramente más fácil jalar hacia arriba en D que horizontalmente en lo alto de la rueda. Para bordes muy altos, de modo que h/r está cerca de 1, la relación F'/F cae a aproximadamente 0.5 porque el punto A se ubica cerca del borde derecho de la rueda en la figura 12.11b. La fuerza en D se aplica a una distancia aproximada de $2r$ desde A, mientras que la fuerza en lo alto de la rueda tiene un brazo de momento sólo de alrededor de r. Para bordes altos, en tal caso, es mejor jalar hacia arriba en D, aunque se requiere un valor grande de la fuerza. Para bordes pequeños, es mejor aplicar la fuerza en lo alto de la rueda. La relación F'/F se vuelve cada vez más grande que 1 alrededor de $h/r = 0.3$ porque el punto A ahora está cerca de la parte baja de la rueda y la fuerza que se aplica a lo alto de la rueda tiene un brazo de momento más grande que cuando se aplicó a D.

Por último, se comenta acerca de la validez de estos resultados matemáticos. Considere la figura 12.11d e imagine que el vector $\vec{\mathbf{F}}$ está hacia arriba en lugar de hacia la derecha. No hay forma de que los tres vectores sumen cero, como requiere la primera condición del equilibrio. Por lo tanto, los resultados anteriores pueden ser cualitativamente válidos, pero no cuantitativamente exactos. Para cancelar la componente horizontal de $\vec{\mathbf{R}}$, la fuerza en D se debe aplicar a un ángulo con la vertical en lugar de recto hacia arriba. Esta característica hace que el cálculo sea más complicado y requiere ambas condiciones de equilibrio.

12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

Excepto por la explicación respecto a los resortes en capítulos anteriores, se ha supuesto que los objetos permanecen rígidos cuando fuerzas externas actúan sobre ellos. En la sección 9.7 se exploraron sistemas deformables. En realidad, todos los objetos son deformables en cierta medida. Es decir: es posible cambiar la forma o el tamaño (o ambos) de un objeto al aplicar fuerzas externas. Sin embargo, conforme se presentan estos cambios, las fuerzas internas en el objeto resisten la deformación.

La deformación de los sólidos se explican en términos de los conceptos de *esfuerzo* y *deformación*. **Esfuerzo** es una cantidad que es proporcional a la fuerza que causa una deformación; más en específico, el esfuerzo es la fuerza externa que actúa en un objeto por unidad de área de sección transversal. El resultado de un esfuerzo es una **deformación**, que es una medida del grado de deformación. Se encuentra que, para esfuerzos suficientemente pequeños, **el esfuerzo es proporcional a la deformación**; la constante de proporcionalidad depende del material que se deforma y de la naturaleza de la deformación. A esta constante de proporcionalidad se le llamará **módulo elástico**. Por lo tanto, el módulo elástico se define como la proporción del esfuerzo a la deformación resultante:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \qquad \textbf{(12.5)}$$

En general el módulo elástico relaciona lo que se hace a un objeto sólido (se aplica una fuerza) como responde dicho objeto (se deforma en cierta medida). Es similar a la constante de resorte k en la ley de Hooke (ecuación 7.9) que relaciona una fuerza aplicada con un resorte y la deformación resultante del resorte, medido por su extensión o compresión.

Se consideran tres tipos de deformación y se define un módulo elástico para cada uno:

1. El **módulo de Young** mide la resistencia de un sólido a un cambio en su longitud.
2. El **módulo de corte** mide la resistencia al movimiento de los planos dentro de un sólido paralelos unos con otros.
3. El **módulo volumétrico** mide la resistencia de los sólidos o líquidos a cambios en su volumen.

Módulo de Young: elasticidad en longitud

Considere una barra larga con área de sección transversal A y longitud inicial L_i que se sujeta con una pinza en un extremo, como en la figura 12.12. Cuando se aplica una fuerza externa perpendicular a la sección transversal, fuerzas internas en la barra resisten la distorsión (“estiramiento”), pero la barra llega a una situación de equilibrio en la que su longitud final L_f es mayor que L_i y en la que la fuerza externa se equilibra exactamente

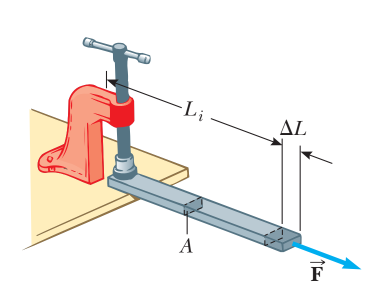


Figura 12.12 Una barra larga, sujeta en un extremo, se estira una cantidad ΔL bajo la acción de una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$.

TABLA 12.1

Valores representativos para módulos elásticos

Sustancia	**Módulo de Young (N/m^2)**	**Módulo de corte (N/m^2)**	**Módulo volumétrico (N/m^2)**
Tungsteno	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Acero	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Latón	9.5×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminio	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Vidrio	$6.5–7.8 \times 10^{10}$	$2.6–3.2 \times 10^{10}$	$5.0–5.5 \times 10^{10}$
Cuarzo	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Agua	—	—	0.21×10^{10}
Mercurio	—	—	2.8×10^{10}

mediante fuerzas internas. En tal situación, se dice que la barra está sobrecargada. El **esfuerzo de tracción** (o tensión de tracción) se define como la relación de la magnitud de la fuerza externa F al área de sección transversal A. La **deformación por tensión** (o deformación por tracción) en este caso se define como la relación del cambio en longitud ΔL a la longitud original L_i. El **módulo de Young** se define mediante una combinación de estas dos relaciones:

Módulo de Young 

$$Y \equiv \frac{\text{esfuerzo de tracción}}{\text{deformación por tensión}} = \frac{F/A}{\Delta L/L_i} \qquad \textbf{(12.6)}$$

el módulo de Young típicamente se usa para caracterizar una barra o alambre sobrecargado bajo tensión o compresión. Ya que la deformación es una cantidad adimensional, Y tiene unidades de fuerza por unidad de área. En la tabla 12.1 se proporcionan valores característicos.

Para esfuerzos relativamente pequeños, la barra regresa a su longitud inicial cuando se retira la fuerza. El **límite elástico** de una sustancia se define como el esfuerzo máximo que se puede aplicar a la sustancia antes de que queda permanentemente deformada y no regresa a su longitud inicial. Es posible exceder el límite elástico de una sustancia al aplicar un esfuerzo demasiado grande, como se ve en la figura 12.13. Al inicio, una curva esfuerzo con deformación es una línea recta. Sin embargo, conforme aumenta el esfuerzo, la curva ya no es una línea recta. Cuando el esfuerzo supera el límite elástico, el objeto se distorsiona permanentemente y no regresa a su forma original después de retirar el esfuerzo. A medida que el esfuerzo aumenta aún más, al final el material se rompe.

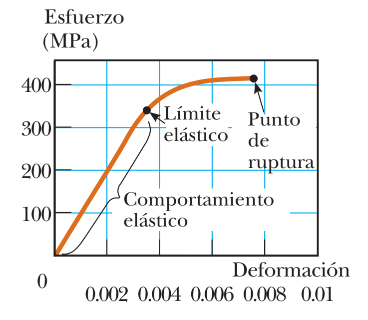


Figura 12.13 Curva esfuerzo contra deformación para un sólido elástico.

Módulo de corte: elasticidad de forma

Otro tipo de deformación se presenta cuando un objeto se somete a una fuerza paralela a una de sus caras mientras la cara opuesta se mantiene fija mediante otra fuerza (figura 12.14a). En este caso, el esfuerzo se llama esfuerzo de corte. Si al inicio el objeto es un bloque rectangular, un esfuerzo de corte resulta en una forma cuya sección transversal es un paralelogramo. Un libro que se empuja de costado, como se muestra en la figura 12.14b, es un ejemplo de un objeto sometido a un esfuerzo de corte. En una primera aproximación (para distorsiones pequeñas), con esta deformación no se presentan cambios en el volumen.

El **esfuerzo de corte** se define como F/A, la relación de la fuerza tangencial al área A de la cara a cortar. La **deformación de corte** se define como la relación $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se mueve la cara cortada y h es la altura del objeto. En términos de estas cantidades, el **módulo de corte** es

Módulo de corte ►

$$S \equiv \frac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{deformación de corte}} = \frac{F/A}{\Delta x/h} \qquad \textbf{(12.7)}$$

En la tabla 12.1 se proporcionan valores de módulos de corte para algunos materiales representativos. Al igual que el módulo de Young, la unidad del módulo de corte es la relación de la de fuerza a la de área.

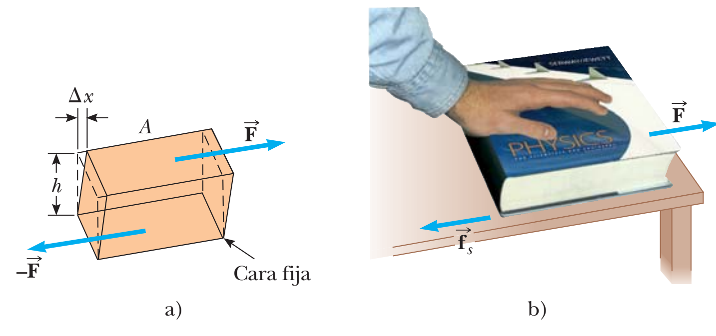


Figura 12.14 a) Una deformación de corte en la que un bloque rectangular se distorsiona mediante dos fuerzas de igual magnitud pero direcciones opuestas aplicadas a dos caras paralelas. b) Un libro está bajo esfuerzo de corte cuando una mano que se coloca en la cubierta aplica una fuerza horizontal que se aleja del lomo.

Módulo volumétrico: elasticidad del volumen

El módulo volumétrico caracteriza la respuesta de un objeto a cambios en una fuerza de magnitud uniforme aplicada perpendicularmente sobre toda la superficie del objeto, como se muestra en la figura 12.15. (Aquí se supone que el objeto está hecho de una sola sustancia.) Como se verá en el capítulo 14, tal distribución uniforme de fuerzas se presentan cuando un objeto está sumergido en un fluido. Un objeto sujeto a este tipo de deformación se somete un cambio en volumen pero no un cambio en forma. El **esfuerzo volumétrico** se define como la relación de la magnitud de la fuerza total F ejercida sobre una superficie al área A de la superficie. La cantidad $P = F/A$ se llama **presión**, que se estudiará con más detalle en el capítulo 14. Si la presión sobre un objeto cambia en una cantidad $\Delta P = \Delta F/A$, el objeto experimenta un cambio de volumen ΔV. La **deformación volumétrica** es igual al cambio en volumen ΔV dividido por el volumen inicial V_i. Por lo tanto, a partir de la ecuación 12.5, una compresión volumétrica se caracteriza en términos del **módulo volumétrico**, que se define como

$$B \equiv \frac{\text{esfuerzo volumétrico}}{\text{deformación volumétrica}} = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_i} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_i} \quad (12.8)$$

◀ Módulo volumétrico

En esta ecuación se inserta un signo negativo de modo que B es un número positivo. Esta maniobra es necesaria porque un aumento en presión (ΔP positivo) causa una disminución en volumen (ΔV negativo) y viceversa.

La tabla 12.1 menciona módulos volumétricos para algunos materiales. Si busca tales valores en una fuente diferente, puede encontrar que se menciona el recíproco del módulo volumétrico. El recíproco del módulo volumétrico se llama **compresibilidad** del material.

Note de la tabla 12.1 que tanto sólidos como líquidos tienen un módulo volumétrico. Sin embargo, no se proporcionan módulos de corte ni módulos de Young para líquidos, porque un líquido no sostiene un esfuerzo de corte o un esfuerzo de tensión. Si una fuerza cortante o una fuerza de tensión se aplican a un líquido, el líquido simplemente fluye como respuesta.

Pregunta rápida 12.4 Para las tres partes de esta pregunta rápida, elija de las siguientes opciones la respuesta correcta para el módulo elástico que describa la correspondencia entre esfuerzo y deformación para el sistema de interés, que está en itálicas: a) módulo de Young, b) módulo de corte, c) módulo volumétrico, d) ninguna de estas opciones. **i)** Un *bloque de hierro* se desliza a través de un suelo horizontal. La fuerza de fricción entre el bloque y el suelo hace que el bloque se deforme. **ii)** Un artista del trapecio se balancea a través de un arco circular. En la parte baja de la oscilación, los *alambres* que sostienen al trapecio son más largos que cuando el trapecista simplemente cuelga del trapecio debido a la tensión aumentada en ellos. **iii)** Una nave espacial lleva una *esfera de acero* a un planeta en el que la presión atmosférica es mucho mayor que en la Tierra. La mayor presión hace que el radio de la esfera disminuya.

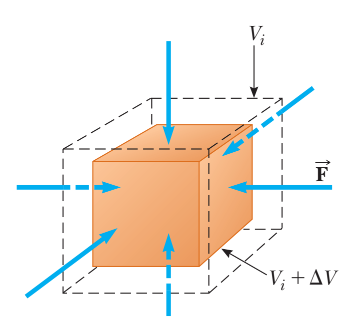


Figura 12.15 Cuando un sólido está bajo presión uniforme, experimenta un cambio en volumen, pero no un cambio en forma. Este cubo se comprime en todos sus lados mediante fuerzas normales a sus seis caras.

Figura 12.16 a) Una losa de concreto sin refuerzo tiende a romperse bajo una carga pesada. b) La resistencia del concreto aumenta con el uso de barras de refuerzo de acero. c) El concreto se fortalece aún más al pretensado con barras de acero bajo tensión.

Hormigón pretensado

Si el esfuerzo sobre un objeto sólido supera cierto valor, el objeto se fractura. El máximo esfuerzo que se puede aplicar antes de que se presente fractura (llamado *resistencia a la tracción*, *resistencia a la compresión* o *resistencia al corte*) depende de la naturaleza del material y del tipo de esfuerzo aplicado. Por ejemplo, el concreto tiene una resistencia a la tracción de aproximadamente 2×10^6 N/m^2, una resistencia a la compresión de 20×10^6 N/m^2 y una resistencia al corte de 2×10^6 N/m^2. Si el esfuerzo aplicado supera estos valores, el concreto se fractura. Es práctica común usar grandes factores de seguridad para evitar la fractura en las estructuras de concreto.

Por lo general, el concreto es muy quebradizo cuando se moldea en secciones delgadas. Por lo tanto, las losas de concreto tienden a pandearse y romperse en áreas sin soporte, como se muestra en la figura 12.16a. La losa se puede reforzar con el uso de barras de acero para reforzar el concreto, como se ilustra en la figura 12.1b. Ya que el concreto es mucho más fuerte bajo compresión (comprimir) que bajo tensión (estiramiento) o corte, columnas verticales de concreto soportan cargas muy pesadas, mientras que las vigas horizontales de concreto tienden a pandearse y romperse. Sin embargo, se logra un aumento significativo en la resistencia al corte si el concreto reforzado se pretensa (pretensar), como se muestra en la figura 12.16c. Como el concreto se vertirá, las barras de acero se mantienen bajo tensión mediante fuerzas externas. Las fuerzas externas se liberan después de que el concreto se cura; el resultado es una tensión permanente en el acero y, por tanto, un esfuerzo de compresión en el concreto. La losa de concreto ahora puede soportar una carga mucho más pesada.

EJEMPLO 12.5 Diseño de escenario

En el ejemplo 8.2 se analizó un cable utilizado para sostener a un actor que se balanceaba hacia el escenario. Suponga ahora que la tensión en el cable es 940 N cuando el actor alcanza el punto más bajo. ¿Qué diámetro debe tener un cable de acero de 10 m de largo si no se quiere que se estire más de 0.50 cm bajo estas condiciones?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Vea de nuevo el ejemplo 8.2 para recordar lo que sucede en esta situación. Ahí se ignoró cualquier estiramiento del cable, pero en este ejemplo se quiere abordar dicho fenómeno.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.6, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.6 para el área de sección transversal del cable:

$$A = \frac{FL_i}{Y\Delta L}$$

Sustituya los valores conocidos:

$$A = \frac{(940\ \text{N})(10\ \text{m})}{(20 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)(0.005\ 0\ \text{m})} = 9.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Si supone que la sección transversal es circular, encuentre el radio del cable a partir de $A = \pi r^2$:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{9.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^2}{\pi}} = 1.7 \times 10^{-3}\ \text{m} = 1.7\ \text{mm}$$

Encuentre el diámetro del cable:

$$d = 2r = 2(1.7\ \text{mm}) = 3.4\ \text{mm}$$

Para proporcionar un gran margen de seguridad, probablemente usaría un cable flexible hecho de muchos alambres más pequeños que tengan una área de sección transversal sustancialmente mayor que el valor calculado.

EJEMPLO 12.6 Compresión de una esfera de latón

Una esfera de latón sólida inicialmente está rodeada de aire, y la presión del aire que se ejerce sobre ella es 1.0×10^5 N/m^2 (presión atmosférica normal). La esfera se sumerge en el océano a una profundidad donde la presión es 2.0×10^7 N/m^2. El volumen de la esfera en el aire es 0.50 m^3. ¿Por cuánto cambia el volumen una vez que la esfera se sumerge?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en las películas o programas de televisión que ha visto acerca de buzos que se sumergen a mayores profundidades en el agua en contenedores sumergibles. Dichos contenedores deben ser muy fuertes para soportar la gran presión bajo el agua. Esta presión comprime al contenedor y reduce su volumen.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.8, así que este ejemplo se clasifique como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.8 para el cambio de volumen de la esfera:

$$\Delta V = -\frac{V_i \Delta P}{B}$$

Sustituya los valores numéricos:

$$\Delta V = -\frac{(0.50\ \text{m}^3)(2.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2 - 1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2)}{6.1 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2}$$

$$= -1.6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

El signo negativo indica que el volumen de la esfera disminuye.

Resumen

DEFINICIONES

Se puede considerar que la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto actúa en un solo punto llamado **centro de gravedad**. El centro de gravedad de un objeto coincide con su centro de masa si el objeto está en un campo gravitacional uniforme.

Las propiedades elásticas de una sustancia se pueden describir con el uso de los conceptos de esfuerzo y deformación. El **esfuerzo** es una cantidad proporcional a la fuerza que produce una deformación; la **deformación** es una medida del grado de cambio de forma. El esfuerzo es proporcional a la deformación, y la constante de proporcionalidad es el **módulo elástico**:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \quad \textbf{(12.5)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Tres tipos comunes de deformación se representan mediante 1) la resistencia de un sólido a elongación bajo una carga, que se caracteriza por el **módulo de Young** Y; 2) la resistencia de un sólido al movimiento de planos internos que se deslizan uno sobre otro, que se caracteriza por el **módulo de corte** S; y 3) la resistencia de un sólido o fluido a un cambio de volumen, que se caracteriza por el **módulo volumétrico** B.

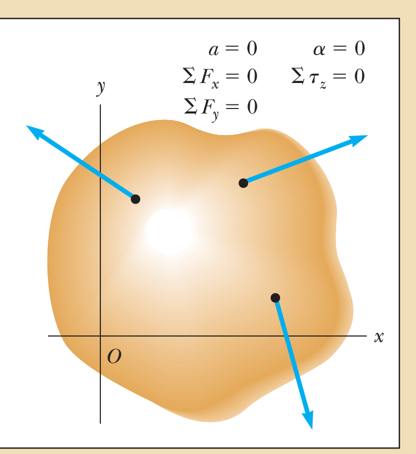
MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Objeto rígido en equilibrio. Un objeto rígido en equilibrio no muestra aceleración traslacional o angular. La fuerza externa neta que actúa sobre él es cero y el momento de torsión externo neto sobre él es cero en torno a cualquier eje:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad \textbf{(12.1)}$$

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0 \quad \textbf{(12.2)}$$

La primera condición es la condición para equilibrio traslacional, y la segunda es la condición para equilibrio rotacional.



Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Suponga que una sola fuerza de 300 N se ejerce sobre el marco de una bicicleta, como se muestra en la figura P12.1. Considere el momento de torsión que se produce en torno a los ejes perpendiculares al plano del papel y a través de cada uno de los puntos del A al F, donde F es el centro de masa del marco. Clasifique los momentos de torsión τ_A, τ_B, τ_C, τ_D, τ_E y τ_F de mayor a menor, y note que cero es mayor que una cantidad negativa. Si dos momentos de torsión son iguales, anote su igualdad en la clasificación.

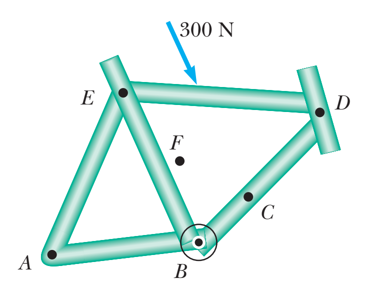


Figura P12.1

2. Póngase de pie con la espalda contra una pared. ¿Por qué no puede poner los talones firmemente contra la pared y luego doblarse hacia adelante sin caer?

3. ¿Un objeto puede estar en equilibrio si está en movimiento? Explique.

4. a) Proporcione un ejemplo en el que la fuerza neta que actúa sobre un objeto sea cero y aún así el momento de torsión neto sea distinto de cero. b) Proporcione un ejemplo en el que el momento de torsión que actúa sobre un objeto sea cero y aún así la fuerza neta sea distinta de cero.

5. **O** Considere el objeto de la figura 12.1. Sobre el objeto se ejerce una sola fuerza. La línea de acción de la fuerza no pasa a través del centro de masa del objeto. La aceleración del centro de masa del objeto debida a esta fuerza a) es la misma que si la fuerza se aplicara al centro de masa, b) es mayor a la aceleración que sería si la fuerza se aplicara al centro de masa, c) es menor a la aceleración que sería si la fuerza se aplicara al centro de masa o d) es cero porque la fuerza sólo causa aceleración angular en torno al centro de masa.

6. El centro de gravedad de un objeto se puede ubicar afuera del objeto. Proporcione algunos ejemplos para los que este caso sea verdadero.

7. Suponga que a usted se le proporciona un trozo de madera con cualquier forma, junto con un martillo, clavos y una plomada. ¿Cómo usaría estos objetos para ubicar el centro de gravedad de la madera? *Sugerencia:* Use el clavo para suspender la madera.

8. **O** En la cabina de un barco, una lata de refresco descansa en una hendidura con forma de plato empotrado en un mostrador. La lata se inclina conforme el barco se bambolea lentamente. ¿En cuál caso la lata es más estable contra las volcaduras? a) Es más estable cuando está llena. b) Es más estable cuando está medio llena. c) Es más estable cuando está vacía. d) Es más estable en dos de estos casos. e) Es igualmente estable en todos los casos.

9. **O** La aceleración debida a la gravedad se vuelve más débil en casi tres partes en diez millones por cada metro de aumento de elevación sobre la superficie de la Tierra. Suponga que un rascacielos tiene 100 pisos de alto, con el mismo plano de piso para cada planta y con densidad promedio uniforme. Compare la ubicación del centro de masa del edificio y la ubicación de su centro de gravedad. Elija una. a) Su centro de masa está más arriba en una distancia de varios metros. b) Su centro de masa está más arriba en una distancia de varios milímetros. c) Su centro de masa está más arriba por una cantidad infinitesimalmente pequeña. d) Su centro de masa y su centro de gravedad están en la misma posición. e) Su centro de gravedad está más arriba en una distancia de varios milímetros. f) Su centro de gravedad está más arriba en una distancia de varios metros.

10. Una niña tiene un gran perro, dócil, al que quiere pesar en una pequeña báscula de baño. Ella justifica que puede determinar el peso del perro con el siguiente método. Primero coloca las dos patas delanteras del perro sobre la báscula y registra la lectura de la báscula. Luego coloca las dos patas traseras del perro sobre la báscula y registra la lectura. Piensa que la suma de las lecturas será el peso del perro. ¿Tiene razón? Explique su respuesta.

11. **O** El centro de gravedad de un hacha está en la línea central del mango, cerca de la cabeza. Suponga que usted corta a través del mango por el centro de gravedad y pesa las dos partes. ¿Qué descubrirá? a) El lado del mango es más pesado que el lado de la cabeza. b) El lado de la cabeza es más pesado que el lado del mango. c) Las dos partes son igualmente pesadas. d) Sus pesos comparativos no se pueden predecir.

12. Una escalera está de pie sobre el suelo y se inclina contra una pared. ¿Se sentiría más seguro de subir a la escalera si le dijeran que el suelo no tiene fricción pero que la pared es rugosa, o si le dicen que la pared no tiene fricción pero que el suelo es rugoso? Justifique su respuesta.

13. **O** Al analizar el equilibrio de un objeto rígido plano, considere la etapa de elegir un eje en torno al cuál calcular momentos de torsión. a) No se requiere hacer elección alguna. b) El eje pasaría a través del centro de masa del objeto. c) El eje pasaría a través de un extremo del objeto. d) El eje sería el eje x o el eje y. e) El eje necesita ser un árbol de motor, pasador de bisagra, punto de giro o centro de apoyo. f) El eje pasaría a través de cualquier punto dentro del objeto. g) Se podría elegir cualquier eje dentro o fuera del objeto.

14. **O** Cierto alambre, de 3 m de largo, se estira 1.2 mm cuando está bajo 200 N de tensión. **i)** Un alambre igualmente grueso de 6 m de largo, hecho del mismo material y bajo la misma tensión, se estira a) 4.8 mm, b) 2.4 mm, c) 1.2 mm, d) 0.6 mm, e) 0.3 mm, f) 0. **ii)** Un alambre con el doble de diámetro, de 3 m de largo, hecho del mismo material y bajo la misma tensión, ¿cuánto se estira? Elija de las mismas posibilidades de la a) a la f).

15. ¿Qué tipo de deformación muestra un cubo de gelatina cuando tiembla?

Problemas

Sección 12.1 Objeto rígido en equilibrio

1. Una viga uniforme de masa m_b y longitud ℓ sostiene bloques con masas m_1 y m_2 en dos posiciones, como se muestra en la figura P12.1. La viga descansa sobre dos bordes afilados. ¿Para qué valor de x la viga se equilibra en P tal que la fuerza normal en O es cero?

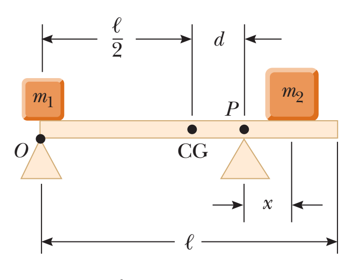


Figura P12.1

2 = intermedio; 3 = desafiante; = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

2. Escriba las condiciones necesarias para el equilibrio del objeto que se muestra en la figura P12.2. Calcule momentos de torsión en torno a un eje a través del punto O.

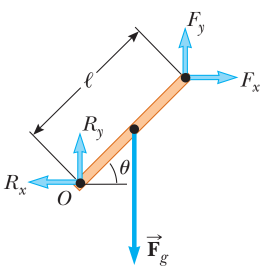


Figura P12.2

Sección 12.2 Más acerca del centro de gravedad

Con esta sección también se pueden asignar los problemas 35, 37, 39 y 40 del capítulo 9.

3. La escuadra de un carpintero tiene la forma de una L, como se muestra en la figura P12.3. Ubique su centro de gravedad.

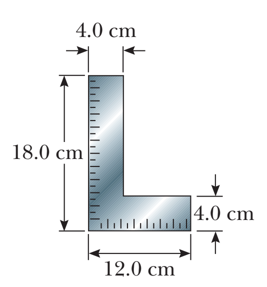


Figura P12.3

4. A una pizza circular de radio R se le quita un trozo circular de radio $R/2$, como se muestra en la figura P12.4. El centro de gravedad se movió de C a C' a lo largo del eje x. Muestre que la distancia de C a C' es $R/6$. Suponga que el grosor y la densidad de la pizza son uniformes en todas sus partes.

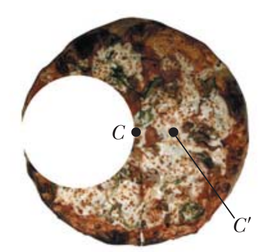


Figura P12.4

5. Considere la siguiente distribución de objetos: un objeto de 5.00 kg con su centro de gravedad en (0, 0) m, un objeto de 3.00 kg en (0, 4.00) m y un objeto de 4.00 kg en (3.00, 0) m. ¿Dónde se debe colocar un cuarto objeto de 8.00 kg de masa de modo que el centro de gravedad del arreglo de cuatro objetos esté en (0, 0)?

6. Fátima construye con madera sólida una pista para su automóvil a escala, como se muestra en la figura P12.6. La pista tiene 5.00 m de ancho, 1.00 m de alto y 3.00 m de largo. La pista se corta de modo que forma una parábola con la ecuación $y = (x - 3)^2/9$. Ubique la coordenada horizontal del centro de gravedad de esta pista.

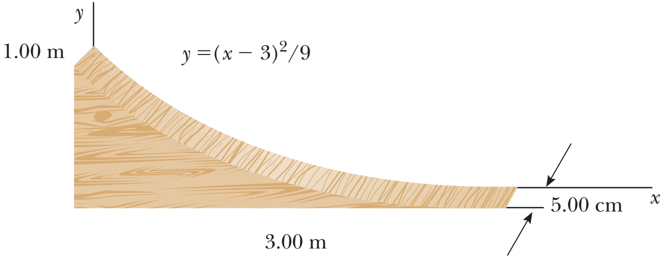


Figura P12.6

7. La figura P12.7 muestra tres objetos uniformes: una barra, un triángulo rectángulo y un cuadrado. Se proporcionan sus masas y sus coordenadas en metros. Determine el centro de gravedad para el sistema de tres objetos.

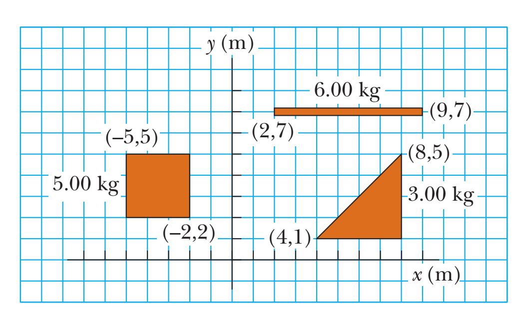


Figura P12.7

Sección 12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

Con esta sección también se pueden asignar los problemas 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 30, 40, 44, 47, 57, 61, 65 y 71.

8. Se construye un móvil con barras ligeras, cuerdas ligeras y recuerdos marinos, como se muestra en la figura P12.8. Determine las masas de los objetos a) m_1, b) m_2 y c) m_3.

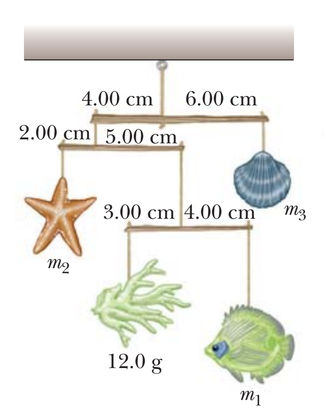


Figura P12.8

9. Encuentre la masa m del contrapeso necesario para equilibrar el camión de 1 500 kg sobre el plano inclinado que se muestra en la figura P12.9. Suponga que ninguna polea tiene fricción ni masa.

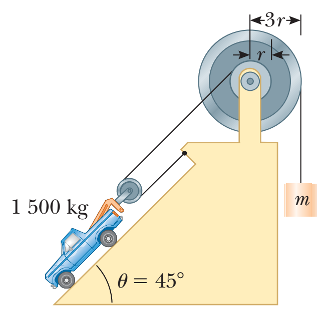


Figura P12.9

10. La figura P12.10 muestra un martillo de oreja que se usa para quitar un clavo de una tabla horizontal. Se ejerce una fuerza de 150 N horizontalmente como se muestra. Encuentre a) la fuerza que ejerce el martillo sobre el clavo y b) la fuerza que ejerce la superficie sobre el punto de contacto con la cabeza del martillo. Suponga que la fuerza que ejerce el martillo sobre el clavo es paralela al clavo.

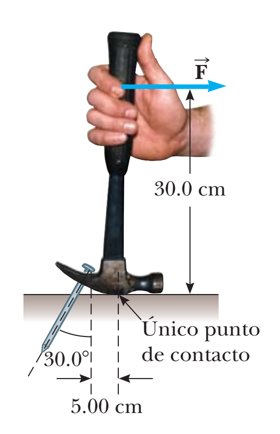


Figura P12.10

11. Una escalera uniforme de 15.0 m que pesa 500 N descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo de 60.0° con la horizontal. a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que ejerce el suelo sobre la base de la escalera cuando un bombero de 800 N está a 4.00 m desde la parte baja. b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a 9.00 m arriba, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

12. Una escalera uniforme de longitud L y masa m_1 descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que el suelo ejerce sobre la base de la escalera cuando un bombero de masa m_2 está a una distancia x desde la parte baja. b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a una distancia d desde la parte baja, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

13. Un automóvil de 1 500 kg tiene una base de ruedas (distancia entre los ejes) de 3.00 m. El centro de masa del automóvil está en la línea de centros en un punto 1.20 m detrás del eje frontal. Encuentre la fuerza que ejerce el suelo sobre cada rueda.

14. ● Un reflector de 20.0 kg en un parque está sostenido al final de una viga horizontal de masa despreciable que está articulada a un poste como se muestra en la figura P12.14. Un cable a un ángulo de 30.0° con la viga ayuda a sostenerlo. Considere el equilibrio de la viga y dibuje un diagrama de cuerpo libre de dicho objeto. Calcule los momentos de torsión en torno a un eje en la bisagra en su extremo izquierdo. Encuentre: a) la tensión en el cable, b) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga y c) la componente vertical de esta fuerza. Ahora resuelva el mismo problema desde el mismo diagrama de cuerpo libre al calcular los momentos de torsión alrededor de la unión entre el cable y la viga en el extremo derecho de la viga. Encuentre: d) la componente vertical de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga, e) la tensión en el cable y f) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga. g) Compare la solución a los incisos de la a) a la c) con la solución a los incisos de la d) a la f). ¿Alguna solución es más precisa? ¿Más simple? Si considera el conjunto de ecuaciones que se leen a partir del diagrama de cuerpo libre en ambas soluciones, ¿cuántas ecuaciones tiene? ¿Cuántas incógnitas se pueden determinar?

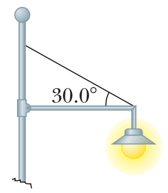


Figura P12.14

15. Una cadena flexible que pesa 40.0 N cuelga entre dos ganchos ubicados a la misma altura (figura P12.15). En cada gancho, la tangente a la cadena forma un ángulo $\theta = 42.0°$ con la horizontal. Encuentre a) la magnitud de la fuerza que ejerce cada gancho sobre la cadena y b) la tensión en la cadena en su punto medio. *Sugerencia:* para el inciso b), elabore un diagrama de cuerpo libre para la mitad de la cadena.

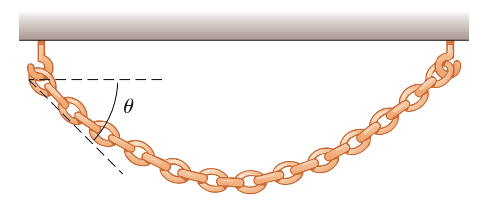
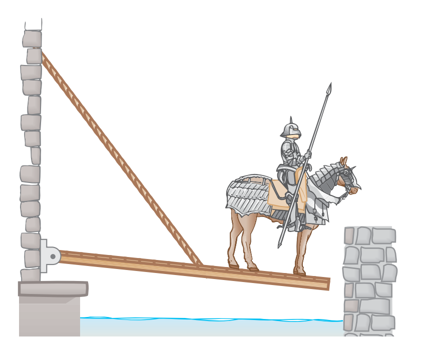


Figura P12.15

16. El Sr. Distraído se pone su armadura y sale del castillo en su noble corcel en su búsqueda por mejorar la comunicación entre las damiselas y los dragones (figura P12.16). Por desgracia, su escudero bajó demasiado el puente levadizo y finalmente se detuvo a 20.0° bajo la horizontal. Distraído y su caballo se


Figura P12.16 Problemas 16 y 17.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

detienen cuando su centro de masa combinado está a 1.00 m del extremo del puente. El puente uniforme mide 8.00 m de largo y tiene un masa de 2 000 kg. El cable de elevación está unido al puente a 5.00 m de la bisagra en el lado del castillo y a un punto en la pared del castillo 12.0 m arriba del puente. La masa combinada de Distraído con su armadura y su corcel es 1 000 kg. Determine a) la tensión en el cable y las componentes de fuerza b) horizontal y c) vertical que actúan sobre el puente en la bisagra.

17. **Problema de repaso.** En la situación descrita en el problema 16 y que se ilustra en la figura P12.16, ¡súbitamente se rompe el cable de elevación! La bisagra entre la pared del castillo y el puente no tiene fricción y el puente se balancea libremente hasta que está en posición vertical. a) Encuentre la aceleración angular del puente una vez que comienza a moverse. b) Halle la rapidez angular del puente cuando golpea la pared vertical del castillo abajo de la bisagra. c) Encuentre la fuerza que ejerce la bisagra sobre el puente inmediatamente después de que el cable se rompe. d) Halle la fuerza que ejerce la bisagra sobre el puente justo antes de que golpee la pared del castillo.

18. Niels empuja a su hermana Camille en una carretilla cuando la detiene un ladrillo de 8.00 cm de alto (figura P12.18). El manubrio de la carretilla forma un ángulo de 15.0° bajo la horizontal. Sobre la rueda, que tiene un radio de 20.0 cm, se ejerce una fuerza hacia abajo de 400 N. a) ¿Qué fuerza debe aplicar Niels a lo largo del manubrio para apenas comenzar a pasar la rueda sobre el ladrillo? b) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando la rueda comienza a elevarse sobre el ladrillo? En ambos incisos a) y b), suponga que el ladrillo permanece fijo y no se desliza sobre el suelo.

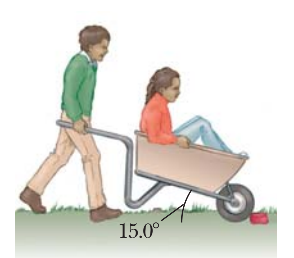


Figura P12.18

19. Un extremo de una barra uniforme de 4.00 m de largo y peso F_g está sostenido mediante un cable. El otro extremo descansa contra la pared, donde se mantiene por fricción, como se muestra en la figura P12.19. El coeficiente de fricción estática entre la pared y la barra es $\mu_s = 0.500$. Determine la distancia mínima x desde el punto A en el que un objeto adicional, también con el mismo peso F_g, se puede colgar sin hacer que la barra se deslice en el punto A.

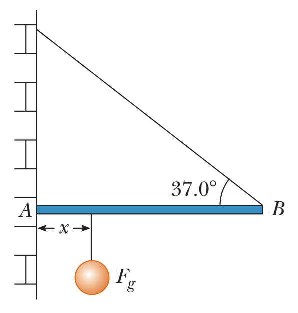


Figura P12.19

20. En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 12.2, sea x la distancia en metros entre la persona y la bisagra en el extremo izquierdo de la viga. a) Demuestre que la tensión del cable en newtons se conoce por $T = 93.9x + 125$. Argumente que T aumenta conforme x aumenta. b) Demuestre que el ángulo de dirección θ de la fuerza de la bisagra está descrito por

$$\tan\theta = \left(\frac{32}{3x+4} - 1\right)\tan 53.0^\circ$$

¿Cómo cambia θ conforme x aumenta? c) Demuestre que la magnitud de la fuerza de la bisagra se conoce por

$$R = \sqrt{8.82 \times 10^3 x^2 - 9.65 \times 10^4 x + 4.96 \times 10^5}$$

¿Cómo cambia R conforme x aumenta?

21. Una saltadora con garrocha sostiene en equilibrio una garrocha de 29.4 N al ejercer una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{U}}$ con una mano y una fuerza hacia abajo $\vec{\mathbf{D}}$ con la otra mano, como se muestra en la figura P12.21. El punto C es el centro de gravedad de la garrocha. ¿Cuáles son las magnitudes de $\vec{\mathbf{U}}$ y $\vec{\mathbf{D}}$?

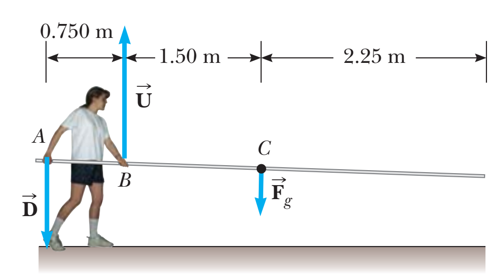


Figura P12.21

Sección 12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

22. Evalúe el módulo de Young para el material cuya curva esfuerzo–deformación se muestra en la figura 12.13.

23. Una carga de 200 kg cuelga de un alambre de 4.00 m de largo, área de sección transversal de 0.200×10^{-4} m^2 y módulo de Young de 8.00×10^{10} N/m^2. ¿Cuál es su aumento en longitud?

24. Suponga que el módulo de Young para hueso es 1.50×10^{10} N/m^2. El hueso se rompe si sobre él se impone un esfuerzo mayor que 1.50×10^8 N/m^2. a) ¿Cuál es la fuerza máxima que se puede ejercer sobre el fémur si éste tiene un diámetro efectivo mínimo de 2.50 cm? b) Si esta fuerza se aplica de manera compresiva, ¿en cuánto se acorta el hueso de 25.0 cm de largo?

25. Un niño se desliza por el suelo con un par de zapatos con suela de caucho. La fuerza de fricción que actúa sobre cada pie es de 20.0 N. El área de la huella de cada suela mide 14.0 cm^2 y el grosor de cada suela es de 5.00 mm. Encuentre la distancia horizontal que corren las superficies superior e inferior de cada suela. El módulo de corte del caucho es 3.00 MN/m^2.

26. Un alambre de acero de 1 mm de diámetro puede sostener una tensión de 0.2 kN. Un cable para soportar una tensión de 20 kN debe tener diámetro, ¿de qué orden de magnitud?

27. Suponga que, si el esfuerzo de corte en el acero supera aproximadamente 4.00×10^8 N/m^2, el acero se rompe. Determine la fuerza de corte necesaria para a) cortar un tornillo de acero de 1.00 cm de diámetro y b) perforar un agujero de 1.00 cm de diámetro en una placa de acero de 0.500 cm de grueso.

28. **Problema de repaso.** Un martillo de 30.0 kg, que se mueve con rapidez de 20.0 m/s, golpea una púa de 2.30 cm de diámetro. El martillo rebota con rapidez de 10.0 m/s después de 0.110 s. ¿Cuál es la deformación promedio en la púa durante el impacto?

29. Cuando el agua se congela, se expande aproximadamente 9.00%. ¿Qué aumento de presión se presenta dentro del monoblock de su automóvil si el agua se congela? (El módulo volumétrico del hielo es 2.00×10^9 N/m^2.)

30. **Problema de repaso.** Un alambre cilíndrico de acero de 2.00 m de largo, con diámetro de sección transversal de 4.00 mm, se coloca sobre una polea ligera sin fricción, con un extremo del alambre conectado a un objeto de 5.00 kg y el otro extremo conectado a un objeto de 3.00 kg. ¿Cuánto se estira el alambre mientras los objetos están en movimiento?

31. Una pasarela suspendida a través del lobby de un hotel está sostenido en numerosos puntos a lo largo de sus bordes mediante un cable vertical arriba de cada punto y una columna vertical por debajo. El cable de acero mide 1.27 cm de diámetro y mide 5.75 m de largo antes de la carga. La columna de aluminio es un cilindro hueco con un diámetro interior de 16.14 cm, diámetro exterior de 16.24 cm y longitud sin carga de 3.25 m. Cuando la pasarela ejerce una fuerza de carga de 8 500 N sobre uno de los puntos de soporte, ¿cuánto baja el punto?

32. ● El punto más profundo en cualquier océano está en la fosa Mariana, que tiene aproximadamente 11 km de profundidad, en el Pacífico. La presión a esta profundidad es enorme, más o menos de 1.13×10^8 N/m^2. a) Calcule el cambio en volumen de 1.00 m^3 de agua de mar que se lleve desde la superficie hasta este punto más profundo. b) La densidad del agua de mar en la superficie es 1.03×10^3 kg/m^3. Encuentre su densidad en el fondo. c) Explique si es o cuándo es una buena aproximación pensar en el agua como incompresible.

Problemas adicionales

33. Un puente de 50.0 m de largo y 8.00×10^4 kg de masa está sostenido sobre un pilar uniforme en cada extremo, como muestra la figura P12.33. Un camión de 3.00×10^4 kg de masa se ubica a 15.0 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de soporte?

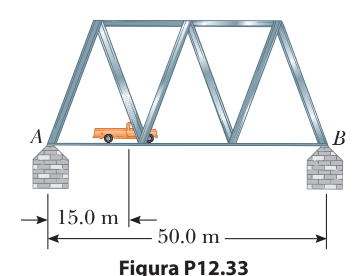


Figura P12.33

34. ● Una nueva estufa de cocina de General Electric tiene una masa de 68.0 kg y las dimensiones que se muestran en la figura P12.34. La estufa viene con una advertencia de que se puede inclinar hacia adelante si una persona se para o sienta sobre la puerta del horno cuando está abierta. ¿Qué puede concluir acerca del peso de tal persona? ¿Podría ser un niño? Mencione las suposiciones que hizo para resolver este problema. La estufa viene con una escuadra que se fija en la pared para evitar un accidente.

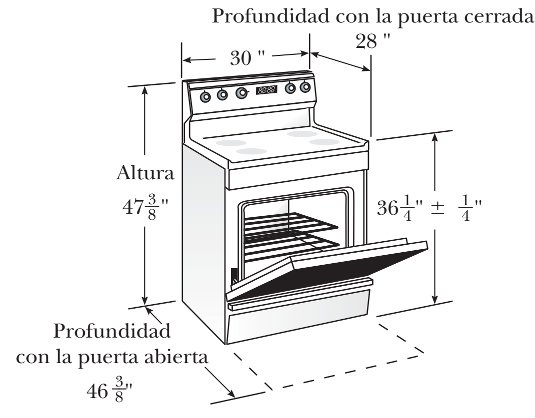


Figura P12.34

35. Un poste uniforme se apoya entre el suelo y el techo de una habitación. La altura de la habitación es 7.80 pies, y el coeficiente de fricción estática entre el poste y el techo es 0.576. El coeficiente de fricción estática entre el poste y el suelo es mayor que eso. ¿Cuál es la longitud del poste más largo que se puede apoyar entre el suelo y el techo?

36. Consulte la figura 12.16c. Un dintel de hormigón armado pretensado mide 1.50 m de largo. El área de sección transversal del concreto es 50.0 cm^2. El concreto encierra una barra de refuerzo de acero con área de sección transversal de 1.50 cm^2. La barra une dos fuertes placas finales. El módulo de Young para el concreto es 30.0×10^9 N/m^2. Después de curar el concreto y liberar la tensión original T_1 en la barra, el concreto está bajo esfuerzo de compresión de 8.00×10^6 N/m^2. a) ¿Qué distancia comprime al concreto cuando la tensión original en la barra se libera? b) ¿Cuál es la nueva tensión T_2 en la barra? c) ¿En tal caso la barra será cuánto más larga que su longitud no esforzada? d) Cuando se vierte el concreto, ¿por qué distancia de extensión se debe haber estirado la barra desde su longitud no esforzada? e) Encuentre la tensión original requerida T_1 en la barra.

37. Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia afuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de comida que cuelga en el extremo de la viga (figura P12.37). La viga es uniforme, pesa 200 N y mide 6.00 m de largo; la canasta pesa 80.0 N. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. b) Cuando el oso está en $x = 1.00$ m, encuentre la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza que ejerce la pared sobre el extremo izquierdo de la viga. c) **¿Qué pasaría si?** Si el alambre puede resistir una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de que el alambre se rompa?

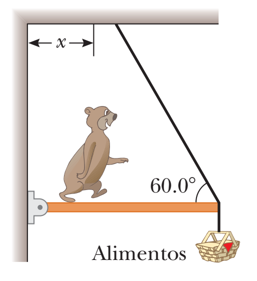


Figura P12.37

38. Las siguientes ecuaciones se obtienen a partir de un diagrama de cuerpo libre de una puerta rectangular, sostenida por dos bisagras en el lado izquierdo. Una cubeta de grano cuelga de la puerta.

$$-A + C = 0$$

$$+B - 392\text{ N} - 50.0\text{ N} = 0$$

$$A(0) + B(0) + C(1.80\text{ m}) - 392\text{ N}(1.50\text{ m}) - 50.0\text{ N}(3.00\text{ m}) = 0$$

a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre y complete el enunciado del problema, y especifique las incógnitas. b) Determine los valores de las incógnitas y establezca el significado físico de cada una.

39. Una señal uniforme de peso F_g y ancho $2L$ cuelga de una viga horizontal ligera con bisagra en la pared y sostenida por un cable (figura P12.39). Determine a) la tensión en el cable y b) las componentes de la fuerza de reacción que ejerce la pared sobre la viga, en términos de F_g, d, L y θ.

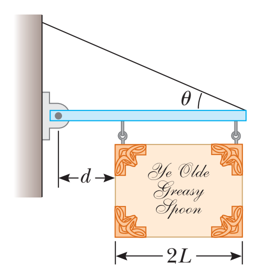


Figura P12.39

40. Una pluma uniforme de 1 200 N está sostenida mediante un cable, como se muestra en la figura P12.40. La pluma está articulada en la parte baja, y un objeto de 2 000 N cuelga de su parte superior. Encuentre la tensión en el cable y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el suelo sobre la pluma.

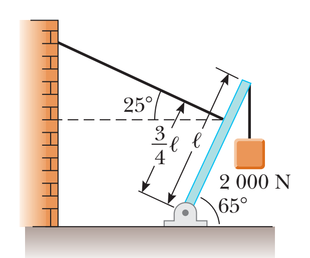


Figura P12.40

41. Una grúa de 3 000 kg de masa soporta una carga de 10 000 kg, como se muestra en la figura P12.41. La grúa se articula sin fricción en A y descansa contra un soporte uniforme en B. Encuentre las fuerzas de reacción en A y B.

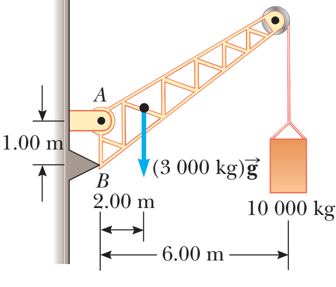


Figura P12.41

42. ● Suponga que una persona se dobla hacia adelante para levantar una carga "con su espalda", como se muestra en la figura P12.42a. La columna de la persona se articula principalmente en la quinta vértebra lumbar, y la principal fuerza de soporte la proporciona el músculo espinal erector de la espalda. Para estimar la magnitud de las fuerzas involucradas, considere el modelo que se muestra en la figura P12.42b para una persona que se dobla hacia adelante para levantar un objeto de 200 N. La columna de la persona y la parte superior del cuerpo se representan como una barra horizontal uniforme de 350 N de peso, que se articula en la base de la columna. El músculo espinal erector, unido a un punto a dos tercios de camino sobre la columna, mantiene la posición de la espalda. El ángulo entre la columna y este músculo es 12.0°. Encuentre a) la tensión en el músculo de la espalda y b) la fuerza compresiva en la columna. c) ¿Este método es una buena forma de levantar una carga? Explique su respuesta, con los resultados de los incisos a) y b). Puede ser instructivo comparar un humano con otros animales. ¿Puede sugerir un mejor método para levantar una carga?

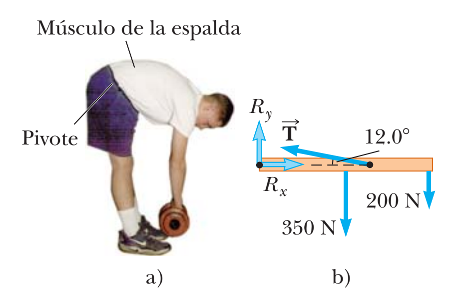


Figura P12.42

43. Un tiburón de 10 000 N está sostenido mediante un cable unido a una barra de 4.00 m que se articula en la base. Calcule la tensión en la soga entre la barra y la pared, si supone que la misma sostiene el sistema en la posición que se muestra en la figura P12.43. Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que se ejercen sobre la base de la barra. Ignore el peso de la barra.

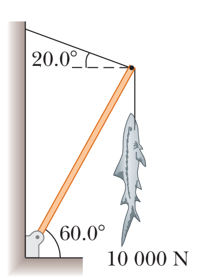


Figura P12.43

44. Una barra uniforme de peso F_g y longitud L está sostenida en sus extremos mediante un canal, como se muestra en la figura P12.44. a) Demuestre que el centro de gravedad de

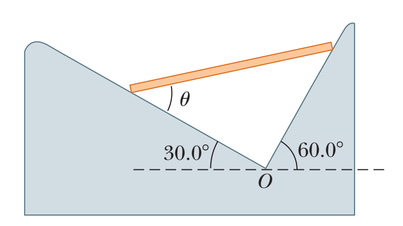


Figura P12.44

la barra debe ser vertical sobre el punto *O* cuando la barra está en equilibrio. b) Determine el valor de equilibrio del ángulo θ.

45. Se ejerce una fuerza en un gabinete rectangular uniforme de 400 N de peso, como es muestra en la figura P12.45. a) El gabinete se desliza con rapidez constante cuando $F = 200$ N y $h = 0.400$ m. Encuentre el coeficiente de fricción cinética y la posición de la fuerza normal resultante. b) Si considera $F = 300$ N, encuentre el valor de h para el que el gabinete apenas comience a inclinarse.

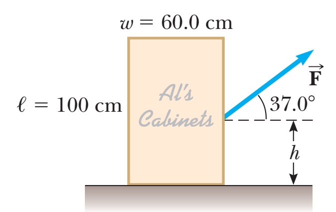


Figura P12.45

46. Considere el gabinete rectangular del problema 45, pero con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada horizontalmente en el borde superior. a) ¿Cuál es la fuerza mínima que se requiere para comenzar a inclinar el gabinete? b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo requerido para que el gabinete no se deslice con la aplicación de una fuerza de esta magnitud? c) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza mínima requerida para inclinar el gabinete si el punto de aplicación se puede elegir en cualquier parte sobre el gabinete.

47. Una viga uniforme de masa *m* se inclina en un ángulo θ con la horizontal. Su extremo superior produce una inclinación de 90° en una soga muy rugosa amarrada a una pared, y su extremo inferior descansa sobre un suelo rugoso (figura P12.47). a) Sea μ_s el coeficiente de fricción estática entre viga y suelo. Suponga que μ_s es menor que la cotangente de θ. Determine una expresión para la masa máxima *M* que se puede suspender desde lo alto antes de que la viga se deslice. b) Determine la magnitud de la fuerza de reacción en el suelo y la magnitud de la fuerza que ejerce la viga sobre la soga en *P* en términos de *m*, *M* y μ_s.

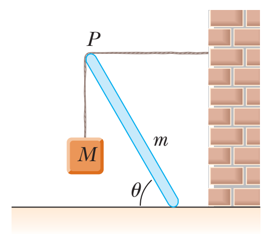


Figura P12.47

48. ● Considere una armadura ligera, con peso despreciable comparado con la carga que soporta. Suponga que se forma a partir de puntales que yacen en un plano y se unen mediante pasadores de bisagra uniforme en sus extremos. Fuerzas externas actúan sobre la armadura sólo en las juntas. La figura P12.48 muestra un ejemplo de la armadura más simple, con tres puntales y tres pernos. Establezca el razonamiento para probar que la fuerza que ejerce cualquier puntal sobre un perno debe dirigirse a lo largo de la longitud del puntal, como una fuerza de tensión o compresión.

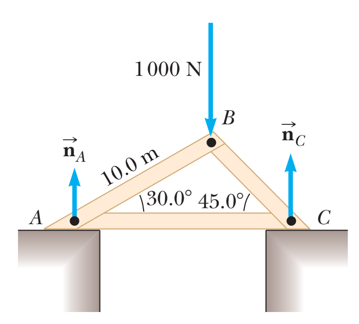


Figura P12.48

49. La figura P12.48 muestra una estructura que soporta una fuerza hacia abajo de 1 000 N aplicada en el punto *B*. La estructura tiene peso despreciable. Los pilares en *A* y *C* son uniformes. a) Aplique las condiciones de equilibrio para probar que $n_A = 366$ N y $n_C = 634$ N. b) Use el resultado que probó en el problema 48 para identificar las direcciones de las fuerzas que ejercen las barras en los pernos que los unen. Encuentre la fuerza de tensión o de compresión en cada una de las tres barras.

50. Un lado de una repisa está sostenido por una ménsula montada sobre una pared vertical mediante un solo tornillo, como se muestra en la figura P12.50. Ignore el peso de la ménsula. a) Encuentre la componente horizontal de la fuerza que ejerce el tornillo en la ménsula cuando una fuerza vertical de 80.0 N se aplica como se muestra. b) Mientras su abuelo riega sus geranios, la fuerza de carga de 80.0 N aumenta con rapidez de 0.150 N/s. ¿En qué proporción cambia la fuerza que ejerce el tornillo? *Sugerencia:* Imagine que la ménsula está ligeramente floja. Puede resolver los incisos a) y b) con más eficiencia si llama a la fuerza de carga *W* y resuelve simbólicamente para la fuerza del tornillo *F*.

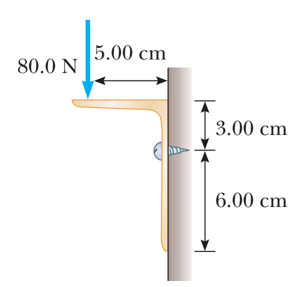


Figura P12.50

51. Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.51. Un pintor de 70.0 kg de masa

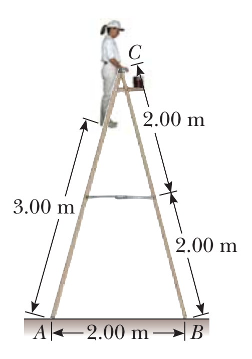


Figura P12.51

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

está de pie en la escalera, a 3.00 m desde la parte baja. Suponga que el suelo no tiene fricción. Encuentre a) la tensión en la barra horizontal que conecta las dos mitades de la escalera, b) las fuerzas normales en A y B, y c) las componentes de la fuerza de reacción en la única bisagra C que la mitad izquierda de la escalera ejerce en la mitad derecha. *Sugerencia:* Trate la escalera como un solo objeto, pero también cada mitad de la escalera por separado.

52. ● La figura P12.52 muestra la aplicación tangencial de una fuerza vertical a un cilindro uniforme de peso F_g. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y todas las superficies es 0.500. En términos de F_g, encuentre la fuerza máxima P que se puede aplicar sin causar que el cilindro dé vuelta. Como primera etapa, explique por qué ambas fuerzas de fricción estarán en sus valores máximos cuando el cilindro esté a punto de deslizarse.

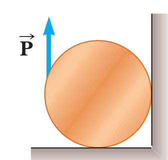


Figura P12.52

53. **Problema de repaso.** Un alambre de longitud L, módulo de Young Y y área de sección transversal A se estira elásticamente una cantidad ΔL. Por la ley de Hooke, la fuerza restauradora es $-k\,\Delta L$. a) Demuestre que $k = YA/L$. b) Demuestre que el trabajo consumido al estirar el alambre una cantidad ΔL es

$$W = \tfrac{1}{2}YA\,\frac{(\Delta L)^2}{L}$$

54. Dos pelotas de squash, cada una de 170 g de masa, se colocan en un frasco de vidrio como se muestra en la figura P12.54. Sus centros y el punto A se encuentran en una línea recta. Suponga que las paredes no tienen fricción. a) Determine P_1, P_2 y P_3. b) Determine la magnitud de la fuerza que ejerce la pelota izquierda sobre la pelota derecha.

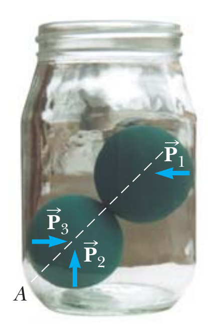


Figura P12.54

55. En los estudios de fisiología del ejercicio, a veces es importante determinar la posición del centro de masa de una persona. Esta determinación se realiza con el dispositivo que se muestra en la figura P12.55. Una plancha ligera descansa sobre dos básculas, que leen $F_{g1} = 380$ N y $F_{g2} = 320$ N. Una distancia de 2.00 m separa las básculas. ¿A qué distancia de los pies de la mujer está su centro de masa?

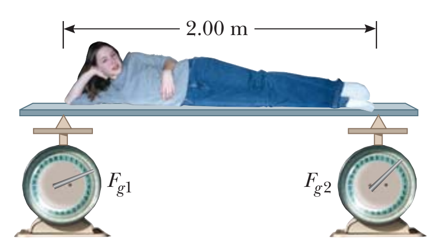


Figura P12.55

56. Un cable de acero de 3.00 cm^2 de área de sección transversal tiene una masa de 2.40 kg por cada metro de longitud. Si 500 m del cable cuelgan de un risco vertical, ¿cuánto se estira el cable bajo su propio peso? Considere $Y_{acero} = 2.00 \times 10^{11}$ N/m^2.

57. a) Estime la fuerza con la que un maestro de karate golpea una tabla, si supone que la rapidez de la mano en el momento del impacto es 10.0 m/s, y disminuye a 1.00 m/s durante un intervalo de tiempo de contacto de 0.002 00 s entre la mano y la tabla. La masa de su mano y brazo es 1.00 kg. b) Estime el esfuerzo de corte, si supone que esta fuerza se ejerce sobre una tabla de pino de 1.00 cm de grueso que mide 10.0 cm de ancho. c) Si el esfuerzo de corte máximo que soporta la tabla de pino antes de romperse es de 3.60 × 10^6 N/m^2, ¿la tabla se romperá?

58. **Problema de repaso.** Un alambre de aluminio mide 0.850 m de largo y tiene una sección transversal circular de 0.780 mm de diámetro. Fijo en el extremo superior, el alambre soporta un objeto de 1.20 kg que se balancea en un círculo horizontal. Determine la velocidad angular que se requiere para producir una deformación de 1.00 × 10^{-3}.

59. **Problema de repaso.** Un remolque con peso cargado $\vec{F}_g$ se jala mediante un vehículo con una fuerza $\vec{P}$, como se muestra en la figura P12.59. El remolque se carga de tal modo que su centro de masa se ubica como se muestra. Ignore la fuerza de fricción de rodamiento y sea a la componente x de la aceleración del remolque. a) Encuentre la componente vertical de $\vec{P}$ en términos de los parámetros dados. b) Suponga $a = 2.00$ m/s^2 y $h = 1.50$ m. ¿Cuál debe ser el valor de d tal que $P_y = 0$ (sin carga vertical sobre el vehículo)? c) Encuentre los valores de P_x y P_y dado que $F_g = 1\,500$ N, $d = 0.800$ m, $L = 3.00$ m, $h = 1.50$ m y $a = -2.00$ m/s^2.

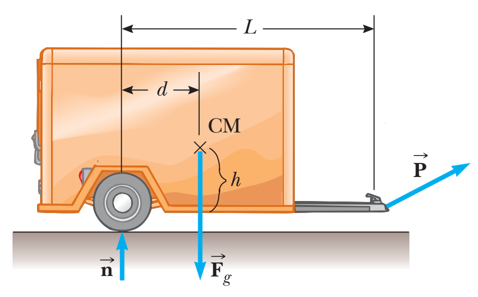


Figura P12.59

60. **Problema de repaso.** Un automóvil se mueve con rapidez v sobre una pista circular horizontal de radio R. En la figura P12.60 se muestra una vista frontal del auto. La altura del centro de masa del automóvil sobre el suelo es h, y la separación entre sus ruedas interior y exterior es d. El camino está seco y el automóvil no se derrapa. Demuestre que la rapidez máxima que puede tener el automóvil, sin volcar, se conoce por

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{gRd}{2h}}$$

Para reducir el riesgo de rodar, ¿se debe aumentar o reducir h? ¿Se debe aumentar o reducir el ancho d de la base de la rueda?

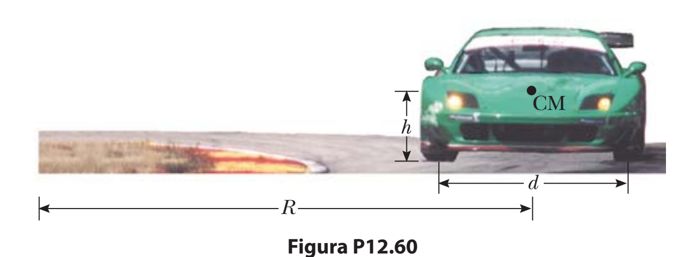


Figura P12.60

Respuestas a las preguntas rápidas

12.1 a). Los momentos de torsión no equilibrados debidos a las fuerzas de la figura 12.2 causan una aceleración angular aun cuando la aceleración traslacional sea cero.

12.2 b). Las líneas de acción de todas las fuerzas en la figura 12.3 intersecan en un punto común. Por lo tanto, el momento de torsión neto en torno a este punto es cero. Este valor cero del momento de torsión neto es independiente de los valores de las fuerzas. Ya que ninguna fuerza tiene una componente hacia abajo, existe una fuerza neta y el objeto no tiene equilibrio de fuerza.

12.3 b). Tanto el objeto como el centro de gravedad de la regleta están a 25 cm del punto de rotación. En consecuencia, la regleta y el objeto deben tener la misma masa para que el sistema esté en equilibrio.

12.4 **i)**, b). La fuerza de fricción en el bloque mientras se desliza a lo largo de la superficie es paralela a la superficie inferior y hará que el bloque se someta a una deformación de corte. **ii)**, a). El estiramiento del alambre debido al aumento de tensión se describe mediante el módulo de Young. **iii)**, c). La presión de la atmósfera resulta en una fuerza de magnitud uniforme perpendicular en todos los puntos sobre la superficie de la esfera.



La supergigante roja V838 Monocerotis está a 20 000 años luz de la Tierra. En 2002 la estrella mostró una gran explosión de energía representativa de un evento nova. Sin embargo, después de la explosión, el comportamiento variable de radiación infrarroja de la estrella no siguió el patrón nova característico. Se han propuesto los modelos de interacción gravitacional que sugieren la combinación de la estrella con una compañera binaria o sus propios planetas para explicar el comportamiento extraordinario. (© STScl/NASA/Corbis)

13 Gravitación universal

Antes de 1687 se había acumulado una gran cantidad de información acerca de los movimientos de la Luna y los planetas, pero no se había logrado una comprensión clara de las fuerzas relacionadas con estos movimientos. En dicho año, Isaac Newton proporcionó la clave que abrió los secretos de los cielos. Él sabía, a partir de su primera ley, que una fuerza neta tenía que actuar sobre la Luna, porque sin tal fuerza la Luna se movería en una trayectoria en línea recta en lugar de su órbita casi circular. Newton explicó que esta fuerza era la atracción gravitacional que ejercía la Tierra sobre la Luna. Se dio cuenta de que las fuerzas participantes en la atracción Tierra–Luna y en la atracción Sol–planeta no eran algo especial de dichos sistemas, sino casos particulares de la atracción general y universal entre los objetos. En otras palabras, Newton entendió que la misma fuerza de atracción que hace a la Luna seguir su trayectoria alrededor de la Tierra también hace que una manzana caiga de un árbol. Fue la primera ocasión en que se unificaron los movimientos "terrenal" y "celestial".

En este capítulo se estudia la ley de gravitación universal. Se enfatiza una descripción del movimiento planetario porque la información astronómica proporcionan una importante prueba de la validez de esta ley. Luego se muestra que las leyes del movimiento planetario elaboradas por Johannes Kepler se siguen de la ley de gravitación universal y del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Se concluye con la deducción de una expresión general para la energía potencial gravitacional y el examen de la energía del movimiento planetario y de satélites.

13.1 Ley de Newton de gravitación universal

Quizá ha escuchado la leyenda de que, mientras dormitaba bajo un árbol, Newton fue golpeado en la cabeza por una manzana que caía. Este supuesto accidente hizo que él imaginara que tal vez todos los objetos en el Universo eran atraídos unos hacia otros en la misma forma que la manzana era atraída hacia la Tierra. Newton analizó información astronómica acerca del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. A partir de dicho análisis, hizo la osada afirmación de que la ley de fuerza que gobierna el movimiento de los planetas era la *misma* ley de fuerza que atraía una manzana en caída libre hacia la Tierra.

En 1687 Newton publicó su obra acerca de la ley de gravedad en su tratado *Principios matemáticos de filosofía natural.* **La ley de Newton de la gravitación universal** afirma que

◀ La ley de gravitación universal

> toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Si las partículas tienen masa m_1 y m_2 y están separadas una distancia r, la magnitud de esta fuerza gravitacional es

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \textbf{(13.1)}$$

donde G es una constante llamada *constante gravitacional universal.* Su valor en unidades del SI es

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \qquad \textbf{(13.2)}$$

Henry Cavendish (1731–1810) midió la constante gravitacional universal en un importante experimento de 1798. El aparato de Cavendish consistió en dos pequeñas esferas, cada una de masa m, fijas en los extremos de una barra horizontal, ligera suspendida de una fibra fina o alambre metálico delgado, como se ilustra en la figura 13.1. Cuando dos esferas grandes, cada una de masa M, se colocan cerca de las más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas pequeñas y grandes hace que la barra gire y contorsiona el alambre de suspensión a una nueva orientación de equilibrio. El ángulo de rotación se mide por la desviación de un haz de luz reflejado de un espejo unido a la suspensión vertical.

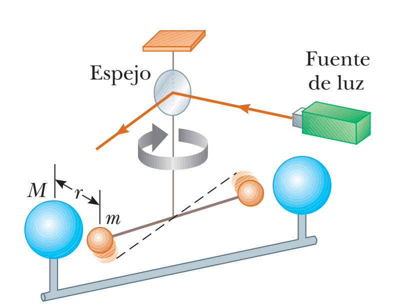


Figura 13.1 Aparato de Cavendish para medir G. La línea discontinua representa la posición original de la barra.

La forma de la ley de fuerza conocida por la ecuación 13.1 con frecuencia se conoce como una **ley de cuadro inverso** porque la magnitud de la fuerza varía con el cuadrado inverso de la separación de las partículas.[1] En capítulos posteriores se verán otros ejemplos de este tipo de ley de fuerza. Esta fuerza se expresa en forma vectorial al definir un vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ (figura 13.2). Ya que este vector unitario se dirige de la partícula 1 a la partícula 2, la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \textbf{(13.3)}$$

donde el signo negativo indica que la partícula 2 es atraída hacia la partícula 1; en consecuencia, la fuerza sobre la partícula 2 debe dirigirse hacia la partícula 1. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1, designada $\vec{\mathbf{F}}_{21}$, es igual en magnitud a $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ y en la dirección opuesta. Esto es: dichas fuerzas forman un par acción–reacción, y $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$.

Dos características de la ecuación 13.3 merecen mención. Primero, la fuerza gravitacional es una fuerza de campo que siempre existe entre dos partículas, sin importar el medio que las separe. Ya que la fuerza varía según el cuadrado inverso de la distancia entre las partículas, disminuye rápidamente con separación creciente.

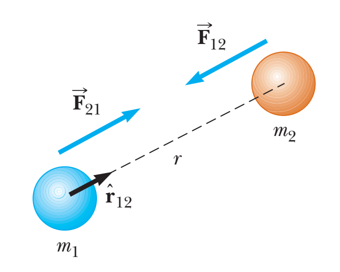


Figura 13.2 La fuerza gravitacional entre dos partículas es de atracción. El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ se dirige de la partícula 1 a la partícula 2. Note que $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$.

La ecuación 13.3 también se usa para mostrar que **la fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa esféricamente simétrica y de tamaño finito sobre una partícula**

[1] Una proporcionalidad *inversa* entre dos cantidades x y y es aquella en la que $y = k/x$, donde k es una constante. Una proporción *directa* entre x y y existe cuando $y = kx$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.1

Esté convencido acerca de g y G

El símbolo g representa la magnitud de la aceleración en caída libre cerca de un planeta. En la superficie de la Tierra, g tiene un valor promedio de 9.80 m/s^2. Por otra parte, G es una constante universal que tiene el mismo valor en cualquier parte del Universo.

afuera de la distribución es la misma como si toda la masa de la distribución se concentrara en el centro. Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra en una partícula de masa m cerca de la superficie de la Tierra es

$$F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2} \qquad \textbf{(13.4)}$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra.

Pregunta rápida 13.1 Un planeta tiene dos lunas de igual masa. La luna 1 está en órbita circular de radio r. La luna 2 está en órbita circular de radio $2r$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce el planeta sobre la luna 2? a) cuatro veces mayor que sobre la luna 1, b) dos veces mayor que sobre la luna 1, c) igual que sobre la luna 1, d) la mitad de la ejercida sobre la luna 1, e) un cuarto de la ejercida sobre la luna 1.

EJEMPLO 13.1 ¿Alguien juega billar?

Tres bolas de billar de 0.300 kg se colocan sobre una mesa en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 13.3. Los lados del triángulo tienen longitudes a = 0.400 m, b = 0.300 m y c = 0.500 m. Calcule el vector de fuerza gravitacional sobre la bola blanca (designada m_1) que resulta de las otras dos bolas, así como la magnitud y la dirección de esta fuerza.

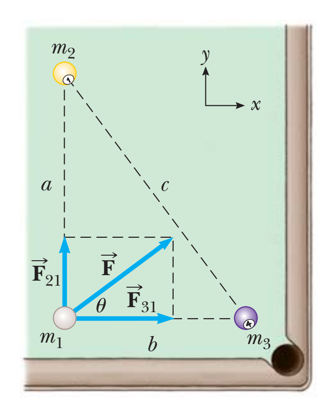


Figura 13.3 (Ejemplo 13.1) La fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la bola blanca es la suma vectorial $\vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{31}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note en la figura 13.3 que la bola blanca es atraída hacia ambas bolas por la fuerza gravitacional. En la gráfica se aprecia que la fuerza neta debe apuntar hacia arriba y a la derecha. Los ejes coordenados se ubican como se muestra en la figura 13.3, y el origen se coloca en la posición de la bola blanca.

Categorizar Este problema involucra evaluar las fuerzas gravitacionales sobre la bola blanca con el uso de la ecuación 13.3. Una vez evaluadas dichas fuerzas, se convierte en un problema de suma vectorial para encontrar la fuerza neta.

Analizar Encuentre la fuerza que ejerce m_2 sobre la bola blanca:

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{(0.300\ \text{kg})(0.300\ \text{kg})}{(0.400\ \text{m})^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 3.75 \times 10^{-11}\hat{\mathbf{j}}\ \text{N}$$

Halle la fuerza que ejerce m_3 sobre la bola blanca:

$$\vec{\mathbf{F}}_{31} = G\frac{m_3 m_1}{r_{31}}\,\hat{\mathbf{i}}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{(0.300\ \text{kg})(0.300\ \text{kg})}{(0.300\ \text{m})^2}\hat{\mathbf{i}}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\hat{\mathbf{i}}\ \text{N}$$

Encuentre la fuerza gravitacional neta sobre la bola blanca al sumar estos vectores de fuerza:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{31} + \vec{\mathbf{F}}_{21} = (6.67\hat{\mathbf{i}} + 3.75\hat{\mathbf{j}}) \times 10^{-11}\ \text{N}$$

Halle la magnitud de esta fuerza:

$$F = \sqrt{F_{31}{}^2 + F_{21}{}^2} = \sqrt{(6.67)^2 + (3.75)^2} \times 10^{-11}\ \text{N}$$

$$= 7.65 \times 10^{-11}\ \text{N}$$

Encuentre la tangente del ángulo θ para el vector de fuerza neta: $\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{F_{21}}{F_{31}} = \dfrac{3.75 \times 10^{-11}\ \text{N}}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}} = 0.562$

Evalúe el ángulo θ: $\theta = \tan^{-1}(0.562) = 29.3°$

Finalizar El resultado para F muestra que las fuerzas gravitacionales entre los objetos cotidianos tienen magnitudes extremadamente pequeñas.

13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

Ya que la magnitud de la fuerza que actúa sobre un objeto de masa m en caída libre cerca de la superficie de la Tierra se conoce por la ecuación 13.4, se puede igualar esta fuerza con la que se proporciona por la ecuación 5.6, $F_g = mg$, para obtener

$$mg = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad \textbf{(13.5)}$$

Considere ahora un objeto de masa m ubicado a una distancia h sobre la superficie de la Tierra o a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r = R_T + h$. La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre este objeto es

$$F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en esta posición también es $F_g = mg$, donde g es el valor de la aceleración en caída libre a la altura h. Al sustituir esta expresión para F_g en la última ecuación, muestra que g se conoce por

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \qquad \textbf{(13.6)}$$

◀ Variación de g con la altura

Por lo tanto, se sigue que g *disminuye* con *altura creciente*. En la tabla 13.1 se proporcionan los valores de g para diferentes alturas. Ya que el peso de un objeto es mg, se ve que conforme $r \to \infty$, el peso tiende a cero.

TABLA 13.1

Aceleración en caída libre g a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra

Altura h (km)	**g (m/s^2)**
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

Pregunta rápida 13.2 Superman está de pie en lo alto de una montaña muy alta y lanza una pelota de beisbol horizontalmente con una rapidez tal que la pelota entra en una órbita circular alrededor de la Tierra. Mientras la pelota está en órbita, ¿cuál es la magnitud de la aceleración de la pelota? a) Depende de qué tan rápido se lance la pelota. b) Es cero porque la pelota no cae al suelo. c) Es ligeramente menor que 9.80 m/s^2. d) Es igual a 9.80 m/s^2.

EJEMPLO 13.2 Variación de g con la altura h

La Estación Espacial Internacional opera a una altura de 350 km. Los planes para la construcción final muestran que 4.22×10^6 N de material, pesado en la superficie de la Tierra, fue transportado por diferentes naves espaciales. ¿Cuál es el peso de la estación espacial cuando está en órbita?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La masa de la estación espacial es fija; independiente de su ubicación. En términos de la explicación de esta sección, se advierte de que el valor de g se reducirá en la altura de la órbita de la estación espacial. Por lo tanto, su peso será más pequeño que en la superficie de la Tierra.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Hallar la masa de la estación espacial a partir de su peso en la superficie de la Tierra:

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{4.22 \times 10^6 \text{ N}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 4.31 \times 10^5 \text{ kg}$$

Aplique la ecuación 13.6 con $h = 350$ km para encontrar g en la posición orbital:

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.350 \times 10^6 \text{ m})^2} = 8.83 \text{ m/s}^2$$

Use este valor de g para encontrar el peso de la estación espacial en órbita:

$$mg = (4.31 \times 10^5 \text{ kg})(8.83 \text{ m/s}^2) = 3.80 \times 10^6 \text{ N}$$

EJEMPLO 13.3 **La densidad de la Tierra**

Con el radio conocido de la Tierra y $g = 9.80$ m/s^2 en la superficie de la Tierra, encuentre la densidad promedio de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Suponga que la Tierra es una esfera perfecta. La densidad de material en la Tierra varía, pero adopte un modelo simplificado en el que considere que la densidad es uniforme en todas las partes de la Tierra. La densidad resultante es la densidad promedio de la Tierra.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Resuelva la ecuación 13.5 para la masa de la Tierra:

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

Sustituya esta masa en la definición de la densidad (ecuación 1.1):

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{(gR_T^2/G)}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi G R_T}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{9.80 \text{ m/s}^2}{\pi(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})} = 5.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le dice que una densidad características del granito en la superficie de la Tierra es de 2.75×10^3 kg/m^3? ¿Qué concluiría acerca de la densidad del material en el interior de la Tierra?

Respuesta Ya que este valor es casi la mitad de la densidad calculada como promedio para toda la Tierra, se concluiría que el núcleo de la Tierra tiene una densidad mucho mayor que el valor promedio. Es más sorprendente que el experimento de Cavendish, que determina G y se puede realizar sobre una mesa, combinado con simples mediciones de g en caída libre, ¡proporciona información acerca del núcleo de la Tierra!

13.3 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Los humanos han observado los movimientos de los planetas, estrellas y otros objetos en el espacio durante miles de años. En la historia temprana, dichas observaciones condujeron a los científicos a considerar a la Tierra como el centro del Universo. Este *modelo geocéntrico* fue elaborado y formalizado por el astrónomo griego Claudius Ptolomeo (c. 100–c. 170) en el siglo II y fue aceptado durante los siguientes 1 400 años. En 1543 el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473–1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas daban vueltas en órbitas circulares alrededor del Sol (el *modelo heliocéntrico*).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546–1601) quería determinar cómo estaban construidos los cielos y siguió un proyecto para determinar las posiciones de las estrellas y los planetas. Dichas observaciones de los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se realizaron sólo con un gran sextante y una brújula. (Todavía no se inventaba el telescopio.)

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue auxiliar de Brahe durante una época breve antes de la muerte de éste, después de lo cual adquirió los datos astronómicos de su mentor y pasó 16 años intentando deducir un modelo matemático para el movimiento de los planetas. Tal información es difícil de ordenar porque los planetas en movimiento se observan desde una Tierra en movimiento. Después de muchos cálculos laboriosos, Kepler encontró que los datos de Brahe acerca de la revolución de Marte alrededor del Sol conducían a un modelo exitoso.

El análisis completo de Kepler del movimiento planetario se resume en tres enunciados que se conocen como **leyes de Kepler**:

Art Resource

JOHANNES KEPLER
Astrónomo alemán (1571–1630)
Kepler es mejor conocido por desarrollar las leyes de movimiento planetario en función de las observaciones cuidadosas de Tycho Brahe.

◀ Leyes de Kepler

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector dibujado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Primera ley de Kepler

A partir de lo visto hasta ahora en este capítulo, resultan familiares las órbitas circulares de los objetos alrededor de centros de fuerza gravitacional. La primera ley de Kepler indica que la órbita circular es un caso muy especial y que las órbitas elípticas son la situación general. Esta noción fue difícil de aceptar para los científicos de la época, porque creían que las órbitas circulares perfectas de los planetas reflejaban la perfección del cielo.

La figura 13.4 muestra la geometría de una elipse, que sirve como modelo para la órbita elíptica de un planeta. Una elipse se define matemáticamente al elegir dos puntos F_1 y F_2, cada uno llamado **foco**, y luego dibujar una curva a través de los puntos para los que la suma de las distancias r_1 y r_2 desde F_1 y F_2, respectivamente, es una constante. La mayor distancia a través del centro entre los puntos en la elipse (y que pasa a través de cada foco) se llama **eje mayor**, y esta distancia es $2a$. En la figura 13.4, el eje mayor se dibuja a lo largo de la dirección x. La distancia a se llama **semieje mayor**. De igual modo, la distancia más corta a través del centro entre los puntos en la elipse se llama **eje menor** de longitud $2b$, donde la distancia b es el **semieje menor**. Cualquier foco de la elipse se ubica a una distancia c desde el centro de la elipse, donde $a^2 = b^2 + c^2$. En la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol, el Sol está en un foco de la elipse. No hay nada en el otro foco.

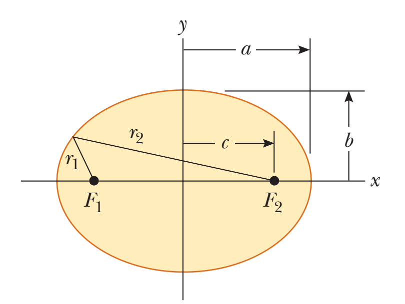


Figura 13.4 Gráfica de una elipse. El semieje mayor tiene longitud a, y el semieje menor tiene longitud b. Cada foco se ubica a una distancia c del centro a cada lado de éste.

La **excentricidad** de una elipse se define como $e = c/a$ y describe la forma general de la elipse. Para un círculo, $c = 0$, y por tanto la excentricidad es cero. Mientras más pequeña sea b en comparación con a, más corta es la elipse a lo largo de la dirección y en comparación con su medida en la dirección x en la figura 13.4. A medida que b disminuye, c aumenta y la excentricidad e aumenta. Por lo tanto, mayores valores de excentricidad corresponden a elipses más grandes y delgadas. El intervalo de valores de la excentricidad para una elipse es $0 < e < 1$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.2
¿Dónde está el Sol?

El Sol se ubica en un foco de la órbita elíptica de un planeta. *No* se ubica en el centro de la elipse.

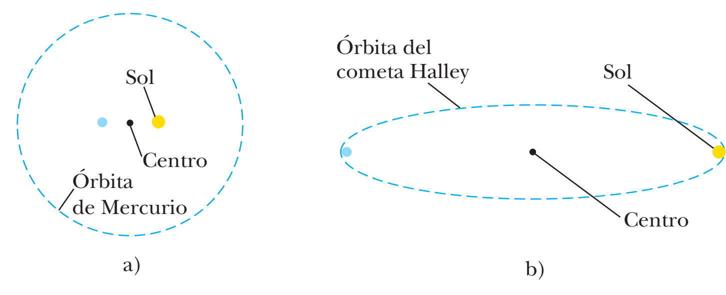


Figura 13.5 a) La forma de la órbita de Mercurio, que tiene la mayor excentricidad ($e = 0.21$) entre los ocho planetas del sistema solar. El Sol se ubica en el punto amarillo, que es un foco de la elipse. No hay nada físico ubicado en el centro (el punto pequeño) o el otro foco (el punto azul). b) La forma de la órbita del cometa Halley.

Las excentricidades para órbitas planetarias varían enormemente en el sistema solar. La excentricidad de la órbita de la Tierra es 0.017, lo que la hace casi circular. Por otra parte, la excentricidad de la órbita de Mercurio es 0.21, la mayor de los ocho planetas. La figura 13.5a muestra una elipse con una excentricidad igual a la de la órbita de Mercurio. Note que incluso esta órbita de gran excentricidad es difícil de distinguir a partir de un círculo, lo que es una explicación para que la primera ley de Kepler sea un logro admirable. La excentricidad de la órbita del cometa Halley es 0.97, lo que describe una órbita cuyo eje mayor es mucho más largo que su eje menor, como se muestra en la figura 13.5b. Como resultado, el cometa Halley pasa gran parte de su periodo de 76 años lejos del Sol e invisible a la Tierra. Sólo es visible a simple vista durante una pequeña parte de su órbita, cuando está cerca del Sol.

Ahora imagine un planeta en una órbita elíptica tal como se muestra en la figura 13.4, con el Sol en el foco F_2. Cuando el planeta está en el extremo izquierdo del diagrama, la distancia entre el planeta y el Sol es $a + c$. En este punto, llamado *afelio*, el planeta está a su máxima distancia del Sol. (Para un objeto en órbita alrededor de la Tierra, este punto se llama *apogeo*.) Por lo contrario, cuando el planeta está en el extremo derecho de la elipse, la distancia entre el planeta y el Sol es $a - c$. En este punto, llamado *perihelio* (para una órbita terrestre, el *perigeo*), el planeta está a su distancia mínima desde el Sol.

La primera ley de Kepler es un resultado directo de la naturaleza de cuadrado inverso de la fuerza gravitacional. Ya se explicaron las órbitas circular y elíptica, formas permitidas de las órbitas para objetos que están *ligados* al centro de fuerza gravitacional. Estos objetos incluyen planetas, asteroides y cometas que se mueven repetidamente alrededor del Sol, así como lunas que orbitan un planeta. También hay objetos *no ligados*, tales como un meteoroide, provenientes desde el espacio profundo, que pueden pasar por el Sol una vez y luego nunca regresar. La fuerza gravitacional entre el Sol y dichos objetos también varía con el cuadrado inverso de la distancia de separación, y las rutas permitidas para tales objetos incluyen parábolas ($e = 1$) e hipérbolas ($e > 1$).

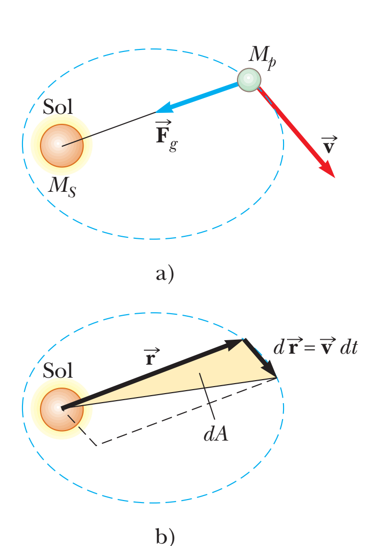


Figura 13.6 a) La fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta se dirige hacia el Sol. b) Conforme un planeta orbita el Sol, el área que barre el radio vector en un intervalo de tiempo dt es igual a la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{r}$ y $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$.

Segunda ley de Kepler

Se puede demostrar que la segunda ley de Kepler es una consecuencia de la conservación de la cantidad de movimiento angular. Considere un planeta de masa M_p que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica (figura 13.6a). Considere al planeta como un sistema. El Sol se modela como mucho más pesado que el planeta, de tal modo que el Sol no se mueve. La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre el planeta es una fuerza central, siempre a lo largo del radio vector, dirigido hacia el Sol (figura 13.6a). El momento de torsión sobre el planeta debido a esta fuerza central claramente es cero porque $\vec{F}_g$ es paralela a $\vec{r}$.

Recuerde que el momento de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la relación de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema; esto es, $\Sigma\,\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ (ecuación 11.13). Por lo tanto, ya que el momento de torsión externo sobre el planeta es cero, se modela como un sistema aislado para cantidad de movimiento angular y la **cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ del planeta es una constante del movimiento:**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p\vec{r} \times \vec{v} = \text{constante}$$

Este resultado se puede relacionar con la siguiente consideración geométrica. En un intervalo de tiempo dt, el radio vector $\vec{\mathbf{r}}$ en la figura 13.6b barre el área dA, que es igual a la mitad del área $|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}|$ del paralelogramo formado por los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $d\vec{\mathbf{r}}$. Ya que el desplazamiento del planeta en el intervalo de tiempo dt se conoce por $d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}dt$,

$$dA = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}| = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\, dt| = \frac{L}{2M_p}\, dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} \qquad \textbf{(13.7)}$$

donde L y M_p son constantes. Este resultado muestra que **el radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.**

Esta conclusión es un resultado de la fuerza gravitacional que es una fuerza central, lo que a su vez implica que la cantidad de movimiento angular del planeta es constante. Por lo tanto, la ley aplica a *cualquier* situación que involucra una fuerza central, ya sea o no de cuadrado inverso.

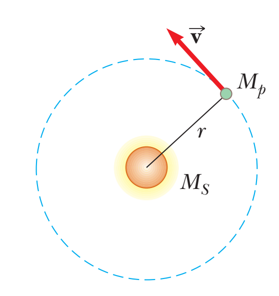


Figura 13.7 Un planeta de masa M_p que se mueve en una órbita circular alrededor del Sol. Las órbitas de todos los planetas, excepto Mercurio, son casi circulares.

Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler se puede predecir a partir de la ley de cuadrado inverso para órbitas circulares. Considere un planeta de masa M_p que se supone en movimiento alrededor del Sol (masa M_S) en una órbita circular, como en la figura 13.7. Ya que la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta del planeta conforme se mueve en un círculo, se usa la segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme,

$$F_g = \frac{GM_SM_p}{r^2} = M_pa = \frac{M_pv^2}{r}$$

La rapidez orbital del planeta es $2\pi r/T$, donde T es el periodo; en consecuencia, la expresión precedente se convierte en

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3$$

donde K_S es una constante conocida por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}$$

Esta ecuación también es válida para órbitas elípticas si se sustituye r con la longitud a del semieje mayor (figura 13.4):

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) a^3 = K_S a^3 \qquad \textbf{(13.8)}$$

◀ Tercera ley de Kepler

La ecuación 13.8 es la tercera ley de Kepler. Como el semieje mayor de una órbita circular es su radio, esta ecuación es válida tanto para órbitas circulares como para elípticas. Note que la constante de proporcionalidad K_S es independiente de la masa del planeta. Por lo tanto, la ecuación 13.8 es válida para *cualquier* planeta.[2] Si tuviera que considerar la órbita de un satélite como la Luna en torno a la Tierra, la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra, esto es, $K_T = 4\pi^2/GM_T$.

La tabla 13.2 es un conjunto de datos útiles para planetas y otros objetos en el sistema solar. La columna de la extrema derecha verifica que la relación T^2/r^3 es constante para todos los objetos que orbitan el Sol. Las variaciones pequeñas en los valores de esta columna son resultado de incertidumbres en los datos observados para los periodos y semiejes mayores de los objetos.

Trabajos astronómicos recientes revelaron la existencia de un gran número de objetos del sistema solar más allá de la órbita de Neptuno. En general, dichos objetos se encuen-

[2] La ecuación 13.8 de hecho es una proporción porque la relación de las dos cantidades T^2 y a^3 es una constante. En una proporción, no se requiere que las variables estén limitadas sólo a la primera potencia.

TABLA 13.2

Datos planetarios útiles

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo de revolución (s)	Distancia media desde el Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Plutón[a]	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—	—

[a] En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Ahora Plutón se define como un "planeta enano", como el asteroide Ceres.

tran en el *cinturón Kuiper*, una región que se extiende desde casi 30 UA (el radio orbital de Neptuno) hasta 50 UA. (Una UA es una *unidad astronómica*, igual al radio de la órbita de la Tierra.) Estimaciones actuales identifican, en esta región, al menos 70 000 objetos con diámetros mayores a 100 km. El primer objeto del cinturón Kuiper (KBO) es Plutón, descubierto en 1930, y anteriormente clasificado como planeta. A partir de 1992, se han detectado muchos más, como Varuna (diámetro aproximado 900–1 000 km, descubierto en 2000), Ixion (diámetro aproximado 900–1 000 km, descubierto en 2001) y Quaoar (diámetro aproximado 800 km, descubierto en 2002). Otros todavía no tienen nombre, pero actualmente se indican mediante su fecha de descubrimiento, como 2003 EL61, 2004 DW y 2005 FY9. Un KBO, 2003 UP313, se cree que es más grande que Plutón.

Un subconjunto de aproximadamente 1 400 KBO se llama "Plutinos" porque, como Plutón, muestran un fenómeno de resonancia y orbitan el Sol dos veces en el mismo intervalo de tiempo que Neptuno da vuelta tres veces. La aplicación contemporánea de las leyes de Kepler y propuestas tan exóticas como el intercambio de cantidad de movimiento angular planetario y la migración de los planetas[3] sugiere la excitación de esta área activa de la investigación actual.

Pregunta rápida 13.3 Un asteroide está en una órbita elíptica enormemente excéntrica alrededor del Sol. El periodo de la órbita del asteroide es de 90 días. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la posibilidad de una colisión entre este asteroide y la Tierra? a) No hay posible peligro de colisión. b) Hay posibilidad de una colisión. c) No hay suficiente información para determinar si hay peligro de colisión.

EJEMPLO 13.4 La masa del Sol

Calcule la masa del Sol al notar que el periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es 3.156×10^7 s y su distancia desde el Sol es 1.496×10^{11} m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con respecto a la tercera ley de Kepler, se observa que la masa del Sol se relaciona con el tamaño orbital y el periodo de un planeta.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

[3] R. Malhotra, "Migrating Planets", *Scientific American*, **281**(3), pp. 56–63, septiembre de 1999.

Resuelva la ecuación 13.8 para la masa del Sol:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituya los valores conocidos:

$$M_S = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3.156 \times 10^7\ \text{s})^2} = 1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

En el ejemplo 13.3, una interpretación de las fuerzas gravitacionales permitió encontrar algo acerca de la densidad del núcleo de la Tierra, ¡y ahora esta interpretación se usó para determinar la masa del Sol!

EJEMPLO 13.5 Un satélite geosíncrono

Considere un satélite de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una rapidez constante v y a una altura h sobre la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 13.8.

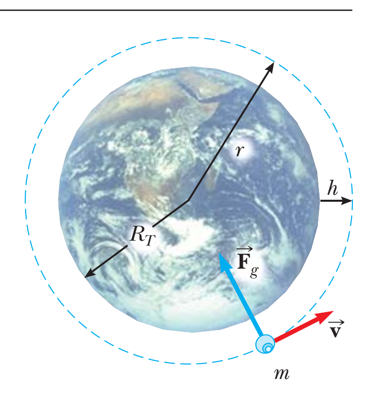


Figura 13.8 (Ejemplo 13.5) Un satélite de masa m se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r con rapidez constante v. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$. (Dibujo hecho sin escala.)

A) Determine la rapidez del satélite en términos de G, h, R_T (el radio de la Tierra) y M_T (la masa de la Tierra).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular bajo la influencia de la fuerza gravitacional.

Categorizar El satélite debe tener una aceleración centrípeta. Debido a eso, el satélite se clasificó como una partícula bajo una fuerza neta y una partícula en movimiento circular uniforme.

Analizar La única fuerza externa que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional, que actúa hacia el centro de la Tierra y mantiene al satélite en su órbita circular.

Aplique la segunda ley de Newton al satélite:

$$F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para v y note que la distancia r desde el centro de la Tierra al satélite es $r = R_T + h$:

$$1)\quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

B) Si el satélite es *geosíncrono* (es decir, parece permanecer en una posición fija sobre la Tierra), ¿qué tan rápido se mueve a través del espacio?

SOLUCIÓN

Para que parezca mantenerse en una posición fija sobre la Tierra, el periodo del satélite debe ser 24 h = 86 400 s y el satélite debe estar en órbita directamente sobre el ecuador.

Resuelva la tercera ley de Kepler (con $a = r$ y $M_S \rightarrow M_T$) para r:

$$r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$r = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(86\ 400\ \text{s})^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

$$= 4.23 \times 10^7\ \text{m}$$

Aplique la ecuación 1) para encontrar la rapidez del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{4.23 \times 10^7\ \text{m}}}$$

$$= 3.07 \times 10^3\ \text{m/s}$$

Finalizar El valor de r calculado en este caso se traduce en una altura del satélite sobre la superficie de la Tierra de casi 36 000 km. Por lo tanto, los satélites geosíncronos tienen la ventaja de permitir que una antena fija en tierra se apunte en una dirección fija, pero hay una desventaja en que las señales entre la Tierra y el satélite deban viajar una distancia más larga. Es difícil usar satélites síncronos para observación óptica de la superficie de la Tierra debido a su gran altura.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el movimiento del satélite en el inciso A) tuviera lugar a una altura h sobre la superficie de otro planeta más pesado que la Tierra, pero del mismo radio? ¿El satélite se movería con mayor o menor rapidez de la que se mueve alrededor de la Tierra?

Respuesta Si el planeta ejerce una mayor fuerza gravitacional sobre el satélite debido a su mayor masa, el satélite debe moverse con una mayor rapidez para evitar moverse hacia la superficie. Esta conclusión es consistente con las predicciones de la ecuación 1), que muestran, porque la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del planeta, que la rapidez aumenta conforme la masa del planeta aumenta.

13.4 El campo gravitacional

Cuando Newton publicó su teoría de la gravitación universal, tuvo una excelente aceptación porque explicaba satisfactoriamente el movimiento de los planetas. Desde 1687, la misma teoría se ha usado para explicar los movimientos de cometas, la desviación de una balanza Cavendish, las órbitas de estrellas binarias y la rotación de las galaxias. Sin embargo, tanto los contemporáneos de Newton como las generaciones siguientes han encontrado difícil de aceptar el concepto de una fuerza que actúa a distancia; la pregunta es: ¿cómo es posible que dos objetos interactúen cuando no están en contacto?. Newton mismo no pudo responder esta pregunta.

Un planteamiento para describir las interacciones entre los objetos que no están en contacto apareció mucho después de la muerte de Newton. Esta aproximación permite una forma diferente de observar la interacción gravitacional, al usar el concepto de **campo gravitacional** que existe en cada punto del espacio. Cuando una partícula de masa m se coloca en un punto donde el campo gravitacional es $\vec{\mathbf{g}}$, la partícula experimenta una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$. En otras palabras, piense que el campo ejerce una fuerza sobre la partícula en lugar de considerar una interacción directa entre dos partículas. El campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ se define como

Campo gravitacional ►

$$\vec{\mathbf{g}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} \qquad \textbf{(13.9)}$$

Es decir: el campo gravitacional en un punto del espacio es igual a la fuerza gravitacional que experimenta una *partícula de prueba* colocada en dicho punto, dividida entre la masa de la partícula de prueba. Al objeto que crea el campo se le llama *partícula fuente*. (Aunque la Tierra no es una partícula, es posible demostrar que la Tierra se puede modelar como una partícula con el propósito de encontrar el campo gravitacional que crea.) Note que la presencia de la partícula de prueba no es necesaria para que el campo exista: la partícula fuente crea el campo gravitacional. Es posible detectar la presencia del campo y medir su intensidad al colocar una partícula de prueba en el campo y notar la fuerza que se ejerce sobre ella. En esencia, lo que se describe es el "efecto" que cualquier objeto (en este caso, la Tierra) tiene en el espacio vacío alrededor de sí mismo en términos de la fuerza que *estaría* presente *si* un segundo objeto estuviese en alguna parte en dicho espacio.[4]

[4] Se regresará a esta idea de una masa que afecta al espacio a su alrededor cuando se analice la teoría de gravitación de Einstein en el capítulo 39.

Para ejemplificar cómo funciona el concepto de campo, considere un objeto de masa m cerca de la superficie de la Tierra. Ya que la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto tiene una magnitud GM_Tm/r^2 (ecuación 13.4), el campo $\vec{\mathbf{g}}$ a una distancia r del centro de la Tierra es

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \textbf{(13.10)}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia afuera de la Tierra y el signo negativo indica que el campo apunta hacia el centro de la Tierra, como se ilustra en la figura 13.9a. Los vectores de campo en diferentes puntos alrededor de la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo $\vec{\mathbf{g}}$ es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 13.9b. La ecuación 13.10 es válida en todos los puntos *afuera* de la superficie de la Tierra, si se supone que la Tierra es esférica. En la superficie de la Tierra, donde $r = R_T$, $\vec{\mathbf{g}}$ tiene una magnitud de 9.80 N/kg. (La unidad N/kg es la misma que m/s^2.)

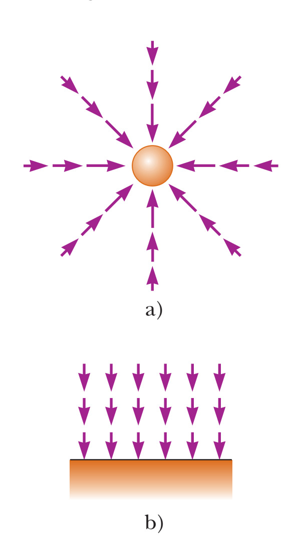


Figura 13.9 a) Los vectores de campo gravitacional cercanos a una masa esférica uniforme como la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. Los vectores apuntan en la dirección de la aceleración que experimentaría una partícula si se colocara en el campo. La magnitud del vector de campo en cualquier ubicación es la magnitud de la aceleración de caída libre en dicha ubicación. b) Los vectores de campo gravitacional en una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra son uniformes tanto en dirección como en magnitud.

13.5 Energía potencial gravitacional

En el capítulo 8 se introdujo el concepto de energía potencial gravitacional, que es la energía asociada con la configuración de un sistema de objetos que interactúan mediante la fuerza gravitacional. Se enfatizó que la función de energía potencial gravitacional mgy para un sistema partícula–Tierra sólo es válida cuando la partícula está cerca de la superficie de la Tierra, donde la fuerza gravitacional es constante. Ya que la fuerza gravitacional entre dos partículas varía con $1/r^2$, se espera que una función de energía potencial más general, una que es válida sin la restricción de tener que estar cerca de la superficie de la Tierra, será diferente de $U = mgy$.

Recuerde de la ecuación 7.26 que el cambio en la energía potencial gravitacional de un sistema asociado con un desplazamiento de un integrante del sistema se define como el negativo del trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre dicho integrante durante el desplazamiento:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\,dr \quad \textbf{(13.11)}$$

Se puede usar este resultado para evaluar la función de energía potencial gravitacional. Considere una partícula de masa m que se mueve entre dos puntos Ⓐ y Ⓑ sobre la superficie de la Tierra (figura 13.10). La partícula está sujeta a la fuerza gravitacional conocida por la ecuación 13.1. Esta fuerza se expresa como

$$F(r) = -\frac{GM_Tm}{r^2}$$

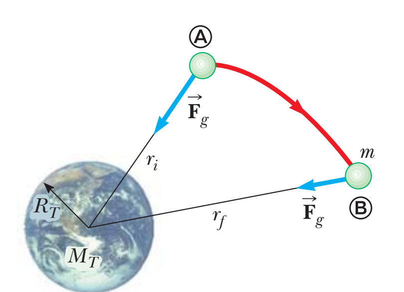


Figura 13.10 A medida que una partícula de masa m se mueve de Ⓐ a Ⓑ sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional del sistema partícula–Tierra cambia de acuerdo con la ecuación 13.12.

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción. Al sustituir esta expresión para $F(r)$ en la ecuación 13.11, se puede calcular el cambio en la función de energía potencial gravitacional para el sistema partícula–Tierra:

$$U_f - U_i = GM_Tm\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{r^2} = GM_Tm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_Tm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) \quad \textbf{(13.12)}$$

Como siempre, la elección de una configuración de referencia para la energía potencial es por completo arbitraria. Se acostumbra elegir la configuración de referencia para energía potencial cero como la misma para la cual la fuerza es cero. Al considerar $U_i = 0$ en $r_i = \infty$, se obtiene el importante resultado

◀ Energía potencial gravitacional del sistema Tierra–partícula

$$U(r) = -\frac{GM_Tm}{r} \quad \textbf{(13.13)}$$

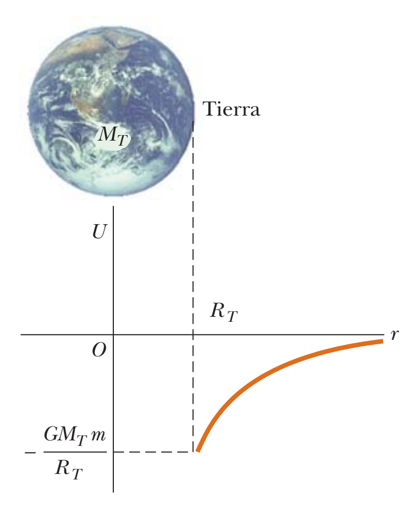


Figura 13.11 Gráfica de la energía potencial gravitacional U en función de r para el sistema de un objeto sobre la superficie de la Tierra. La energía potencial tiende a cero a medida que r tiende a infinito.

Esta expresión se aplica cuando la partícula está separada del centro de la Tierra una distancia r, siempre que $r \geq R_T$. El resultado no es válido para partículas dentro de la Tierra, donde $r < R_T$. Dada la elección de U_i, la función U siempre es negativa (figura 13.11).

Aunque la ecuación 13.13 se dedujo para el sistema partícula–Tierra, se puede aplicar a dos partículas cualesquiera. Esto es, la energía potencial gravitacional asociada con cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \tag{13.14}$$

Esta expresión muestra que la energía potencial gravitacional para cualquier par de partículas varía con $1/r$, mientras que la fuerza entre ellas varía como $1/r^2$. Además, la energía potencial es negativa porque la fuerza es de atracción y se eligió la energía potencial como cero cuando la separación de las partículas es infinita. Debido a que la fuerza entre las partículas es de atracción, un agente externo debe hacer trabajo positivo para aumentar la separación entre ellas. El trabajo realizado por el agente externo produce un aumento en la energía potencial conforme se separan las dos partículas. Es decir: U se vuelve menos negativa a medida que r aumenta.

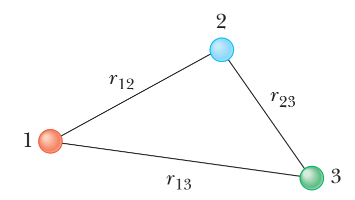


Figura 13.12 Tres partículas en interacción.

Cuando dos partículas están en reposo y separadas por una distancia r, un agente externo tiene que suministrar una energía al menos igual a $+Gm_1 m_2/r$ para separar las partículas a una distancia infinita. Por lo tanto es conveniente pensar en el valor absoluto de la energía potencial como la *energía de unión* del sistema. Si el agente externo suministra una energía mayor que la energía de unión, la energía en exceso del sistema está en la forma de energía cinética de las partículas cuando las partículas están en una separación infinita.

Es posible extender este concepto a tres o más partículas. En este caso, la energía potencial total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas. Cada par aporta un término de la forma conocida por la ecuación 13.14. Por ejemplo, si el sistema contiene tres partículas como en la figura 13.12,

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) \tag{13.15}$$

El valor absoluto de U_{total} representa el trabajo necesario para separar las partículas una distancia infinita.

EJEMPLO 13.6 El cambio en energía potencial

Una partícula de masa m se desplaza a través de una pequeña distancia vertical Δy cerca de la superficie de la Tierra. Demuestre que en esta situación la expresión general para el cambio en energía potencial gravitacional conocida por la ecuación 13.12 se reduce a la correspondencia familiar $\Delta U = mg\,\Delta y$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare las dos diferentes situaciones para las que se desarrollaron expresiones para la energía potencial gravitacional: 1) un planeta y un objeto que están separados, la expresión de energía para ellos es la ecuación 13.12 y 2) un objeto pequeño en la superficie de un planeta, la expresión de energía para ellos es la ecuación 7.19. Se quiere demostrar que estas dos expresiones son equivalentes.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Combine las fracciones en la ecuación 13.12:

$$1)\quad \Delta U = -GM_Tm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GM_Tm\left(\frac{r_f - r_i}{r_ir_f}\right)$$

Evalúe $r_f - r_i$ y r_ir_f si tanto la posición inicial como final de la partícula están cerca de la superficie de la Tierra:

$$r_f - r_i = \Delta y \qquad r_ir_f \approx R_T^2$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación 1):

$$\Delta U \approx \frac{GM_Tm}{R_T^2}\,\Delta y = mg\,\Delta y$$

donde $g = GM_T/R_T^2$ (ecuación 13.5).

¿Qué pasaría si? Suponga que usted realiza estudios en la atmósfera superior y su supervisor le pregunta encontrar la altura en la atmósfera terrestre a la cual la "ecuación de superficie" $\Delta U = mg\,\Delta y$ da un error de 1.0% en el cambio en la energía potencial. ¿Cuál es esta altura?

Respuesta Ya que la ecuación de superficie supone un valor constante para g, dará un valor ΔU que es mayor que el valor conocido por la ecuación general, ecuación 13.12.

Establezca una relación que refleje un error de 1.0%:

$$\frac{\Delta U_{\text{superficie}}}{\Delta U_{\text{general}}} = 1.010$$

Sustituya las expresiones para cada uno de estos cambios ΔU:

$$\frac{mg\,\Delta y}{GM_Tm(\Delta y/r_ir_f)} = \frac{gr_ir_f}{GM_T} = 1.010$$

Sustituya para r_i, r_f y g de la ecuación 13.5:

$$\frac{(GM_T/R_T^2)R_T(R_T + \Delta y)}{GM_T} = \frac{R_T + \Delta y}{R_T} = 1 + \frac{\Delta y}{R_T} = 1.010$$

Resuelva para Δy:

$$\Delta y = 0.010R_T = 0.010(6.37 \times 10^6\text{ m}) = 6.37 \times 10^4\text{ m} = 63.7\text{ km}$$

13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

Considere un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto pesado de masa M, donde $M >> m$. El sistema puede ser un planeta que se mueve alrededor del Sol, un satélite en órbita alrededor de la Tierra o un cometa que hace un vuelo una sola vez alrededor del Sol. Si supone que el objeto de masa M está en reposo en un marco de referencia inercial, la energía mecánica total E del sistema de dos objetos, cuando los objetos están separados una distancia r, es la suma de la energía cinética del objeto de masa m y la energía potencial del sistema, conocida por la ecuación 13.14:

$$E = K + U$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad \textbf{(13.16)}$$

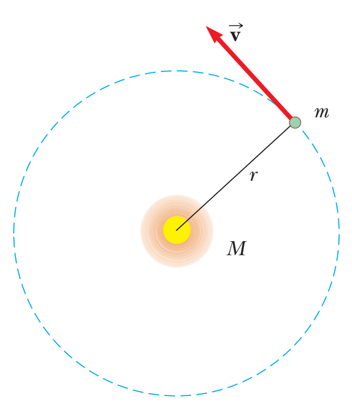


Figura 13.13 Un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular en torno a un objeto mucho mayor de masa M.

La ecuación 13.16 muestra que E puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de v. Sin embargo, para un sistema ligado como el sistema Tierra–Sol, E necesariamente *es menor que cero* porque se eligió la convención de que $U \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.

Fácilmente se puede establecer que $E < 0$ para el sistema que consiste de un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de un objeto de masa $M >> m$ (figura 13.13). La segunda ley de Newton aplicada al objeto de masa m produce

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Al multiplicar ambos lados por r y dividir entre 2 se obtiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \qquad \textbf{(13.17)}$$

Al sustituir esta ecuación en la ecuación 13.16 se obtiene

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

Energía total para órbitas circulares ▶

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(órbitas circulares)} \qquad \textbf{(13.18)}$$

Este resultado muestra que **la energía mecánica total es negativa en el caso de órbitas circulares.** Note que **la energía cinética es positiva e igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial.** El valor absoluto de E también es igual a la energía de enlace del sistema, porque esta cantidad de energía debe proporcionarse al sistema para separar los dos objetos infinitamente.

La energía mecánica total también es negativa en el caso de órbitas elípticas. La expresión para E para órbitas elípticas es la misma que la ecuación 13.18, con r sustituida por la longitud del semieje mayor a:

Energía total para órbitas elípticas ▶

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(órbitas elípticas)} \qquad \textbf{(13.19)}$$

Además, la energía total es constante si se supone que el sistema está aislado. Por lo tanto, conforme el objeto de masas m se mueve de Ⓐ a Ⓑ en la figura 13.10, la energía total permanece constante y la ecuación 13.16 produce

$$E = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \qquad \textbf{(13.20)}$$

Al combinar este enunciado de conservación de energía con la explicación anterior acerca de la conservación de la cantidad de movimiento angular, se ve qué **tanto la energía total como la cantidad de movimiento angular total de un sistema de dos objetos gravitacionalmente ligados son constantes del movimiento.**

Pregunta rápida 13.4 Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. ¿Cuál punto en su órbita (perihelio o afelio) representa el valor más alto de a) la rapidez del cometa, b) la energía potencial del sistema cometa–Sol, c) la energía cinética del cometa y d) la energía total del sistema cometa–Sol?

EJEMPLO 13.7 Cambio de la órbita de un satélite

Un vehículo de transporte espacial libera un satélite de comunicaciones de 470 kg mientras está en órbita a 280 km sobre la superficie de la Tierra. Un motor cohete en el satélite lo pone en una órbita geosíncrona. ¿Cuánta energía debe proporcionar el motor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note que la altura de 280 km es mucho más baja que la de un satélite geosíncrono, 36 000 km, como se mencionó en el ejemplo 13.5. Por lo tanto, se debe gastar energía para elevar el satélite a esta posición mucho más alta.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Encuentre el radio inicial de la órbita del satélite cuando aún está en la bahía de carga del trasbordador:

$$r_i = R_T + 280 \text{ km} = 6.65 \times 10^6 \text{ m}$$

Aplique la ecuación 13.18 para encontrar la diferencia en energías para el sistema satélite–Tierra con el satélite en los radios inicial y final:

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_T m}{2r_f} - \left(-\frac{GM_T m}{2r_i}\right) = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Sustituya valores numéricos usando $r_f = 4.23 \times 10^7$ m del ejemplo 13.5:

$$\Delta E = -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(470 \text{ kg})}{2}$$
$$\times \left(\frac{1}{4.23 \times 10^7 \text{ m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^6 \text{ m}}\right)$$
$$= \boxed{1.19 \times 10^{10} \text{ J}}$$

que es la energía equivalente a 89 galones de gasolina. Los ingenieros de la NASA deben tomar en cuenta el cambio de masa de la nave mientras expulsa combustible quemado, algo que no se hizo en este caso. ¿Esperaría que al incluir dicho cálculo el efecto de esta masa cambiante, produzca una cantidad de energía mayor o menor que la requerida por el motor?

Rapidez de escape

Suponga que un objeto de masa m se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i, como se ilustra en la figura 13.14. Es posible usar consideraciones energéticas para encontrar el valor mínimo de la rapidez inicial necesaria para permitir al objeto moverse infinitamente lejos de la Tierra. La ecuación 13.16 da la energía total del sistema en cualquier punto. En la superficie de la Tierra, $v = v_i$ y $r = r_i = R_T$. Cuando el objeto alcanza su altura máxima, $v = v_f = 0$ y $r = r_f = r_{\text{máx}}$. Ya que la energía total del sistema objeto−Tierra se conserva, sustituir estas condiciones en la ecuación 13.20 produce

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{r_{\text{máx}}}$$

Al resolver para v_i^2 se obtiene

$$v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\text{máx}}}\right) \qquad \textbf{(13.21)}$$

Para una altura máxima dada $h = r_{\text{máx}} - R_T$, se puede usar esta ecuación para encontrar la rapidez inicial requerida.

Ahora está en posición de calcular la rapidez de escape, que es la rapidez mínima que debe tener el objeto en la superficie de la Tierra para aproximarse a una distancia de separación infinita desde la Tierra. Al viajar con esta rapidez mínima, el objeto continúa moviéndose cada vez más lejos de la Tierra conforme su rapidez se aproxima asintóticamente a cero. Al hacer $r_{\text{máx}} \to \infty$ en la ecuación 13.21 y tomar $v_i = v_{\text{esc}}$ se obtiene

$$\boxed{v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}} \qquad \textbf{(13.22)}$$

Esta expresión para v_{esc} es independiente de la masa del objeto. En otras palabras, una nave espacial tiene la misma rapidez de escape que una molécula. Además, el resultado es independiente de la dirección de la velocidad e ignora la resistencia del aire.

Si al objeto se le da una rapidez inicial igual a v_{esc}, la energía total del sistema es igual a cero. Note que, cuando $r \to \infty$, la energía cinética del objeto y la energía potencial del sistema son cero. Si v_i es mayor que v_{esc}, la energía total del sistema es mayor que cero y el objeto tiene alguna energía cinética residual conforme $r \to \infty$.

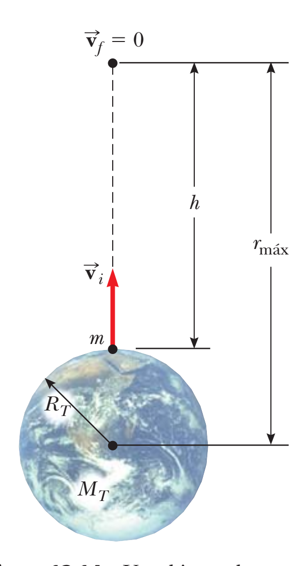


Figura 13.14 Un objecto de masa m es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial v, alcanzando una altura máxima h.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.3

En realidad no puede escapar

Aunque la ecuación 13.22 proporciona la "rapidez de escape" de la Tierra, escapar por *completo* de la influencia gravitacional de la Tierra es imposible porque la fuerza gravitacional es de alcance infinito. No importa qué tan lejos esté, siempre sentirá alguna fuerza gravitacional debida a la Tierra.

EJEMPLO 13.8 Rapidez de escape de un cohete

Calcule la rapidez de escape de la Tierra para una nave espacial de 5 000 kg y determine la energía cinética que debe tener en la superficie de la Tierra para moverse infinitamente lejos de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine proyectar la nave espacial desde la superficie de la Tierra de modo que se mueva cada vez más lejos, viajando más y más lentamente, con su rapidez tendiendo a cero. Sin embargo, su rapidez nunca llegará a cero, así que el objeto nunca dará vuelta y regresará.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 13.22 para encontrar la rapidez de escape:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.37 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$= \boxed{1.12 \times 10^4\ \text{m/s}}$$

Evalúe la energía cinética de la nave espacial a partir de la ecuación 7.16:

$$K = \tfrac{1}{2}mv_{esc}^2 = \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^3\ \text{kg})(1.12 \times 10^4\ \text{m/s})^2$$

$$= \boxed{3.14 \times 10^{11}\ \text{J}}$$

La rapidez de escape calculada corresponde más o menos a 25 000 mi/h. La energía cinética de la nave espacial es equivalente a la energía liberada por la combustión de aproximadamente 2 300 galones de gasolina.

¿Qué pasaría si? ¿Y si quiere lanzar una nave espacial de 1 000 kg a la rapidez de escape? ¿Cuánta energía requeriría eso?

Respuesta En la ecuación 13.22, la masa del objeto que se mueve con la rapidez de escape no aparece. Por lo tanto, la rapidez de escape para la nave de 1 000 kg es la misma que la de la nave de 5 000 kg. El único cambio en la energía cinética se debe a la masa, así que la nave de 1 000 kg requiere un quinto de la energía de la nave de 5 000 kg:

$$K = \tfrac{1}{5}(3.14 \times 10^{11}\ \text{J}) = 6.28 \times 10^{10}\ \text{J}$$

Las ecuaciones 13.21 y 13.22 se pueden aplicar a objetos proyectados desde cualquier planeta. Es decir, en general, la rapidez de escape de la superficie de cualquier planeta de masa M y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{13.23}$$

En la tabla 13.3 se proporcionan magnitudes de velocidad de escape para los planetas, la Luna y el Sol. Los valores varían de 2.3 km/s para la Luna a más o menos 618 km/s para el Sol. Estos resultados, junto con algunas ideas de la teoría cinética de los gases (véase el capítulo 21), explican por qué algunos planetas tienen atmósferas y otros no. Como se verá más adelante, a una cierta temperatura, la energía cinética promedio de una molécula de gas sólo depende de la masa de la molécula. Las moléculas más ligeras, como el hidrógeno y el helio, tienen una rapidez promedio mayor que las moléculas más pesadas a la misma temperatura. Cuando la rapidez promedio de las moléculas más ligeras no es en mucho menor que la rapidez de escape de un planeta, una fracción significativa de ellas tienen oportunidad de escapar.

Este mecanismo también explica por qué la Tierra no retiene moléculas de hidrógeno y átomos de helio en su atmósfera pero sí retiene moléculas más pesadas, como oxígeno y nitrógeno. Por otra parte, la rapidez de escape de Júpiter es tan grande que permite que el planeta retenga hidrógeno, el principal componente de su atmósfera.

TABLA 13.3

Magnitudes de velocidad de escape de las superficies de los planetas, Luna y Sol

Planeta	v_{esc} (km/s)
Mercurio	4.3
Venus	10.3
Tierra	11.2
Marte	5.0
Júpiter	60
Saturno	36
Urano	22
Neptuno	24
Luna	2.3
Sol	618

Hoyos negros

En el ejemplo 11.7, se describió brevemente un raro evento llamado supernova, la explosión catastrófica de una estrella muy pesada. El material que permanece en el núcleo central de tal objeto continúa colapsándose y el destino final del núcleo depende de su masa. Si el núcleo tiene una masa menor a 1.4 veces la masa de nuestro Sol, gradualmente se enfría y termina su vida como una estrella enana blanca. Sin embargo, si la masa del núcleo es mayor a este valor, puede colapsar aún más debido a fuerzas gravitacionales. Lo que queda es una estrella de neutrones, que se explicó en el ejemplo 11.7, en el que la masa de una estrella se comprime a un radio de casi 10 km. (En la Tierra, ¡una cucharadita de este material pesaría alrededor de 5 mil millones de toneladas!)

Una muerte estelar todavía más inusual puede presentarse cuando el núcleo tiene una masa mayor que aproximadamente tres masas solares. El colapso puede continuar hasta que la estrella se convierta en un objeto muy pequeño en el espacio, al que comúnmente se le conoce como **hoyo negro**. En efecto, los hoyos negros son restos de estrellas que colapsaron bajo su propia fuerza gravitacional. Si un objeto como una nave espacial se acerca a un hoyo negro, el objeto se somete a una fuerza gravitacional extremadamente intensa y queda atrapado para siempre.

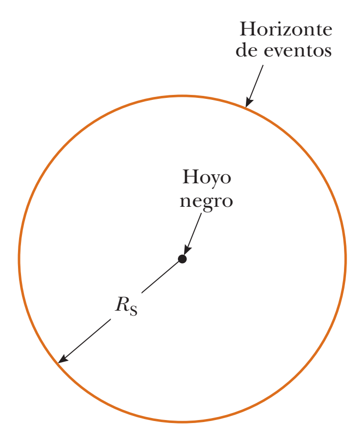


Figura 13.15 Un hoyo negro. La distancia R_S es igual al radio de Schwarzschild. Cualquier evento que ocurra dentro de la frontera del radio R_S, llamada el horizonte de eventos, es invisible a un observador externo.

La rapidez de escape para un hoyo negro es muy alta debido a la concentración de la masa de la estrella en una esfera de radio muy pequeño (véase la ecuación 13.23). Si la rapidez de escape supera la rapidez de la luz c, la radiación del objeto (tal como la luz visible) no puede escapar y el objeto parece ser negro (de ahí el origen de la término "hoyo negro"). El radio crítico R_S en que la rapidez de escape es c se llama **radio de Schwarzschild** (figura 13.15). La superficie imaginaria de una esfera de este radio que rodea al hoyo negro se llama **horizonte de eventos**, que es el límite de qué tan cerca se puede aproximar al hoyo negro y le es posible escapar.

Aunque la luz de un hoyo negro no puede escapar, la luz de los eventos que tienen lugar cerca del hoyo negro debe ser visible. Por ejemplo, es posible que un sistema de estrella binaria que consiste de una estrella normal y un hoyo negro. El material que rodea la estrella ordinaria se puede jalar hacia el hoyo negro, lo que forma un **disco de acrecentamiento** alrededor del hoyo negro, como sugiere la figura 13.16. La fricción entre partículas en el disco de acreción resulta en transformación de energía mecánica en energía interna. Como resultado, se eleva la temperatura del material sobre el horizonte de eventos. Este material de alta temperatura emite una gran cantidad de radiación y se extiende bien en la región de rayos X del espectro electromagnético. Estos rayos X son característicos de un hoyo negro. Por la observación de estos rayos X se han identificado muchos posibles candidatos para hoyos negros.

También hay evidencia de que en los centros de las galaxias existen hoyos negros superpesados, con masas mucho mayores que la del Sol. (Hay evidencia de un hoyo negro superpesado con masa de 2–3 millones de masas solares en el centro de nuestra galaxia.) Modelos teóricos para estos extraños objetos predicen que chorros de material deben ser evidentes a lo largo del eje de rotación del hoyo negro. La figura 13.17 (página 380) muestra una fotografía del Telescopio Espacial Hubble de la galaxia M87. Se considera que el chorro de material que proviene de esta galaxia es evidencia de un hoyo negro superpesado en el centro de la galaxia.

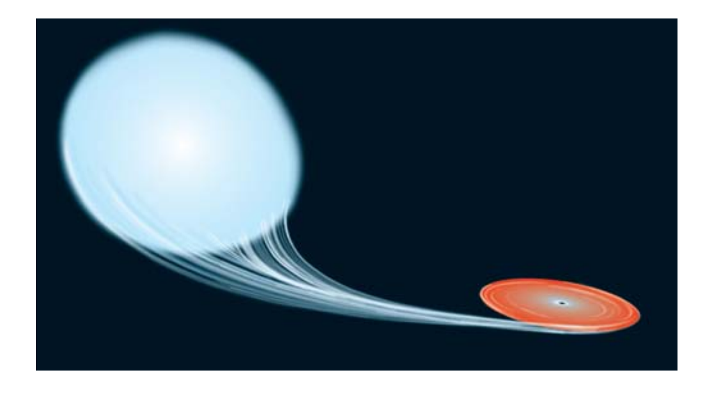


Figura 13.16 Un sistema de estrella binaria consiste de una estrella ordinaria a la izquierda y un hoyo negro a la derecha. La materia que se jala de la estrella ordinaria forma un disco de acreción alrededor del hoyo negro, en el que la materia se eleva a temperaturas muy altas, lo que resulta en la emisión de rayos X.

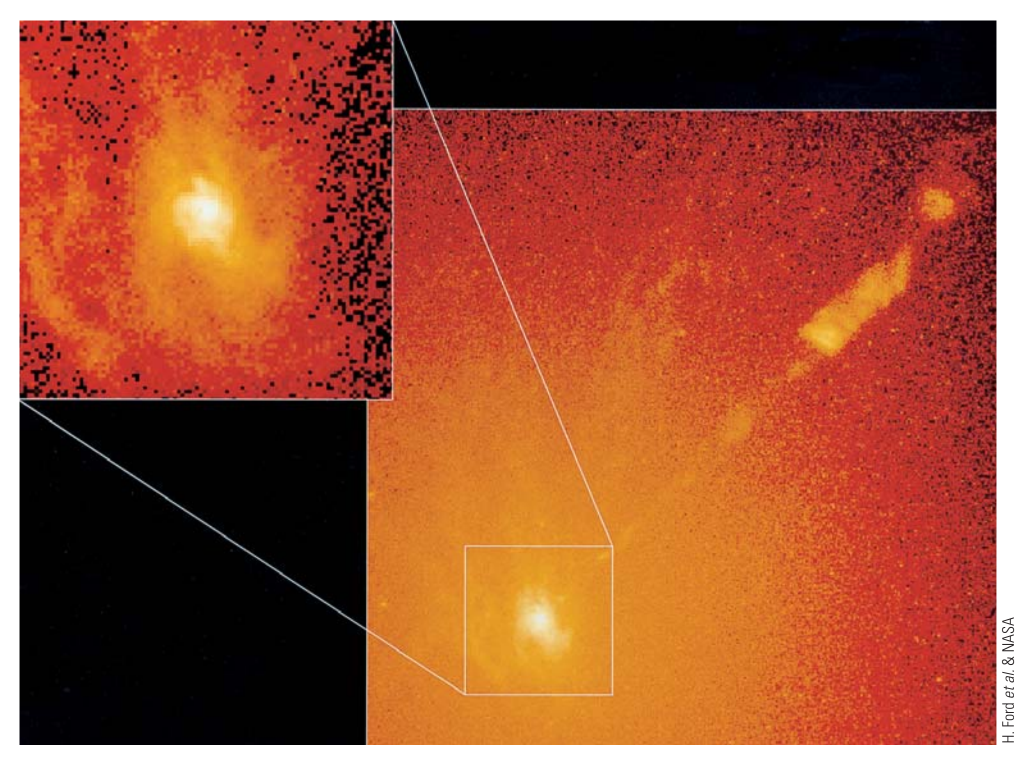


Figura 13.17 Imágenes del Telescopio Espacial Hubble de la galaxia M87. La inserción muestra el centro de la galaxia. La imagen más ancha muestra un chorro de material que se aleja del centro de la galaxia hacia arriba a la derecha de la figura a aproximadamente un décimo la rapidez de la luz. Se cree que tales chorros son evidencia de un hoyo negro supermasivo en el centro de la galaxia.

Resumen

DEFINICIONES

El **campo gravitacional** en un punto en el espacio se define como la fuerza gravitacional que experimenta cualquier partícula de prueba ubicada en dicho punto, dividida entre la masa de la partícula de prueba:

$$\vec{\mathbf{g}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} \quad \textbf{(13.9)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **ley de Newton de gravitación universal** afirma que la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r tiene la magnitud

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \textbf{(13.1)}$$

donde $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2 es la **constante gravitacional universal**. Esta ecuación permite calcular la fuerza de atracción entre masas bajo muchas circunstancias.

Un objeto a una distancia h sobre la superficie de la Tierra experimenta una fuerza gravitacional de magnitud mg, donde g es la aceleración en caída libre en dicha elevación:

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \quad \textbf{(13.6)}$$

En esta expresión, M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Por lo tanto, el peso de un objeto disminuye a medida que el objeto se aleja de la superficie de la Tierra.

(*continúa*)

Las **leyes de Kepler de movimiento planetario** afirman que:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector que se dibuja desde el Sol hacia un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La tercera ley de Kepler se puede expresar como

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 \qquad \textbf{(13.8)}$$

donde M_S es la masa del Sol y a es el semieje mayor. Para una órbita circular, a se puede sustituir en la ecuación 13.8 por el radio r. La mayoría de los planetas tiene órbitas casi circulares alrededor del Sol.

La **energía potencial gravitacional** asociada con dos partículas separada una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad \textbf{(13.14)}$$

donde U se considera cero conforme $r \to \infty$.

Si un sistema aislado consiste en un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto pesado de masa M, la energía total E del sistema es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad \textbf{(13.16)}$$

La energía total del sistema es una constante del movimiento. Si el objeto se mueve en una órbita elíptica con semieje mayor a alrededor del objeto pesado y $M >> m$, la energía total del sistema es

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad \textbf{(13.19)}$$

Para una órbita circular, esta misma ecuación se aplica con $a = r$.

La **rapidez de escape** para un objeto que se proyecta desde la superficie de un planeta de masa M y radio R es

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \textbf{(13.23)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Clasifique las magnitudes de las siguientes fuerzas gravitacionales de mayor a menor. Si dos fuerzas son iguales, muestre dicha igualdad en su lista. a) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 3 kg separados 1 m. b) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 9 kg separados 1 m. c) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 9 kg separados 2 m. d) La fuerza que ejerce un objeto de 9 kg sobre un objeto de 2 kg separados 2 m. e) La fuerza que ejerce un objeto de 4 kg sobre otro objeto de 4 kg separados 2 m.

2. **O** La fuerza gravitacional que se ejerce sobre una astronauta en la superficie de la Tierra es de 650 N dirigida hacia abajo. Cuando la astronauta está en la Estación Espacial Internacional, ¿cuál es la fuerza gravitacional sobre ella? a) varias veces mayor, b) ligeramente mayor, c) precisamente la misma, d) ligeramente menor, e) varias veces menor, f) casi pero no exactamente cero, g) precisamente cero, h) arriba en lugar de abajo.

3. **O** Imagine que el nitrógeno y otros gases atmosféricos fuesen más solubles en agua de modo que la atmósfera de la Tierra fuese completamente absorbida por los océanos. Entonces la presión atmosférica sería cero y el espacio exterior comenzaría en la superficie del planeta. ¿En tal caso tendría la Tierra un campo gravitacional? a) sí; en la superficie sería mayor en magnitud que 9.8 N/kg, b) sí, en esencia sería igual que el valor actual, c) sí, sería un poco menor que 9.8 N/kg, d) sí, sería mucho menor que 9.8 N/kg, e) no.

4. La fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre usted es hacia abajo hacia la Tierra en la noche y hacia arriba hacia el cielo durante el día. Si tuviese una báscula de baño suficientemente sensible, ¿esperaría pesar más en la noche que durante el día? Note también que usted está más lejos del Sol en la noche que durante el día. ¿Esperaría pesar menos?

5. **O** Suponga que la aceleración gravitacional en la superficie de cierto satélite A de Júpiter es 2 m/s^2. El satélite B tiene el doble de masa y el doble de radio que el satélite A. ¿Cuál es la aceleración gravitacional en su superficie? a) 16 m/s^2, b) 8 m/s^2, c) 4 m/s^2, d) 2 m/s^2, e) 1 m/s^2, f) 0.5 m/s^2, g) 0.25 m/s^2.

6. **O** Un satélite originalmente se mueve en una órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. Suponga que se mueve a una órbita circular de radio $4R$. **i)** ¿Qué ocurre con la fuerza ejercida sobre el satélite? a) es 16 veces mayor, b) es 8 veces mayor, c) es 4 veces mayor, d) es 2 veces mayor, e) no cambia, f) es 1/2, g) es 1/4, h) es 1/8, i) es 1/16 mayor. **ii)** ¿Qué sucede con la rapidez del satélite? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la i). **iii)** ¿Qué ocurre con su periodo? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la i).

7. **O** El equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño se asocian con dos puntos separados 180° en la órbita de la Tierra. Esto es, la Tierra está precisamente en lados opuestos del Sol cuando pasa a través de estos dos puntos. Desde el equinoccio de primavera transcurren 185.4 días antes del equinoccio

otoñal. Sólo transcurren 179.8 días desde el equinoccio de otoño hasta el siguiente equinoccio de primavera. En el año 2007, por ejemplo, el equinoccio de primavera fue 8 minutos después de medianoche tiempo medio de Greenwich el 21 de marzo de 2007, y el equinoccio otoñal será a las 9:51 p.m. del 23 de septiembre. ¿Por qué el intervalo del equinoccio de marzo al de septiembre (que contiene el solsticio de verano) es más largo que el intervalo del equinoccio de septiembre al de marzo, en lugar de ser igual a dicho intervalo? a) Realmente son iguales, pero la Tierra gira más rápido durante el intervalo "de verano", así que los días son más cortos. b) Durante el intervalo de "verano" la Tierra se mueve más lento porque está más lejos del Sol. c) Durante el intervalo marzo a septiembre, la Tierra se mueve más lento porque está más cerca del Sol. d) La Tierra tiene menos energía cinética cuando está más caliente. e) La Tierra tiene menos cantidad de movimiento angular orbital cuando está más caliente. f) Otros objetos realizan trabajo para aumentar la velocidad y disminuir el movimiento orbital de la Tierra.

8. Un satélite en órbita alrededor de la Tierra realmente no viaja a través de un vacío. Más bien, se mueve a través de aire poco denso. ¿La fricción resultante del aire hace que el satélite frene?

9. **O** Un sistema consiste de cinco partículas. ¿Cuántos términos aparecen en la expresión para la energía potencial gravitacional total? a) 4, b) 5, c) 10, d) 20, e) 25, f) 120.

10. Explique por qué una nave espacial requiere más combustible para viajar de la Tierra a la Luna que de regreso. Estime la diferencia.

11. **O** Clasifique las siguientes cantidades de energía de mayor a menor. Establezca si algunas son iguales a) el valor absoluto de la energía potencial promedio del sistema Sol–Tierra, b) la energía cinética promedio de la Tierra en su movimiento orbital en relación con el Sol, c) el valor absoluto de la energía total del sistema Sol–Tierra.

12. ¿Por qué no se pone un satélite climatológico geosíncrono en órbita alrededor del paralelo 45? ¿Tal satélite sería más útil en Estados Unidos que uno en órbita alrededor del ecuador?

13. Explique por qué la fuerza que ejerce una esfera uniforme sobre una partícula se debe dirigir hacia el centro de la esfera. ¿Este enunciado sería verdadero si la distribución de masa de la esfera no fuera esféricamente simétrica?

14. ¿En qué posición en su órbita elíptica la rapidez de un planeta es un máximo? ¿En qué posición la rapidez es un mínimo?

15. Se le proporciona la masa y el radio del planeta X. ¿Cómo calcularía la aceleración en caída libre en la superficie de este planeta?

16. Si se pudiera cavar un hoyo hacia el centro de la Tierra, ¿la fuerza sobre un objeto de masa m todavía obedecería ahí la ecuación 13.1? ¿Cómo cree que sería la fuerza sobre m en el centro de la Tierra?

17. En su experimento de 1798, Cavendish dijo haber "pesado la Tierra". Explique esta afirmación.

18. ¿La fuerza gravitacional es una fuerza conservativa o no conservativa? Cada nave espacial *Voyager* se aceleró a la rapidez de escape del Sol mediante la fuerza gravitacional ejercida por Júpiter sobre la nave espacial. ¿La interacción de la nave espacial con Júpiter satisface la definición de una colisión elástica? ¿Cómo se podría mover más rápido la nave espacial después de la colisión?

Problemas

Sección 13.1 Ley de Newton de gravitación universal

1. Determine el orden de magnitud de la fuerza gravitacional que usted ejerce sobre otra persona a 2 m de distancia. En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

2. Dos trasatlánticos, cada uno con 40 000 toneladas métricas de masa, se mueven en rutas paralelas separadas 100 m. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de uno de los trasatlánticos hacia el otro debido a su atracción gravitacional mutua? Modele los barcos como partículas.

3. Un objeto de 200 kg y un objeto de 500 kg están separados 0.400 m. a) Encuentre la fuerza gravitacional neta ejercida por estos objetos sobre un objeto de 50.0 kg colocado a medio camino entre ellos. b) ¿En qué posición (distinta del infinito) se puede colocar el objeto de 50.0 kg de modo que experimente una fuerza neta de cero?

4. Dos objetos se atraen mutuamente con una fuerza gravitacional de $1.00 = 10^{-8}$ N de magnitud cuando están separados 20.0 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5.00 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?

5. Tres esferas uniformes de 2.00 kg, 4.00 kg y 6.00 kg de masa se colocan en las esquinas de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura P13.5. Calcule la fuerza gravitacional resultante sobre el objeto de 4.00 kg, si supone que las esferas están aisladas del resto del Universo.

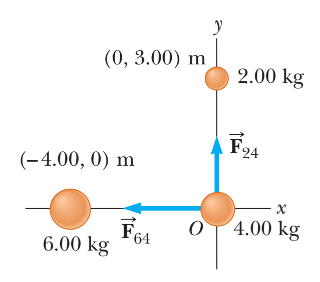


Figura P13.5

6. ● Durante un eclipse solar, la Luna, la Tierra y el Sol se encuentran en la misma línea, con la Luna entre la Tierra y el Sol. a) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Luna? b) ¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre la Luna? c) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Tierra? d) Compare las respuestas a los incisos a) y b). ¿Por qué el Sol no captura la Luna y la aleja de la Tierra?

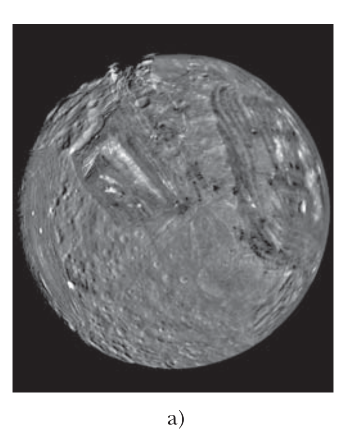
7. En los laboratorios de introducción a la física, una balanza de Cavendish representativa para medir la constante gravitacional G usa esferas de plomo con masas de 1.50 kg y 15.0 g cuyos centros están separados aproximadamente 4.50 cm. Calcule la fuerza gravitacional entre dichas esferas y trate a cada una como una partícula ubicada en el centro de la esfera.

8. ● Un estudiante propone medir la constante gravitacional G al suspender dos objetos esféricos del techo de una alta catedral y medir la desviación de los cables de la vertical. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de uno de los objetos. Suponga que dos objetos de 100.0 kg están suspendidos en los extremos inferiores de los cables de 45.00 m de largo y los cables están unidos al techo separados 1.0 m. ¿Cuál es la separación de los objetos? ¿Hay más de una distancia de separación de equilibrio? Explique.

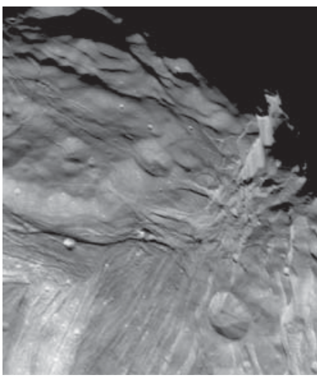
Sección 13.2 Aceleración de caída libre y fuerza gravitacional

9. Cuando un meteoroide que cae está a una distancia sobre la superficie de la Tierra 3.00 veces el radio de la Tierra, ¿cuál es su aceleración debida a la gravitación de la Tierra?

10. **Problema de repaso.** En la figura P13.10a se muestra Miranda, un satélite de Urano. Se le puede modelar como una esfera de 242 km de radio y 6.68×10^{19} kg de masa. a) Encuentre la aceleración en caída libre sobre su superficie. b) Un risco en Miranda mide 5.00 km de alto. Aparece en el extremo de la posición que corresponde a las 11 en punto en la figura P13.10a y se amplifica en la figura P13.10b. Un fanático de los deportes extremos corre horizontalmente desde lo alto del risco a 8.50 m/s. ¿Durante qué intervalo de tiempo está en vuelo? (¿O está en órbita?) c) ¿Qué tan lejos de la base del risco vertical golpea la superficie congelada de Miranda? d) ¿Cuál es su vector de velocidad de impacto?



a)



b)

Figura P13.10

11. La aceleración en caída libre en la superficie de la Luna es aproximadamente un sexto de la que hay sobre la superficie de la Tierra. El radio de la Luna es aproximadamente $0.250R_T$. Encuentre la proporción de sus densidades promedio, $\rho_{\text{Luna}}/\rho_{\text{Tierra}}$.

Sección 13.3 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

12. ● Una partícula de masas m se mueve a lo largo de una línea recta con rapidez constante en la dirección x, a una distancia b del eje x (figura P13.12). ¿La partícula tiene alguna cantidad de movimiento angular en torno al origen? Explique por qué la cantidad de movimiento angular debe cambiar o debería permanecer constante. Demuestre que la segunda ley de Kepler se satisface al mostrar que los dos triángulos sombreados en la figura tienen la misma área cuando $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$.

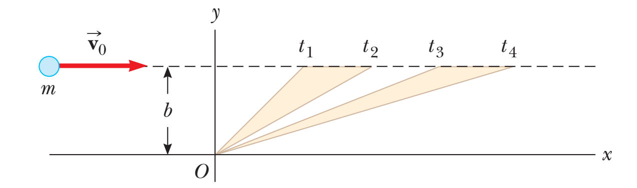


Figura P13.12

13. El sistema binario de Plaskett consiste en dos estrellas que dan vueltas en una órbita circular en torno a un centro de masa a la mitad del camino entre ellas. Este enunciado implica que las masas de las dos estrellas son iguales (figura P13.13). Suponga que la rapidez orbital de cada estrella es de 220 km/s y que el periodo orbital de cada uno es 14.4 días. Encuentre la masa M de cada estrella. (Para comparación, la masa del Sol es 1.99×10^{30} kg.)

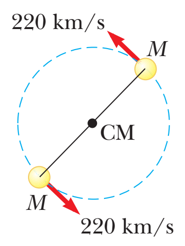


Figura P13.13

14. El cometa Halley (figura P13.14) se aproxima al Sol hasta dentro de 0.570 UA, y su periodo orbital es 75.6 años. (UA es el símbolo para unidad astronómica, donde 1 UA $= 1.50 \times 10^{11}$ m es la distancia media Tierra–Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de comenzar su viaje de regreso?

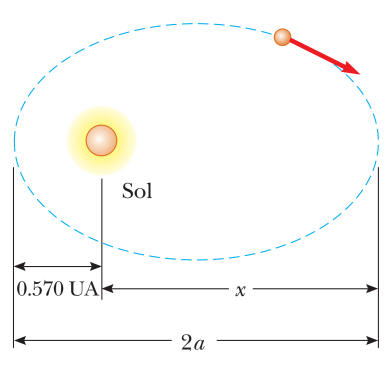


Figura P13.14

15. Io, un satélite de Júpiter, tiene un periodo orbital de 1.77 días y un radio orbital de 4.22×10^5 km. A partir de estos datos, determine la masa de Júpiter.

16. Dos planetas, X y Y, viajan en sentido contrario a las manecillas del reloj en órbitas circulares en torno a una estrella, como se muestra en la figura P13.16. Los radios de sus órbitas están en la proporción 3:1. En un momento, están alineados como se muestra en la figura P13.16a, y forman una línea recta con la estrella. Durante los siguientes cinco años, el desplazamiento angular del planeta X es 90.0°, como se muestra en la figura P13.16b. ¿Dónde está el planeta Y en este momento?

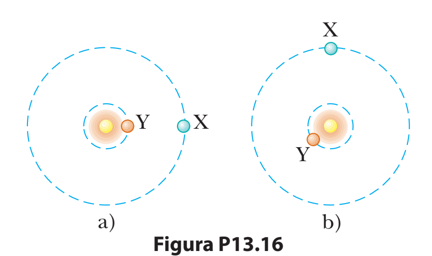


Figura P13.16

17. Un satélite síncrono, que siempre permanece arriba del mismo punto en el ecuador de un planeta, se pone en órbita alrededor de Júpiter para estudiar la famosa mancha roja. Júpiter gira una vez cada 9.84 h. Use los datos de la tabla 13.2 para encontrar la altitud del satélite.

18. Las estrellas de neutrones son objetos extremadamente densos formados a partir de los restos de explosiones supernova. Muchas giran muy rápidamente. Suponga que la masa de cierta estrella de neutrones esférica es el doble de la masa del Sol y su radio es de 10.0 km. Determine la rapidez angular máxima posible que puede tener de modo que la materia en la superficie de la estrella sobre su ecuador apenas se mantenga en órbita mediante la fuerza gravitacional.

19. Suponga que la gravedad del Sol se desconectara. Los objetos en el sistema solar dejarían sus órbitas y volarían en líneas rectas como describe la primera ley de Newton. ¿Alguna vez Mercurio estaría más lejos del Sol que Plutón? Si es así, encuentre cuánto tardaría Mercurio en lograr este tránsito. Si no, proporcione un argumento convincente de que Plutón siempre estará más lejos del Sol.

20. ● Dado que el periodo de la órbita de la Luna en torno a la Tierra es 27.32 d y la distancia casi constante entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es 3.84×10^8 m, use la ecuación 13.8 para calcular la masa de la Tierra. ¿Por qué es un poco más grande el valor que calcula?

Sección 13.4 El campo gravitacional

21. Tres objetos de igual masa están colocados en tres esquinas de un cuadrado de longitud de lado ℓ, como se muestra en la figura P13.21. Encuentre el campo gravitacional en la cuarta esquina debido a dichos objetos.

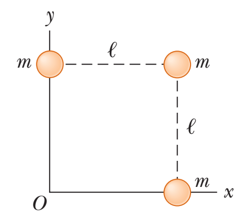


Figura P13.21

22. Una nave espacial tiene forma de un largo cilindro con una longitud de 100 m y su masa con ocupantes es de 1 000 kg. Se acercó demasiado a un hoyo negro que tiene una masa 100 veces la del Sol (figura P13.22). La nariz de la nave apunta hacia el hoyo negro y la distancia entre la nariz y el centro del hoyo negro es 10.0 km. a) Determine la fuerza total sobre la nave. b) ¿Cuál es la diferencia en los campos gravitacionales que actúan sobre los ocupantes en la nariz de la nave y sobre los que están en la parte trasera de la nave, más lejos del hoyo negro? Esta diferencia en aceleración crece rápidamente a medida que la nave se aproxima al hoyo negro. Pone al cuerpo de la nave bajo extrema tensión y al final lo rompe.

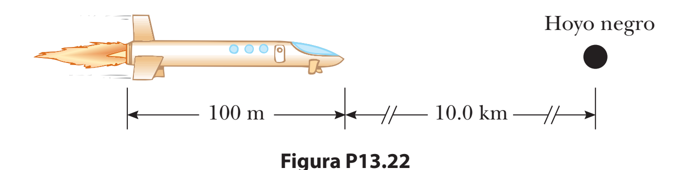


Figura P13.22

23. ● a) Calcule el vector campo gravitacional en un punto P sobre el bisector perpendicular de la línea que une dos objetos de igual masa separados por una distancia $2a$, como se muestra en la figura P13.23. b) Explique físicamente por qué el campo debe tender a cero conforme $r \rightarrow 0$. c) Pruebe matemáticamente que la respuesta del inciso a) se comporta de esta forma. d) Explique físicamente por qué la magnitud del campo debe tender a $2GM/r^2$ conforme $r \rightarrow \infty$. e) Pruebe matemáticamente que la respuesta al inciso a) se comporta de manera correcta en este límite.

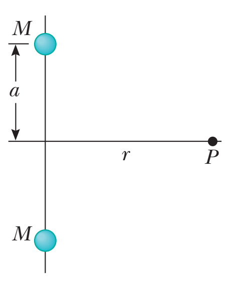


Figura P13.23

Sección 13.5 Energía potencial gravitacional

En los problemas 24–39, suponga $U = 0$ en $r = \infty$.

24. Un satélite de la Tierra tiene una masa de 100 kg y está a una altura de 2.00×10^6 m. a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema satélite–Tierra? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el satélite? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué fuerza, si existe alguna, ejerce el satélite sobre la Tierra?

25. Después de que el Sol agote su combustible nuclear, su destino final puede ser colapsar a un estado de *enana blanca*. En dicho estado tendría aproximadamente la misma masa que tiene ahora, pero un radio igual al de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración en caída libre en la superficie y c) la energía potencial gravitacional asociada con un objeto de 1.00 kg en su superficie.

26. En la superficie de la Tierra un proyectil se lanza recto hacia arriba con una rapidez de 10.0 km/s. ¿A qué altura se elevará? Ignore la resistencia del aire y la rotación de la Tierra.

27. ● Un sistema consiste de tres partículas, cada una de 5.00 g de masa, ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero con lados de 30.0 cm. a) Calcule la energía potencial del sistema. b) Suponga que las partículas se liberan simultáneamente. Describa el movimiento consecutivo de cada una. ¿Habrá colisiones? Explique.

28. ¿Cuánto trabajo realiza el campo gravitacional de la Luna sobre un meteoro de 1 000 kg mientras viene del espacio exterior e impacta sobre la superficie de la Luna?

29. Un objeto se libera desde el reposo a una altura h sobre la superficie de la Tierra. a) Demuestre que su rapidez a una distancia r del centro de la Tierra, donde $R_T \leq r \leq R_T + h$, es

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

b) Suponga que la altura de liberación es de 500 km. Realice la integral

$$\Delta t = \int_i^f dt = -\int_i^f \frac{dr}{v}$$

para encontrar el tiempo en caída a medida que el objeto se mueve desde el punto de liberación hasta la superficie de la Tierra. El signo negativo aparece porque el objeto se mueve opuesto a la dirección radial, así que su rapidez es $v = -dr/dt$. Realice la integral numéricamente.

Sección 13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

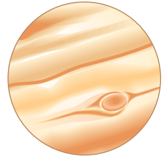
30. a) ¿Cuál es la rapidez mínima, en relación con el Sol, necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, si parte en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* logró una rapidez máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar a Júpiter. ¿Más allá de qué distancia desde el Sol es suficiente esta rapidez para escapar del sistema solar?

31. Una sonda espacial se dispara como un proyectil desde la superficie de la Tierra, con una rapidez inicial de 2.00×10^4 m/s. ¿Cuál será su rapidez cuando esté muy lejos de la Tierra? Ignore la fricción y la rotación de la Tierra.

32. ● Un satélite de 1 000 kg orbita la Tierra a una altura constante de 100 km. ¿Cuánta energía se debe agregar al sistema para mover el satélite en una órbita circular con altitud de 200 km? Explique los cambios de energía cinética, energía potencial y energía total.

33. Un "satélite copa de árbol" se mueve en una órbita circular justo sobre la superficie de un planeta, que se supone no ofrece resistencia del aire. Demuestre que su rapidez orbital v y la rapidez de escape del planeta se relacionan mediante la expresión $v_{esc} = \sqrt{2}v$.

34. ● Ganímedes es la más grande de las lunas de Júpiter. Considere un cohete sobre la superficie de Ganímedes, en el punto más lejano del planeta (figura P13.34). ¿La presencia de Ganímedes hace que Júpiter ejerza una fuerza mayor, menor o igual sobre el cohete, en comparación con la fuerza que ejercería si Ganímedes no se interpusiera? Determine la rapidez de escape para el cohete del sistema planeta–satélite. El radio de Ganímedes es 2.64×10^6 m y su masa es 1.495×10^{23} kg. La distancia entre Júpiter y Ganímedes es 1.071×10^9 m, y la masa de Júpiter es 1.90×10^{27} kg. Ignore el movimiento de Júpiter y Ganímedes mientras dan vueltas en torno a su centro de masa.



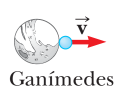


Figura P13.34

35. Un satélite de 200 kg de masa se coloca en órbita terrestre a una altura de 200 km sobre la superficie. a) Si supone una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? c) Si el satélite parte de la superficie de la Tierra, ¿cuál es la entrada de energía mínima necesaria para colocar este satélite en órbita? Ignore la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta.

36. ● Un satélite de masa m, originalmente sobre la superficie de la Tierra, se coloca en órbita terrestre a una altura h. a) Si supone una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? c) ¿Cuál es la entrada de energía mínima necesaria para colocar este satélite en órbita? Ignore la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta. ¿En qué posición en la superficie de la Tierra y en qué dirección se debe lanzar el satélite para minimizar la inversión de energía requerida? Represente la masa y el radio de la Tierra como M_T y R_T.

37. Un objeto se dispara verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra (de radio R_T) con una rapidez inicial v_i que es comparable, pero menor que, la rapidez de escape v_{esc}. a) Demuestre que el objeto logra una altura máxima h conocida por

$$h = \frac{R_T v_i^2}{v_{esc}^2 - v_i^2}$$

b) Un vehículo espacial se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 8.76 km/s, menor que la rapidez de escape de 11.2 km/s. ¿Qué altura máxima alcanza? c) Un meteorito cae hacia la Tierra. Esencialmente está en reposo en relación con la Tierra cuando está a una altura de 2.51×10^7 m. ¿Con qué rapidez el meteorito golpea la Tierra? d) **¿Qué pasaría si?** Suponga que una pelota de beisbol se lanza con una rapidez inicial que es muy pequeña comparada con la rapidez de escape. Demuestre que la ecuación del inciso a) es consistente con la ecuación 4.12.

38. Un satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r. a) ¿Cuál es la rapidez v_0 del satélite? Súbitamente, una explosión rompe el satélite en dos piezas, con masas m y $4m$. Enseguida de la explosión, la pieza más pequeña de masa m está estacionaria en relación con la Tierra y cae directamente hacia la Tierra. b) ¿Cuál es la rapidez v_i de la pieza más grande justo después de la explosión? c) Debido al aumento en su rapidez, esta pieza más grande ahora se mueve en una nueva órbita elíptica. Encuentre su distancia desde el centro de la Tierra cuando llega al otro extremo de la elipse.

39. Un cometa de 1.20×10^{10} kg de masa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Su distancia desde el Sol varía entre 0.500 UA y 50.0 UA. a) ¿Cuál es la excentricidad de su órbita? b) ¿Cuál es su periodo? c) En el afelio, ¿cuál es la energía

potencial del sistema cometa–Sol? *Nota:* 1 UA = una unidad astronómica = la distancia promedio del Sol a la Tierra = 1.496×10^{11} m.

Problemas adicionales

40. ● Suponga que usted es lo suficientemente ágil como para correr a través de una superficie horizontal a 8.50 m/s, independientemente del valor del campo gravitacional. ¿Cuál sería a) el radio y b) la masa de un asteroide esférico sin aire de 1.10 $\times 10^3$ kg/m^3 de densidad uniforme en el que podría lanzarse usted mismo en órbita al correr? c) ¿Cuál sería su periodo? d) ¿Su carrera afectaría significativamente la rotación del asteroide? Explique.

41. La nave espacial Observatorio Solar y Helioesférico (SOHO) tiene una órbita especial, elegida de tal modo que su vista del Sol nunca se eclipsa y siempre está lo suficientemente cerca de la Tierra para transmitir datos con facilidad. Su movimiento es casi circular alrededor del Sol, y es más pequeño que la órbita circular de la Tierra. Sin embargo, su periodo no es menor a un año, sino que es igual a un año. Siempre está ubicado entre la Tierra y el Sol a lo largo de la línea que los une. Ambos objetos ejercen fuerzas gravitacionales sobre el observatorio. Demuestre que su distancia desde la Tierra debe estar entre 1.47×10^9 m y 1.48×10^9 m. En 1772, Joseph Louis Lagrange determinó teóricamente la posición espacial que permitiría esta órbita. La nave espacial SOHO tomó esta posición el 14 de febrero de 1996. *Sugerencia:* Use datos que sean precisos a cuatro dígitos. La masa de la Tierra es 5.983×10^{24} kg.

42. Sea Δg_L la diferencia en los campos gravitacionales producidos por la Luna en los puntos más cercano y más lejano de la Luna sobre la superficie de la Tierra. Encuentre la fracción $\Delta g_L/g$, donde g es el campo gravitacional de la Tierra. (Esta diferencia es responsable del acontecimiento de las *mareas lunares* sobre la Tierra.)

43. **Problema de repaso.** Dos esferas duras idénticas, cada una con masa m y radio r, se liberan desde el reposo en espacio vacío con sus centros separados por la distancia R. Se les permite chocar bajo la influencia de su atracción gravitacional. a) Demuestre que la magnitud del impulso recibido por cada esfera antes de tener contacto se conoce por $[Gm^3(1/2r - 1/R)]^{1/2}$. b) **¿Qué pasaría si?** Encuentre la magnitud del impulso que cada una recibe durante su contacto si chocan elásticamente.

44. Dos esferas que tienen masas M y $2M$ y radios R y $3R$, respectivamente, se liberan desde el reposo cuando la distancia entre sus centros es $12R$. ¿Qué tan rápido se moverá cada esfera cuando choquen? Suponga que las dos esferas sólo actúan entre sí.

45. Un anillo de materia es una estructura familiar en astronomía planetaria y estelar. Los ejemplos incluyen los anillos de Saturno y una nebulosa anillo. Considere un gran anillo uniforme que tiene 2.36×10^{20} kg de masa y 1.00×10^8 m de radio. Un objeto de 1 000 kg de masa se coloca en un punto A sobre el eje del anillo, a 2.00×10^8 m del centro del anillo (figura P13.45). Cuando el objeto se libera, la atracción del anillo hace que el objeto se mueva a lo largo del eje hacia el centro del anillo (punto B). a) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema objeto–anillo cuando el objeto está en A. b) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema cuando el objeto está en B. c) Calcule la rapidez del objeto mientras pasa por B.



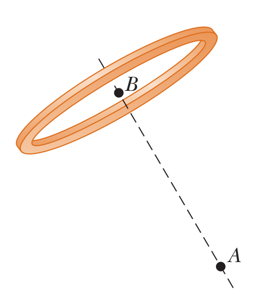


Figura P13.45

46. a) Demuestre que la rapidez de cambio de la aceleración en caída libre con distancia sobre la superficie de la Tierra es

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2GM_T}{R_T^3}$$

Esta rapidez de cambio sobre la distancia se llama *gradiente.* b) Si supone que h es pequeña comparada con el radio de la Tierra, demuestre que la diferencia en aceleración en caída libre entre dos puntos separados por la distancia vertical h es

$$|\Delta g| = \frac{2GM_T h}{R_T^3}$$

c) Evalúe esta diferencia para $h = 6.00$ m, una altura representativa para un edificio de dos pisos.

47. Como astronauta, observa que un planeta pequeño es esférico. Después de aterrizar en el planeta, se pone en movimiento y camina siempre en línea recta hacia adelante, después de completar una vuelta de 25.0 km se encuentra de regreso en su nave espacial desde el lado opuesto. Sostiene un martillo y una pluma de halcón a una altura de 1.40 m, los libera y observa que caen juntos a la superficie en 29.2 s. Determine la masa del planeta.

48. Cierto sistema estelar cuaternario consiste en tres estrellas, cada una de masa m, que se mueven en la misma órbita circular de radio r en torno a una estrella central de masa M. Las estrellas orbitan en el mismo sentido y se ubican a un tercio de revolución una de otra. Demuestre que el periodo de cada una de las tres estrellas es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\left(M + m/\sqrt{3}\right)}}$$

49. **Problema de repaso.** G. K. O'Neill (1974) propuso un hábitat cilíndrico en el espacio con 6.00 km de diámetro y 30 km de largo. Tal hábitat tendría ciudades, tierra y lagos en la superficie interior así como aire y nubes en el centro. Todo se man-

tendría en su lugar mediante la rotación del cilindro en torno a su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

50. ● Muchas personas suponen que la resistencia del aire que actúa sobre un objeto en movimiento siempre hará que el objeto frene. Sin embargo, en realidad puede ser responsable de hacer que el objeto aumente su rapidez. Considere un satélite de la Tierra de 100 kg en una órbita circular a una altura de 200 km. Una fuerza pequeña de resistencia de aire hace que el satélite caiga en una órbita circular con una altura de 100 km. a) Calcule su rapidez inicial. b) Calcule su rapidez final en este proceso. c) Calcule la energía inicial del sistema satélite–Tierra. d) Calcule la energía final del sistema. e) Demuestre que el sistema perdió energía mecánica y encuentre la cantidad de la pérdida debida a fricción. f) ¿Qué fuerza hace que aumente la rapidez del satélite? Encontrará que un diagrama de cuerpo libre es útil para explicar su respuesta.

51. Dos planetas hipotéticos, de masas m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, están casi en reposo cuando se encuentran separados una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional, se dirigen uno hacia el otro rumbo a una colisión. a) Cuando su separación centro a centro es d, encuentre expresiones para la rapidez de cada planeta y para su rapidez relativa. b) Encuentre la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen, considere $m_1 = 2.00 \times 10^{24}$ kg, $m_2 = 8.00 \times 10^{24}$ kg, $r_1 = 3.00 \times 10^6$ m, y $r_2 = 5.00 \times 10^6$m. *Nota:* Se conservan tanto la energía como la cantidad de movimiento del sistema.

52. La distancia máxima desde la Tierra al Sol (en afelio) es 1.521×10^{11} m, y la distancia de máximo acercamiento (en perihelio) es 1.471×10^{11} m. La rapidez orbital de la Tierra en perihelio es 3.027×10^4 m/s. Determine a) la rapidez orbital de la Tierra en afelio, b) las energías cinética y potencial del sistema Tierra–Sol en perihelio y c) las energías cinética y potencial en afelio. ¿La energía total del sistema es constante? (Ignore el efecto de la Luna y otros planetas.)

53. Estudios de la correspondencia del Sol con su galaxia, la Vía Láctea, revelaron que el Sol se ubica cerca del borde exterior del disco galáctico, más o menos a 30 000 años luz del centro. El Sol tiene una rapidez orbital de aproximadamente 250 km/s alrededor del centro galáctico. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento galáctico del Sol? b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la masa de la galaxia Vía Láctea? Suponga que la galaxia está hecha principalmente de estrellas entre las cuales el Sol es característico. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea?

54. Durante los vuelos de cohetes a gran altura se han registrado pulsos de rayos X provenientes de Cygnus X-1, una fuente de rayos X del espacio. Es posible interpretar que las señales se originan cuando una burbuja de materia ionizada orbita un hoyo negro con un periodo de 5.0 ms. Si la burbuja está en una órbita circular en torno a un hoyo negro cuya masa es de $20M_{\text{Sol}}$, ¿cuál es el radio orbital?

55. Los astrónomos detectaron un meteoroide distante que se mueve a lo largo de una línea recta que, si se extiende, pasaría a una distancia de $3R_T$ del centro de la Tierra, donde R_T es el radio de la Tierra. ¿Qué rapidez mínima debe tener el meteoroide si la gravitación de la Tierra no desvía al meteoroide para que golpee a la Tierra?

56. El satélite artificial más antiguo en órbita es el *Vanguard I*, que se lanzó el 3 de marzo de 1958. Su masa es de 1.60 kg. En su órbita inicial, su distancia mínima desde el centro de la Tierra fue de 7.02 Mm y su rapidez en su perigeo fue 8.23 km/s. a) Encuentre la energía total del sistema satélite–Tierra. b) Encuentre la magnitud de la cantidad de movimiento angular del satélite. c) En apogeo, encuentre su rapidez y su distancia desde el centro de la Tierra. d) Encuentre el semieje mayor de su órbita. e) Determine su periodo.

57. Dos estrellas de masa M y m, separadas una distancia d, dan vueltas en órbitas circulares en torno a su centro de masa (figura P13.57). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M + m)}$$

Proceda a la aplicación de la segunda ley de Newton a cada estrella. Note que la condición del centro de masa requiere que $Mr_2 = mr_1$, donde $r_1 + r_2 = d$.

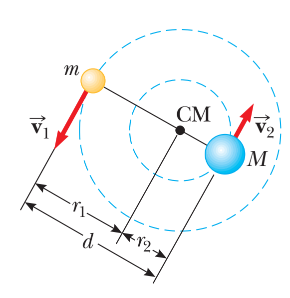


Figura P13.57

58. Demuestre que el periodo mínimo para un satélite en órbita alrededor de un planeta esférico de densidad uniforme ρ es

$$T_{\text{min}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

independiente del radio del planeta.

59. Dos partículas idénticas, cada una de 1 000 kg de masa, se desplazan en espacio libre a lo largo de la misma trayectoria. En un instante su separación es de 20.0 m y cada una tiene precisamente la misma velocidad de $800\hat{\mathbf{i}}$ m/s. ¿Cuáles son sus velocidades cuando están separadas 2.00 m?

60. a) Considere dos objetos de masa m, no necesariamente pequeña comparada con la masa de la Tierra, que se liberan a una distancia de 1.20×10^7 m desde el centro de la Tierra. Suponga que los objetos se comportan como un par de partículas aisladas del resto del Universo. Encuentre la magnitud de la aceleración a_{rel} con la que cada uno comienza a moverse en relación con el otro. Evalúe la aceleración para b) $m = 5.00$ kg, c) $m = 2\,000$ kg y d) $m = 2.00 \times 10^{24}$ kg. Describa el patrón de variación de a_{rel} con m.

61. A medida que la fusión termonuclear procede en su núcleo, el Sol pierde masa en una proporción de 3.64×10^9 kg/s. Durante el periodo de 5 000 años de historia registrada, ¿cuánto ha cambiado la duración del año debido a la pérdida de masa del Sol? *Sugerencias:* Suponga que la órbita de la Tierra es circular. Sobre el sistema Tierra–Sol no actúan momentos de torsión externos, de modo que se conserva la cantidad de movimiento angular. Si x es pequeña comparada con 1, en tal caso $(1 + x)^n$ es casi igual a $1 + nx$.

Respuestas a las preguntas rápidas

13.1 e). La fuerza gravitacional sigue un comportamiento de cuadrado inverso, así que duplicar la distancia hace que la fuerza sea de un cuarto.

13.2 c). Un objeto en órbita simplemente está cayendo mientras se mueve alrededor de la Tierra. La aceleración del objeto es la debida a la gravedad. Ya que el objeto se lanzó desde una montaña muy alta, el valor de g es ligeramente menor que el de la superficie.

13.3 a). A partir de la tercera ley de Kepler y el periodo conocido, se calcula el eje mayor del asteroide. Se encuentra que es 1.2×10^{11} m. Ya que este valor es más pequeño que la distancia Tierra–Sol, posiblemente el asteroide no choque con la Tierra.

13.4 a) Perihelio. Debido a la conservación de la cantidad de movimiento angular, la rapidez del cometa es mayor en su posición más cercana al Sol. b) Afelio. La energía potencial del sistema cometa–Sol es mayor cuando el cometa está en su distancia más lejana del Sol. c) Perihelio. La energía cinética es mayor en el punto donde la rapidez del cometa es mayor. d) Todos los puntos. La energía total del sistema es la misma sin importar dónde está el cometa en su órbita.



En el Mar Muerto, un lago entre Jordania e Israel, el alto porcentaje de sal disuelta en el agua eleva la densidad del fluido, lo que aumenta dramáticamente la fuerza de flotación (boyante) sobre los objetos en el agua. Los bañistas pueden tenderse de espaldas y disfrutar una buena lectura, sin usar colchones flotantes. (© Alison Wright/Corbis)

14 Mecánica de fluidos

Por lo general, la materia se clasifica perteneciente a uno de tres estados: sólido, líquido o gas. Por la experiencia cotidiana se sabe que un sólido tiene un volumen y forma definidos, un líquido tiene un volumen definido mas no forma definida, y un gas no confinado no tiene ni volumen definido ni forma definida. Dichas descripciones ayudan a representar los estados de la materia, pero son un poco artificiales. Por ejemplo, el asfalto y los plásticos normalmente se consideran sólidos, pero durante intervalos de tiempo prolongados tienden a fluir como líquidos. Del mismo modo, la mayoría de las sustancias pueden ser sólido, líquido o gas (o una combinación de cualquiera de estos tres), dependiendo de la temperatura y la presión. En general, el intervalo de tiempo requerido para que una sustancia particular cambie su forma en respuesta a una fuerza externa determina si se trata la sustancia como sólido, líquido o gas.

Un **fluido** es un conjunto de moléculas que se ordenan aleatoriamente y se mantienen juntas a partir de fuerzas cohesivas débiles y fuerzas que ejercen las paredes de un contenedor. Tanto líquidos como gases son fluidos.

En el tratamiento de la mecánica de fluidos se aplicarán principios que ya se discutieron. Primero, se considera la mecánica de un fluido en reposo, es decir, *estática de fluidos*, y después se estudian los fluidos en movimiento, *dinámica de fluidos*.

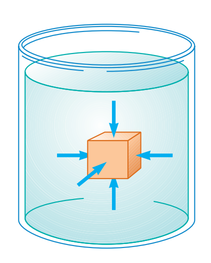


Figura 14.1 En cualquier punto sobre la superficie de un objeto sumergido, la fuerza que ejerce el fluido es perpendicular a la superficie del objeto. La fuerza que ejerce el fluido en las paredes del contenedor es perpendicular a las paredes en cualquier punto.

14.1 Presión

Los fluidos no soportan esfuerzos cortantes o de tensión; debido a eso, el único esfuerzo que se puede ejercer sobre un objeto sumergido en un fluido estático es el que tiende a comprimir el objeto desde todos los lados. En otras palabras, la fuerza que ejerce el fluido estático sobre un objeto siempre es perpendicular a las superficies del objeto, como se muestra en la figura 14.1.

La presión en un fluido se mide con el dispositivo que se muestra en la figura 14.2. El dispositivo consta de un cilindro al vacío que encierra un pistón ligero conectado a un resorte. Mientras el dispositivo está sumergido en un fluido, el fluido presiona arriba del pistón y comprime el resorte hasta que la fuerza hacia adentro que ejerce el fluido se equilibra con la fuerza hacia afuera que ejerce el resorte. Si el resorte se calibra antes es posible medir con exactitud la presión del fluido. Si F es la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el pistón y A es el área del pistón, la **presión** P del fluido en el nivel al que el dispositivo se sumergió se define como la relación de la fuerza al área:

Definición de presión ▶

$$P \equiv \frac{F}{A} \qquad \textbf{(14.1)}$$

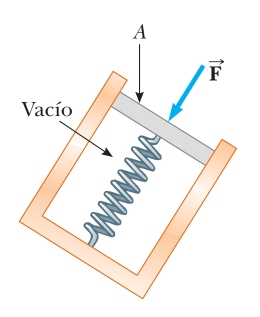


Figura 14.2 Un dispositivo simple para medir la presión que ejerce un fluido.

La presión es una cantidad escalar porque es proporcional a la magnitud de la fuerza sobre el pistón.

Si la presión varía sobre un área, la fuerza infinitesimal dF sobre un elemento de superficie infinitesimal de área dA es

$$dF = P\,dA \qquad \textbf{(14.2)}$$

donde P es la presión en la posición del área dA. Para calcular la fuerza total que se ejerce sobre una superficie de un contenedor, se debe integrar la ecuación 14.2 sobre la superficie.

Las unidades de presión son newtons por metro cuadrado (N/m^2) en el sistema SI. Otro nombre para la unidad del SI de presión es **pascal** (Pa):

$$1\text{ Pa} \equiv 1\text{ N/m}^2 \qquad \textbf{(14.3)}$$

Para una demostración táctil de la definición de presión, sostenga una tachuela entre sus dedos pulgar e índice, con la punta de la tachuela en el pulgar y la cabeza en el índice. Ahora presione *suavemente*. De inmediato el pulgar comenzará a sentir dolor, el índice no. La tachuela ejerce la misma fuerza sobre el pulgar y el índice, pero la presión sobre el pulgar es mucho mayor debido al área pequeña sobre la que se aplica la fuerza.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 14.1
Fuerza y presión

Las ecuaciones 14.1 y 14.2 hacen una clara distinción entre fuerza y presión. Otra distinción importante es que *la fuerza es un vector* y *la presión es un escalar.* La presión no tiene dirección asociada, pero la dirección de la fuerza asociada con la presión es perpendicular a la superficie sobre la que actúa la presión.

Pregunta rápida 14.1 Suponga que está de pie detrás de alguien que se mueve hacia atrás, quien por accidente le pisa el pie con el tacón de su zapato. ¿Usted saldría mejor librado si la persona fuera a) un alto jugador de basquetbol profesional que usa tenis o b) una mujer pequeña que calce zapatillas con tacón de aguja?

EJEMPLO 14.1 La cama de agua

El colchón de una cama de agua mide 2.00 m de largo por 2.00 m de ancho y 30.0 cm de profundidad.

A) Encuentre el peso del agua en el colchón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en transportar un cubo con agua y qué tan pesado es. Ahora imagine una muestra del agua del tamaño de una cama de agua. Se espera que el peso sea relativamente grande.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Hallar el volumen del agua que llena el colchón: $V = (2.00 \text{ m})(2.00 \text{ m})(0.300 \text{ m}) = 1.20 \text{ m}^3$

Use la ecuación 1.1 y la densidad del agua pura (consulte la tabla 14.1) para encontrar la masa de la cama de agua: $M = \rho V = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(1.20 \text{ m}^3) = 1.20 \times 10^3 \text{ kg}$

Encuentre el peso de la cama: $Mg = (1.20 \times 10^3 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 1.18 \times 10^4 \text{ N}$

que es aproximadamente 2 650 lb. (Una cama regular, incluido el colchón, box springs y marco metálico, pesa aproximadamente 300 lb.) Ya que esta carga es tan grande, es mejor colocar una cama de agua en el pedestal o en un piso fuerte y firme.

B) Encuentre la presión que ejerce el agua sobre el suelo cuando la cama de agua descansa en su posición normal. Suponga que toda la superficie inferior de la cama tiene contacto con el suelo.

SOLUCIÓN

Cuando la cama de agua está en su posición normal, el área en contacto con el suelo es 4.00 m^2. Use la ecuación 14.1 para encontrar la presión:

$$P = \frac{1.18 \times 10^4 \text{ N}}{4.00 \text{ m}^2} = 2.94 \times 10^3 \text{ Pa}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la cama de agua se sustituye con una cama regular de 300 lb que se sostiene en sus cuatro patas? Cada pata tiene una sección transversal circular de 2.00 cm de radio. ¿Qué presión ejerce esta cama sobre el suelo?

Respuesta El peso de la cama regular se distribuye sobre cuatro secciones transversales circulares en la parte baja de las patas. Por lo tanto, la presión es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{4(\pi r^2)} = \frac{300 \text{ lb}}{4\pi(0.020\,0 \text{ m})^2}\left(\frac{1 \text{ N}}{0.225 \text{ lb}}\right)$$
$$= 2.65 \times 10^5 \text{ Pa}$$

¡Este resultado es casi 100 veces mayor que la presión debida a la cama de agua! El peso de la cama regular, aun cuando es mucho menor que el peso de la cama de agua, se aplica sobre el área muy pequeña de las cuatro patas. La presión alta sobre el suelo que ejerce el pie de una cama regular podría causar abolladuras en los suelos de madera o desgarrar permanentemente las alfombras.

14.2 Variación de la presión con la profundidad

Como bien saben los buzos, la presión del agua aumenta con la profundidad. Del mismo modo, la presión atmosférica disminuye con la altura creciente; por esta razón, las aeronaves que vuelan a grandes alturas deben tener cabinas presurizadas para comodidad de los pasajeros.

TABLA 14.1

Densidades de algunas sustancias comunes a temperatura (0°C) y presión (atmosférica) estándar

Sustancia	ρ (kg/m^3)	Sustancia	ρ (kg/m^3)
Aire	1.29	Hielo	0.917×10^3
Aluminio	2.70×10^3	Hierro	7.86×10^3
Benceno	0.879×10^3	Plomo	11.3×10^3
Cobre	8.92×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Alcohol etílico	0.806×10^3	Roble	0.710×10^3
Agua pura	1.00×10^3	Oxígeno gaseoso	1.43
Glicerina	1.26×10^3	Pino	0.373×10^3
Oro	19.3×10^3	Platino	21.4×10^3
Helio	1.79×10^{-1}	Agua de mar	1.03×10^3
Hidrógeno gaseoso	8.99×10^{-2}	Plata	10.5×10^3

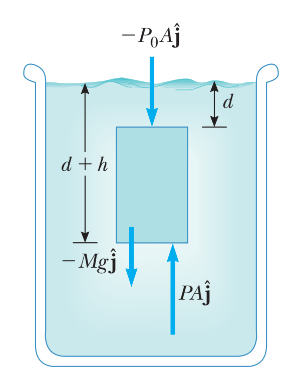


Figura 14.3 Una parte de fluido (región más oscura) aislada en un volumen de fluido más grande. La fuerza neta que se ejerce sobre la parte de fluido debe ser cero porque está en equilibrio.

Ahora se demostrará cómo la presión en un líquido aumenta con la profundidad. Como describe la ecuación 1.1, la *densidad* de una sustancia se define como su masa por unidad de volumen; la tabla 14.1 menciona las densidades de diferentes sustancias. Estos valores varían ligeramente con la temperatura porque el volumen de una sustancia depende de la temperatura (como se muestra en el capítulo 19). Bajo condiciones estándar (a 0°C y presión atmosférica), las densidades de los gases son aproximadamente $\frac{1}{1\,000}$ las densidades de sólidos y líquidos. Esta diferencia en densidades implica que el espaciamiento molecular promedio en un gas bajo estas condiciones es aproximadamente diez veces mayor que la de un sólido o líquido.

Considere ahora un líquido de densidad ρ en reposo, como se muestra en la figura 14.3. Se supone que ρ es uniforme en todo el líquido, esto significa que el líquido es incompresible. Seleccione una muestra del líquido contenido dentro de un cilindro imaginario de área de sección transversal A que se extiende desde la profundidad d a la profundidad $d + h$. El líquido externo a la muestra ejerce fuerzas en todos los puntos de la superficie de la muestra, perpendicular a la superficie. La presión que ejerce el líquido en la cara inferior de la muestra es P, y la presión en la cara superior es P_0. Por lo tanto, la fuerza hacia arriba que ejerce el fluido exterior sobre el fondo del cilindro tiene una magnitud PA, y la fuerza descendente que se ejerce sobre la parte superior tiene magnitud P_0A. La masa de líquido en el cilindro es $M = \rho V = \rho Ah$; en consecuencia, el peso del líquido en el cilindro es $Mg = \rho Ahg$. Ya que el cilindro está en equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre él debe ser cero. Al elegir hacia arriba como la dirección y positiva, se ve que

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = PA\hat{\mathbf{j}} - P_0A\hat{\mathbf{j}} - Mg\hat{\mathbf{j}} = 0$$

o

$$PA - P_0A - \rho Ahg = 0$$

Variación de la presión con la profundidad ▶

$$P = P_0 + \rho gh \tag{14.4}$$

Es decir: **la presión P a una profundidad h bajo un punto en el líquido donde la presión es P_0 es mayor por una cantidad ρgh.** Si el líquido se abre a la atmósfera y P_0 es la presión en la superficie del líquido, en tal caso P_0 es la presión atmosférica. Al hacer los cálculos y al trabajar los problemas al final del capítulo, por lo general la presión atmosférica se considera como

$$P_0 = 1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

La ecuación 14.4 implica que la presión es la misma en todos los puntos que tengan la misma profundidad, independientemente de la forma del contenedor.

Ya que la presión en un fluido depende de la profundidad y del valor de P_0, cualquier aumento en presión en la superficie debe transmitirse a todo otro punto en el fluido. Este concepto lo reconoció por primera vez el científico francés Blaise Pascal (1623–1662) y se llama **ley de Pascal: un cambio en la presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del contenedor**.

Ley de Pascal ▶

Una aplicación importante de la ley de Pascal es la prensa hidráulica que se ilustra en la figura 14.4a. Una fuerza de magnitud F_1 se aplica a un pequeño pistón de área superficial A_1. La presión se transmite a través de un líquido incompresible a un pistón más grande de área superficial A_2. Ya que la presión debe ser la misma en ambos lados, $P = F_1/A_1 = F_2/A_2$. En consecuencia, la fuerza F_2 es mayor que la fuerza F_1 en un factor A_2/A_1. Al diseñar una prensa hidráulica con áreas apropiadas A_1 y A_2, se aplica una gran fuerza de salida mediante una pequeña fuerza de entrada. Los frenos hidráulicos, elevadores de automóviles, gatos hidráulicos y carretillas elevadoras utilizan este principio (figura 14.4b).

Puesto que no se agrega ni retira líquido del sistema, el volumen de líquido que se empuja hacia abajo, a la izquierda de la figura 14.4a, mientras el pistón se mueve hacia abajo a través de un desplazamiento Δx_1 es igual al volumen de líquido que se empuja hacia arriba, en el lado derecho, mientras el pistón derecho se mueve hacia arriba a través de un desplazamiento Δx_2. Es decir, $A_1\,\Delta x_1 = A_2\,\Delta x_2$; por lo tanto, $A_2/A_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$. Ya se demostró que $A_2/A_1 = F_2/F_1$. En consecuencia, $F_2/F_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$, de modo que $F_1\,\Delta x_1 = F_2\,\Delta x_2$. Cada lado de esta ecuación es el trabajo invertido por la fuerza sobre su pistón respectivo. Por ende, el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}_1$ sobre el pistón de entrada es igual al trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}_2$ sobre el pistón de salida, como debe ser para conservar energía.

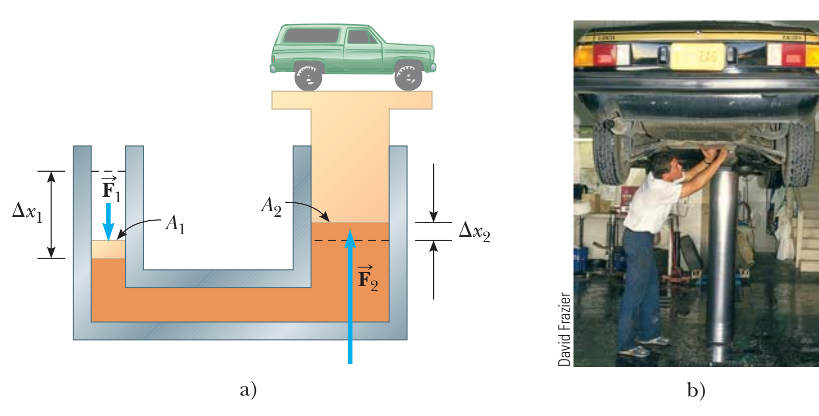


Figura 14.4 a) Diagrama de una prensa hidráulica. Ya que el aumento en presión es el mismo en los dos lados, una pequeña fuerza $\vec{F}_1$ a la izquierda produce una fuerza mucho mayor $\vec{F}_2$ a la derecha. b) Un vehículo en reparación levantado mediante un elevador hidráulico en un taller.

Pregunta rápida 14.2 La presión en el fondo de un vaso lleno de agua (ρ = 1 000 kg/m^3) es P. El agua se derrama y el vaso se llena con alcohol etílico (ρ = 806 kg/m^3). ¿Cuál es la presión en el fondo del vaso? a) menor que P, b) igual a P, c) mayor que P, d) indeterminado.

EJEMPLO 14.2 El elevador de automóviles

En un elevador de automóviles en una estación de servicio, el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pequeño pistón que tiene una sección transversal circular y un radio de 5.00 cm. Esta presión se transmite mediante un líquido a un pistón que tiene un radio de 15.0 cm. ¿Qué fuerza debe ejercer el aire comprimido para elevar un automóvil que pesa 13 300 N? ¿Qué presión de aire produce esta fuerza?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Revise el texto recién analizado acerca de la ley de Pascal para entender la operación de un elevador de automóviles.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Resuelva $F_1/A_1 = F_2/A_2$ para F_1:

$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)F_2 = \frac{\pi(5.00 \times 10^{-2}\text{ m})^2}{\pi(15.0 \times 10^{-2}\text{ m})^2}(1.33 \times 10^4\text{ N})$$

$$= 1.48 \times 10^3\text{ N}$$

Use la ecuación 14.1 para encontrar la presión de aire que produce esta fuerza:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.48 \times 10^3\text{ N}}{\pi(5.00 \times 10^{-2}\text{ m})^2}$$

$$= 1.88 \times 10^5\text{ Pa}$$

Esta presión es aproximadamente el doble de la presión atmosférica.

EJEMPLO 14.3 Dolor en su oído

Estime la fuerza que se ejerce sobre su tímpano debido al agua cuando nada en el fondo de una alberca que tiene 5.0 m de profundidad.

SOLUCIÓN

Conceptualizar A medida que desciende en el agua, la presión aumenta. Es posible que haya notado este aumento de presión en sus oídos mientras nada en una alberca, un lago o el océano. Puede encontrar la diferencia de presión que se

ejerce sobre el tímpano a partir de la profundidad dada en el problema; por lo tanto, después de estimar el área superficial del tímpano, puede determinar la fuerza neta que el agua ejerce sobre él.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

El aire dentro del oído medio por lo general está a presión atmosférica P_0. Debido a eso, para encontrar la fuerza neta sobre el tímpano, debe considerar la diferencia entre la presión total en el fondo de la alberca y la presión atmosférica. Estime el área superficial del tímpano como aproximadamente $1\ \text{cm}^2 = 1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$.

Use la ecuación 14.4 para encontrar esta diferencia de presión:

$$P_{\text{fondo}} - P_0 = \rho g h$$
$$= (1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m}) = 4.9 \times 10^4\ \text{Pa}$$

Use la ecuación 14.1 para encontrar la fuerza neta sobre el oído:

$$F = (P_{\text{fondo}} - P_0)A = (4.9 \times 10^4\ \text{Pa})(1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \approx 5\ \text{N}$$

Ya que una fuerza de esta magnitud sobre el tímpano es extremadamente incómoda, los nadadores con frecuencia “estiran de repente los oídos” mientras están bajo el agua, una acción que empuja el aire desde los pulmones hacia el oído medio. Usar esta técnica iguala la presión en los dos lados del tímpano y alivia la incomodidad.

EJEMPLO 14.4 La fuerza sobre un dique

El agua llena una altura H detrás de un dique de ancho w (figura 14.5). Determine la fuerza resultante que el agua ejerce sobre el dique.

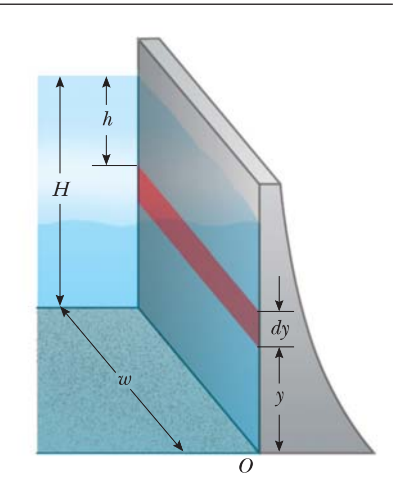


Figura 14.5 (Ejemplo 14.4) El agua ejerce una fuerza sobre un dique.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la presión varía con la profundidad, no se puede calcular la fuerza simplemente al multiplicar el área por la presión.

Categorizar Debido a la variación de la presión con la profundidad, se debe integrar para resolver este ejemplo, así que se le clasifica como un problema de análisis.

Analizar Imagine un eje vertical y, con $y = 0$ en el fondo del dique. Divida la cara del dique en estrechas tiras horizontales a una distancia y sobre el fondo, tal como la tira roja de la figura 14.5. La presión sobre cada una de tales tiras se debe sólo al agua; la presión atmosférica actúa sobre ambos lados del dique.

Use la ecuación 14.4 para calcular la presión debida al agua a la profundidad h:

$$P = \rho g h = \rho g(H - y)$$

Use la ecuación 14.2 para encontrar la fuerza que se ejerce sobre la tira sombreada de área $dA = w\,dy$:

$$dF = P\,dA = \rho g(H - y)w\,dy$$

Integre para encontrar la fuerza total sobre el dique:

$$F = \int P\,dA = \int_0^H \rho g(H - y)w\,dy = \tfrac{1}{2}\rho g w H^2$$

Finalizar Note que el grosor del dique que se muestra en la figura 14.5 aumenta con la profundidad. Este diseño explica la mayor presión que el agua ejerce sobre el dique a mayor profundidad.

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le pide encontrar esta fuerza sin usar cálculo? ¿Cómo podría determinar este valor?

Respuesta Por la ecuación 14.4 sabe que la presión varía linealmente con la profundidad. Debido a eso, la presión promedio debida al agua sobre la cara del dique es el promedio de la presión en la parte superior y la presión en el fondo:

$$P_{\text{prom}} = \frac{P_{\text{superior}} + P_{\text{fondo}}}{2} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \tfrac{1}{2}\rho g H$$

La fuerza total sobre el dique es igual al producto de la presión promedio y el área de la cara del dique:

$$F = P_{\text{prom}}A = \left(\tfrac{1}{2}\rho g H\right)(Hw) = \tfrac{1}{2}\rho g w H^2$$

que es el mismo resultado obtenido usando cálculo.

14.3 Mediciones de presión

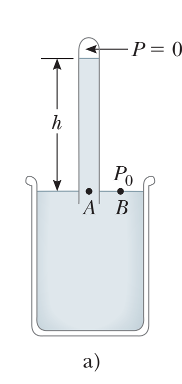
Durante el reporte del clima en los noticiarios de televisión, con frecuencia se proporciona la *presión barométrica*. Esta lectura es la presión actual de la atmósfera, que varía en un pequeño intervalo del valor estándar proporcionado anteriormente. ¿Cómo se mide esta presión?

Un instrumento que se usa para medir la presión atmosférica es el barómetro común, inventado por Evangelista Torricelli (1608–1647). Un tubo largo cerrado en un extremo se llena con mercurio y luego se invierte en un contenedor con mercurio (figura 14.6a). El extremo cerrado del tubo es casi un vacío, así que la presión en lo alto de la columna de mercurio se considera cero. En la figura 14.6a, la presión en el punto A, debida a la columna de mercurio, debe ser igual a la presión en el punto B, debido a la atmósfera. Si este no fuera el caso, habría una fuerza neta que movería al mercurio de un punto al otro hasta establecer equilibrio. Por lo tanto, $P_0 = \rho_{\text{Hg}}gh$, donde ρ_{Hg} es la densidad del mercurio y h es la altura de la columna de mercurio. Conforme la presión atmosférica varía, la altura de la columna de mercurio varía, así que la altura se puede calibrar para medir presión atmosférica. Determine la altura de una columna de mercurio para una atmósfera de presión, $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$:

$$P_0 = \rho_{\text{Hg}}gh \quad \rightarrow \quad h = \frac{P_0}{\rho_{\text{Hg}}g} = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{(13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.760 \text{ m}$$

De acuerdo en tal cálculo, una atmósfera de presión se define como la presión equivalente de una columna de mercurio que tiene exactamente 0.760 0 m de alto a 0°C.

Un dispositivo para medir la presión de un gas contenido en un recipiente es el manómetro de tubo abierto que se ilustra en la figura 14.6b. Un extremo de un tubo con forma de U que contiene un líquido está abierto a la atmósfera, y el otro extremo está conectado a un sistema de presión desconocida P. En una situación de equilibrio, las presiones en los puntos A y B deben ser iguales (de otro modo, la porción curva del líquido experimentaría una fuerza neta y aceleraría), y la presión en A es la presión desconocida del gas. Por tanto, al igualar la presión desconocida P con la presión en el punto B, se ve que $P = P_0 + \rho gh$. La diferencia en presión $P - P_0$ es igual a ρgh. La presión P se llama **presión absoluta**, y la diferencia $P - P_0$ se llama **presión manométrica**. Por ejemplo, la presión que mide en la llanta de su bicicleta es presión manométrica.



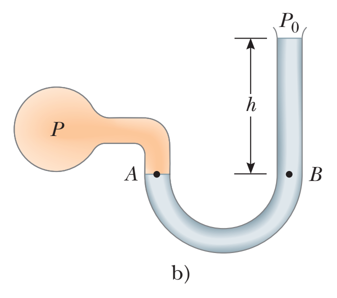


Figura 14.6 Dos dispositivos para medir la presión: a) un barómetro de mercurio y b) un manómetro de tubo abierto.

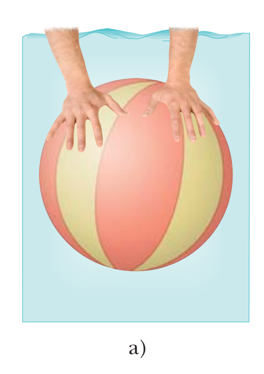
Pregunta rápida 14.3 Se construyen muchos barómetros comunes, con varios fluidos. ¿Para cuál de los siguientes fluidos la columna de fluido en el barómetro será la más alta? a) mercurio, b) agua, c) alcohol etílico, d) benceno.

14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes

¿Alguna vez ha intentado empujar una pelota de playa hacia abajo del agua (figura 14.7a, página 396)? Es extremadamente difícil hacerlo debido a la gran fuerza hacia arriba que ejerce el agua sobre la pelota. La fuerza hacia arriba que un fluido ejerce sobre cualquier objeto sumergido se llama **fuerza de flotación (boyante)**. Se puede determinar la magnitud de una fuerza de flotación al aplicar algo de lógica. Imagine una porción de agua



ARQUÍMEDES
Matemático, físico e ingeniero griego (*c.* 287–212 a. C.)
Arquímedes fue quizá el más grande científico de la antigüedad. Fue el primero en calcular con precisión la proporción de la circunferencia de un círculo a su diámetro, y también demostró cómo calcular el volumen y el área superficial de las esferas, cilindros y otras formas geométricas. Es bien conocido por descubrir la naturaleza de la fuerza de flotación y también fue un inventor genial. Una de sus invenciones prácticas, todavía en uso actual, es el tornillo de Arquímedes, un tubo anillado rotatorio e inclinado que se usó originalmente para levantar agua de las galeras de los barcos. También inventó la catapulta y vislumbró sistemas de palancas, poleas y pesos para levantar cargas pesadas. Tales invenciones tuvieron una aplicación afortunada en la defensa de su ciudad natal, Siracusa, durante un acoso de dos años por los romanos.



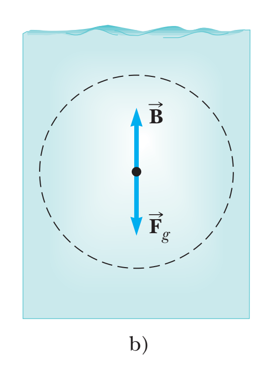


Figura 14.7 a) Un nadador empuja una pelota de playa bajo el agua. b) Las fuerzas sobre una porción de agua del tamaño de una pelota de playa. La fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ sobre una pelota de playa que sustituye esta porción es exactamente la misma que la fuerza de flotación sobre la porción.

del tamaño de una pelota de playa bajo la superficie del agua, como en la figura 14.7b. Ya que esta parte está en equilibrio, debe haber una fuerza hacia arriba que equilibre la fuerza gravitacional hacia abajo sobre la porción. Esta fuerza hacia arriba es la fuerza de flotación y su magnitud es igual al peso del agua en la porción. La fuerza de flotación es la fuerza que resulta sobre la porción debido a todas las fuerzas aplicadas por el fluido que rodean la porción.

Ahora imagine sustituir la porción de agua del tamaño de una pelota de playa con una pelota de playa del mismo tamaño. La fuerza neta aplicada por el fluido que rodea la pelota es la misma, sin importar si se aplica a una pelota de playa o a una porción de agua. En consecuencia, **la magnitud de la fuerza de flotación sobre un objeto siempre es igual al peso del fluido desplazado por el objeto**. Este enunciado se conoce como **principio de Arquímedes**.

Con la pelota de playa bajo el agua, la fuerza de flotación, igual al peso de una porción de agua del tamaño de la pelota de playa, es mucho mayor que el peso de la pelota de playa. Por lo tanto, existe una gran fuerza neta hacia arriba, que explica por qué es tan difícil sostener la pelota de playa bajo el agua. Note que el principio de Arquímedes no se refiere a la configuración del objeto que experimenta la fuerza de flotación. La composición del objeto no es un factor en la fuerza de flotación porque la fuerza de flotación la ejerce el fluido.

Para comprender mejor el origen de la fuerza de flotación, considere un cubo sumergido en un líquido, como en la figura 14.8. De acuerdo con la ecuación 14.4, la presión P_{fondo} en el fondo del cubo es mayor que la presión P_{sup} en la parte superior por una cantidad $\rho_{\text{fluido}}gh$, donde h es la altura del cubo y ρ_{fluido} es la densidad del fluido. La presión en el fondo del cubo causa una fuerza *hacia arriba* igual a $P_{\text{fondo}}A$, donde A es el área de la cara inferior. La presión en la parte superior del cubo causa una fuerza *hacia abajo* igual a $P_{\text{sup}}A$. La resultante de estas dos fuerzas es la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ con magnitud

$$B = (P_{\text{fondo}} - P_{\text{sup}})A = (\rho_{\text{fluido}}gh)A$$

Fuerza de flotación ▶

$$B = \rho_{\text{fluido}}gV \tag{14.5}$$

donde $V = Ah$ es el volumen del fluido desplazado por el cubo. Ya que el producto $\rho_{\text{fluido}}V$ es igual a la masa de fluido desplazado por el objeto,

$$B = Mg$$

donde Mg es el peso del fluido desplazado por el cubo. Este resultado es consistente con el enunciado anterior acerca del principio de Arquímedes, en función de la discusión de la pelota de playa.

Bajo condiciones normales, el peso de un pez es ligeramente mayor que la fuerza de flotación sobre el pez. Por ende, el pez se hundiría si no tuviese algún mecanismo para ajustar la fuerza de flotación. El pez logra esto mediante la regulación interna del tamaño

de su vejiga natatoria llena de aire para aumentar su volumen y la magnitud de la fuerza de flotación que actúa sobre él, de acuerdo con la ecuación 14.5. De esta forma, el pez es capaz de nadar a diversas profundidades.

Antes de proceder con algunos ejemplos, es ilustrativo discutir dos situaciones comunes: un objeto totalmente sumergido y un objeto que flota (parcialmente sumergido).

Caso 1: Objeto totalmente sumergido. Cuando un objeto está totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_{fluido}, la magnitud de la fuerza de flotación hacia arriba es $B = \rho_{\text{fluido}}gV = \rho_{\text{fluido}}gV_{\text{obj}}$, donde V_{obj} es el volumen del objeto. Si el objeto tiene una masa M y densidad ρ_{obj}, su peso es igual a $F_g = Mg = \rho_{\text{obj}}gV_{\text{obj}}$ y la fuerza neta sobre el objeto es $B - F_g = (\rho_{\text{fluido}} - \rho_{\text{obj}})gV_{\text{obj}}$. En consecuencia, si la densidad del objeto es menor que la densidad del fluido, la fuerza gravitacional hacia abajo es menor que la fuerza de flotación y el objeto sin apoyo acelera hacia arriba (figura 14.9a). Si la densidad del objeto es mayor que la densidad del fluido, la fuerza de flotación hacia arriba es menor que la fuerza gravitacional hacia abajo y el objeto sin apoyo se hunde (figura 14.9b). Si la densidad del objeto sumergido es igual a la densidad del fluido, la fuerza neta sobre el objeto es cero y el objeto permanece en equilibrio. Por lo tanto, **la dirección de movimiento de un objeto sumergido en un fluido está determinada por las densidades del objeto y el fluido.**

Caso 2: Objeto que flota. Ahora considere un objeto de volumen V_{obj} y densidad $\rho_{\text{obj}} < \rho_{\text{fluido}}$ en equilibrio estático que flota en la superficie de un fluido, es decir, un objeto que sólo está *parcialmente* sumergido (figura 14.10). En este caso, la fuerza de flotación hacia arriba se equilibra mediante la fuerza gravitacional hacia abajo que actúa en el objeto. Si V_{fluido} es el volumen del fluido desplazado por el objeto (este volumen es el mismo que el volumen de dicha parte del objeto bajo la superficie del fluido), la fuerza de flotación tiene una magnitud $B = \rho_{\text{fluido}}gV_{\text{fluido}}$. Ya que el peso del objeto es $F_g = Mg = \rho_{\text{obj}}gV_{\text{obj}}$, y ya que $F_g = B$, se ve que $\rho_{\text{fluido}}gV_{\text{fluido}} = \rho_{\text{obj}}gV_{\text{obj}}$, o

$$\frac{V_{\text{fluido}}}{V_{\text{obj}}} = \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fluido}}} \tag{14.6}$$

Esta ecuación demuestra que **la fracción del volumen de un objeto en flotación que está debajo de la superficie del fluido es igual a la relación de la densidad del objeto a la del fluido.**

Pregunta rápida 14.4 Usted es un náufrago y flota en medio del océano en una balsa. Su carga en la balsa incluye un cofre del tesoro lleno de oro que encontró antes de que su barco se hundiera, y la balsa apenas se mantiene a flote. Para mantenerse flotando tan alto como sea posible en el agua, ¿usted debe a) dejar el cofre del tesoro arriba de la balsa, b) asegurar el cofre del tesoro en la parte inferior de la balsa o, c) con una soga amarrada a la balsa colgar el cofre del tesoro en el agua? (Suponga que lanzar el cofre del tesoro por la borda no es una opción que quiera considerar.)

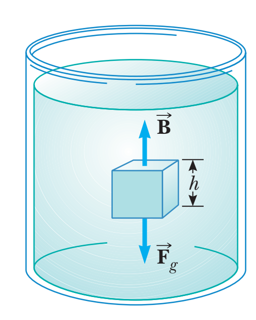


Figura 14.8 Las fuerzas externas que actúan sobre el cubo en un líquido son la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ y la fuerza de flotación $\vec{B}$. Bajo condiciones de equilibrio, $B = F_g$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 14.2

El fluido ejerce la fuerza de flotación

Recuerde que **la fuerza de flotación la ejerce el fluido**. No está determinada por las propiedades del objeto, excepto por la cantidad de fluido desplazado por el objeto. Por lo tanto, si muchos objetos de diferentes densidades, pero igual volumen, se sumergen en un fluido, todos experimentarán la misma fuerza de flotación. El que se hundan o floten está determinado por la relación entre la fuerza de flotación y la fuerza gravitacional.

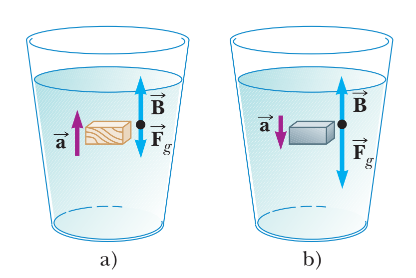


Figura 14.9 a) Un objeto totalmente sumergido menos denso que el fluido en el que se sumerge experimenta una fuerza neta hacia arriba. b) Un objeto totalmente sumergido y que es más denso que el fluido experimenta una fuerza neta hacia abajo.

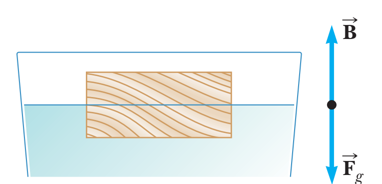


Figura 14.10 Un objeto que flota sobre la superficie de un fluido experimenta dos fuerzas, la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ y la fuerza de flotación $\vec{B}$. Puesto que el objeto flota en equilibrio, $B = F_g$.

EJEMPLO 14.5 **¡Eureka!**

Según la tradición a Arquímedes se le pidió determinar si una corona hecha para el rey consistiera de oro puro. De acuerdo con la leyenda, él resolvió este problema al pesar la corona primero en aire y luego en agua, como se muestra en la figura 14.11. Suponga que lectura en la balanza es 7.84 N cuando la corona estaba en aire y 6.84 N cuando estaba en agua. ¿Qué dijo Arquímedes al rey?

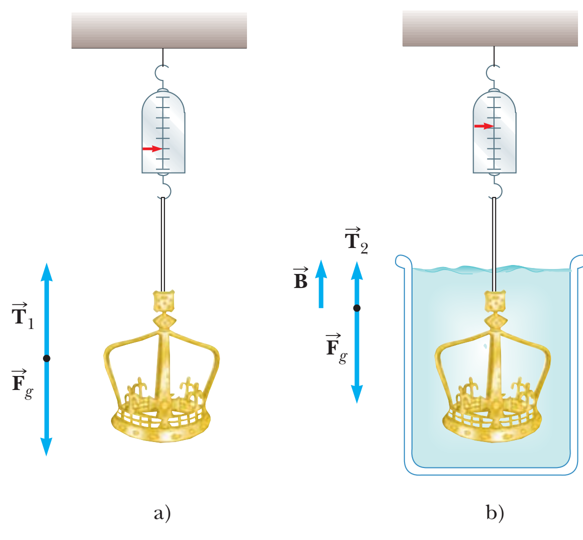


Figura 14.11 (Ejemplo 14.5) a) Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es su peso real porque $T_1 = F_g$ (la flotabilidad del aire es despreciable). b) Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ cambia la lectura de la balanza a un valor menor $T_2 = F_g - B$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 14.11 ayuda a pensar lo que sucede en este ejemplo. Debido a la fuerza de flotación, la lectura de la balanza es menor en la figura 14.11b que en la figura 14.11a.

Categorizar Este problema es un ejemplo del caso 1 discutido anteriormente, porque la corona está sumergida por completo. La lectura de la balanza es la medida de una de las fuerzas en la corona y la corona es fija. Por lo tanto, la corona se clasifica como una partícula en equilibrio.

Analizar Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es el peso real $T_1 = F_g$ (se desprecia la pequeña fuerza de flotación debida al aire circundante). Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ reduce la lectura de la balanza a un peso *aparente* de $T_2 = F_g - B$.

Aplique la condición de equilibrio de fuerza a la corona en agua:

$$\sum F = B + T_2 - F_g = 0$$

Resuelva para B y sustituya los valores conocidos:

$$B = F_g - T_2 = 7.84 \text{ N} - 6.84 \text{ N} = 1.00 \text{ N}$$

Ya que esta fuerza de flotación es igual en magnitud al peso del agua desplazada, $\rho_a g V_a = 1.00$ N, donde V_a es el volumen del agua desplazada y ρ_a es su densidad. Además, el volumen de la corona V_c es igual al volumen del agua desplazada porque la corona está completamente sumergida.

Encuentre el volumen de la corona:

$$V_c = V_a = \frac{1.00 \text{ N}}{\rho_a g} = \frac{1.00 \text{ N}}{(1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)} = 1.02 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Encuentre la densidad de la corona de la ecuación 1.1:

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_c g}{V_c g} = \frac{7.84 \text{ N}}{(1.02 \times 10^{-4} \text{ m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Finalizar De la tabla 14.1 se ve que la densidad del oro es 19.3×10^3 kg/m^3. Por lo tanto, Arquímedes debió informar al rey que lo habían engañado. O la corona estaba hueca o no estaba hecha de oro puro.

¿Qué pasaría si? Suponga que la corona tiene el mismo peso, está hecha de oro puro y no está hueca. ¿Cuál sería la lectura de la balanza cuando la corona estuviera sumergida en agua?

Respuesta Encuentre el volumen de la corona de oro sólido:

$$V_c = \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{m_c g}{\rho_c g} = \frac{7.84 \text{ N}}{(19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 4.15 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Encuentre la fuerza de flotación sobre la corona:

$$B = \rho_a g V_a = \rho_a g V_c$$

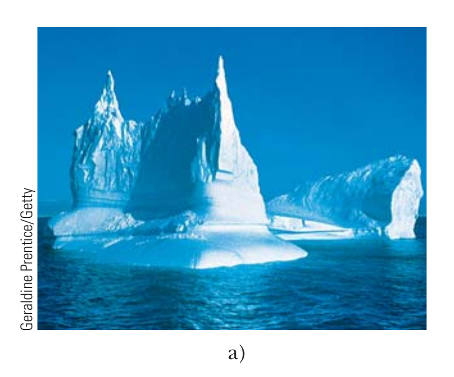
$$= (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(4.15 \times 10^{-5} \text{ m}^3) = 0.406 \text{ N}$$

Encuentre la tensión en la cuerda que cuelga de la balanza:

$$T_2 = F_g - B = 7.84 \text{ N} - 0.406 \text{ N} = 7.43 \text{ N}$$

EJEMPLO 14.6 **Una sorpresa titánica**

Un iceberg que flota en agua de mar, como se muestra en la figura 14.12a, es extremadamente peligroso porque la mayor parte del hielo está bajo la superficie. Este hielo oculto puede dañar una embarcación que aún está a una distancia considerable del hielo visible. ¿Qué fracción del iceberg se encuentra bajo el nivel del agua?



a)



b)

Figura 14.12 (Ejemplo 14.6) a) Gran parte del volumen de este iceberg está bajo el agua. b) Una embarcación puede resultar dañada incluso cuando no esté cerca del hielo visible.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es probable que usted esté familiarizado con la expresión "sólo es la punta del iceberg". El origen de este dicho popular es que la mayor parte del volumen de un iceberg flotante está bajo la superficie del agua (figura 14.12b).

Categorizar Este ejemplo corresponde al caso 2. También es un simple problema de sustitución que involucra la ecuación 14.6.

Evalúe la ecuación 14.6 usando las densidades del hielo y el agua de mar (tabla 14.1):

$$f = \frac{V_{\text{agua de mar}}}{V_{\text{hielo}}} = \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{agua de mar}}} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1\,030 \text{ kg/m}^3} = \boxed{0.890 \text{ u } 89.0\%}$$

Por lo tanto, la fracción visible de hielo sobre la superficie del agua es aproximadamente 11%. Es ese 89% no visto bajo el agua lo que representa el peligro a una embarcación que pase.

14.5 Dinámica de fluidos

Hasta el momento, el estudio de los fluidos se restringió a fluidos en reposo. Ahora la atención se dirige a los fluidos en movimiento. Cuando el fluido está en movimiento, su flujo se caracteriza como uno de dos tipos principales. Se dice que el fluido es **estable**, o **laminar**, si cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme de tal modo que las trayectorias de diferentes partículas nunca se cruzan unas con otras, como se muestra en la figura 14.13. En el flujo estable todas las partículas de fluido que llegan a un punto dado tienen la misma velocidad.

Sobre cierta rapidez crítica, el flujo de fluido se vuelve **turbulento**. El flujo turbulento es flujo irregular que se caracteriza por pequeñas regiones con forma de remolino, como se muestra en la figura 14.14 (página 400).

El término **viscosidad** se usa comúnmente en la descripción del flujo de fluido para caracterizar el grado de fricción interna en el fluido. Esta fricción interna, o *fuerza viscosa*, se asocia con la resistencia que tienen dos capas adyacentes de fluido para moverse una en relación con la otra. La viscosidad hace que parte de la energía cinética del fluido se convierta en energía interna. Este mecanismo es similar a aquel mediante el cual un objeto que se desliza sobre una superficie horizontal rugosa pierde energía cinética.



Figura 14.13 Flujo laminar alrededor de un automóvil en un túnel de viento.



Figura 14.14 Los gases calientes de un cigarrillo se hacen visibles mediante partículas de humo. Primero el humo se mueve en flujo laminar en la parte baja y luego en flujo turbulento arriba.

Ya que el movimiento de los fluidos reales es muy complejo y no se entiende por completo, en el enfoque de este libro se hacen algunas suposiciones simplificadoras. En este modelo de **flujo de fluido ideal**, se hacen las siguientes cuatro suposiciones:

1. **El fluido no es viscoso.** En un fluido no viscoso, se desprecia la fricción interna. Un objeto que se mueve a través del fluido experimenta fuerza no viscosa.
2. **El flujo es estable.** En flujo estable (laminar), todas las partículas que pasan a través de un punto tienen la misma velocidad.
3. **El fluido es incompresible.** La densidad de un fluido incompresible es constante.
4. **El flujo es irrotacional.** En flujo irrotacional el fluido no tiene cantidad de movimiento angular en torno a punto alguno. Si una pequeña rueda de paletas colocada en alguna parte en el fluido no gira en torno al centro de masa de la rueda, el flujo es irrotacional.

La trayectoria que toma una partícula de fluido bajo flujo estable se llama **línea de corriente**. La velocidad de la partícula siempre es tangente a la línea de corriente, como se muestra en la figura 14.15. Un conjunto de líneas de corriente como las que se muestran en la figura 14.15 forman un *tubo de flujo*. Las partículas de fluido no pueden fluir hacia o desde los lados de este tubo; si pudieran, las líneas de corriente se cruzarían mutuamente.

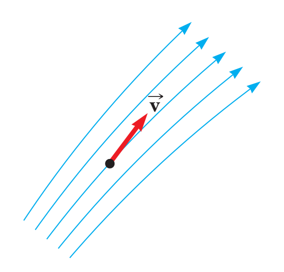


Figura 14.15 Una partícula en flujo laminar sigue una línea de corriente y, en cada punto a lo largo de su trayectoria, la velocidad de la partícula es tangente a la línea de corriente.

Considere el flujo de fluido ideal a través de una tubería de tamaño no uniforme, como se ilustra en la figura 14.16. Las partículas en el fluido se mueven a lo largo de líneas de corriente en flujo estable. En un intervalo de tiempo Δt, un elemento corto del fluido en el extremo inferior de la tubería se mueve una distancia $\Delta x_1 = v_1\,\Delta t$. Si A_1 es el área de sección transversal en esta región, la masa de fluido contenida en la región sombreada izquierda de la figura 14.16 es $m_1 = \rho A_1\,\Delta x_1 = \rho A_1 v_1\,\Delta t$, donde ρ es la densidad (invariable) del fluido ideal. De igual modo, el fluido que se mueve a través del extremo superior de la tubería en el intervalo de tiempo Δt tiene una masa $m_2 = \rho A_2 v_2\,\Delta t$. Sin embargo, ya que el fluido es incompresible y el flujo es estable, la masa de fluido que cruza A_1 en un intervalo de tiempo Δt debe ser igual a la masa que cruza A_2 en el mismo intervalo de tiempo. Esto es, $m_1 = m_2$ o $\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$, lo que significa

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \qquad \textbf{(14.7)}$$

Esta expresión se llama **ecuación de continuidad para fluidos**. Afirma que el producto del área y la rapidez del fluido en todos los puntos a lo largo de una tubería es constante para un fluido incompresible. La ecuación 14.7 muestra que la rapidez es alta donde el tubo es estrecho (A pequeña) y baja donde el tubo es ancho (A grande). El producto Av, que tiene las dimensiones de volumen por unidad de tiempo, se llama *flujo volumétrico* o *relacióndeflujo*. La condición Av = constante es equivalente a la afirmación de que el volumen de fluido que entra por un extremo de un tubo en un intervalo de tiempo dado iguala al volumen que conduce al otro extremo del tubo en el mismo intervalo de tiempo si no hay fugas presentes.

Usted demuestra la ecuación de continuidad cada vez que riega su jardín y pone su pulgar sobre el extremo de una manguera de jardín, como en la figura 14.17. Al bloquear parcialmente la abertura con su pulgar, reduce el área de sección transversal a través de la que pasa el agua. Como resultado, la rapidez del agua aumenta de sección mientras sale de la manguera, y se puede rociar a gran distancia.

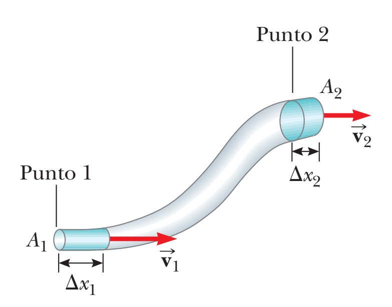


Figura 14.16 Un fluido que se mueve con flujo estable de sección a través de una tubería de área transversal variable. El volumen de fluido que fluye a través del área A_1 en un intervalo de tiempo Δt debe ser igual al volumen que fluye a través del área A_2 en el mismo intervalo de tiempo. Por lo tanto, $A_1 v_1 = A_2 v_2$.



Figura 14.17 La rapidez del agua que se rocía desde el extremo de una manguera de jardín aumenta conforme el tamaño de la abertura disminuye con el pulgar.

EJEMPLO 14.7 **Regar un jardín**

Un jardinero usa una manguera de 2.50 cm de diámetro para llenar una cubeta de 30.0 L. El jardinero nota que tarda 1.00 min para llenar la cubeta. Luego acopla una boquilla con una abertura de 0.500 cm^2 de área de sección transversal. La boquilla se sostiene de tal modo que el agua se proyecta horizontalmente desde un punto a 1.00 m sobre el suelo. ¿Sobre qué distancia horizontal se puede proyectar el agua?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine cualquier experiencia pasada que haya tenido al proyectar agua desde una manguera o tubería. Mientras más rápido viaje el agua que sale de la manguera, más lejos llegará.

Categorizar Una vez que el agua sale de la manguera, está en caída libre. Debido a eso, un elemento determinado del agua se clasifica como un proyectil. El elemento se modela como una partícula bajo aceleración constante (debido a la gravedad) en la dirección vertical y una partícula bajo velocidad constante en la dirección horizontal. La distancia horizontal sobre la que se proyecta el elemento depende de la rapidez con la que se proyecta. Este ejemplo involucra un cambio en el área de la tubería, así que también se clasifica para usar la ecuación de continuidad para fluidos.

Analizar Primero encuentre la rapidez del agua en la manguera a partir de la información de llenado de la cubeta.

Encuentre el área de sección transversal de la manguera:

$$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi\left[\frac{(2.50\text{ cm})^2}{4}\right] = 4.91\text{ cm}^2$$

Evalúe la relación de flujo volumétrico en cm^3/s:

$$Av = 30.0\text{ L/min} = \frac{30.0 \times 10^3\text{ cm}^3}{60.0\text{ s}} = 500\text{ cm}^3\text{/s}$$

Resuelva para la rapidez del agua en la manguera:

$$v_1 = \frac{500\text{ cm}^3\text{/s}}{A} = \frac{500\text{ cm}^3\text{/s}}{4.91\text{ cm}^2} = 102\text{ cm/s} = 1.02\text{ m/s}$$

Esta rapidez se etiqueta v_1 porque se identifica el punto 1 dentro de la manguera. El punto 2 se identifica en el aire justo afuera de la boquilla. Debe encontrar la rapidez $v_2 = v_{xi}$ con la que el agua sale de la boquilla. El subíndice i anticipa que será la componente de velocidad *inicial* del agua que se proyecta desde la manguera, y el subíndice x indica que el vector velocidad inicial del agua proyectada es horizontal.

Resuelva la ecuación de continuidad para fluidos para v_2:

$$v_2 = v_{xi} = \frac{A_1}{A_2}v_1$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{xi} = \frac{4.91\text{ cm}^2}{0.500\text{ cm}^2}(1.02\text{ m/s}) = 10.0\text{ m/s}$$

Ahora considere el movimiento de proyectil. En la dirección vertical, un elemento del agua parte del reposo y cae una distancia vertical de 1.00 m.

Escriba la ecuación 2.16 para la posición vertical de un elemento de agua, modelada como partícula bajo aceleración constante:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$-1.00\text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)t^2$$

Resuelva para el tiempo cuando el elemento de agua aterriza en el suelo:

$$t = \sqrt{\frac{2(1.00\text{ m})}{9.80\text{ m/s}^2}} = 0.452\text{ s}$$

Use la ecuación 2.7 para encontrar la posición horizontal del elemento en este tiempo, modelado como una partícula bajo velocidad constante:

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + (10.0\text{ m/s})(0.452\text{ s}) = 4.52\text{ m}$$

Finalizar El intervalo de tiempo para que el elemento de agua caiga al suelo no cambia si la rapidez de proyección varía porque la proyección es horizontal. Aumentar la rapidez de proyección resulta en que el agua golpea el suelo más lejos del extremo de la manguera, pero requiere el mismo intervalo de tiempo para golpear el suelo.



DANIEL BERNOULLI
Físico suizo (1700–1782)
Bernoulli hizo importantes descubrimientos en dinámica de fluidos. Nacido en una familia de matemáticos, fue el único miembro de su familia en dejar marca en la física.

La obra más famosa de Bernoulli, *Hidrodinámica*, se publicó en 1738; es un estudio tanto teórico como práctico acerca del equilibrio, la presión y la rapidez en los fluidos. Demostró que, a medida que aumenta la rapidez de un fluido, su presión disminuye. Conocido como "principio de Bernoulli", la obra de Bernoulli se usa para producir un vacío parcial en laboratorios químicos al conectar un recipiente a un tubo a través del cual corre agua rápidamente.

En *Hidrodinámica*, Bernoulli también intentó la primera explicación del comportamiento de los gases con presión y temperatura variables; este paso fue el comienzo de la teoría cinética de los gases, un tema que se estudiará en el capítulo 21.

14.6 Ecuación de Bernoulli

Tal vez ha experimentado la sensación de conducir en una autopista y que un gran camión pase junto a usted con gran rapidez. En esta situación, es posible que haya tenido la aterradora sensación de que su automóvil era jalado hacia el camión mientras éste pasaba. En esta sección se investigará el origen de este efecto.

A medida que un fluido se mueve a través de una región donde su rapidez o elevación sobre la superficie de la Tierra cambian, la presión en el fluido varía con dichos cambios. La correspondencia entre rapidez del fluido, presión y elevación la dedujo por primera vez, en 1738, el físico suizo Daniel Bernoulli. Considere el flujo de un segmento de un fluido ideal a través de una tubería no uniforme en un intervalo de tiempo Δt, como se ilustra en la figura 14.18. Al principio del intervalo de tiempo, el segmento de fluido consiste en la porción sombreada azul (porción 1) a la izquierda y la porción sin sombrear. Durante el intervalo de tiempo, el extremo izquierdo del segmento se mueve hacia la derecha una distancia Δx_1, que es la longitud de la porción sombreada azul a la izquierda. Mientras tanto, el extremo derecho del segmento se mueve hacia la derecha una distancia Δx_2, que es la longitud de la porción sombreada azul (porción 2) arriba a la derecha en la figura 14.18. Por lo tanto, al final del intervalo de tiempo, el segmento de fluido consiste en la porción no sombreada y la porción sombreada azul arriba a la derecha.

Ahora considere las fuerzas que se ejercen sobre este segmento por el fluido a la izquierda y a la derecha del segmento. La fuerza que ejerce el fluido sobre el extremo izquierdo tiene una magnitud P_1A_1. El trabajo invertido por esta fuerza sobre el segmento en un intervalo de tiempo Δt es $W_1 = F_1\,\Delta x_1 = P_1A_1\,\Delta x_1 = P_1V$, donde V es el volumen de la porción 1. De forma similar, el trabajo invertido por el fluido a la derecha del segmento en el mismo intervalo de tiempo Δt es $W_2 = -P_2A_2\,\Delta x_2 = -P_2V$. (El volumen de la porción 1 es igual al volumen de la porción 2 porque el fluido es incompresible.) Este trabajo es negativo porque la fuerza sobre el segmento de fluido es a la izquierda y el desplazamiento es a la derecha. Por lo tanto, el trabajo neto invertido en el segmento por dichas fuerzas en el mismo intervalo Δt es

$$W = (P_1 - P_2)V$$

Parte de este trabajo va a cambiar la energía cinética del segmento de fluido, y parte va a cambiar la energía potencial gravitacional del sistema segmento–Tierra. Ya que se supone flujo en líneas de corriente, la energía cinética $K_{\text{no somb}}$ de la porción no sombreada del segmento en la figura 14.18 no cambia durante el intervalo de tiempo. En consecuencia, el cambio en la energía cinética del segmento de fluido es

$$\Delta K = \left(\tfrac{1}{2}mv_2^{\,2} + K_{\text{no somb}}\right) - \left(\tfrac{1}{2}mv_1^{\,2} + K_{\text{no somb}}\right) = \tfrac{1}{2}mv_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

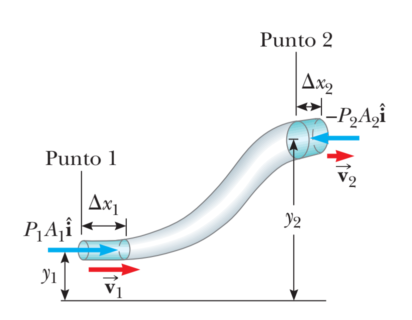


Figura 14.18 Un fluido en flujo laminar a través de una tubería que se estrecha. El volumen de la porción sombreada a la izquierda es igual al volumen de la porción sombreada a la derecha.

donde m es la masa de las porciones 1 y 2. (Ya que los volúmenes de ambas porciones son iguales, también tienen la misma masa.)

Al considerar la energía potencial gravitacional del sistema segmento–Tierra, una vez más no hay cambio durante el intervalo de tiempo para la energía potencial gravitacional $U_{\text{no somb}}$ asociada con la porción no sombreada del fluido. En consecuencia, el cambio en energía potencial gravitacional es

$$\Delta U = (mgy_2 + U_{\text{no somb}}) - (mgy_1 + U_{\text{no somb}}) = mgy_2 - mgy_1$$

A partir de la ecuación 8.2, el trabajo total invertido en el sistema por el fluido afuera del segmento es igual al cambio en energía mecánica del sistema: $W = \Delta K + \Delta U$. Al sustituir para cada uno de estos términos se obtiene

$$(P_1 - P_2)V = \tfrac{1}{2}mv_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_1^{\,2} + mgy_2 - mgy_1$$

Si divide cada término entre la porción de volumen V y recuerda que $\rho = m/V$, esta expresión se reduce a

$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

Al reordenar términos se obtiene

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \qquad \textbf{(14.8)}$$

que es la **ecuación de Bernoulli** como se aplica a un fluido ideal. Esta ecuación con frecuencia se expresa como

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad \textbf{(14.9)}$$

◄ Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli muestra que la presión de un fluido disminuye conforme la rapidez del fluido aumenta. Además, la presión disminuye conforme aumenta la elevación. Este último punto explica por qué la presión del agua de los grifos en los pisos superiores de un edificio alto es débil a menos que se tomen medidas para proporcionar mayor presión para dichos pisos.

Cuando el fluido está en reposo, $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación 14.8 se convierte en

$$P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h$$

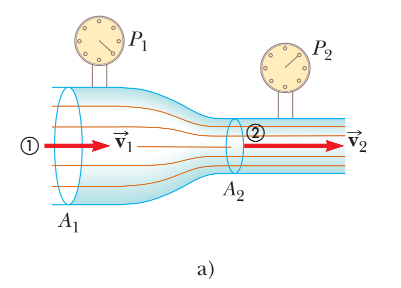
Este resultado está en concordancia con la ecuación 14.4.

Aunque la ecuación 14.9 se dedujo para un fluido incompresible, el comportamiento general de la presión con la rapidez es verdadero incluso para gases: a medida que la rapidez aumenta, la presión disminuye. Este *efecto Bernoulli* explica la experiencia con el camión en la autopista citada al principio de esta sección. A medida que el aire pasa entre usted y el camión, debe pasar a través de un canal relativamente estrecho. De acuerdo con la ecuación de continuidad, la rapidez del aire es mayor. De acuerdo con el efecto Bernoulli, esta mayor rapidez del aire ejerce menos presión sobre su auto que el aire que se mueve con lentitud en el otro lado de su vehículo. En consecuencia, ¡hay una fuerza neta que lo empuja hacia el camión!

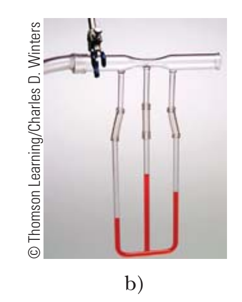
Pregunta rápida 14.5 Observa dos globos de helio que flotan uno junto al otro en los extremos de cuerda asegurados a una mesa. Las superficies de los globos que se enfrentan están separadas por 1 a 2 cm. Usted sopla a través del pequeño espacio entre los globos. ¿Qué ocurre con los globos? a) Se mueven uno hacia el otro. b) Se separan. c) No resultan afectados.

EJEMPLO 14.8 El tubo Venturi

La tubería horizontal constreñida que se ilustra en la figura 14.19, conocida como *tubo Venturi*, se usa para medir la rapidez de flujo de un fluido incompresible. Determine la rapidez del flujo en el punto 2 de la figura 14.19a si se conoce la diferencia de presión $P_1 - P_2$.



a)



b)

Figura 14.19 (Ejemplo 14.8) a) La presión P_1 es mayor que la presión P_2 porque $v_1 < v_2$. Este dispositivo se usa para medir la rapidez del flujo de fluido. b) Un tubo Venturi, ubicado en la parte superior de la fotografía. El mayor nivel de fluido en la columna de en medio demuestra que la presión en lo alto de la columna, que está en la región estrecha del tubo Venturi, es menor.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La ecuación de Bernoulli muestra cómo disminuye la presión de un fluido a medida que aumenta su rapidez. Por lo tanto, debe ser posible calibrar un dispositivo para obtener la rapidez del fluido si se puede medir la presión.

Categorizar Ya que el problema afirma que el fluido es incompresible, se le clasifica como el que se le puede aplicar la ecuación de continuidad para fluidos y la ecuación de Bernoulli.

Analizar Aplique la ecuación 14.8 a los puntos 1 y 2 y note que $y_1 = y_2$ porque la tubería es horizontal:

$$1)\quad P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Resuelva la ecuación de continuidad para v_1:

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 1):

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Resuelva para v_2:

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Finalizar A partir del diseño del tubo (áreas A_1 y A_2) y las mediciones de la diferencia de presión $P_1 - P_2$, se puede calcular la rapidez del fluido con esta ecuación. Par ver la correspondencia entre la rapidez del fluido y la diferencia de presión, coloque sobre sus costados dos latas de refresco vacías, separadas aproximadamente 2 cm sobre una mesa. Sople suavemente una corriente de aire horizontalmente entre las latas y obsérvelas rodar lentamente debido a una modesta diferencia de presión entre el aire que se estanca en sus bordes exteriores y el aire en movimiento entre ellas. Ahora sople más fuerte y observe la creciente diferencia de presión que mueve a las latas más rápidamente.

EJEMPLO 14.9 Ley de Torricelli

Un tanque cerrado que contiene un líquido de densidad ρ tiene un orificio en su costado a una distancia y_1 desde el fondo del tanque (figura 14.20). El orificio está abierto a la atmósfera y su diámetro es mucho menor que el diámetro superior del tanque. El aire sobre el líquido se mantiene a una presión P. determine la rapidez del líquido que sale del orificio cuando el nivel del líquido está a una distancia h sobre el orificio.

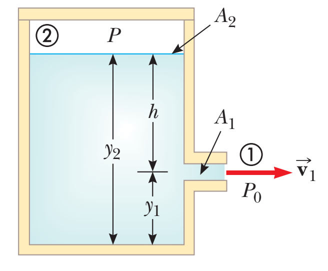


Figura 14.20 (Ejemplo 14.9) Salida de un líquido por un orificio en un tanque con rapidez v_1.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el tanque es un extintor de incendios. Cuando el orificio se abre, el líquido sale del orificio con cierta rapidez. Si la presión P en lo alto del líquido aumenta, el líquido sale con una mayor rapidez. Si la presión P cae muy baja, el líquido sale con una rapidez baja y se debe sustituir el extintor.

Categorizar Al observar la figura 14.20, se conoce la presión en dos puntos y la velocidad en uno de dichos puntos. Se quiere encontrar la velocidad en el segundo punto. Por lo tanto, este ejemplo se clasifica para aplicar la ecuación de Bernoulli.

Analizar Ya que $A_2 >> A_1$, el líquido está cerca del reposo en lo alto del tanque, donde la presión es P. En el orificio v_1 es igual a la presión atmosférica P_0.

Aplique la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$P_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

Resuelva para v_1 y note que $y_2 - y_1 = h$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$

Finalizar Cuando P es mucho mayor que P_0 (de modo que el término $2gh$ se puede despreciar), la rapidez de salida del agua es principalmente una función de P. Si el tanque está abierto a la atmósfera, en tal caso $P = P_0$ y $v_1 = \sqrt{2gh}$. En otras palabras, para un tanque abierto, la rapidez del líquido que sale de un orificio a una distancia h bajo la superficie es igual a la que adquiere un objeto en caída libre a través de una distancia vertical h. Este fenómeno se conoce como **ley de Torricelli**.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la posición del orificio en la figura 14.20 se pudiera ajustar verticalmente? Si el tanque está abierto a la atmósfera y colocado en una mesa, ¿qué posición del orificio haría que el agua cayera sobre la mesa a la mayor distancia desde el tanque?

Respuesta Modele una porción de agua que sale del orificio como un proyectil. Encuentre el tiempo en que la porción golpea la mesa desde un orificio en una posición arbitraria:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$0 = y_1 + 0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

Encuentre la posición horizontal de la porción en el tiempo cuando golpea la mesa:

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + \sqrt{2g(y_2 - y_1)}\sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

$$= 2\sqrt{(y_2y_1 - y_1^2)}$$

Maximice la posición horizontal al tomar la derivada de x_f en relación con y_1 (porque y_1, la altura del orificio, es la variable que se puede ajustar) e iguale a cero:

$$\frac{dx_f}{dy_1} = \tfrac{1}{2}(2)(y_2y_1 - y_1^2)^{-1/2}(y_2 - 2y_1) = 0$$

Resuelva para y_1:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}y_2$$

Por lo tanto, para maximizar la distancia horizontal, el orificio debería estar a la mitad entre el fondo del tanque y la superficie superior del agua. Abajo de esta posición, el agua se proyecta a una mayor rapidez pero cae durante un intervalo de tiempo breve, lo que reduce el alcance horizontal. Arriba de este punto, el agua está en el aire durante un intervalo de tiempo más largo pero se proyecta con una rapidez horizontal menor.

14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

Considere las líneas de corriente que circulan alrededor del ala de un avión, como se muestra en la figura 14.21. Suponga que la corriente de aire horizontal se aproxima al ala desde la derecha con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1$. La inclinación del ala hace que la corriente de aire se desvíe hacia abajo con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_2$. Ya que la corriente de aire se desvía por el ala, el ala debe ejercer una fuerza sobre la corriente de aire. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la corriente de aire ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el ala que es igual en magnitud y opuesta en dirección. Esta fuerza tiene una componente vertical llamada **sustentación** (o sustentación aerodinámica) y una componente horizontal llamada **arrastre**. La sustentación depende de muchos factores, como la rapidez del avión, el área del ala, la curvatura del ala y el ángulo entre el ala y la horizontal. La curvatura de las superficies del ala hace que la presión sobre el ala sea menor que la presión debajo del ala debido al efecto Bernoulli. Esta diferencia de presión ayuda a la sustentación sobre el ala. A medida que el ángulo entre el ala y la horizontal aumenta, se establece un flujo turbulento sobre el ala para reducir la sustentación.

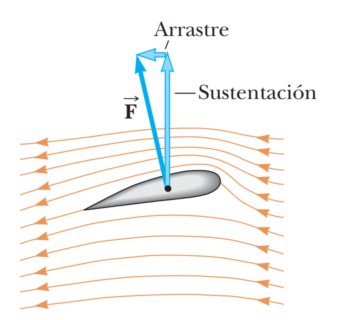


Figura 14.21 Flujo de línea de corriente alrededor del ala de un avión en movimiento. El aire que se aproxima desde la derecha se desvía hacia abajo por el ala. Por la tercera ley de Newton, esta desviación debe coincidir con una fuerza hacia arriba sobre el ala proveniente del aire: *sustentación*. Debido a la resistencia del aire, también hay una fuerza opuesta a la velocidad del ala: *arrastre*.

En general, un objeto que se mueve a través de un fluido experimenta sustentación como resultado de cualquier efecto que haga que el fluido cambie su dirección mientras circula por el objeto. Algunos factores que influyen en la sustentación son la forma del objeto, su orientación respecto al flujo de fluido, cualquier movimiento de giro que pueda tener y la textura de su superficie. Por ejemplo, a una bola de golf golpeada con un palo se le da un rápido giro hacia atrás debido a la inclinación del palo. Los hoyuelos en la bola aumentan la fuerza de fricción entre la bola y el aire, de modo que el aire se adhiere a la superficie de la bola. La figura 14.22 (página 406) muestra el aire que se adhiere a la bola y se desvía hacia abajo como resultado. Ya que la bola empuja el aire hacia abajo, el aire debe empujar hacia arriba sobre la bola. Sin los hoyuelos, la fuerza de fricción es menor y la bola de golf no viaja tanto. Puede parecer contrario a la intuición aumentar el intervalo al aumentar la fuerza de fricción, pero la sustentación ganada al girar la bola más compensa la pérdida de alcance debida al efecto de fricción sobre el movimiento

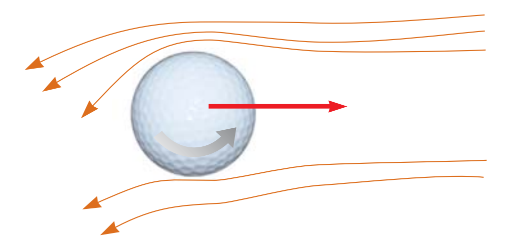


Figura 14.22 Debido a la desviación del aire, una bola de golf que gira experimenta una fuerza de sustentación que le permite viajar mucho más lejos de lo que viajaría si no girara.

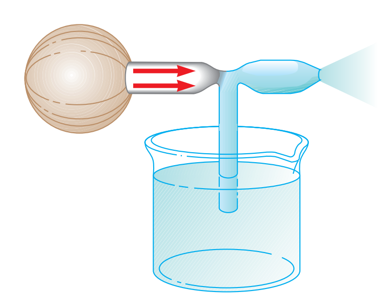


Figura 14.23 Una corriente de aire que pasa sobre un tubo sumergido en un líquido hace que el líquido se eleve en el tubo.

traslacional de la bola. Por la misma razón, la cubierta de una pelota de beisbol ayuda a que la pelota que gira "agarre" el aire por el que pasa y le ayuda a desviarlo cuando se lanza una "bola curva".

Algunos dispositivos operan mediante los diferenciales de presión que resultan de las diferencias en la rapidez de un fluido. Por ejemplo, una corriente de aire que pasa sobre un extremo abierto de un tubo, con el otro extremo sumergido en un líquido, reduce la presión sobre el tubo, como se ilustra en la figura 14.23. Esta reducción en presión hace que el líquido se eleve en la corriente del aire. Por lo tanto el líquido se dispersa en un fino rocío de gotitas. Usted puede identificar que este atomizador se usa en botellas de perfume y rociadores de pintura.

Resumen

DEFINICIONES

La **presión** P en un fluido es la fuerza por unidad de área que ejerce el fluido sobre una superficie:

$$P \equiv \frac{F}{A} \qquad \textbf{(14.1)}$$

En el sistema SI, la presión tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2) y 1 N/m^2 = 1 **pascal** (Pa).

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La presión en un fluido en reposo varía con la profundidad h en el fluido de acuerdo con la expresión

$$P = P_0 + \rho g h \qquad \textbf{(14.4)}$$

donde P_0 es la presión en $h = 0$ y ρ es la densidad del fluido, que se supone uniforme.

La **ley de Pascal** afirma que, cuando se aplica presión a un fluido encerrado, la presión se transmite sin disminución a cualquier punto en el fluido y a todos los puntos en las paredes del contenedor.

Cuando un objeto está parcial o completamente sumergido en un fluido, el fluido ejerce sobre el objeto una fuerza hacia arriba llamada **fuerza de flotación (boyante)**. De acuerdo con el **principio de Arquímedes**, la magnitud de la fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el objeto:

$$B = \rho_{\text{fluido}} g V \qquad \textbf{(14.5)}$$

La relación de flujo (flujo volumétrico) a través de una tubería que varía en el área de sección transversal es constante; esto es equivalente a afirmar que el producto del área transversal A y la rapidez v en cualquier punto es una constante. Este resultado se expresa en la **ecuación de continuidad para fluidos**:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \qquad \textbf{(14.7)}$$

La suma de la presión, energía cinética por unidad de volumen y energía potencial gravitacional por unidad de volumen, tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de corriente para un fluido ideal. Este resultado se resume en la **ecuación de Bernoulli**:

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad \textbf{(14.9)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** La figura P14.1 muestra vistas aéreas de dos diques. Ambos diques son igual de anchos (la dimensión vertical en el diagrama) e igual de altos (hacia la página en el diagrama). El dique de la izquierda contiene un lago muy grande, y el de la derecha contiene un río estrecho. ¿Cuál dique debe ser más sólido? a) el dique de la izquierda, b) el dique de la derecha, c) ambos, d) no se puede predecir.

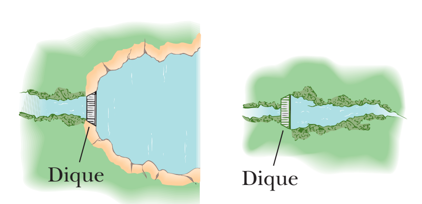


Figura P14.1

2. Dos vasos para beber con pared delgada, que tienen iguales áreas de la base pero diferentes formas, con áreas de sección transversales muy diferentes sobre la base, se llenan al mismo nivel con agua. De acuerdo con la expresión $P = P_0 + \rho gh$, la presión es la misma en el fondo de ambos vasos. En vista de esta igualdad, ¿por qué un vaso pesa más que el otro?
3. Ya que la presión atmosférica es aproximadamente 10^5 N/m^2 y el área del pecho de una persona es aproximadamente de 0.13 m^2, la fuerza de la atmósfera sobre el pecho de uno es de casi 13 000 N. En vista de esta enorme fuerza, ¿por qué no colapsa el cuerpo?
4. Un pez descansa en el fondo de una cubeta con agua mientras la cubeta se pesa en una báscula. Cuando el pez comienza a nadar, ¿cambia la lectura de la báscula?
5. Usted es pasajero en una nave espacial. Para su supervivencia y comodidad, el interior contiene aire similar al de la superficie de la Tierra. La nave espacial navega a través de una región muy vacía del espacio. Esto es: afuera de la pared existe un vacío casi perfecto. De pronto, un meteoroide perfora un hoyo, casi del tamaño de una gran moneda, justo a través de la pared junto a su asiento. ¿Qué ocurre? ¿Hay algo que pueda o deba hacer acerca de ello?
6. ¿Una embarcación flota más alto en el agua de un lago tierra adentro o en el océano? ¿Por qué?
7. **O** Una manzana se mantiene completamente sumergida justo abajo de la superficie del agua en un contenedor. Después la manzana se mueve a un punto más profundo en el agua. Comparada con la fuerza necesaria para mantener la manzana justo bajo la superficie, ¿cuál es la fuerza necesaria para mantenerla en el punto más profundo? a) mayor, b) igual, c) menor, d) imposible de determinar.
8. Cuando un objeto se sumerge en un líquido en reposo, ¿por qué la fuerza neta sobre el objeto en la dirección horizontal es igual a cero?
9. Una barcaza transporta una carga de grava por un río. La barcaza se aproxima a un puente bajo y el capitán se da cuenta de que lo alto de la pila de grava no va a pasar bajo el puente. El capitán ordena a la tripulación tirar grava de la pila al agua. ¿Es una buena decisión?
10. Una jabonera metálica vacía apenas flota en el agua. Una barra de jabón Ivory flota en el agua. Cuando el jabón se pega en la jabonera, la combinación se hunde. Explique por qué.
11. **O** Una pelota de playa está hecha de plástico delgado. Es inflada con aire, pero el plástico no se estira. Usted se ha puesto aletas y logra bajar la pelota desde la superficie de una alberca hasta el fondo. Una vez que la pelota está sumergida por completo, ¿qué ocurre con la fuerza de flotación que se ejerce sobre la pelota de playa mientras la hunde a lo más profundo? a) aumenta, b) permanece constante, c) disminuye, d) es imposible de determinar.
12. Si usted libera una pelota mientras está dentro de un elevador en caída libre, la bola permanece enfrente de usted en lugar de caer hacia el suelo porque la bola, el elevador y usted experimentan la misma aceleración gravitacional hacia abajo. ¿Qué ocurre si repite este experimento con un globo lleno de helio? (Esta pregunta es truculenta.)
13. **O** Una pequeña pieza de acero se amarra a un bloque de madera. Cuando la madera se coloca en una tina con agua con el acero en la parte superior, la mitad del bloque se sumerge. Ahora el bloque se invierte de modo que el acero está bajo el agua. **i)** ¿La cantidad del bloque sumergido a) aumenta, b) disminuye o c) permanece igual? **ii)** ¿Qué ocurre con el nivel del agua en la tina cuando el bloque se invierte? a) Se eleva. b) Cae. c) Permanece igual.
14. ¿Cómo determinaría la densidad de una piedra con forma irregular?
15. **O** Clasifique las fuerzas de flotación que se ejercen sobre los siguientes siete objetos, de mayor a menor. Suponga que los objetos se dejaron caer en una alberca y se les permitió llegar a equilibrio mecánico. Si algunas fuerzas de flotación son iguales, establezca esto en su clasificación. a) Un bloque de roble sólido, b) un bloque de aluminio de igual volumen que la madera, c) una pelota de playa hecha de plástico delgado e inflada con aire, de igual volumen, d) un bloque de hierro de igual volumen, e) una botella de agua sellada y de pared delgada igual en volumen a la madera, f) un bloque de aluminio que tiene la misma masa que la madera, g) un bloque de hierro de igual masa.
16. **O** Una persona en un bote que flota en un pequeño lago lanza un ancla por la borda. ¿Qué ocurre con el nivel del lago? a) Se eleva. b) Baja. c) Permanece igual.
17. ¿La fuerza de flotación es una fuerza conservativa? ¿Hay una energía potencial asociada con ella? Explique sus respuestas.
18. Una lata cerrada de soda dietética flota cuando se coloca en un tanque de agua, mientras que una lata de soda regular de la misma marca se hunde en el tanque. ¿Qué supone que podría explicar este comportamiento?
19. **O** Una pieza de madera porosa no pintada flota en un contenedor parcialmente lleno con agua. El contenedor está sellado y presurizado arriba de la presión atmosférica. ¿Qué ocurre con la madera? a) Se eleva. b) Cae. c) Permanece al mismo nivel.
20. El suministro de agua de una ciudad con frecuencia se proporciona desde depósitos construidos sobre suelo elevado. El agua fluye desde el depósito, a través de tuberías y hasta los hogares cuando se abre el grifo. ¿Por qué el agua fluye más rápido de un grifo en el primer piso de un edificio que en un departamento en un piso superior?
21. Si la corriente de aire de una secadora de cabello se dirige hacia una pelota de ping pong, la pelota puede levitar. ¿Por qué?

22. Cuando los saltadores de esquí están en el aire (figura P14.22), doblan sus cuerpos hacia adelante y mantienen sus manos en los costados. ¿Por qué?


© TempSport/CORBIS

Figura P14.22

23. ¿Por qué los pilotos de avión prefieren despegar con el avión contra el viento?

24. **O** Un suministro de agua mantiene una relación de flujo constante para agua en una manguera. Usted quiere cambiar la abertura de la boquilla de modo que el agua que salga de la boquilla llegue a una altura que sea cuatro veces la altura máxima actual que el agua alcanza con la boquilla vertical. Para lograrlo, ¿qué debe hacer? a) reducir el área de la abertura en un factor de 16, b) reducir el área en un factor de 8, c) reducir el área en un factor de 4, d) reducir el área en un factor de 2, e) rendirse porque no se puede hacer.

25. Los perros de la pradera (figura P14.25) ventilan sus madrigueras al construir un montículo alrededor de una entrada, que está abierta a una corriente de aire cuando el viento sopla desde cualquier dirección. Una segunda entrada al nivel del suelo está abierta a aire casi estancado. ¿Cómo esta construcción crea un flujo de aire a través de la madriguera?

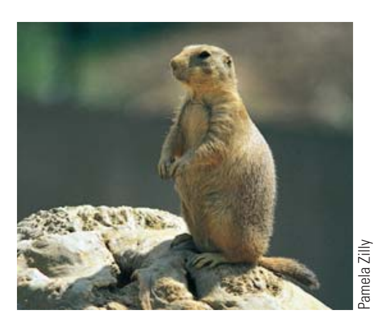

Pamela Zilly

Figura P14.25

26. En la figura P14.26, una corriente de aire se mueve de derecha a izquierda a través de un tubo que está constreñido en la mitad. Tres pelotas de ping pong levitan en equilibrio sobre las columnas verticales a través de las que escapa el aire. a) ¿Por qué la pelota de la derecha está más alta que la de en medio? b) ¿Por qué la pelota de la izquierda está más baja que la pelota de la derecha, aun cuando el tubo horizontal tenga las mismas dimensiones en estos dos puntos?

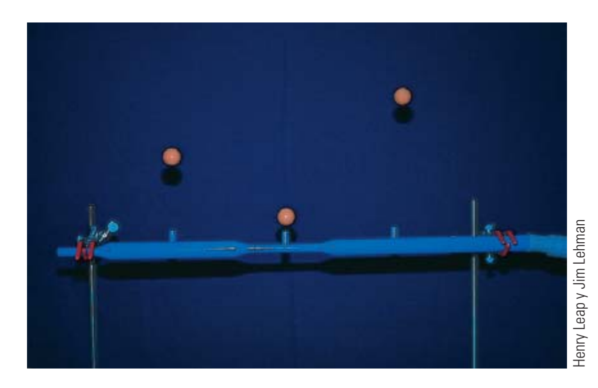

Henry Leap y Jim Lehman

Figura P14.26

27. **O i)** Un vaso con agua contiene cubos de hielo flotantes. Cuando el hielo se funde, ¿el nivel del agua en el vaso a) sube, b) baja o c) permanece igual? **ii)** Uno de los problemas predichos debidos al calentamiento global es que el hielo en las capas de hielo polares se fundirá y elevará el nivel del mar en todas partes del mundo. ¿Hay más preocupación por el hielo a) en el polo norte, donde la mayoría del hielo flota en el agua; b) en el polo sur, donde la mayoría del hielo se asienta en tierra; c) en ambos polos o d) en ningún polo?

Problemas

Sección 14.1 Presión

1. Calcule la masa de una esfera sólida de hierro que tiene un diámetro de 3.00 cm.

2. Encuentre el orden de magnitud de la densidad del núcleo de un átomo. ¿Qué sugiere este resultado en cuanto a la estructura de la materia? Modele un núcleo como constituido por protones y neutrones cercanamente empaquetados. Cada uno tiene 1.67×10^{-27} kg de masa y radio del orden de 10^{-15} m.

3. Una mujer de 50.0 kg se equilibra sobre un par de zapatillas con tacón de aguja. Si el tacón es circular y tiene un radio de 0.500 cm, ¿qué presión ejerce sobre el piso?

4. ¿Cuál es la masa de la atmósfera de la Tierra? (El radio de la Tierra es 6.37×10^6 m y la presión atmosférica en la superficie es 1.013×10^5 N/m^2.)

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

Sección 14.2 Variación de la presión con la profundidad

5. El resorte del medidor de presión que se muestra en la figura 14.2 tiene una constante de fuerza de 1 000 N/m, y el pistón tiene un diámetro de 2.00 cm. A medida que el manómetro se baja dentro del agua, ¿qué cambio en profundidad hace que el pistón se mueva 0.500 cm?

6. a) Calcule la presión absoluta a una profundidad oceánica de 1 000 m. Suponga que la densidad del agua de mar es 1 024 kg/m^3 y el aire arriba ejerce una presión de 101.3 kPa. b) A esta profundidad, ¿qué fuerza debe ejercer el marco alrededor de una ventanilla submarina circular, que tiene 30.0 cm de diámetro, para contrarrestar la fuerza que ejerce el agua?

7. ¿Cuál debe ser el área de contacto entre una ventosa (completamente vacía) y un techo, si la ventosa debe soportar el peso de un estudiante de 80.0 kg?

8. El pistón pequeño de un elevador hidráulico tiene un área de sección transversal de 3.00 cm^2 y su pistón grande tiene un área de sección transversal de 200 cm^2 (figura 14.4a). ¿Qué fuerza debe aplicar al pistón pequeño para que el elevador lleve una carga de 15.0 kN? (En las estaciones de servicio, por lo general esta fuerza se ejerce mediante aire comprimido.)

9. Para el sótano de una nueva casa, se cava un hoyo en el suelo, con lados verticales que bajan 2.40 m. Una pared de cimiento de concreto se construye horizontal los 9.60 m de ancho de la excavación. Esta pared de cimiento mide 0.183 m desde el frente del hoyo del sótano. Durante una tormenta, el drenaje de la calle llena el espacio enfrente de la pared de concreto, pero no el sótano detrás de la pared. El agua no se filtra en el suelo de arcilla. Encuentre la fuerza que ejerce el agua sobre la pared de cimiento. En comparación, la fuerza gravitacional que se ejerce sobre el agua es $(2.40\text{ m})(9.60\text{ m})(0.183\text{ m})(1\,000\text{ kg/m}^3)(9.80\text{ m/s}^2) = 41.3\text{ kN}$.

10. a) Una aspiradora potente tiene una manguera de 2.86 cm de diámetro. Sin boquilla en la manguera, ¿cuál es el peso del ladrillo más pesado que puede levantar la aspiradora (figura P14.10a)? b) **¿Qué pasaría si?** Un pulpo usa una ventosa de 2.86 cm de diámetro en cada una de las dos conchas de una almeja con la intención de separar las conchas (figura P14.10b.) Encuentre la fuerza máxima que puede ejercer el pulpo en agua de mar a 32.3 m de profundidad. *Precaución:* La comprobación experimental puede ser interesante, pero no deje caer un ladrillo sobre su pie. No sobrecaliente el motor de una aspiradora. No provoque que un pulpo se enoje con usted.

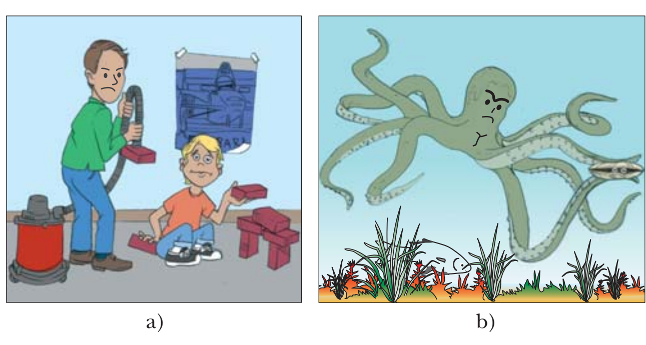


Figura P14.10

11. Una alberca tiene dimensiones de 30.0 m × 10.0 m y un fondo plano. Cuando la alberca está llena a una profundidad de 2.00 m con agua potable, ¿cuál es la fuerza causada por el agua sobre el fondo? ¿En cada extremo? ¿En cada lado?

12. El tanque de la figura P14.12 se llenó con agua con 2.00 m de profundidad. En el fondo de una pared lateral hay una escotilla rectangular de 1.00 m de alto y 2.00 m de ancho que tiene bisagras en la parte superior de la escotilla. a) Determine la fuerza que el agua causa sobre la escotilla. b) Encuentre el momento de torsión causado por el agua en torno a las bisagras.

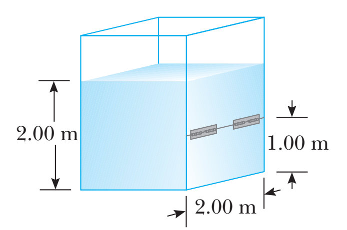


Figura P14.12

13. **Problema de repaso.** El abad de Aberbrothock pagó por una campana que colocó en la roca Inchcape para alertar a los marineros. Suponga que la campana tiene 3.00 m de diámetro y se fabricó en latón con un módulo volumétrico de 14.0×10^{10} N/m^2. El pirata Ralph el Vagabundo descolgó la campana y la lanzó al océano. ¿Cuánto disminuyó el diámetro de la campana cuando se hundió a una profundidad de 10.0 km? Años después, el torpe pirata se ahogó cuando su nave chocó con la roca. *Nota:* El latón se comprime uniformemente, así que puede modelar la campana como una esfera de 3.00 m de diámetro.

Sección 14.3 Mediciones de presión

14. La figura P14.14 muestra a Superman intentando beber agua a través de un popote muy largo. Con su gran fuerza logra la máxima succión posible. Las paredes del popote tubular no colapsan. a) Encuentre la máxima altura a la que puede levantar el agua. b) **¿Qué pasaría si?** Aún sediento, el hombre de acero repite su intento en la Luna, que no tiene atmósfera. Encuentre la diferencia entre los niveles de agua dentro y fuera del popote.



Figura P14.14

15. ● Blaise Pascal duplicó el barómetro de Torricelli usando un vino rojo Bordeaux, de 984 kg/m^3 de densidad, como el líquido de trabajo (figura P14.15). ¿Cuál fue la altura h de la colum-

na de vino para presión atmosférica normal? ¿Esperaría que el vacío sobre la columna sea tan bueno como para el mercurio?

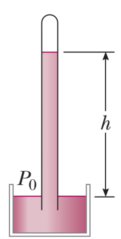


Figura P14.15

16. En un tubo en U se vierte mercurio, como se muestra en la figura P14.16a. El brazo izquierdo del tubo tiene área de sección transversal A_1 de 10.0 cm^2, y el brazo derecho tiene un área de sección transversal A_2 de 5.00 cm^2. A continuación se vierten 100 g de agua en el brazo derecho, como se muestra en la figura P14.16b. a) Determine la longitud de la columna de agua en el brazo derecho del tubo U. b) Dado que la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3, ¿qué distancia h se eleva el mercurio en el brazo izquierdo?

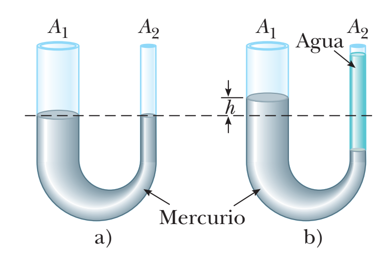


Figura P14.16

17. La presión atmosférica normal es de 1.013×10^5 Pa. La proximidad de una tormenta hace que la altura de un barómetro de mercurio caiga 20.0 mm de la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica? (La densidad del mercurio es 13.59 g/cm^3.)

18. Un tanque con un fondo plano de área A y lados verticales se llena con agua con una profundidad h. La presión es 1 atm en la superficie. a) ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tanque? b) Suponga que un objeto de masa M y densidad menor a la densidad del agua se coloca en el tanque y flota. No se desborda agua. ¿Cuál es el aumento resultante de presión en el fondo del tanque? c) Evalúe sus resultados para una alberca con 1.50 m de profundidad y una base circular de 6.00 m de diámetro. Dos personas con masa combinada de 150 kg entran a la alberca y flotan tranquilamente ahí. Encuentre la presión absoluta original y el aumento de presión en el fondo de la alberca.

19. ● El cerebro humano y la médula espinal están sumergidos en el fluido cerebroespinal. El fluido normalmente es continuo entre las cavidades craneal y espinal y ejerce una presión de 100 a 200 mm de H_2O sobre la presión atmosférica prevaleciente. En el trabajo médico, las presiones usualmente se miden en milímetros de H_2O porque los fluidos corporales, incluido el fluido cerebroespinal, por lo general tienen la misma densidad que el agua. La presión del fluido cerebroespinal se puede medir mediante una *sonda espinal*, como se ilustra en la figura P14.19. Un tubo hueco se inserta en la columna vertebral y se observa la altura a la que se eleva el fluido. Si el fluido se eleva a una altura de 160 mm, su presión manométrica se escribe como 160 mm H_2O. a) Exprese esta presión en pascales, en atmósferas y en milímetros de mercurio. b) A veces es necesario determinar si una víctima de accidente sufrió una lesión en las vértebras que bloquee el flujo del fluido cerebroespinal en la columna. En otros casos, un médico puede sospechar que un tumor u otro crecimiento bloquea la columna vertebral e inhibe el flujo de fluido cerebroespinal. Tal condición se puede investigar mediante la *prueba de Queckenstedt*. En este procedimiento, se comprimen las venas en la nuca del paciente para hacer que la presión sanguínea se eleve en el cerebro. El aumento en presión en los vasos sanguíneos se transmite al fluido cerebroespinal. ¿Cuál debe ser el efecto normal sobre la altura del fluido en la sonda espinal? c) Suponga que comprimir las venas no tiene efecto sobre el nivel de fluido. ¿Qué puede explicar este resultado?



Figura P14.19

Sección 14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes

20. a) Un globo ligero se llena con 400 m^3 de helio. A 0°C, el globo puede levantar una carga, ¿de qué masa? b) **¿Qué pasaría si?** En la tabla 14.1, observe que la densidad del hidrógeno es casi la mitad de la densidad del helio. ¿Qué carga puede levantar el globo si se llena con hidrógeno?

21. Una pelota de ping pong tiene un diámetro de 3.80 cm y una densidad promedio de 0.084 0 g/cm^3. ¿Qué fuerza se requiere para mantenerla completamente sumergida bajo el agua?

22. La fuerza gravitacional que se ejerce sobre un objeto sólido es 5.00 N. Cuando el objeto se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua, la lectura en la balanza es 3.50 N (figura P14.22). Encuentre la densidad del objeto.

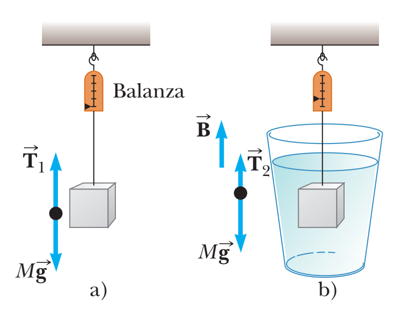


Figura P14.22 Problemas 22 y 23.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

23. Un bloque metálico de 10.0 kg que mide 12.0 cm × 10.0 cm × 10.0 cm, está suspendido de una balanza y sumergido en agua, como se muestra en la figura P14.22b. La dimensión de 12.0 cm es vertical y la parte superior del bloque está 5.00 cm abajo de la superficie del agua. a) ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre las partes superior e inferior del bloque? (Considere P_0 = 101.30 kPa.) b) ¿Cuál es la lectura de la balanza de resorte? c) Demuestre que la fuerza de flotación es igual a la diferencia entre las fuerzas sobre las partes superior e inferior del bloque.

24. ● El peso de un bloque rectangular de material de baja densidad es 15.0 N. Con una cuerda delgada, el centro de la cara inferior horizontal del bloque se amarra al fondo de un vaso de precipitados parcialmente lleno con agua. Cuando 25.0% del volumen del bloque está sumergido, la tensión en la cuerda es 10.0 N. a) Bosqueje un diagrama de cuerpo libre para el bloque, que muestre todas las fuerzas que actúan sobre él. b) Encuentre la fuerza de flotación sobre el bloque. c) Ahora al vaso de precipitados se le agrega sin interrupción aceite de 800 kg/m^3 de densidad, lo que forma una capa sobre el agua y rodea al bloque. El aceite ejerce fuerzas sobre cada una de las cuatro paredes laterales del bloque que el aceite toca. ¿Cuáles son las direcciones de dichas fuerzas? d) ¿Qué ocurre a la tensión en la cuerda conforme se agrega el aceite? Explique cómo el aceite tiene este efecto sobre la tensión de la cuerda. e) La cuerda se rompe cuando su tensión alcanza 60.0 N. En este momento, 25.0% del volumen del bloque todavía está bajo la línea del agua. ¿Qué fracción adicional del volumen del bloque está por abajo de la superficie superior del aceite? f) Después de que la cuerda se rompe, el bloque llega a una nueva posición de equilibrio en el vaso de precipitados. Ahora sólo está en contacto con el aceite. ¿Qué fracción del volumen del bloque está sumergida?

25. En preparación para anclar una boya en el extremo de un área de nado, un trabajador usa una soga para bajar un bloque cúbico de concreto, de 0.250 m de lado, en aguas oceánicas. El bloque baja con una rapidez constante de 1.90 m/s. Puede representar con precisión el concreto y el agua como incompresibles. a) ¿En qué proporción aumenta la fuerza que el agua ejerce sobre una cara del bloque? b) ¿En qué proporción aumenta la fuerza de flotación sobre el bloque?

26. A un orden de magnitud, ¿cuántos globos llenos de helio se requerirían para levantarlo a usted? Ya que el helio es un recurso irremplazable, desarrolle una respuesta teórica en lugar de una respuesta experimental. En su solución, establezca las cantidades físicas que consideró como datos y los valores que midió o estimó para ellas.

27. Un cubo de madera que tiene una dimensión de arista de 20.0 cm y una densidad de 650 kg/m^3 flota en el agua. a) ¿Cuál es la distancia desde la superficie horizontal más alta del cubo al nivel del agua? b) ¿Qué masa de plomo se debe colocar sobre el cubo de modo que la parte superior del cubo esté justo a nivel con el agua?

28. Una bola esférica de aluminio, de 1.26 kg de masa, contiene una cavidad esférica vacía que es concéntrica con la bola. La bola apenas flota en el agua. Calcule a) el radio exterior de la bola y b) el radio de la cavidad.

29. La determinación de la densidad de un fluido tiene muchas aplicaciones importantes. La batería de un automóvil contiene ácido sulfúrico, para el que la densidad es una medida de concentración; la batería funciona adecuadamente si la densidad está dentro de un intervalo especificado por el fabricante. De igual modo, la efectividad del anticongelante en el refrigerante del motor de su automóvil depende de la densidad de la mezcla (por lo general etilenglicol y agua). Cuando usted dona sangre, su tamizado incluye la determinación de la densidad de la sangre porque mayor densidad se relaciona con mayor contenido de hemoglobina. Un *hidrómetro* es un instrumento que se usa para determinar la densidad de los líquidos. En la figura P14.29 se muestra uno simple. El bulbo de una jeringa se presiona y libera para dejar que la atmósfera eleve una muestra del líquido de interés en un tubo que contiene una barra calibrada de densidad conocida. La barra, de longitud L y densidad promedio ρ_0, flota parcialmente sumergida en el fluido de densidad ρ. Una longitud h de la barra sobresale de la superficie del líquido. Demuestre que la densidad del líquido es

$$\rho = \frac{\rho_0 L}{L - h}$$

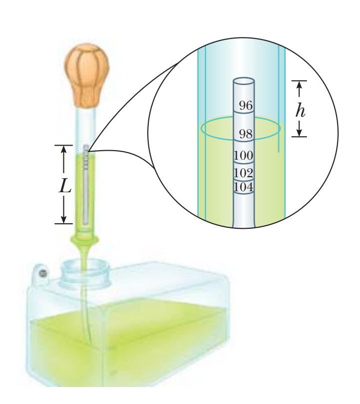


Figura P14.29 Problemas 29 y 30.

30. ● Remítase al problema 29 y la figura P14.29. Se construirá un hidrómetro con una barra cilíndrica flotante. Se colocarán nueve marcas a lo largo de la barra para indicar densidades que tengan valores de 0.98 g/cm^3, 1.00 g/cm^3, 1.02 g/cm^3, 1.04 g/cm^3, . . ., 1.14 g/cm^3. La hilera de marcas comenzará 0.200 cm desde el extremo superior de la barra y terminará 1.80 cm desde el extremo superior. a) ¿Cuál es la longitud requerida de la barra? b) ¿Cuál debe ser su densidad promedio? c) ¿Las marcas deben estar igualmente espaciadas? Explique su respuesta.

31. ¿Cuántos metros cúbicos de helio se requieren para levantar un globo con una carga de 400 kg a una altura de 8 000 m? (Considere ρ_{He} = 0.180 kg/m^3.) Suponga que el globo mantiene un volumen constante y la densidad del aire disminuye con la altura z de acuerdo con la expresión $\rho_{aire} = \rho_0 e^{-z/8\,000}$, donde z está en metros y ρ_0 = 1.25 kg/m^3 es la densidad del aire a nivel del mar.

32. Se usa una batisfera para exploración profunda del mar tiene un radio de 1.50 m y una masa de 1.20 × 10^4 kg. Para bucear, este submarino toma una masa consistente de agua de mar. Determine la cantidad de masa que debe tomar el submarino si debe descender con una rapidez constante de 1.20 m/s, cuando la fuerza resistiva es de 1 100 N en la dirección hacia arriba. La densidad del agua de mar es 1.03 × 10^3 kg/m^3.

33. Una esfera plástica flota en agua con 50.0% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con 40.0% de su volumen sumergido. Determine las densidades de la glicerina y la esfera.

34. Estados Unidos posee las ocho naves de guerra más grandes del mundo, portaaviones de la clase *Nimitz*, y construye dos más. Suponga que una de las naves se balancea para flotar 11.0 cm más alto en el agua cuando 50 aviones de combate despegan de ella en 25 minutos, en una posición donde la aceleración en caída libre es 9.78 m/s^2. Provistos de bombas y misiles, los aviones tienen una masa promedio de 29 000 kg. Encuentre el área horizontal encerrada por la línea de floración de la embarcación de \$4 000 millones. Por comparación, sus plataformas de despegue tienen área de 18 000 m^2. Bajo las cubiertas hay pasadizos de cientos de metros de largo, tan estrechos que dos hombres grandes no pueden pasar al mismo tiempo.

Sección 14.5 Dinámica de fluidos

Sección 14.6 Ecuación de Bernoulli

35. Un gran tanque de almacenamiento, abierto en la parte superior y lleno con agua, en su costado en un punto a 16 m abajo del nivel de agua se elabora un orificio pequeño. La relación de flujo a causa de la fuga es de 2.50×10^{-3} m^3/min. Determine a) la rapidez a la que el agua sale del orificio y b) el diámetro del orificio.

36. Una villa mantiene un gran tanque con la parte superior abierta, que contiene agua para emergencias. El agua puede drenar del tanque a través de una manguera de 6.60 cm de diámetro. La manguera termina con una boquilla de 2.20 cm de diámetro. En la boquilla se inserta un tapón de goma. El nivel del agua en el tanque se mantiene a 7.50 m sobre la boquilla. a) Calcule la fuerza de fricción que la boquilla ejerce sobre el tapón. b) Se quita el tapón. ¿Qué masa de agua fluye de la boquilla en 2.00 h? c) Calcule la presión manométrica del agua que circula en la manguera justo detrás de la boquilla.

37. A través de una manguera contra incendios de 6.35 cm de diámetro circula agua a una relación de 0.012 0 m^3/s. La manguera termina en una boquilla de 2.20 cm de diámetro interior. ¿Cuál es la rapidez con la que el agua sale de la boquilla?

38. A través de una tubería constreñida se mueve agua en flujo ideal estable. En un punto, como se muestra en la figura 14.16, donde la presión es 2.50×10^4 Pa, el diámetro es de 8.00 cm. En otro punto 0.500 m más alto, la presión es igual a 1.50×10^4 Pa y el diámetro es de 4.00 cm. Encuentre la rapidez del flujo a) en la sección inferior y b) en la sección superior. c) Encuentre la relación de flujo de volumen a través de la tubería.

39. La figura P14.39 muestra una corriente de agua en flujo estable desde el grifo de una cocina. En el grifo, el diámetro de la corriente es de 0.960 cm. La corriente llena un contenedor de 125 cm^3 en 16.3 s. Encuentre el diámetro de la corriente 13.0 cm abajo de la abertura del grifo.



Figura P14.39

40. Sobre un dique de altura h cae agua con una relación de flujo de masa R, en unidades de kilogramos por segundo. a) Demuestre que la potencia disponible a causa del agua es

$$\mathcal{P} = Rgh$$

donde g es la aceleración en caída libre. b) Cada unidad hidroeléctrica en el dique Grand Coulee toma agua en una tasa de 8.50×10^5 kg/s desde una altura de 87.0 m. La potencia desarrollada por la caída de agua se convierte en energía eléctrica con una eficiencia del 85.0%. ¿Cuánta energía eléctrica produce cada unidad hidroeléctrica?

41. Un legendario niño holandés salvó a Holanda al poner su dedo en un hoyo de 1.20 cm de diámetro en un dique. Si el hoyo estaba 2.00 m bajo la superficie del Mar del Norte (densidad 1 030 kg/m^3), a) ¿cuál fue la fuerza sobre su dedo? b) Si él hubiera sacado el dedo del hoyo, ¿durante qué intervalo de tiempo, el agua liberada llenaría 1 acre de tierra a una profundidad de 1 ft? Suponga que el hoyo mantuvo constante su tamaño. (Una típica familia estadounidense de cuatro miembros usa 1 acre–pie de agua, 1 234 m^3, en 1 año.)

42. ● En flujo ideal, un líquido de 850 kg/m^3 de densidad se mueve desde un tubo horizontal de 1.00 cm de radio a un segundo tubo horizontal de 0.500 cm de radio. Entre los tubos existe una diferencia de presión ΔP. a) Encuentre la relación de flujo volumétrico como función de ΔP. Evalúe la relación de flujo volumétrico b) para $\Delta P = 6.00$ kPa y c) para $\Delta P = 12.0$ kPa. d) Establezca cómo depende la relación de flujo volumétrico con ΔP.

43. Desde el Río Colorado se bombea agua para suministrar a Grand Canyon Village, ubicada a la orilla del cañón. El río está a una elevación de 564 m y la villa está a una elevación de 2 096 m. Imagine que el agua se bombea a través de una larga tubería de 15.0 cm de diámetro, impulsada por una bomba en el extremo inferior. a) ¿Cuál es la presión mínima a la que el agua debe bombearse si ha de llegar a la villa? b) Si 4 500 m^3 de agua se bombean por día, ¿cuál es la rapidez del agua en la tubería? c) ¿Qué presión adicional es necesaria para impulsar este flujo? *Nota:* Suponga que la aceleración en caída libre y la densidad del aire son constantes en este intervalo de elevaciones. Las presiones que calcule son muy altas para una tubería ordinaria. En realidad el agua se eleva en etapas mediante varias bombas a través de tuberías cortas.

44. ● El géiser Old Faithful en el parque nacional Yellowstone erupta a intervalos aproximados de 1 hora, y la altura de la columna de agua alcanza 40.0 m (figura P14.44). a) Represente la corriente que se eleva como una serie de gotas separadas. Analice el movimiento en caída libre de una de las gotas para determinar la rapidez a la que el agua deja el suelo. b) **¿Qué pasaría si?** Represente la corriente que se eleva como un fluido ideal en un flujo de líneas de corriente. Use la ecuación de



Figura P14.44

Bernoulli para determinar la rapidez del agua mientras deja el nivel del suelo. c) ¿De qué modo se compara la respuesta del inciso a) con la respuesta del inciso b)? d) ¿Cuál es la presión (sobre la atmosférica) en la cámara subterránea caliente si su profundidad es de 175 m? Suponga que la cámara es grande en comparación con la boca del géiser.

45. Un tubo Venturi se puede usar como un medidor de flujo (véase la figura 14.19). Al tomar la diferencia en presión como $P_1 - P_2 = 21.0$ kPa, encuentre la relación de flujo de fluido en metros cúbicos por segundo, dado que el radio del tubo de salida es de 1.00 cm, el radio del tubo de entrada es 2.00 cm y el fluido es gasolina ($\rho = 700$ kg/m^3).

Sección 14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

46. Un avión tiene una masa de 1.60×10^4 kg y cada ala tiene un área de 40.0 m^2. Durante vuelo a nivel, la presión sobre la superficie inferior del ala es 7.00×10^4 Pa. Determine la presión sobre la superficie superior del ala.

47. Un sifón de diámetro uniforme se usa para drenar agua de un tanque, como se ilustra en la figura P14.47. Suponga flujo estable sin fricción. a) Si $h = 1.00$ m, encuentre la rapidez del flujo de salida en el extremo del sifón. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la limitación en la altura de la parte superior del sifón sobre la superficie del agua? (Para que el flujo del líquido sea continuo, la presión no debe caer abajo de la presión de vapor del líquido.)

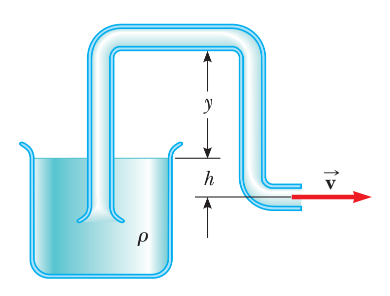


Figura P14.47

48. Un avión cruza a una altura de 10 km. La presión afuera de la cabina es 0.287 atm; dentro del compartimiento de pasajeros, la presión es de 1.00 atm y la temperatura es de 20°C. En el sello de una de las ventanas del compartimiento de pasajeros ocurre una pequeña fuga. Represente el aire como un fluido ideal para encontrar la rapidez de la corriente del aire que circula a través de la fuga.

49. Una jeringa hipodérmica contiene un medicamento que tiene la densidad del agua (figura P14.49). El barril de la jeringa tiene un área de sección transversal $A = 2.50 \times 10^{-5}$ m^2 y la aguja tiene un área de sección transversal $a = 1.00 \times 10^{-8}$ m^2. En ausencia de una fuerza sobre el émbolo, la presión en todas partes es 1 atm. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ de 2.00 N de magnitud actúa sobre el émbolo, lo que hace que la medicina salpique horizontalmente desde la aguja. Determine la rapidez del medicamento mientras sale de la punta de la aguja.

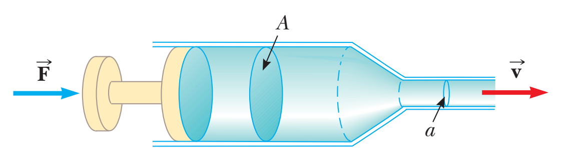


Figura P14.49

50. El efecto Bernoulli tiene importantes consecuencias para el diseño de edificios. Por ejemplo, el viento puede soplar alrededor de un rascacielos con una rapidez notablemente alta, lo que crea baja presión. La mayor presión atmosférica en aire tranquilo dentro del edificio puede hacer que las ventanas revienten. Como se construyó originalmente, al edificio John Hancock en Boston se le reventaron varias ventanas que cayeron desde muchos pisos a la acera. a) Suponga que sopla un viento horizontal con una rapidez de 11.2 m/s afuera de un gran panel de placa de vidrio con dimensiones de 4.00 m × 1.50 m. Suponga que la densidad del aire es de 1.30 kg/m^3. El aire adentro del edificio está a presión atmosférica. ¿Cuál es la fuerza total que el aire ejerce sobre la ventana? b) **¿Qué pasaría si?** Si un segundo rascacielos se construye cerca, la rapidez del aire puede ser especialmente alta donde el viento pasa a través de la estrecha separación entre los edificios. Resuelva de nuevo el inciso a) con una rapidez de viento de 22.4 m/s, el doble de violento.

Problemas adicionales

51. Un globo lleno con helio se amarra a una cuerda uniforme de 2.00 m de largo y 0.050 0 kg. El globo es esférico, con un radio de 0.400 m. Cuando se libera, eleva una longitud h de cuerda y luego permanece en equilibrio como se muestra en la figura P14.51. Determine el valor de h. La cubierta del globo tiene una masa de 0.250 kg.

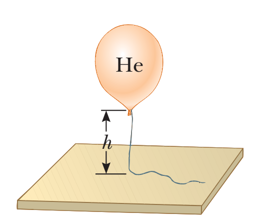


Figura P14.51

52. La figura P14.52 muestra un tanque de agua con una válvula en el fondo. Si esta válvula se abre, ¿cuál es la altura máxima que logra la corriente de agua que sale del lado derecho del tanque? Suponga $h = 10.0$ m, $L = 2.00$ m y $\theta = 30.0°$, y suponga que el área de sección transversal A es muy grande comparada con la de B.

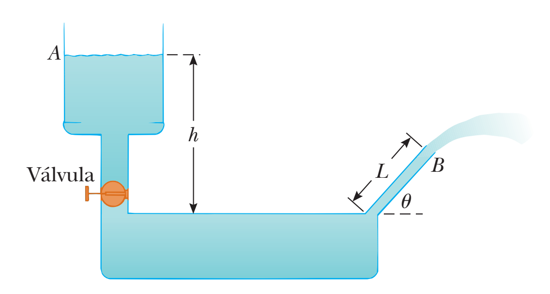


Figura P14.52

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

53. El peso verdadero de un objeto se puede medir en un vacío, donde las fuerzas de flotación están ausentes. Un objeto de volumen V se pesa en aire sobre una balanza de brazos iguales, con el uso de contrapesos de densidad ρ. Al representar la densidad del aire como ρ_{aire} y la lectura de la balanza como F'_g, demuestre que el verdadero peso F_g es

$$F_g = F'_g + \left(V - \frac{F'_g}{\rho g}\right)\rho_{\text{aire}}g$$

54. El agua se fuerza hacia afuera de un extintor de incendios mediante presión de aire, como se muestra en la figura P14.54. ¿Cuánta presión manométrica con aire en el tanque (sobre la atmosférica) se requiere para que el chorro de agua tenga una rapidez de 30.0 m/s cuando el nivel del agua está 0.500 m abajo de la boquilla?

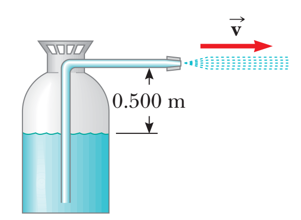


Figura P14.54

55. Un resorte ligero de constante k = 90.0 N/m se une verticalmente a una mesa (figura P14.55a). Un globo de 2.00 g se llena con helio (densidad = 0.180 kg/m^3) a un volumen de 5.00 m^3 y después se conecta al resorte, lo que hace que el resorte se estire como se muestra en la figura P14.55b. Determine la distancia de extensión L cuando el globo está en equilibrio.

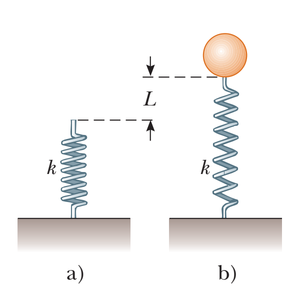


Figura P14.55

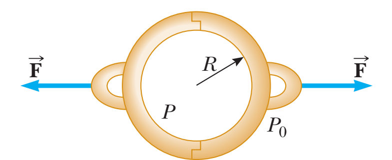
56. ● *No se puede llamar Flubber.* Suponga que cierto líquido, con densidad de 1 230 kg/m^3, no ejerce fuerza de fricción sobre objetos esféricos. Una bola de 2.10 kg de masa y 9.00 cm de radio se deja caer desde el reposo en un tanque profundo de este líquido desde una altura de 3.30 m sobre la superficie. a) Encuentre la rapidez con que entra la bola al líquido. b) ¿Cuáles son las dos fuerzas que se ejercen sobre la bola mientras se mueve a través del líquido? c) Explique por qué la bola se mueve hacia abajo sólo una distancia limitada en el líquido y calcule esta distancia. d) ¿Con qué rapidez la bola aparece fuera del líquido? e) ¿De qué modo se compara el intervalo de tiempo Δt_{abajo}, durante el que la bola se mueve desde la superficie hasta su punto más bajo, con el intervalo de tiempo Δt_{arriba} para el viaje de regreso entre los mismos dos puntos? f) **¿Qué pasaría si?** Ahora modifique el modelo para suponer que el líquido ejerce una pequeña fuerza de fricción sobre la bola, opuesta en dirección a su movimiento. En este caso, ¿de qué forma se comparan los intervalos de tiempo Δt_{abajo} y Δt_{arriba}? Explique su respuesta con un argumento conceptual en lugar de un cálculo numérico.

57. ● Mientras flota un helicóptero de 950 kg, su rotor horizontal empuja una columna de aire hacia abajo a 40.0 m/s. ¿Qué puede decir acerca de la cantidad de este aire? Explique su respuesta. Puede representar el movimiento del aire como flujo ideal.

58. Evangelista Torricelli fue la primera persona en darse cuenta de que los seres humanos viven en el fondo de un océano de aire. Él conjeturó correctamente que la presión de la atmósfera es atribuible al peso del aire. La densidad del aire a 0°C en la superficie de la Tierra es 1.29 kg/m^3. La densidad disminuye con la altura creciente (a medida que la atmósfera se adelgaza). Por otra parte, si se supone que la densidad es constante a 1.29 kg/m^3 hasta cierta altura h y es cero sobre dicha altura, en tal caso h representaría la profundidad del océano de aire. Use este modelo para determinar el valor de h que da una presión de 1.00 atm en la superficie de la Tierra. ¿La cima del monte Everest se elevaría sobre la superficie de tal atmósfera?

59. **Problema de repaso.** Con referencia a la figura 14.5, demuestre que el momento de torsión total que el agua ejerce detrás del dique respecto a un eje horizontal a través de O es $\frac{1}{6}\rho g w H^3$. Demuestre que la línea de acción efectiva de la fuerza total que el agua ejerce está a una distancia $\frac{1}{3}H$ sobre O.

60. Aproximadamente en 1657, Otto von Guericke, inventor de la bomba de aire, evacuó una esfera hecha de dos hemisferios de latón. Dos equipos de ocho caballos cada uno podía separar los hemisferios sólo después de algunos intentos y "con grandes dificultades", con un sonido resultante parecido a un disparo de cañón (figura P14.60). a) Demuestre que la fuerza F



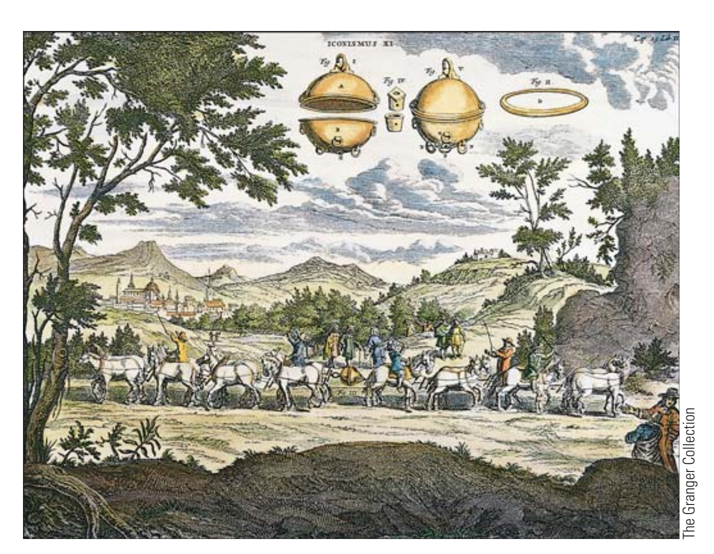


Figura P14.60 El grabado coloreado, que data de 1672, ilustra la demostración de Otto von Guericke de la fuerza debida a la presión del aire, como se pudo haber realizado ante el emperador Fernando III.

requerida para separar los hemisferios vacíos de pared delgada es $\pi R^2(P_0 - P)$, donde R es el radio de los hemisferios y P es la presión dentro de los hemisferios, que es mucho menor que P_0. b) Determine la fuerza para $P = 0.100P_0$ y $R = 0.300$ m.

61. Un vaso de precipitados de 1.00 kg que contiene 2.00 kg de aceite (densidad = 916.0 kg/m^3) descansa sobre una báscula. Un bloque de hierro de 2.00 kg, suspendido de una balanza de resorte, se sumerge completamente en el aceite, como se muestra en la figura P14.61. Determine las lecturas de equilibrio de ambas básculas.

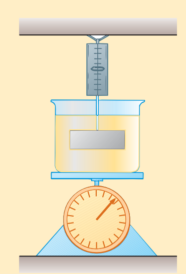


Figura P14.61 Problemas 61 y 62.

62. Un vaso de precipitados de masa m_v, que contiene aceite de masa m_a y densidad ρ_a, descansa sobre una báscula. Un bloque de hierro de masa m_{Fe}, suspendido de una balanza de resorte, se sumerge completamente en el aceite, como se muestra en la figura P14.61. Determine las lecturas de equilibrio de ambas básculas.

63. En 1983 Estados Unidos comenzó a acuñar la moneda de centavo a partir de zinc revestido de cobre en lugar de cobre puro. La masa del antiguo penique de cobre es de 3.083 g y el del nuevo centavo es de 2.517 g. Calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo. La densidad del cobre es 8.960 g/cm^3 y la del zinc es 7.133 g/cm^3. Las monedas nueva y antigua tienen el mismo volumen.

64. Demuestre que la variación de presión atmosférica con la altitud está dada por $P = P_0 e^{-\alpha y}$, donde $\alpha = \rho_0 g/P_0$, P_0 es la presión atmosférica en algún nivel de referencia $y = 0$ y ρ_0 es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la disminución en presión atmosférica sobre un cambio infinitesimal en altura (de modo que la densidad es aproximadamente uniforme) está dada por $dP = -\rho g\, dy$ y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

65. **Problema de repaso.** Un disco uniforme de 10.0 kg de masa y 0.250 m de radio gira a 300 rev/min en un eje de baja fricción. Se debe detener en 1.00 min mediante un freno que hace contacto con el disco a una distancia promedio de 0.220 m del eje. El coeficiente de fricción entre el freno y el disco es 0.500. Un pistón en un cilindro de 5.00 cm de diámetro presiona el freno contra el disco. Encuentre la presión requerida para el fluido de frenos en el cilindro.

66. Un cubo de hielo, cuyos bordes miden 20.0 mm, flota en un vaso con agua fría, y una de las caras del cubo de hielo es paralela a la superficie del agua. a) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua está la cara inferior del cubo de hielo? b) Alcohol etílico frío se vierte suavemente sobre la superficie del agua para formar una capa de 5.00 mm de grosor sobre el agua. El alcohol no se mezcla con el agua. Cuando el cubo de hielo de nuevo logra el equilibrio hidrostático, ¿cuál es la distancia desde la parte superior del agua a la cara inferior del bloque? c) Se vierte alcohol etílico frío adicional en la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿Qué espesor de capa se requiere de alcohol etílico?

67. Un fluido no viscoso incompresible inicialmente en reposo en la porción vertical de la tubería que se muestra en la figura P14.67a, donde $L = 2.00$ m. Cuando la válvula se abre, el fluido circula a la sección horizontal de la tubería. ¿Cuál es la rapidez del fluido cuando está por completo en la sección horizontal, como se muestra en la figura P14.67b? Suponga que el área de sección transversal de toda la tubería es constante.

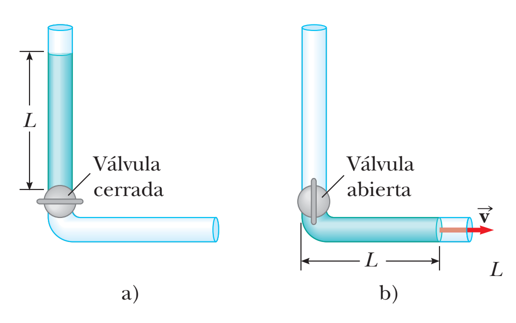


Figura P14.67

68. El suministro de agua de un edificio se alimenta a través de una tubería principal de 6.00 cm de diámetro. Se observa que un grifo de 2.00 cm de diámetro llena un contenedor de 25.0 L en 30.0 s. a) ¿Cuál es la rapidez a la que el agua sale del grifo? b) ¿Cuál es la presión manométrica en la tubería principal de 6 cm? (Suponga que el grifo es la única "fuga" en el edificio.)

69. Un tubo en U, abierto en ambos extremos, está parcialmente lleno con agua (figura P14.69a). A continuación, en el brazo derecho, se vierte aceite que tiene una densidad de 750 kg/m^3 y forma una columna de $L = 5.00$ cm de alto (figura P14.69b). a) Determine la diferencia h en las alturas de las dos superficies de los líquidos. b) Luego el brazo derecho se cubre de cualquier movimiento del aire mientras el aire sopla a través de la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos líquidos están a la misma altura (figura P14.69c). Determine la rapidez del aire que se sopla a través del brazo izquierdo. Considere que la densidad del aire es 1.29 kg/m^3.

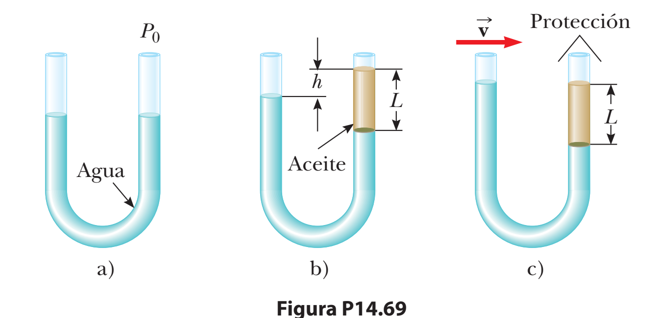


Figura P14.69

70. Una mujer drena el agua de su pecera mediante un sifón que va hacia un drenaje exterior, como se muestra en la figura P14.70 (página 416). El tanque rectangular tiene área de planta A y profundidad h. El drenaje se ubica a un distancia d bajo la superficie del agua en el tanque, donde $d >> h$. El área de sección transversal del tubo del sifón es A'. Repressente el

agua como flujo sin fricción. a) Demuestre que el intervalo de tiempo requerido para vaciar el tanque es

$$\Delta t = \frac{Ah}{A'\sqrt{2gd}}$$

b) Evalúe el intervalo de tiempo requerido para vaciar el tanque si éste es un cubo de 0.500 m por lado, $A' = 2.00\ \text{cm}^2$ y $d = 10.0$ m.

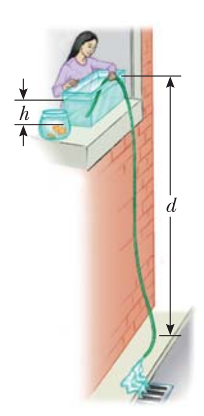


Figura P14.70

71. El casco de un bote experimental se levantará sobre el agua mediante un aereodeslizador montado bajo su quilla, como se muestra en la figura P14.71. El aereodeslizador tiene forma de ala de avión. Su área proyectada sobre una superficie horizontal es A. Cuando el bote se remolca con una rapidez lo suficientemente alta, el agua se mueve en flujo laminar de modo que su rapidez de densidad ρ promedio en la parte superior del aereodeslizador es n veces mayor que su rapidez v_b bajo el aereodeslizador. a) Si ignora la fuerza de flotación, demuestre que la fuerza de sustentación hacia arriba que el agua ejerce sobre el aereodeslizador tiene una magnitud

$$F \approx \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\rho v_b^{\,2} A$$

b) El bote tiene masa M. Demuestre que la rapidez de despegue es

$$v \approx \sqrt{\frac{2Mg}{(n^2 - 1)A\rho}}$$

c) Suponga que un bote de 800 kg despegará a 9.50 m/s. Evalúe el área A requerida para la hidroala si su diseño admite $n = 1.05$.

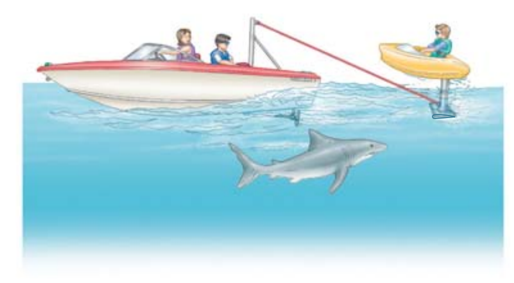


Figura P14.71

Respuestas a las preguntas rápidas

14.1 a). Ya que el peso del jugador de básquetbol se distribuye sobre el área superficial más grande del zapato, la presión (F/A) que él aplica es relativamente pequeña. El menor peso de la mujer se distribuye sobre la muy pequeña área transversal del tacón de aguja, así que la presión es grande.

14.2 a). Ya que ambos fluidos tienen la misma profundidad, el que tiene menor densidad (alcohol) ejercerá menor presión.

14.3 c). Todos los barómetros tendrán la misma presión en el fondo de la columna de fluido: presión atmosférica. Por lo tanto, el barómetro con la columna más alta será aquel con el fluido de densidad más baja.

14.4 b) o c). En los tres casos el peso del cofre del tesoro causa una fuerza hacia abajo sobre la balsa que hace que ésta se hunda en el agua. Sin embargo, en b) y c), el cofre del tesoro también desplaza agua, que proporciona una fuerza de flotación en la dirección hacia arriba, lo que reduce el efecto del peso del cofre.

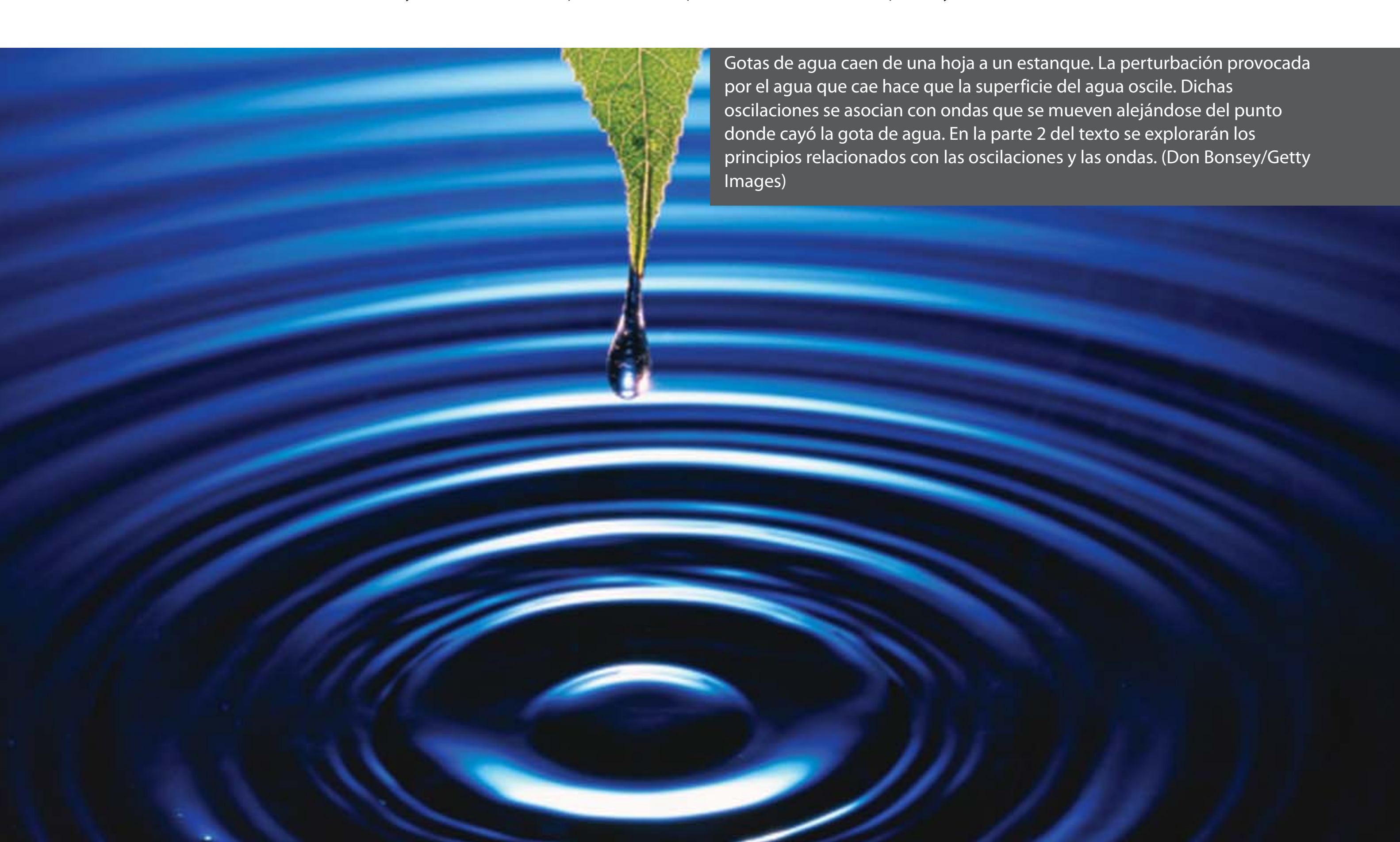
14.5 a). El aire a alta rapidez entre los globos resulta en baja presión en esta región. La mayor presión sobre las superficies exteriores de los globos los empuja uno hacia otro.

Oscilaciones y ondas mecánicas

Esta nueva parte del texto inicia con el estudio del movimiento periódico, una clase especial de movimiento llamado movimiento *periódico*, el movimiento repetitivo de un objeto en el que éste permanece para regresar a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. El movimiento repetitivo de tal objeto se llama *oscilación*. La atención se concentrará a un caso especial de movimiento periódico, llamado *movimiento armónico simple*. Todos los movimientos periódicos se representan como combinaciones de movimientos armónicos simples.

El movimiento armónico simple también forma la base para comprender las ondas mecánicas. Las ondas sonoras, las ondas sísmicas, las ondas sobre cuerdas estiradas y las ondas en el agua son producidas por alguna fuente de oscilación. A medida que una onda sonora viaja a través del aire, elementos del aire oscilan de atrás para adelante; conforme una onda en el agua viaja a través de un estanque, los elementos del agua oscilan arriba y abajo y en retroceso y hacia adelante. El movimiento de los elementos conduce a una marcada similitud con el movimiento periódico de un péndulo oscilante o un objeto unido a un resorte.

Para explicar muchos otros fenómenos en la naturaleza, se deben comprender los conceptos de oscilaciones y ondas. Por ejemplo, aunque los rascacielos y puentes parecen rígidos, en realidad oscilan, algo que deben tomar en consideración los arquitectos e ingenieros que los diseñan y construyen. Para entender cómo funcionan la radio y la televisión, debe comprender el origen y naturaleza de las ondas electromagnéticas y cómo se propagan a través del espacio. Por último, mucho de lo que han aprendido los científicos acerca de la estructura atómica viene de información aportada por las ondas. En consecuencia, primero debe estudiar las oscilaciones y las ondas si quiere comprender los conceptos y teorías de la física atómica.



Gotas de agua caen de una hoja a un estanque. La perturbación provocada por el agua que cae hace que la superficie del agua oscile. Dichas oscilaciones se asocian con ondas que se mueven alejándose del punto donde cayó la gota de agua. En la parte 2 del texto se explorarán los principios relacionados con las oscilaciones y las ondas. (Don Bonsey/Getty Images)



En los edificios altos para reducir el bamboleo debido al viento, se colocan amortiguadores ajustados a resonancia cerca de lo alto del edificio. Estos mecanismos incluyen un objeto de gran masa que oscila bajo control de computadora con la misma frecuencia que los edificios, lo que reduce el bamboleo. La gran esfera, en la fotografía de la izquierda, es parte del sistema amortiguador ajustado a resonancia del edificio, en la fotografía de la derecha, llamado Taipei 101, en Taiwán. El edificio, también llamado Taipei Financial Center, se concluyó en 2004, año en el que tenía el récord como el edificio más alto del mundo (izquierda, Cortesía de Motioneering, Inc.; derecha, © Simon Kwang/Reuters/CORBIS).

15 Movimiento oscilatorio

En el *movimiento periódico* el objeto regresa regularmente a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. Al reflexionar es posible identificar muchas clases de movimiento periódico en la vida cotidiana. Su automóvil regresa al camino cada tarde. Usted regresa a la mesa del comedor cada noche para cenar. Si empuja un candelabro lo balancea de atrás para adelante, y regresa a la misma posición con una rapidez uniforme. La Tierra regresa a la misma posición en su órbita alrededor del Sol cada año, lo que resulta en la variación entre las cuatro estaciones.

Además de estos ejemplos cotidianos, muchos otros sistemas exhiben movimiento periódico. Las moléculas en un sólido oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio; las ondas electromagnéticas, como las ondas de luz, radar y ondas de radio, se caracterizan por vectores de campos eléctrico y magnético oscilatorios; y los circuitos eléctricos de corriente alterna, voltaje, corriente y carga eléctrica varían periódicamente con el tiempo.

Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama *movimiento armónico simple*, que es el punto central de interés de este capítulo.

15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Como un modelo de movimiento armónico simple considere un bloque de masa *m* unido al extremo de un resorte, con el bloque libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción (figura 15.1). Cuando el resorte no está estirado ni comprimido, el bloque queda en reposo, en la posición llamada **posición de equilibrio** del sistema, que se identifica como $x = 0$. Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio.

Se puede entender cualitativamente el movimiento oscilatorio del bloque en la figura 15.1 al recordar primero que, cuando el bloque se desplaza a una posición *x*, el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y se conoce por la **ley de Hooke** (véase la sección 7.4):

$$F_s = -kx \qquad \textbf{(15.1)}$$

◀ Ley de Hooke

A F_s se le llama **fuerza restauradora** porque siempre se dirige hacia la posición de equilibrio y, en consecuencia, es *opuesta* al desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Es decir, cuando el bloque se desplaza hacia la derecha de $x = 0$ en la figura 15.1a, la posición es positiva y la fuerza restauradora se dirige hacia la izquierda. La figura 15.1b muestra al bloque en $x = 0$, donde la fuerza en el bloque es cero. Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de $x = 0$, como en la figura 15.1c, la posición es negativa y la fuerza restauradora se dirige hacia la derecha.

Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del bloque, con la ecuación 15.1 que proporciona la fuerza neta en la dirección *x*, se obtiene

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x \qquad \textbf{(15.2)}$$

Es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su posición, y la dirección de la aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Se dice que los sistemas que se comportan de esta forma exhiben **movimiento armónico simple**. Un objeto se mueve con movimiento armónico simple siempre que su aceleración es proporcional a su posición y se dirige en sentido opuesto al desplazamiento desde el equilibrio.

Si el bloque en la figura 15.1 se desplaza a una posición $x = A$ y se libera desde el reposo, su aceleración *inicial* es $-kA/m$. Cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$, su aceleración es cero. En este instante, su rapidez es un máximo porque la aceleración cambia de signo. Por lo tanto el bloque continúa viajando hacia la izquierda del equilibrio con una aceleración positiva y al final llega a $x = -A$, momento en el que su aceleración es $+kA/m$ y su rapidez de nuevo es cero, como se explicó en las secciones 7.4 y 7.9. El bloque termina un ciclo completo de su movimiento cuando regresa a la posición original y una vez más pasa por $x = 0$ con rapidez máxima. En consecuencia, el bloque

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.1

La orientación del resorte

La figura 15.1 muestra un resorte *horizontal*, con un bloque unido que se desliza sobre una superficie sin fricción. Otra posibilidad es un bloque que cuelga de un resorte *vertical*. Todos los resultados que se explican para el resorte horizontal son los mismos para el resorte vertical, con una excepción: cuando el bloque se coloca en el resorte vertical, su peso hace que el resorte se extienda. Si la posición de reposo del bloque se define como $x = 0$, los resultados de este capítulo también se aplican a este sistema vertical.

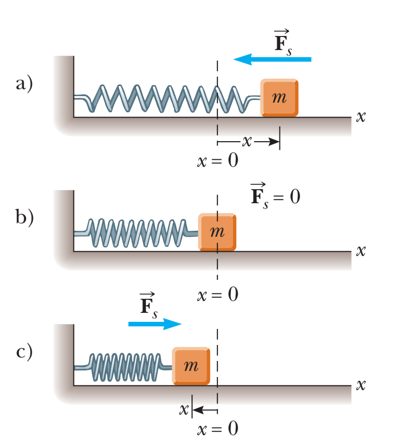


Figura 15.1 Un bloque unido a un resorte móvil sobre una superficie sin fricción. a) Cuando el bloque se desplaza hacia la derecha del equilibrio ($x > 0$), la fuerza que ejerce el resorte actúa hacia la izquierda. b) Cuando el bloque está en su posición de equilibrio ($x = 0$), la fuerza que ejerce el resorte es cero. c) Cuando el bloque se desplaza hacia la izquierda del equilibrio ($x < 0$), la fuerza que ejerce el resorte actúa hacia la derecha.

oscila entre los puntos de retorno $x = \pm A$. En ausencia de fricción, este movimiento idealizado continuará por siempre porque la fuerza que ejerce el resorte es conservativa. Por lo general, los sistemas reales están sujetos a fricción, así que no oscilan por siempre. En la sección 15.6 se explorarán los detalles de la situación con la fricción.

Pregunta rápida 15.1 Un bloque en el extremo de un resorte se jala a la posición $x = A$ y se libera desde el reposo. En un ciclo completo de su movimiento, ¿qué distancia total recorre? a) $A/2$, b) A, c) $2A$, d) $4A$.

15.2 Partícula en movimiento armónico simple

El movimiento descrito en la sección precedente se presenta con tanta frecuencia que se considera el modelo de **partícula en movimiento armónico simple** para representar tales situaciones. Con el fin de elaborar una representación matemática para este modelo, primero se reconoce que el bloque es una partícula bajo una fuerza neta, como se describe en la ecuación 15.1. Por lo general se elegirá x como el eje a lo largo del que se presenta la oscilación; por eso, en esta explicación se eliminará la notación de subíndice x. Recuerde que, por definición, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, y así la ecuación 15.2 se puede expresar como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (15.3)$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.2

Una aceleración no constante

La aceleración de una partícula en movimiento armónico simple no es constante. La ecuación 15.3 muestra que su aceleración varía con la posición x. Por lo tanto, en esta situación *no se pueden* aplicar las ecuaciones de cinemática del capítulo 2.

Si la relación k/m se indica con el símbolo ω^2 (se elige ω^2 en lugar de ω para que la solución que se desarrolle a continuación sea más simple en forma), en tal caso

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (15.4)$$

y la ecuación 15.3 se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (15.5)$$

Ahora encuentre una solución matemática a la ecuación 15.5, esto es, una función $x(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden y sea una representación matemática de la posición de la partícula como función del tiempo. Se busca una función cuya segunda derivada sea la misma que la función original con un signo negativo y multiplicada por ω^2. Las funciones trigonométricas seno y coseno muestran este comportamiento, así que se puede construir una solución alrededor de una de ellas o de ambas. La función coseno que aparece enseguida es una solución a la ecuación diferencial:

Posición con el tiempo para un objeto en movimiento armónico simple ▶

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (15.6)$$

donde A, ω y ϕ son constantes. Para mostrar explícitamente que esta solución satisface la ecuación 15.5, note que

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad (15.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad (15.8)$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.3

¿Dónde está el triángulo?

La ecuación 15.6 incluye una función trigonométrica, una *función matemática* que se puede usar ya sea que se refiera o no a un triángulo. En este caso, sucede que la función coseno tiene el comportamiento correcto para representar la posición de una partícula en movimiento armónico simple.

Al comparar las ecuaciones 15.6 y 15.8, es claro que $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ y se satisface la ecuación 15.5.

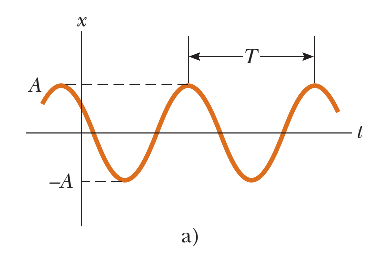
Los parámetros A, ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar un significado físico a dichas constantes, es conveniente formar una representación del movimiento al graficar x como función de t como en la figura 15.2a. Primero, A, llamada la **amplitud** del movimiento, es simplemente **el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x**

positiva o negativa. La constante ω se llama **frecuencia angular** y tiene unidades[1] de rad/s. Es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras más oscilaciones por unidad de tiempo haya, más alto es el valor de ω. A partir de la ecuación 15.4, la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \textbf{(15.9)}$$

El ángulo constante ϕ se llama **constante de fase** (o ángulo de fase inicial) y, junto con la amplitud A, se determina de manera unívoca por la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$. Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\phi = 0$ y la representación gráfica del movimiento es es como se exhibe en la figura 15.2b. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama **fase** del movimiento. Note que la función $x(t)$ es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt aumenta en 2π radianes.

Las ecuaciones 15.1, 15.5 y 15.6 forman la base de la representación matemática de la partícula en el modelo de movimiento armónico simple. Si usted analiza una situación y encuentra que la fuerza sobre una partícula tiene la forma matemática de la ecuación 15.1, usted sabrá que el movimiento es de un oscilador armónico simple y la posición de la partícula la describe la ecuación 15.6. Si analiza un sistema y logra su descripción mediante una ecuación diferencial de la forma de la ecuación 15.5, el movimiento es el de un oscilador armónico simple. Si analiza una situación y ubica la posición de una partícula mediante la ecuación 15.6, sabrá que la partícula se somete a un movimiento armónico simple.



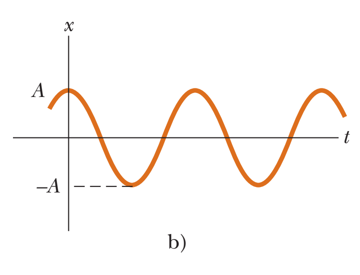


Figura 15.2 a) Gráfica $x-t$ para un objeto que se somete a movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A, el periodo (definido en la ecuación 15.10) es T. b) Gráfica $x-t$ en el caso especial en el que $x = A$ en $t = 0$ y por eso $\phi = 0$.

Pregunta rápida 15.2 Considere una representación gráfica (figura 15.3) de movimiento armónico simple, como se describe matemáticamente en la ecuación 15.6. Cuando el objeto está en el punto Ⓐ de la gráfica, ¿qué puede decir acerca de su posición y velocidad? a) La posición y velocidad son positivas. b) La posición y velocidad son negativas. c) La posición es positiva y su velocidad es cero. d) La posición es negativa y su velocidad es cero. e) La posición es positiva y su velocidad es negativa. f) La posición es negativa y su velocidad es positiva.

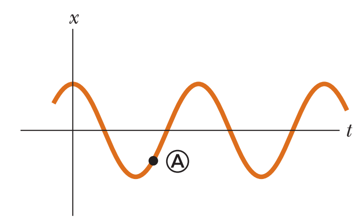


Figura 15.3 (Pregunta rápida 15.2) Gráfica $x-t$ para un objeto sometido a movimiento armónico simple. En un tiempo particular, la posición del objeto se indica mediante Ⓐ en la gráfica.

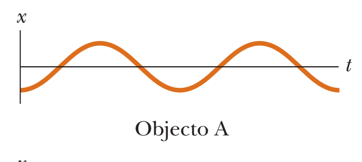
Pregunta rápida 15.3 La figura 15.4 muestra dos curvas que representan el movimiento armónico simple al que se someten dos objetos. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple del objeto B es, a) de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que el del objeto A, b) de mayor frecuencia angular y menor amplitud que el del objeto A, c) de menor frecuencia angular y mayor amplitud que el del objeto A o d) de menor frecuencia angular y menor amplitud que el del objeto A.

Investigue un poco más la descripción matemática del movimiento armónico simple. El **periodo** T del movimiento es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento (figura 15.2a). Es decir, los valores de x y v para la partícula en el tiempo t iguala los valores de x y v en el tiempo $t + T$. Porque la fase aumenta en 2π radianes en un intervalo de tiempo de T,

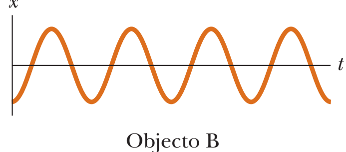
$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

Al simplificar esta expresión se obtiene $\omega T = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \textbf{(15.10)}$$



Objecto A



Objecto B

Figura 15.4 (Pregunta rápida 15.3) Dos gráficas x–t para objetos sometidos a movimiento armónico simple. Las amplitudes y frecuencias son diferentes para los dos objetos.

[1] En capítulos anteriores se vieron muchos ejemplos en los que se evalúa una función trigonométrica de un ángulo. El argumento de una función trigonométrica, como seno o coseno, *debe* ser un número puro. El radián es un número puro porque es una relación de longitudes. Los ángulos en grados son números puros porque el grado es una "unidad" artificial; no se relaciona con mediciones de longitudes. El argumento de la función trigonométrica de la función en la ecuación 15.6 debe ser un número puro. Por lo tanto, ω *debe* expresarse en rad/s (y no, por ejemplo, en revoluciones por cada segundo) si t se expresa en segundos. Además, otros tipos de funciones, como las funciones logarítmicas y exponenciales, requieren argumentos que son números puros.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.4
Dos clases de frecuencia

Se identifican dos clases de frecuencia para un oscilador armónico simple: f, llamada simplemente *frecuencia*, se mide en hertz, y ω, la *frecuencia angular*, se mide en radianes por segundo. Asegúrese de tener claridad acerca de cuál frecuencia se discute o solicita en un problema determinado. Las ecuaciones 15.11 y 15.12 muestran la relación entre las dos frecuencias.

El inverso del periodo se llama **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo de tiempo por oscilación, la frecuencia representa el **número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo:**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{15.11}$$

Las unidades de f son ciclos por segundo, o **hertz** (Hz). Reordenar la ecuación 15.11 produce

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{15.12}$$

Las ecuaciones 15.9, 15.10 y 15.11 se usan para expresar el periodo y la frecuencia del movimiento para la partícula en movimiento armónico simple en términos de las características m y k del sistema como

Periodo ▶

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{15.13}$$

Frecuencia ▶

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.14}$$

De este modo el periodo y la frecuencia dependen *solamente* de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y *no* de los parámetros del movimiento, como A o ϕ. Como es de esperar, la frecuencia es mayor para un resorte más rígido (mayor valor de k) y disminuye con la masa creciente de la partícula.

Es posible obtener la velocidad y la aceleración[2] de una partícula sometida a movimiento armónico simple a partir de las ecuaciones 15.7 y 15.8:

Velocidad de un objeto en movimiento armónico simple ▶

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{15.15}$$

Aceleración de un objeto en movimiento armónico simple ▶

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \tag{15.16}$$

A partir de la ecuación 15.15 se ve que, puesto que las funciones seno y coseno oscilan entre ± 1, los valores extremos de la velocidad v son $\pm\omega A$. Del mismo modo, la ecuación 15.16 muestra que los valores extremos de la aceleración a son $\pm\omega^2 A$. En consecuencia, los valores *máximos* de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

Magnitudes máximas de velocidad y aceleración en movimiento armónico simple ▶

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A \tag{15.17}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m}\,A \tag{15.18}$$

La figura 15.5a grafica la posición con el tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. En las figuras 15.5b y 15.5c se ilustran las curvas asociadas velocidad–tiempo y aceleración–tiempo. Las cuales muestran que la fase de la velocidad difiere de la fase de la posición en $\pi/2$ rad, o 90°. Es decir: cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. Del mismo modo, cuando x es cero, la rapidez es un máximo. Además, note que la fase de la aceleración difiere de la fase de la posición en π radianes, o 180°. Por ejemplo, cuando x es un máximo, a tiene una magnitud máxima en la dirección opuesta.

Pregunta rápida 15.4 Un objeto de masa m cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como T. El objeto de masa m se retira y se

[2] Ya que el movimiento de un oscilador armónico simple tiene lugar en una dimensión, la velocidad se indica como v y la aceleración como a, con la dirección indicada mediante un signo positivo o negativo, como en el capítulo 2.

sustituye con un objeto de masa $2m$. Cuando este objeto se pone en oscilación, ¿cuál es el periodo del movimiento? a) $2T$, b) $\sqrt{2}T$, c) T, d) $T/\sqrt{2}$, e) $T/2$.

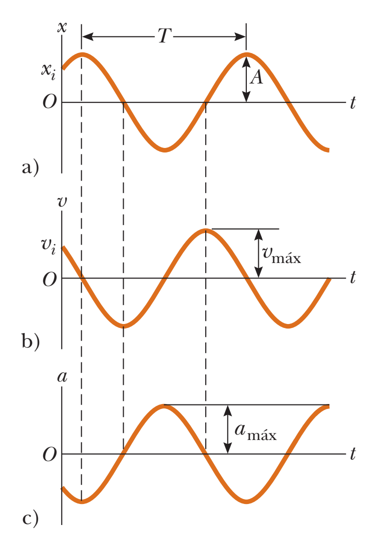


Figura 15.5 Representación gráfica de movimiento armónico simple. a) Posición con tiempo. b) Velocidad con tiempo. c) Aceleración con tiempo. Note que en cualquier tiempo especificado la velocidad está 90° fuera de fase con la posición y la aceleración está 180° fuera de fase con la posición.

La ecuación 15.6 describe el movimiento armónico simple de una partícula en general. Ahora vea cómo evaluar las constantes del movimiento. La frecuencia angular ω se evalúa con la ecuación 15.9. Las constantes A y ϕ se evalúan a partir de las condiciones iniciales, es decir, del estado del oscilador en $t = 0$.

Suponga que la partícula se pone en movimiento al jalarla desde el equilibrio una distancia A y liberarla desde el reposo en $t = 0$, como en la figura 15.6. Después se deben requerir soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ (ecuaciones 15.6 y 15.15) para obedecer las condiciones iniciales $x(0) = A$ y $v(0) = 0$:

$$x(0) = A\cos\phi = A$$

$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = 0$$

Estas condiciones se satisfacen si $\phi = 0$, lo que da $x = A\cos\omega t$ como solución. Si busca comprobar esta solución, advierta que satisface la condición $x(0) = A$ porque $\cos 0 = 1$.

La posición, velocidad y aceleración con el tiempo se grafican en la figura 15.7a para este caso especial. La aceleración alcanza valores extremos de $\mp\omega^2 A$ cuando la posición tiene valores extremos de $\pm A$. Además, la velocidad tiene valores extremos de $\pm\omega A$, que se presentan en $x = 0$. Por lo tanto, la solución cuantitativa concuerda con la descripción cualitativa de este sistema.

Considere otra posibilidad. Suponga que el sistema oscila y se define $t = 0$ como el instante cuando la partícula pasa a través de la posición no estirada del resorte mientras se mueve a la derecha (figura 15.8). En este caso, las soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ deben obedecer las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$:

$$x(0) = A\cos\phi = 0$$

$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = v_i$$

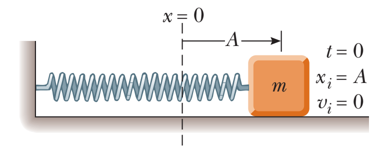


Figura 15.6 Un sistema bloque–resorte que inicia su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$. En este caso, $\phi = 0$; por lo tanto, $x = A\cos\omega t$.

La primera de estas condiciones dice que $\phi = \pm\pi/2$. Con estas opciones para ϕ, la segunda condición dice que $A = \mp v_i/\omega$. Porque la velocidad inicial es positiva y la amplitud es positiva, se debe tener $\phi = -\pi/2$. En consecuencia, la solución es

$$x = \frac{v_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración con el tiempo para esta opción de $t = 0$ se muestran en la figura 15.7b. Note que estas curvas son las mismas que en la figura 15.7a, pero desplazadas a la derecha en un cuarto de ciclo. Este corrimiento se describe matemáticamente por la constante de fase $\phi = -\pi/2$, que es un cuarto de un ciclo completo de 2π.

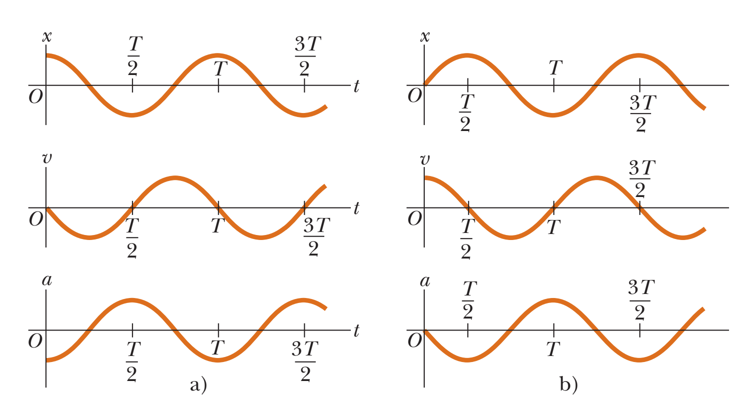


Figura 15.7 a) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para un bloque sometido a movimiento armónico simple bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = A$ y $v(0) = 0$. b) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para un bloque sometido a movimiento armónico simple bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$.

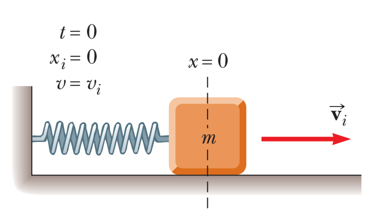


Figura 15.8 El sistema bloque–resorte sometido a oscilación y $t = 0$ se define en un instante cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con rapidez v_i.

EJEMPLO 15.1 Un sistema bloque–resorte

Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura 15.6.

A) Hallar el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 15.6 e imagine el bloque que se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple una vez que se libera. Establezca un modelo experimental en la dirección vertical al colgar un objeto pesado, como una engrapadora, de una banda de hule resistente.

Categorizar El bloque se modela como una partícula en movimiento armónico simple. Los valores se buscan a partir de las ecuaciones desarrolladas en esta sección para el modelo de partícula en movimiento armónico simple, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 15.9 para hallar la frecuencia angular del sistema bloque–resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

Use la ecuación 15.13 para encontrar el periodo del sistema:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00 \text{ rad/s}} = \boxed{1.26 \text{ s}}$$

B) Determine la rapidez máxima del bloque.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.17 para hallar $v_{\text{máx}}$:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = \boxed{0.250 \text{ m/s}}$$

C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.18 para hallar $a_{\text{máx}}$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = \boxed{1.25 \text{ m/s}^2}$$

D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

SOLUCIÓN

Encuentre la constante de fase a partir de la condición inicial de que $x = A$ en $t = 0$:

$$x(0) = A \cos \phi = A \quad \rightarrow \quad \phi = 0$$

Aplique la ecuación 15.6 para escribir una expresión para $x(t)$:

$$x = A \cos (\omega t + \phi) = \boxed{(0.050\,0 \text{ m}) \cos 5.00t}$$

Use la ecuación 15.15 para escribir una expresión para $v(t)$:

$$v = -\omega A \operatorname{sen} (\omega t + \phi) = \boxed{-(0.250 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 5.00t}$$

Aplique la ecuación 15.16 para escribir una expresión para $a(t)$:

$$a = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi) = \boxed{-(1.25 \text{ m/s}^2) \cos 5.00t}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si el bloque se libera desde la misma posición inicial, $x_i = 5.00$ cm, pero con una velocidad inicial de $v_i = -0.100$ m/s? ¿Qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas para éstas?

Respuestas La parte A) no cambia porque el periodo es independiente de cómo se pone en movimiento el oscilador. Los incisos B), C) y D) cambiarán.

Escriba las expresiones de posición y velocidad para las condiciones iniciales:

1) $x(0) = A \cos \phi = x_i$

2) $v(0) = -\omega A \operatorname{sen} \phi = v_i$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) para encontrar la constante de fase:

$$\frac{-\omega A \operatorname{sen} \phi}{A \cos \phi} = \frac{v_i}{x_i}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{-0.100 \text{ m/s}}{(5.00 \text{ rad/s})(0.050\,0 \text{ m})} = 0.400$$

$$\phi = 0.127\pi$$

Use la ecuación 1) para hallar A:

$$A = \frac{x_i}{\cos \phi} = \frac{0.050\,0 \text{ m}}{\cos(0.127\pi)} = 0.054\,3 \text{ m}$$

Encuentre la nueva rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.43 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.271 \text{ m/s}$$

Encuentre la nueva magnitud de la aceleración máxima:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.43 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.36 \text{ m/s}^2$$

Encuentre nuevas expresiones para posición, velocidad y aceleración:

$$x = (0.054\,3 \text{ m}) \cos(5.00t + 0.127\pi)$$

$$v = -(0.271 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(5.00t + 0.127\pi)$$

$$a = -(1.36 \text{ m/s}^2) \cos(5.00t + 0.127\pi)$$

Como aprendió en los capítulos 7 y 8, muchos problemas son más fáciles de resolver al aplicar una aproximación energética en lugar de usar uno en función de variables de movimiento. La condicional **¿Qué pasaría si?** es más fácil de resolver a partir de una aproximación energética. Por lo tanto, en la siguiente sección se investigará la energía del oscilador armónico simple.

EJEMPLO 15.2 ¡Cuidado con los baches!

Un automóvil con una masa de 1 300 kg se construye de modo que su chasis está sostenido mediante cuatro amortiguadores. Cada amortiguador tiene una constante de fuerza de 20 000 N/m. Dos personas que viajan en el automóvil tienen una masa combinada de 160 kg. Encuentre la frecuencia de vibración del automóvil después de que pasa sobre un bache en el camino.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en sus experiencias con los automóviles. Cuando se sienta en un automóvil, se mueve hacia abajo una distancia pequeña porque su peso comprime aún más los amortiguadores. Si usted presiona la defensa frontal y la libera, el frente del automóvil oscila algunas veces.

Categorizar Imagine que el automóvil está sostenido mediante un solo amortiguador y modele al automóvil como una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar Primero determine la constante de resorte efectiva de los cuatro amortiguadores combinados. Para una cierta extensión x de los amortiguadores, la fuerza combinada sobre el automóvil es la suma de las fuerzas de los amortiguadores individuales.

Encuentre una expresión para la fuerza total sobre el automóvil:

$$F_{\text{total}} = \sum(-kx) = -\left(\sum k\right)x$$

En esta expresión, x se factorizó de la suma porque es la misma para los cuatro amortiguadores. La constante de resorte efectiva para los amortiguadores combinados es la suma de las constantes del amortiguador individual.

Evalúe la constante de resorte efectiva:

$$k_{\text{ef}} = \sum k = 4 \times 20\,000 \text{ N/m} = 80\,000 \text{ N/m}$$

Use la ecuación 15.14 para encontrar la frecuencia de vibración:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{ef}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,460 \text{ kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

Finalizar La masa que se usa en este caso es la del automóvil más las personas, porque es la masa total que oscila. Advierta también que sólo se exploró el movimiento hacia arriba y hacia abajo del automóvil. Si se establece una oscilación en la que el automóvil se mece de atrás para adelante tal que el extremo frontal sube cuando el extremo posterior baja, la frecuencia será diferente.

¿Qué pasaría si? Suponga que el automóvil se detiene al lado del camino y las dos personas salen del auto. Una de ellas presiona hacia abajo el automóvil y lo libera de modo que oscile en la vertical. ¿La frecuencia de la oscilación es la misma que el valor recién calculado?

Respuesta El sistema de suspensión del automóvil es el mismo, pero la masa que oscila es menor: ya no incluye la masa de las dos personas. Por lo tanto, la frecuencia debe ser mayor. Calcule la nueva frecuencia considerando la masa como 1 300 kg:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{ef}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\ 000\ \text{N/m}}{1\ 300\ \text{kg}}} = 1.25\ \text{Hz}$$

Como se predijo, la nueva frecuencia es un poco mayor.

15.3 Energía del oscilador armónico simple

Examine la energía mecánica del sistema bloque–resorte que se ilustra en la figura 15.1. Ya que la superficie no tiene fricción, el sistema está aislado y es de esperar que la energía mecánica total del sistema sea constante. Ahora suponga un resorte sin masa, de modo que la energía cinética del sistema sólo corresponde a la del bloque; puede usar la ecuación 15.15 para expresar la energía cinética del bloque como

Energía cinética de un oscilador armónico simple ▶

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\,\text{sen}^2\,(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.19)}$$

La energía potencial elástica almacenada en el resorte para cualquier elongación x se conoce por $\frac{1}{2}kx^2$ (véase la ecuación 7.22). Si usa la ecuación 15.6 produce

Energía potencial de un oscilador armónico simple ▶

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2\,(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.20)}$$

Se ve que K y U *siempre* son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = k/m$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2[\text{sen}^2\,(\omega t + \phi) + \cos^2\,(\omega t + \phi)]$$

A partir de la identidad $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$, se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad. En consecuencia, esta ecuación se reduce a

Energía total de un oscilador armónico simple ▶

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \textbf{(15.21)}$$

Esto es: **la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud**. La energía mecánica total es igual a la energía potencial máxima almacenada en el resorte cuando $x = \pm A$ porque $v = 0$ en estos puntos y no hay energía cinética. En la posición de equilibrio, donde $U = 0$ porque $x = 0$, la energía total, toda en forma de energía cinética, de nuevo es $\frac{1}{2}kA^2$.

En la figura 15.9a aparecen gráficas de las energías cinética y potencial en función del tiempo, donde se consideró $\phi = 0$. En todo momento, la suma de las energías cinética y potencial es una constante igual a $\frac{1}{2}kA^2$, la energía total del sistema.

Las variaciones de K y U con la posición x del bloque se grafican en la figura 15.9b. La energía se transforma continuamente entre energía potencial almacenada en el resorte y energía cinética del bloque.

La figura 15.10 ilustra la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial del sistema bloque–resorte para un periodo completo del movimiento. La mayoría de las ideas explicadas hasta el momento se incorpora en esta importante figura. Estúdiela cuidadosamente.

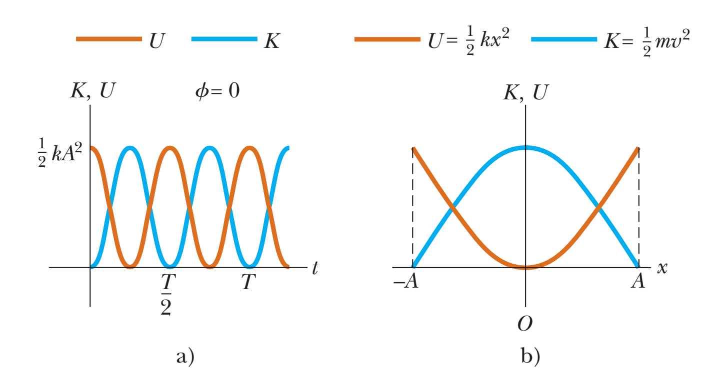


Figura 15.9 a) Energía cinética y energía potencial en función del tiempo para un oscilador armónico simple con $\phi = 0$. b) Energía cinética y energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple. En cualquier gráfica, note que $K + U =$ constante.

Por último, la velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene al expresar la energía total del sistema en alguna posición arbitraria x como

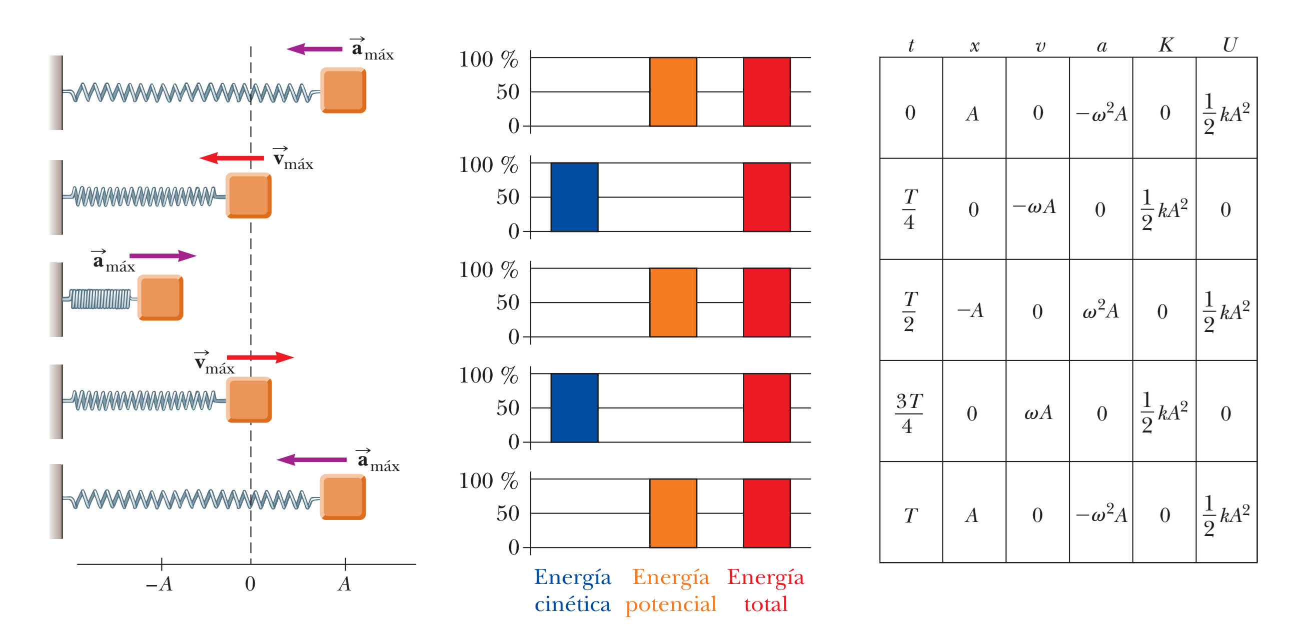
$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad \textbf{(15.22)}$$

Velocidad como función de la posición para un oscilador armónico simple

Al comprobar la ecuación 15.22 para ver si concuerda con casos conocidos, se encuentra que verifica que la rapidez es un máximo en $x = 0$ y es cero en los puntos de retorno $x = \pm A$.

Es posible que se pregunte por qué se pasa tanto tiempo en el estudio de los osciladores armónicos simples. La respuesta es porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, recuerde el potencial Lennard–Jones explicado en el ejemplo 7.9. Esta complicada función describe las fuerzas que mantienen unidos a los átomos. La figura 15.11a muestra que, para pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, la curva de energía potencial para esta función se aproxima a una parábola, que representa la función de energía potencial para un oscilador armónico simple. Por lo tanto, las fuerzas complejas de enlace atómico se modelan como debida a pequeños resortes, como se bosqueja en la figura 15.11b.



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Figura 15.10 Varios instantes en el movimiento armónico simple para un sistema bloque–resorte. Las gráficas de barras de energía muestran la distribución de la energía del sistema en cada instante. Los parámetros en la tabla de la derecha se refieren al sistema bloque–resorte, si supone que en $t = 0$, $x = A$; por eso, $x = A \cos \omega t$.

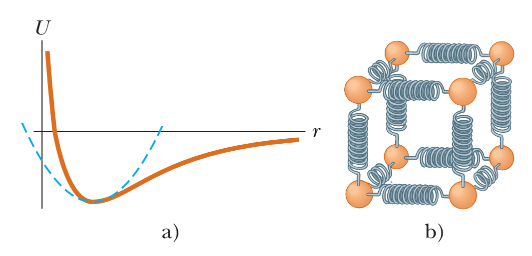


Figura 15.11 a) Si los átomos en una molécula no se mueven demasiado de sus posiciones de equilibrio, una gráfica de energía potencial con la distancia de separación entre átomos es similar a la gráfica de energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple (curva azul discontinua). b) Las fuerzas entre los átomos en un sólido se pueden modelar al imaginar resortes entre átomos vecinos.

Las ideas presentadas en este capítulo no sólo se aplican a sistemas bloque–resorte y átomos, también funcionan con una amplia gama de situaciones que incluyen el salto *bungee*, la sintonía en una estación de televisión y la visión de la luz emitida por un láser. Usted verá más ejemplos de osciladores armónicos simples mientras trabaja a lo largo de este libro.

EJEMPLO 15.3 Oscilaciones sobre una superficie horizontal

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el que la constante de fuerza es 20.0 N/m oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción.

A) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sistema oscila exactamente en la misma forma que el bloque de la figura 15.10.

Categorizar El carro se modela como una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar Use la ecuación 15.21 para encontrar la energía del oscilador:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(3.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$$
$$= \boxed{9.00 \times 10^{-3}\ \text{J}}$$

Cuando el carro está en $x = 0$, la energía del oscilador es completamente cinética, así que se establece $E = \frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}}$:

$$\tfrac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = 9.00 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2(9.00 \times 10^{-3}\ \text{J})}{0.500\ \text{kg}}} = \boxed{0.190\ \text{m/s}}$$

B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.22 para evaluar la velocidad:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{20.0\ \text{N/m}}{0.500\ \text{kg}}[(0.030\,0\ \text{m})^2 - (0.020\,0\ \text{m})^2]}$$
$$= \boxed{\pm 0.141\ \text{m/s}}$$

Los signos positivo y negativo indican que el carro podría moverse hacia la derecha o a la izquierda en este instante.

C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición es 2.00 cm.

SOLUCIÓN

Use el resultado del inciso B) para evaluar la energía cinética en $x = 0.020\,0$ m:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(0.141 \text{ m/s})^2 = 5.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Evalúe la energía potencial elástica en $x = 0.020\,0$ m:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.020\,0 \text{ m})^2 = 4.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Finalizar Advierta que la suma de las energías cinética y potencial en el inciso C) es igual a la energía total que se encontró en el inciso A). Esto debe ser cierto para *cualquier* posición del carro.

¿Qué pasaría si? El carro en este ejemplo pudo haberse puesto en movimiento al liberarlo desde el reposo en $x = 3.00$ cm. ¿Y si el carro se libera desde la misma posición, pero con una velocidad inicial de $v = -0.100$ m/s? ¿Cuáles son las nuevas amplitud y rapidez máxima del carro?

Respuesta Esta pregunta es del mismo tipo que se planteó al final del ejemplo 15.1, pero en este caso se aplica a una aproximación energética.

Primero calcule la energía total del sistema en $t = 0$:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(-0.100 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.030\,0 \text{ m})^2$$
$$= 1.15 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Iguale esta energía total con la energía potencial cuando el carro está en el punto final del movimiento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Resuelva para la amplitud A:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{20.0 \text{ N/m}}} = 0.033\,9 \text{ m}$$

Encuentre la nueva rapidez máxima al igualar la energía total con la energía cinética cuando el carro esté en la posición de equilibrio:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{0.500 \text{ kg}}} = 0.214 \text{ m/s}$$

La amplitud y velocidad máxima son mayores que los valores previos porque al carro se le dio una velocidad inicial en $t = 0$.

15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

Algunos dispositivos comunes en la vida cotidiana muestran una correspondencia entre movimiento oscilatorio y movimiento circular. Por ejemplo, el pistón en el motor de un automóvil (figura 15.12a) sube y baja (movimiento oscilatorio) aunque el resultado neto de este movimiento es el movimiento circular de las ruedas. En una locomotora antigua (figura 15.12b), el eje impulsor va de atrás para adelante en movimiento oscilatorio, lo que provoca un movimiento circular de las ruedas. En esta sección se explora esta interesante relación entre estos dos tipos de movimiento.

La figura 15.13 muestra esta correspondencia en una implementación experimental. Una bola se une al borde de una tornamesa de radio A, que está iluminada desde el lado por una lámpara. La bola proyecta una sombra sobre una pantalla. **A medida que la tornamesa da vueltas con rapidez angular constante, la sombra de la bola se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple**.

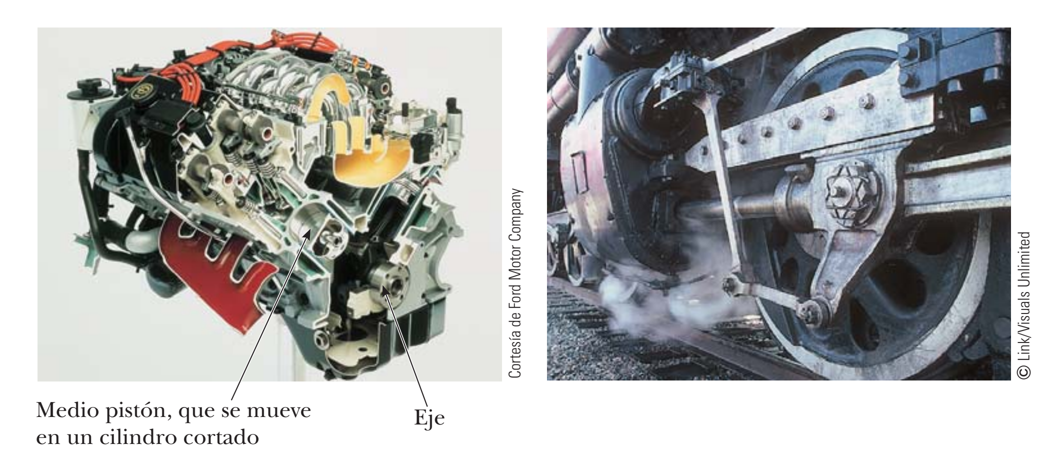


Figura 15.12 (*Izquierda*) Los pistones del motor de un automóvil se mueven en movimiento periódico a lo largo de una sola dimensión, como se muestra en este corte transversal de dos pistones. Este movimiento se convierte en el movimiento circular del cigüeñal, abajo a la derecha, y a final de cuentas de las ruedas del automóvil. (*Derecha*) El movimiento de atrás para adelante de los pistones (en la carcaza curva a la izquierda) en una locomotora antigua se convierte en movimiento circular de las ruedas.

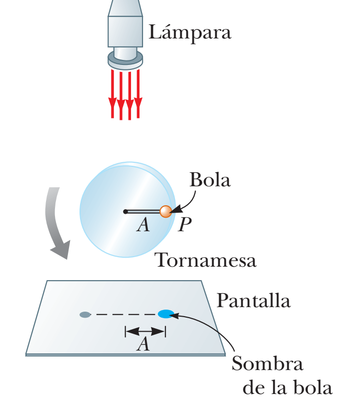


Figura 15.13 Un arreglo experimental para demostrar la conexión entre movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme. Conforme la bola da vueltas sobre la tornamesa con rapidez angular constante, su sombra sobre la pantalla se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple.

Considere una partícula ubicada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A, como en la figura 15.14a, con la línea OP que forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. A este círculo se le llama *círculo de referencia* para comparar el movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme, y se elige la posición de P en $t = 0$ como la posición de referencia. Si la partícula se mueve a lo largo del círculo con rapidez angular constante ω hasta que OP forma un ángulo θ con el eje x, como en la figura 15.14b, en algún tiempo $t > 0$ el ángulo entre OP y el eje x es $\theta = \omega t + \phi$. Conforme la partícula se mueve a lo largo del círculo, la proyección de P sobre el eje x, punto etiquetado Q, se mueve de atrás para adelante a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$.

Advierta que los puntos P y Q siempre tienen la misma coordenada x. A partir del triángulo rectángulo OPQ se ve que esta coordenada x es

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.23)}$$

Esta expresión es la misma que la ecuación 15.6 y muestra que el punto Q se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Por lo tanto, **el movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta se puede representar mediante la proyección de movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro de un círculo de referencia.**

Esta interpretación geométrica muestra que el intervalo de tiempo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo de movimiento T para movimiento armónico simple entre $x = \pm A$. Es decir, la rapidez angular ω de P es la

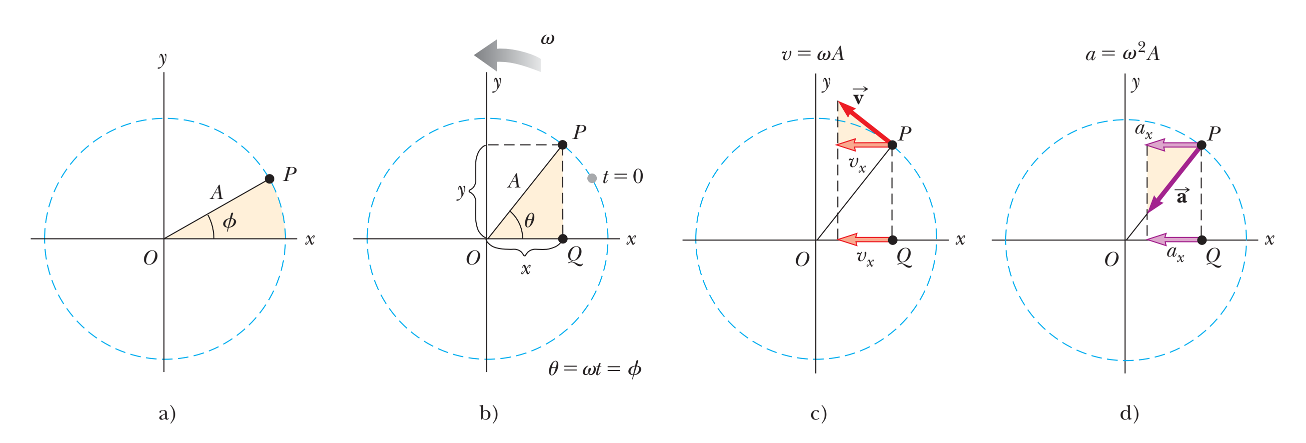


Figura 15.14 Correspondencia entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q. Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω. a) Un círculo de referencia que muestra la posición de P en $t = 0$. b) Las coordenadas x de los puntos P y Q son iguales y varían en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = A \cos(\omega t + \phi)$. c) La componente x de la velocidad de P es igual a la velocidad de Q. d) La componente x de la aceleración de P es igual a la aceleración de Q.

misma que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje x (que es por lo que se usa el mismo símbolo). La constante de fase ϕ para movimiento armónico simple corresponde al ángulo inicial OP que forma con el eje x. El radio A del círculo de referencia es igual a la amplitud del movimiento armónico simple.

Ya que la correspondencia entre rapidez lineal y angular para el movimiento circular es $v = r\omega$ (véase la ecuación 10.10), la partícula móvil en el círculo de referencia de radio A tiene una velocidad de magnitud ωA. A partir de la geometría en la figura 15.14c, se ve que la componente x de esta velocidad es $-\omega A$ sen $(\omega t + \phi)$. Por definición, el punto Q tiene una velocidad conocida por dx/dt. Derivando la ecuación 15.23 respecto al tiempo, se encuentra que la velocidad de Q es la misma que la componente x de la velocidad de P.

La aceleración de P en el círculo de referencia se dirige radialmente hacia adentro, hacia O, y tiene magnitud $v^2/A = \omega^2 A$. A partir de la geometría de la figura 15.14d, se ve que la componente x de esta aceleración es $-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$. Este valor también es la aceleración del punto proyectado Q a lo largo del eje x, como puede verificar al tomar la segunda derivada de la ecuación 15.23.

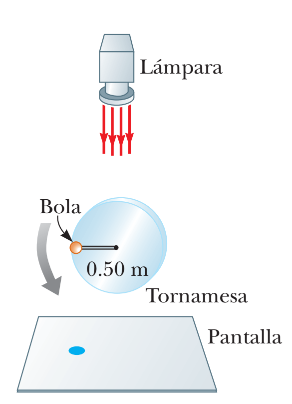


Figura 15.15 (Pregunta rápida 15.5) Un objeto se mueve en movimiento circular y proyecta una sombra sobre la pantalla abajo. Se muestra su posición en un instante de tiempo.

Pregunta rápida 15.5 La figura 15.15 muestra la posición de un objeto en movimiento circular uniforme en $t = 0$. Una luz brilla desde arriba y proyecta una sombra del objeto sobre una pantalla abajo del movimiento circular. ¿Cuáles son los valores correctos para la *amplitud* y la *constante de fase* (en relación con un eje x a la derecha) del movimiento armónico simple de la sombra? a) 0.50 m y 0, b) 1.00 m y 0, c) 0.50 y π, d) 1.00 m y π.

EJEMPLO 15.4 Movimiento circular con rapidez angular constante

Una partícula da vueltas en contra las manecillas del reloj en un círculo de 3.00 m de radio, con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, la partícula tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve hacia la derecha.

A) Determine la coordenada x de la partícula como función del tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Asegúrese de que comprende la correspondencia entre movimiento circular de una partícula y el movimiento armónico simple de su sombra, como se describe en la figura 15.13.

Categorizar La partícula sobre el círculo es una partícula bajo rapidez angular constante. La sombra es una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar Use la ecuación 15.23 para escribir una expresión para la coordenada x de la partícula en rotación con $\omega = 8.00$ rad/s:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = (3.00 \text{ m})\cos(8.00t + \phi)$$

Evalúe ϕ, use la condición inicial $x = 2.00$ m en $t = 0$:

$$2.00 \text{ m} = (3.00 \text{ m})\cos(0 + \phi)$$

Resuelva para ϕ:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00 \text{ m}}{3.00 \text{ m}}\right) = \cos^{-1}(0.667) = \pm 48.2° = \pm 0.841 \text{ rad}$$

Si se considera $\phi = +0.841$ rad como la respuesta, la partícula es móvil hacia la izquierda en $t = 0$. Ya que la partícula se mueve hacia la derecha en $t = 0$, se debe elegir $\phi = -0.841$ rad.

Escriba la coordenada x como función del tiempo:

$$x = (3.00 \text{ m})\cos(8.00t - 0.841)$$

B) Encuentre las componentes x de velocidad y aceleración de la partícula en cualquier tiempo t.

SOLUCIÓN

Derivando la coordenada x respecto al tiempo para encontrar la velocidad en cualquier tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00 \text{ m})(8.00 \text{ rad/s}) \text{ sen } (8.00t - 0.841)$$
$$= -(24.0 \text{ m/s}) \text{ sen } (8.00t - 0.841)$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo para encontrar la aceleración en cualquier tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-24.0 \text{ m/s})(8.00 \text{ rad/s}) \cos (8.00t - 0.841)$$
$$= -(192 \text{ m/s}^2) \cos (8.00t - 0.841)$$

Finalizar Aunque estos resultados se evaluaron para la partícula móvil en el círculo, recuerde que estos mismos resultados se aplican a la sombra, que se mueve en movimiento armónico simple.

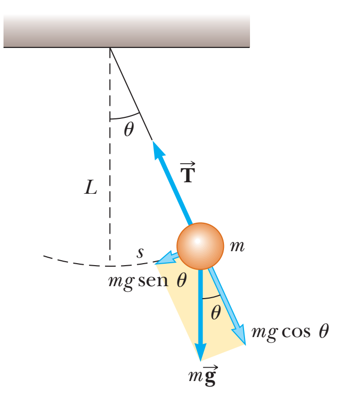


Figura 15.16 La fuerza restauradora es $-mg$ sen θ, la componente de la fuerza gravitacional tangente al arco. Cuando θ es pequeño, un péndulo simple oscila en movimiento armónico simple en torno a la posición de equilibrio $\theta = 0$.

15.5 El péndulo

El **péndulo simple** es otro sistema mecánico que muestra movimiento periódico. Consiste en una plomada parecida a una partícula de masa m suspendida de una cuerda ligera de longitud L que está fija en el extremo superior, como se muestra en la figura 15.16. El movimiento se presenta en el plano vertical y es impulsado por la fuerza gravitacional. Se demostrará que, siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor que aproximadamente 10°), el movimiento es muy cercano al de un oscilador armónico simple.

Las fuerzas que actúan en la plomada son la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$. La componente tangencial mg sen θ de la fuerza gravitacional siempre actúa hacia $\theta = 0$, opuesta al desplazamiento de la plomada desde la posición más baja. Por lo tanto, la componente tangencial es una fuerza restauradora y se puede aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = -mg \text{ sen } \theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

donde s es la posición de la plomada medida a lo largo del arco y el signo negativo indica que la fuerza tangencial actúa hacia la posición de equilibrio (vertical). Ya que $s = L\theta$ (ecuación 10.1a) y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \text{ sen } \theta$$

Al considerar θ como la posición, compare esta ecuación con la ecuación 15.3. ¿Tiene la misma forma matemática? El lado derecho es proporcional a sen θ en vez de θ; por eso, no se esperaría movimiento armónico simple porque esta expresión no tiene la forma de la ecuación 15.3. Sin embargo, si se supone que θ es *pequeño* (menor que aproximadamente 10° o 0.2 rad), se puede usar la **aproximación de ángulo pequeño**, en la que sen $\theta \approx \theta$, donde θ se mide en radianes. La tabla 15.1 muestra ángulos en grados y radianes y los senos de estos ángulos. En tanto θ sea menor que aproximadamente 10°, el ángulo en radianes y su seno son los mismos hasta dentro de una precisión menor de 1.0 por ciento.

Por lo tanto, para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad \text{(para valores pequeños de } \theta) \qquad \textbf{(15.24)}$$

La ecuación 15.24 tiene la misma forma que la ecuación 15.3, así se concluye que el movimiento para amplitudes de oscilación pequeñas se puede modelar como movimiento armónico simple. En consecuencia, la solución de la ecuación 15.24 es $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos (\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la *posición angular máxima* y la frecuencia angular ω es

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.5

Movimiento armónico simple no verdadero

El péndulo *no* muestra movimiento armónico simple verdadero para *cualquier* ángulo. Si el ángulo es menor que aproximadamente 10°, el movimiento está cerca de, y se puede, *modelar* como armónico simple.

Frecuencia angular para un péndulo simple ▶

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \textbf{(15.25)}$$

TABLA 15.1

Ángulos y senos de ángulos

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno de ángulo	Porcentaje de diferencia
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%

El periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \textbf{(15.26)}$$

◀ Periodo de un péndulo simple

En otras palabras, **el periodo y la frecuencia de un péndulo simple sólo dependen de la longitud de la cuerda y de la aceleración debida a la gravedad**. Ya que el periodo es independiente de la masa, se concluye que todos los péndulos simples que son de igual longitud y están en la misma ubicación (de modo que g es constante) oscilan con el mismo periodo.

El péndulo simple se puede usar como cronómetro porque su periodo sólo depende de su longitud y del valor local de g. También es un dispositivo conveniente para hacer mediciones precisas de la aceleración en caída libre. Tales mediciones son importantes porque las variaciones en los valores locales de g pueden proporcionar información acerca de la ubicación de petróleo y otros recursos subterráneos valiosos.

Pregunta rápida 15.6 Un reloj de péndulo depende del periodo de un péndulo para mantener el tiempo correcto. **i)** Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente y luego un niño travieso desliza la plomada del péndulo hacia abajo sobre la barra oscilante. ¿El reloj se mueve a) lento, b) rápido, o c) correctamente? **ii)** Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente a nivel del mar y luego se lleva a lo alto de una montaña muy alta. El reloj ahora se mueve, ¿a) lento, b) rápido, o c) correctamente?.

EJEMPLO 15.5 Conexión entre longitud y tiempo

Christian Huygens (1629–1695), el mayor relojero de la historia, sugirió que se podía definir una unidad internacional de longitud como la longitud de un péndulo simple que tiene un periodo de exactamente 1 s. ¿Cuánta más corta sería la unidad de longitud actual si se hubiese seguido su sugerencia?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un péndulo que se balancee de atrás para adelante en exactamente un segundo. De acuerdo con su experiencia al observar objetos que se balancean, ¿puede hacer una estimación de la longitud requerida? Cuelgue un objeto pequeño de una cuerda y simule el péndulo de 1 s.

Categorizar Este ejemplo es sobre un péndulo simple, así que se clasifica como una aplicación de los conceptos introducidos en esta sección.

Analizar Resuelva la ecuación 15.26 para la longitud y sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00\ \text{s})^2(9.80\ \text{m/s}^2)}{4\pi^2} = 0.248\ \text{m}$$

Finalizar La longitud del metro sería ligeramente menor que un cuarto de su longitud actual. Además, el número de cifras significativas sólo depende de como se conoce exactamente g, porque el tiempo se definió exactamente como 1 s.

¿Qué pasaría si? ¿Y si Huygens hubiera nacido en otro planeta? ¿Cuál tendría que ser el valor de g en dicho planeta para que el metro en función del péndulo de Huygens tuviera el mismo valor que el metro actual?

Respuesta Resuelva la ecuación 15.26 para g:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.00 \text{ m})}{(1.00 \text{ s})^2} = 4\pi^2 \text{ m/s}^2 = 39.5 \text{ m/s}^2$$

Ningún planeta en el sistema solar tiene una aceleración tan grande debida a la gravedad.

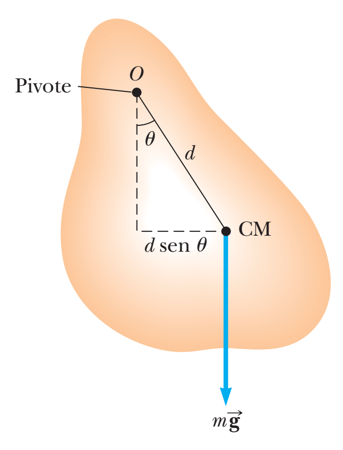


Figura 15.17 Un péndulo físico con centro de eje en O.

Péndulo físico

Suponga que usted equilibra un gancho de alambre de modo que la punta esté sostenida por su dedo índice extendido. Cuando usted da al gancho un pequeño desplazamiento angular (con su otra mano) y luego lo libera, oscila. Si un objeto que cuelga oscila en torno a un eje fijo que no pasa a través de su centro de masa y el objeto no se puede aproximar como una masa puntual, no se puede tratar al sistema como un péndulo simple. En este caso, el sistema se llama **péndulo físico**.

Considere un objeto rígido con centro de eje en un punto O que está a una distancia d del centro de masa (figura 15.17). La fuerza gravitacional proporciona un momento de torsión en torno a un eje a través de O, y la magnitud de dicho momento de torsión es mgd sen θ, donde θ es como se muestra en la figura 15.17. El objeto se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto y usa la forma rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma\, \tau = I\alpha$, donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje a través de O. El resultado es

$$-mgd \operatorname{sen} \theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo negativo indica que el momento de torsión en torno a O tiende a disminuir θ. Es decir, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión restaurador. Si de nuevo se supone que θ es pequeño, la aproximación sen $\theta \approx \theta$ es válido y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta \qquad \textbf{(15.27)}$$

Ya que esta ecuación es de la misma forma que la ecuación 15.3, su solución es la del oscilador armónico simple. Es decir: la solución de la ecuación 15.27 se conoce por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la máxima posición angular y

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo es

Periodo de un péndulo físico ▶

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad \textbf{(15.28)}$$

Este resultado se puede usar para medir el momento de inercia de un objeto rígido plano. Si se conoce la posición del centro de masa y, por lo tanto, el valor de d, se obtiene el momento de inercia al medir el periodo. Por último, advierta que la ecuación 15.28 se reduce al periodo de un péndulo simple (ecuación 15.26) cuando $I = md^2$, es decir, cuando toda la masa se concentra en el centro de masa.

EJEMPLO 15.6 Una barra que se balancea

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.18). Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

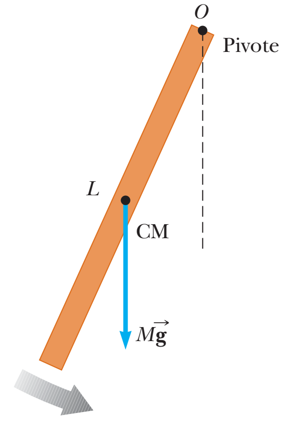


Figura 15.18 (Ejemplo 15.6) Una barra rígida que oscila en torno a un eje a través de un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$ y, de la tabla 10.2, $\frac{1}{3}ML^2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una barra que se balancea de atrás para adelante cuando se articula en un extremo. Inténtelo con una regleta o una pieza de madera.

Categorizar Ya que la barra no es una partícula puntual, se le clasifica como un péndulo físico.

Analizar En el capítulo 10 se encontró que el momento de inercia de una barra uniforme en torno a un eje a través de un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d desde el eje al centro de masa de la barra es $L/2$.

Sustituya estas cantidades en la ecuación 15.28:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Finalizar En uno de los alunizajes, un astronauta que caminaba sobre la superficie de la Luna tenía un cinturón que colgaba de su traje espacial, y el cinturón osciló como un péndulo físico. Un científico en la Tierra observó este movimiento en televisión y lo usó para estimar la aceleración de caída libre en la Luna. ¿Cómo hizo este cálculo el científico?

Péndulo de torsión

La figura 15.19 muestra un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a lo alto de un soporte fijo. Cuando el objeto gira a través de cierto ángulo θ, el alambre que gira ejerce sobre el objeto un momento de torsión restaurador que es proporcional a la posición angular. Es decir,

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ (letra griega kappa) se llama *constante de torsión* del alambre de soporte. El valor de κ se puede obtener al aplicar un momento de torsión conocido para girar el alambre a través de un ángulo mensurable θ. Al aplicar la segunda ley de Newton para movimiento rotacional, se encuentra que

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad \textbf{(15.29)}$$

De nuevo, este resultado es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple, con $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad \textbf{(15.30)}$$

◀ Periodo de un péndulo de torsión

Este sistema se llama *péndulo de torsión*. En esta situación no hay restricción de ángulo pequeño, en tanto no se supere el límite elástico del alambre.

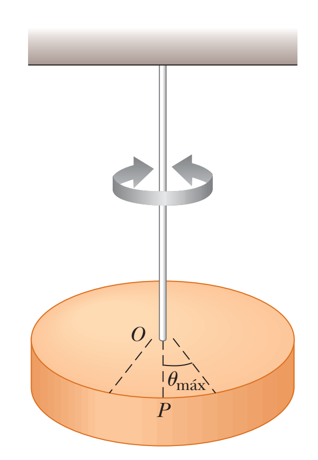


Figura 15.19 Un péndulo de torsión consiste en un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a un soporte rígido. El objeto oscila en torno a la línea OP con una amplitud $\theta_{máx}$.

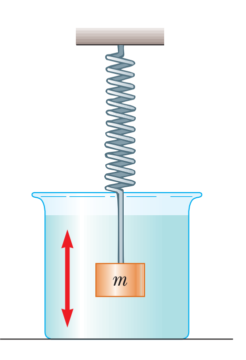


Figura 15.20 Un ejemplo de un oscilador amortiguado es un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

15.6 Oscilaciones amortiguadas

Los movimientos oscilatorios considerados hasta el momento han sido para sistemas ideales: sistemas que oscilan indefinidamente sólo bajo la acción de una fuerza, una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción retardan el movimiento. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está *amortiguado*. La energía mecánica perdida se transforma en energía interna en el objeto y el medio retardador. La figura 15.20 bosqueja uno de tales sistemas: un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Un tipo común de fuerza retardadora es la que se explicó en la sección 6.4, donde la fuerza es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento y actúa en la dirección opuesta a la velocidad del objeto respecto al medio. Con frecuencia, esta fuerza retardadora se observa cuando un objeto se mueve a través de aire, por ejemplo. Ya que la fuerza retardadora se puede expresar como $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ (donde b es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*) y la fuerza restauradora del sistema es $-kx$, se puede escribir la segunda ley de Newton como

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \textbf{(15.31)}$$

La solución a esta ecuación requiere matemática que tal vez no le sea familiar; en este caso simplemente se establece sin prueba. Cuando la fuerza retardadora es pequeña en comparación con la fuerza restauradora máxima (es decir, cuando b es pequeña), la solución a la ecuación 15.31 es

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.32)}$$

donde la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \textbf{(15.33)}$$

Este resultado se puede verificar al sustituir la ecuación 15.32 en la ecuación 15.31. Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama **frecuencia natural** del sistema.

La figura 15.21 muestra la posición como función del tiempo para un objeto que oscila en presencia de una fuerza retardadora. **Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa.** Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**. Las líneas azules discontinuas en la figura 15.21, que definen la *cubierta* de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación 15.32. Esta cubierta muestra que **la amplitud decae exponencialmente con el tiempo**. Para movimiento con una constante de resorte y masa de cierto objeto, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente para valores más grandes de la fuerza retardadora.

Cuando la magnitud de la fuerza retardadora es pequeña, tal que $b/2m < \omega_0$, se dice que el sistema está **subamortiguado**. El movimiento resultante se representa mediante la curva azul de la figura 15.22. Conforme el valor de b aumenta, la amplitud de las oscilaciones disminuye más y más rápidamente. Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está **críticamente amortiguado**. En este caso, el sistema, una vez liberado del reposo en alguna posición de no equilibrio, se aproxima pero no pasa a través de la posición de equilibrio. La gráfica de posición frente a tiempo para este caso es la curva roja en la figura 15.22.

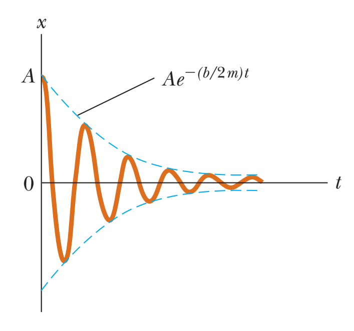


Figura 15.21 Gráfica de posición en función del tiempo para un oscilador amortiguado. Note la disminución en amplitud con el tiempo.

Si el medio es tan viscoso que la fuerza retardadora es grande en comparación con la fuerza restauradora (es decir, si $b/2m > \omega_0$), el sistema está **sobreamortiguado.** De nuevo, el sistema desplazado, cuando tiene libertad para moverse, no oscila sino simplemente regresa a la posición de equilibrio. Conforme el amortiguamiento aumenta, el intervalo de tiempo requerido para que el sistema se aproxime al equilibrio también aumenta, como indica la curva negra en la figura 15.22. Para sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no hay frecuencia angular ω y la solución en la ecuación 15.32 no es válida.

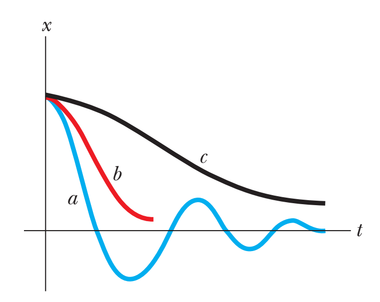


Figura 15.22 Gráficas de posición en función del tiempo para un oscilador subamortiguado (azul, curva a), un oscilador críticamente amortiguado (rojo, curva b) y un oscilador sobreamortiguado (negro, curva c).

15.7 Oscilaciones forzadas

Se ha visto que la energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza resistiva. Es posible compensar esta disminución de energía al aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo en el sistema. En cualquier instante, se puede transferir energía al sistema mediante una fuerza aplicada que actúe en la dirección de movimiento del oscilador. Por ejemplo, un niño en un columpio se puede mantener en movimiento mediante "empujones" adecuadamente cronometrados. La amplitud del movimiento permanece constante si la entrada de energía por cada ciclo de movimiento iguala exactamente la disminución en energía mecánica en cada ciclo que resulta de las fuerzas resistivas.

Un ejemplo común de un oscilador forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía periódicamente, como $F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t$, donde F_0 es una constante y ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. En general, la frecuencia ω de la fuerza impulsora es variable, mientras que la frecuencia natural ω_0 del oscilador es fija por los valores de k y m. La segunda ley de Newton en esta situación produce

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad F_0 \text{ sen } \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \textbf{(15.34)}$$

De nuevo, la solución de esta ecuación es más bien larga y no se presentará. Después de que comienza a actuar la fuerza impulsora en un objeto inicialmente estable, la amplitud de la oscilación aumentará. Después de un periodo de tiempo suficientemente largo, cuando la entrada de energía por cada ciclo de la fuerza impulsora sea igual a la cantidad de energía mecánica transformada a energía interna por cada ciclo, se alcanza una condición de estado estacionario en que las oscilaciones proceden con amplitud constante. En esta situación, la solución de la ecuación 15.34 es

$$x = A \cos (\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.35)}$$

donde

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^{\,2})^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad \textbf{(15.36)}$$

◄ Amplitud de un oscilador impulsado

y donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador subamortiguado ($b = 0$).

Las ecuaciones 15.35 y 15.36 muestran que el oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora y que la amplitud del oscilador es constante para una fuerza impulsora determinada porque se impulsa en estado estacionario mediante una fuerza externa. Para amortiguamiento pequeño, la amplitud es grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está cerca de la frecuencia natural de oscilación, o cuando $\omega \approx \omega_0$. El dramático aumento en amplitud cerca de la frecuencia natural se llama **resonancia**, y la frecuencia natural ω_0 también se llama la **frecuencia de resonancia** del sistema.

La explicación para oscilaciones de gran amplitud en la frecuencia de resonancia es que la energía se transfiere al sistema bajo las condiciones más favorables. Este concepto se comprende mejor si se considera la primera derivada de x en el tiempo en la ecuación 15.35, que produce una expresión para la velocidad del oscilador. Se encuentra que v es proporcional a $\text{sen}(\omega t + \phi)$, que es la misma función trigonométrica que la descrita por la fuerza impulsora. Por lo tanto, la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ está en fase con la velocidad. La rapidez a la que $\vec{\mathbf{F}}$ realiza trabajo sobre el oscilador es igual al producto punto $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$; esta cantidad

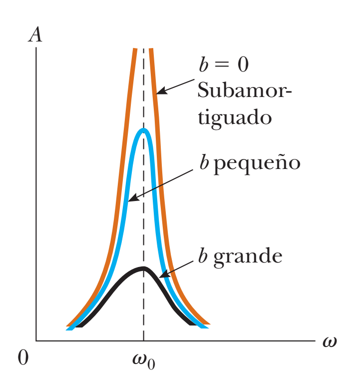


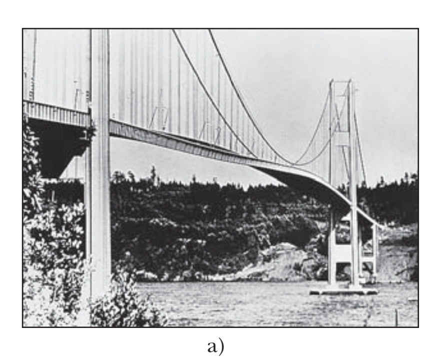
Figura 15.23 Gráfica de amplitud en función de la frecuencia para un oscilador amortiguado cuando está presente una fuerza impulsora periódica. Cuando la frecuencia ω de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural ω_0 del oscilador, presenta resonancia. Advierta que la forma de la curva de resonancia depende del tamaño del coeficiente de amortiguamiento b.

es la potencia entregada al oscilador. Ya que el producto $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ es un máximo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ están en fase, se concluye que, **en resonancia, la fuerza aplicada está en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es un máximo**.

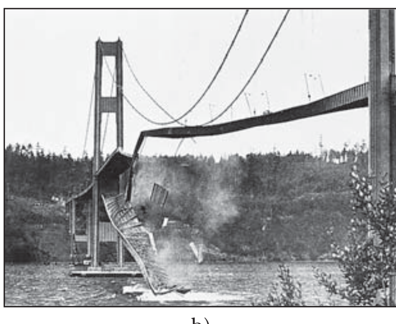
La figura 15.23 es una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin amortiguamiento. Advierta que la amplitud aumenta con amortiguamiento decreciente ($b \rightarrow 0$) y que la curva de resonancia se ensancha a medida que aumenta el amortiguamiento. En ausencia de una fuerza de amortiguamiento ($b = 0$), se ve por la ecuación 15.36 que la amplitud en estado estacionario tiende a infinito conforme ω tiende a ω_0. En otras palabras, si no hay pérdidas en el sistema y se continúa impulsando un oscilador inicialmente sin movimiento con una fuerza periódica que está en fase con la velocidad, la amplitud del movimiento se acumula sin límite (véase la curva café de la figura 15.23). Esta acumulación sin límite no se presenta en la práctica porque en realidad siempre hay presente algún amortiguamiento.

Más adelante en este libro se verá que la resonancia aparece en otras áreas de la física. Por ejemplo, ciertos circuitos eléctricos tienen frecuencias naturales. Un puente tiene frecuencias naturales que se pueden poner en resonancia mediante una fuerza impulsora adecuada. Un ejemplo dramático de tal resonancia se presentó en 1940, cuando el puente Tacoma Narrows, en el estado de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el "aleteo" del viento a través del camino (piense en el "aleteo" de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia emparejó con la del puente. Las oscilaciones del puente resultantes hicieron que a final de cuentas colapsara (figura 15.24) porque el diseño del puente tenía características inadecuadas de seguridad interna.

Muchos otros ejemplos de vibraciones resonantes se pueden citar. Una vibración resonante que puede haber experimentado el lector es el "canturreo" de los cables de teléfono en el viento. Las máquinas se rompen con frecuencia si una parte en vibración está en resonancia con alguna otra parte móvil. Se ha sabido de soldados que, al marchar en cadencia por un puente, establecieron vibraciones resonantes en la estructura y por ello causaron su colapso. Siempre que cualquier sistema físico real sea impulsado cerca de su frecuencia de resonancia, es posible esperar oscilaciones de amplitudes muy grandes.



a)



b)

Figura 15.24 a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (*UPI/Bettmann Newsphotos*)

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las energías cinética y potencial de un objeto de masa m que oscila en el extremo de un resorte con constante de fuerza k varían con el tiempo y se conoce por

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.19)}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.20)}$$

La energía total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y se conoce por

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad \textbf{(15.21)}$$

Un **péndulo simple** de longitud L se mueve en movimiento armónico simple para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical. Su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \textbf{(15.26)}$$

Para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical, un **péndulo físico** se mueve en movimiento armónico simple en torno a un perno que no pasa a través del centro de masa. El periodo de este movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \textbf{(15.28)}$$

donde I es el momento de inercia en torno a un eje a través del eje y d es la distancia desde el eje al centro de masa.

Si un oscilador experimenta una fuerza amortiguadora $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$, su posición para amortiguamiento pequeño está descrita por

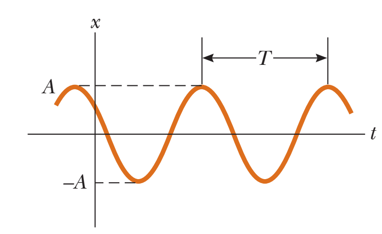
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.32)}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \textbf{(15.33)}$$

Si un oscilador está sujeto a una fuerza impulsora sinusoidal $F(t) = F_0$ sen ωt, muestra **resonancia**, en la cual la amplitud es mayor cuando la frecuencia impulsora ω coincide con la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ del oscilador.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Partícula en movimiento armónico simple Si una partícula se somete a una fuerza de la forma de la ley de Hooke, $F = -kx$, la partícula muestra **movimiento armónico simple**. Su posición se describe mediante

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.6)}$$

donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. El valor de ϕ depende de la posición y velocidad iniciales del oscilador.

El **periodo** de la oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \textbf{(15.13)}$$

y el inverso del periodo es la **frecuencia**.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Una pelota que rebota es un ejemplo de movimiento armónico simple? ¿El movimiento diario de un estudiante desde su casa a la escuela y de regreso es un movimiento armónico simple? ¿Por qué sí o por qué no?

2. **O** Una partícula en un resorte se mueve en movimiento armónico simple a lo largo del eje x entre los puntos de retorno en $x_1 = 100$ cm y $x_2 = 140$ cm. **i)** ¿En cuál de las siguientes posiciones la partícula tiene rapidez máxima? a) 100 cm, b) 110 cm, c) 120 cm, d) alguna otra posición, e) El mismo valor mayor se presenta en múltiples puntos. **ii)** ¿En cuál posición tiene aceleración máxima? Escoja de las mismas posibilidades. **iii)** ¿En cuál posición se ejerce la mayor fuerza neta sobre la partícula? **iv)** ¿En cuál posición la partícula tiene la mayor magnitud de cantidad de movimiento? **v)** ¿En cuál posición la partícula tiene mayor energía cinética? **vi)** ¿En cuál posición el sistema partícula–resorte tiene la mayor energía total?

3. Si la coordenada de una partícula varía como $x = -A \cos \omega t$, ¿cuál es la constante de fase en la ecuación 15.6? ¿En qué posición la partícula está en $t = 0$?

4. **O** Clasifique los periodos de los siguientes sistemas oscilatorios, de mayor a menor. Si algunos periodos son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. Cada sistema difiere sólo en una forma del sistema a), que es un deslizador de 0.1 kg sobre una superficie horizontal sin fricción que oscila con 0.1 m de amplitud sobre un resorte con constante de fuerza de 10 N/m. En la situación b), la amplitud es de 0.2 m. En la situación c), la masa es de 0.2 kg. En la situación d), el resorte tiene constante de rigidez de 20 N/m. La situación e) es como la situación a), excepto por estar en un campo gravitacional de 4.9 m/s^2 en lugar de 9.8 m/s^2. La situación f) es como la situación a), excepto que el objeto rebota en movimiento armónico simple sobre el extremo inferior del resorte que cuelga verticalmente. La situación g) es como la situación a), excepto que una pequeña fuerza resistiva hace subamortiguado al movimiento.

5. **O** Para un oscilador armónico simple, la posición se mide como el desplazamiento desde el equilibrio. a) ¿Las cantidades posición y velocidad pueden estar en la misma dirección? b) ¿La velocidad y la aceleración pueden estar en la misma dirección? c) ¿La posición y la aceleración pueden estar en la misma dirección?

6. **O** La parte superior de un resorte se mantiene fija. Un bloque cuelga en el extremo inferior y se mide la frecuencia f de la oscilación del sistema. El bloque, un segundo bloque idéntico y el resorte se llevan al trasbordador espacial para orbitar la Tierra. Los dos bloques se unen a los extremos del resorte. El resorte se comprime, sin hacer que espiras adyacentes se toquen, y el sistema se libera para oscilar mientras flota dentro de la cabina del trasbordador. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación para este sistema en términos de f? a) $f/4$, b) $f/2$, c) $f/\sqrt{2}$, d) f, e) $\sqrt{2}f$, f) $2f$, g) $4f$.

7. **O** Usted une un bloque al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente. Deja que el bloque se mueva despacio hacia abajo y encuentra que cuelga en reposo con el resorte estirado 15.0 cm. A continuación, levanta el bloque de nuevo y lo libera desde el reposo con el resorte no estirado. ¿Qué distancia máxima se mueve hacia abajo? a) 7.5 cm, b) 15.0 cm, c) 30.0 cm, d) 60.0 cm, e) No se puede determinar la distancia sin conocer la masa y la constante del resorte.

8. Las ecuaciones que se mencionan en la tabla 2.2 dan la posición como una función del tiempo, la velocidad como una función del tiempo y la velocidad como función de la posición para un objeto que se mueve en línea recta con aceleración constante. La cantidad v_{xi} aparece en cada ecuación. ¿Alguna de estas ecuaciones se aplica a un objeto que se mueve en línea recta con movimiento armónico simple? Con un formato similar, haga una tabla de ecuaciones que describan el movimiento armónico simple. Incluya ecuaciones que den la aceleración como una función del tiempo y la aceleración como una función de la posición. Establezca las ecuaciones en tal forma que se apliquen igualmente a un sistema bloque–resorte, a un péndulo y a otros sistemas en vibración. ¿Qué cantidad aparece en cada ecuación?

9. **O** Un péndulo simple tiene un periodo de 2.5 s. **i)** ¿Cuál es su periodo, si su longitud se hace cuatro veces más grande? a) 0.625 s, b) 1.25 s, c) 2.5 s, d) 3.54 s, e) 5 s, f) 10 s. **ii)** ¿Cuál es su periodo si, en lugar de cambiar su longitud, la masa de la plomada suspendida se hace cuatro veces más grande? Elija entre las mismas posibilidades.

10. **O** Un péndulo simple está suspendido del techo de un elevador estable y se determina el periodo. **i)** Cuando el elevador acelera hacia arriba, ¿el periodo es a) mayor, b) menor o c) no cambia? **ii)** Cuando el elevador tiene aceleración hacia abajo, ¿el periodo es a) mayor, b) menor o c) no cambia? **iii)** Cuando el elevador se mueve con velocidad constante hacia arriba, ¿el periodo del péndulo es a) mayor, b) menor o c) no cambia?

11. La figura P15.11 muestra gráficas de la energía potencial de cuatro sistemas diferentes en función de la posición de una partícula en cada sistema. Cada partícula se pone en movimiento con un empujón en una ubicación elegida arbitrariamente. Describa su movimiento posterior en cada caso a), b), c) y d).

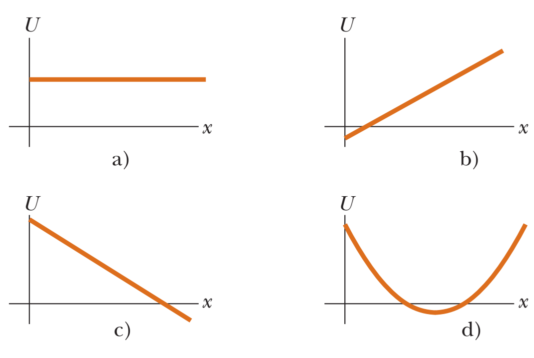


Figura P15.11

12. Un péndulo simple se puede modelar como uno de movimiento armónico simple cuando θ es pequeño. ¿El movimiento es periódico cuando θ es grande? ¿Cómo varía el periodo del movimiento conforme θ aumenta?

13. La energía mecánica de un sistema bloque–resorte no amortiguado es constante a medida que la energía cinética se transforma en energía potencial elástica y viceversa. Para comparar,

explique en los mismos términos qué sucede a la energía de un oscilador amortiguado.

14. Un estudiante cree que cualquier vibración real debe ser amortiguada. ¿El estudiante tiene razón? Si es así, proporcione un razonamiento convincente. Si no, dé un ejemplo de una vibración real que mantenga amplitud constante por siempre, si el sistema está aislado.

15. ¿Se presentarían oscilaciones amortiguadas para cualquier valor de b y k? Explique.

16. ¿Es posible tener oscilaciones amortiguadas cuando un sistema está en resonancia? Explique.

17. Usted está de pie en el borde de un trampolín y rebota para ponerlo en oscilación. Encuentra una respuesta máxima, en términos de la amplitud de oscilación del borde del trampolín, cuando rebote a la frecuencia f. Ahora se mueve a la mitad del trampolín y repite el experimento. ¿La frecuencia de resonancia para oscilaciones forzadas en este punto es mayor, menor o la misma que f? ¿Por qué?

18. Usted observa un pequeño árbol frondoso. No nota brisa y la mayoría de las hojas en el árbol están sin movimiento. Sin embargo, una hoja se agita salvajemente de atrás para adelante. Después de un rato, la hoja deja de moverse y usted nota que una hoja diferente se mueve mucho más que todas las demás. Explique qué podría causar el gran movimiento de una hoja particular.

19. La plomada de cierto péndulo es una esfera llena con agua. ¿Qué ocurriría a la frecuencia de vibración de este péndulo si hubiera un orificio en la esfera que permitiera al agua salir lentamente?

Problemas

Nota: Ignore la masa de cada resorte, excepto en los problemas 62 y 64.

Sección 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Los problemas 16, 17, 18, 26 y 60 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

1. ● Se deja caer una bola desde una altura de 4.00 m que realiza una colisión elástica con el suelo. Si supone que no hay pérdida de energía mecánica debida a resistencia del aire, a) demuestre que el movimiento resultante es periódico y b) determine el periodo del movimiento. c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

Sección 15.2 Partícula en movimiento armónico simple

2. En un motor, un pistón oscila con movimiento armónico simple de modo que su posición varía de acuerdo con la expresión

$$x = (5.00 \text{ cm}) \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

donde x está en centímetros y t en segundos. En $t = 0$, encuentre a) la posición de la partícula, b) su velocidad y c) su aceleración. d) Encuentre el periodo y amplitud del movimiento.

3. La posición de una partícula se conoce por la expresión $x = (4.00 \text{ m}) \cos(3.00\pi t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine: a) la frecuencia y periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase y d) la posición de la partícula en $t = 0.250$ s.

4. ● a) Un resorte que cuelga se estira 35.0 cm cuando un objeto de 450 g de masa se cuelga de él en reposo. En esta situación se define su posición como $x = 0$. El objeto se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. ¿Cuál es su posición x en un momento 84.4 s más tarde? b) **¿Qué pasaría si?** Otro resorte que cuelga se estira 35.5 cm cuando un objeto de 440 g de masa se cuelga de él en reposo. Esta nueva posición se define como $x = 0$. Dicho objeto también se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. Encuentre su posición 84.4 s más tarde. c) ¿Por qué las respuestas a los incisos a) y b) son diferentes en un porcentaje tan grande cuando los datos son tan similares? ¿Esta circunstancia revela una dificultad fundamental para calcular el futuro? d) Encuentre la distancia recorrida por el objeto en vibración del inciso a). e) Encuentre la distancia recorrida por el objeto en el inciso b).

5. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x en movimiento armónico simple parte de su posición de equilibrio, el origen, en $t = 0$ y se mueve a la derecha. La amplitud de su movimiento es de 2.00 cm y la frecuencia de 1.50 Hz. a) Demuestre que la posición de la partícula se conoce por

$$x = (2.00 \text{ cm}) \text{ sen}(3.00\pi t)$$

Determine b) la rapidez máxima y el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta rapidez, c) la aceleración máxima y el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta aceleración, y d) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.

6. Un oscilador armónico simple tarda 12.0 s en someterse a cinco vibraciones completas. Encuentre a) el periodo de su movimiento, b) la frecuencia en hertz y c) la frecuencia angular en radianes por segundo.

7. Un objeto de 7.00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical amarrado a una viga. El objeto se pone a oscilar verticalmente con un periodo de 2.60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.

8. **Problema de repaso.** Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Al inicio está en la posición 0.270 m, y se mueve con velocidad de 0.140 m/s y aceleración de -0.320 m/s^2. Suponga que se mueve con aceleración constante durante 4.50 s. Encuentre a) su posición y b) su velocidad al final de este intervalo de tiempo. A continuación, suponga que se mueve con movimiento armónico simple durante 4.50 s y $x = 0$ es su posición de equilibrio. Encuentre c) su posición y d) su velocidad al final de este intervalo de tiempo.

9. Un pistón en un motor a gasolina está en movimiento armónico simple. Si considera los extremos de su posición relativa con su punto central como ± 5.00 cm, encuentre la velocidad máxima y la aceleración del pistón cuando el motor está funcionando a 3 600 rev/min.

10. Un deslizador de 1.00 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 25.0 N/m, oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. En $t = 0$, el deslizador se libera desde el reposo en $x = -3.00$ cm. (Es decir: el resorte se comprime 3.00 cm.) Encuentre a) el periodo de su movimiento, b) los valores máximos de su rapidez y aceleración, y c) la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

11. Un objeto de 0.500 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 8.0 N/m, vibra en movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Calcule a) el máximo valor de su rapidez y aceleración, b) la rapidez y aceleración cuando el objeto está a 6.00 cm de la posición de equilibrio, y c) el intervalo de tiempo requerido para que el objeto se mueva de $x = 0$ a $x = 8.00$ cm.

12. ● Usted une un objeto al extremo inferior de un resorte vertical que cuelga en reposo después de extender el resorte 18.3 cm. Luego pone el objeto a vibrar. ¿Tiene suficiente información para encontrar su periodo? Explique su respuesta y establezca lo que pueda acerca de su periodo.

13. Un objeto de 1.00 kg se une a un resorte horizontal. El resorte inicialmente se estira 0.100 m y ahí se libera el objeto desde el reposo. Éste comienza a moverse sin fricción. La siguiente vez que la rapidez del objeto es cero es 0.500 s después. ¿Cuál es la rapidez máxima del objeto?

Sección 15.3 Energía del oscilador armónico simple

14. Un bloque de 200 g se une a un resorte horizontal y ejecuta movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. La energía total del sistema es de 2.00 J. Encuentre a) la constante de fuerza del resorte y b) la amplitud del movimiento.

15. Un automóvil que tiene 1 000 kg de masa se conduce hacia una pared de ladrillo en una prueba de seguridad. La defensa del automóvil se comporta como un resorte con constante de 5.00×10^6 N/m y se comprime 3.16 cm mientras el auto se lleva al reposo. ¿Cuál fue la rapidez del automóvil antes del impacto, si supone que no hay pérdida de energía mecánica durante el impacto con la pared?

16. Un sistema bloque–resorte oscila con una amplitud de 3.50 cm. La constante de resorte es 250 N/m y la masa del bloque es 0.500 kg. Determine a) la energía mecánica del sistema, b) la rapidez máxima del bloque y c) la aceleración máxima.

17. Un objeto de 50.0 g, conectado a un resorte con una constante de fuerza de 35.0 N/m, oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 4.00 cm. Encuentre a) la energía total del sistema y b) la rapidez del objeto cuando la posición es de 1.00 cm. Encuentre c) la energía cinética y d) la energía potencial cuando la posición es de 3.00 cm.

18. Un objeto de 2.00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie horizontal uniforme. Se requiere una fuerza horizontal de 20.0 N para mantener al objeto en reposo cuando se jala 0.200 m desde su posición de equilibrio (el origen del eje x). Ahora el objeto se libera desde el reposo con una posición inicial $x_i = 0.200$ m y se somete a sucesivas oscilaciones armónicas simples. Encuentre a) la constante de fuerza del resorte, b) la frecuencia de las oscilaciones y c) la rapidez máxima del objeto. ¿Dónde se presenta la rapidez máxima? d) Encuentre la aceleración máxima del objeto. ¿Dónde se presenta? e) Encuentre la energía total del sistema oscilante. Encuentre f) la rapidez y g) la aceleración del objeto cuando su posición es igual a un tercio del valor máximo.

19. Una partícula ejecuta movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿En qué posición su rapidez es igual a la mitad de su rapidez máxima?

20. Una saltadora de *bungee* de 65.00 kg salta de un puente con una cuerda ligera amarrada a ella y al puente (figura P15.20). La longitud no estirada de la cuerda es de 11.0 m. La saltadora alcanza el fondo de su movimiento 36.0 m abajo del puente antes de rebotar de regreso. Su movimiento se puede separar en una caída libre de 11.0 m y una sección de 25.0 m de oscilación armónica simple. a) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en caída libre? b) Use el principio de conservación de la energía para hallar la constante de resorte de la cuerda *bungee*. c) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza del resorte equilibra la fuerza gravitacional ejercida sobre la saltadora? Este punto se considera como el origen de la descripción matemática de la oscilación armónica simple. d) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? e) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la cuerda se estire 25.0 m? f) ¿Cuál es el intervalo de tiempo total para todo el salto de 36.0 m?



Figura P15.20 Problemas 20 y 54.

21. Un carro unido a un resorte con constante de 3.24 N/m vibra de tal modo que su posición se conoce por la función $x = (5.00 \text{ cm}) \cos (3.60t \text{ rad/s})$. a) Durante el primer ciclo, para $0 < t < 1.75$ s, ¿a qué valor de t cambia más rápidamente la energía potencial del sistema en energía cinética? b) ¿Cuál es la rapidez máxima de transformación de energía?

Sección 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

22. ● Considere el motor simplificado de un solo pistón de la figura P15.22. Si supone que la rueda da vueltas con rapidez angular constante, explique por qué la barra del pistón oscila en movimiento armónico simple.

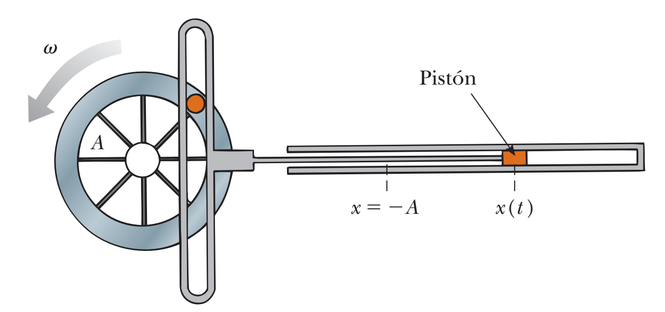


Figura P15.22

23. ● Mientras viaja detrás de un automóvil a 3.00 m/s, advierte que una de las llantas del automóvil tiene un pequeño chichón en el borde, como se muestra en la figura P15.23. a) Explique por qué el chichón, desde su punto de vista detrás del automóvil, ejecuta movimiento armónico simple. b) Si el radio de la llanta del automóvil es de 0.300 m, ¿cuál es el periodo de oscilación del chichón?

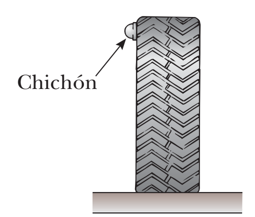


Figura P15.23

Sección 15.5 El péndulo

El problema 52 del capítulo 1 también se puede asignar en esta sección.

24. Un "péndulo segundero" es aquel que se mueve a través de su posición de equilibrio una vez cada segundo. (El periodo del péndulo es precisamente 2 s.) La longitud de un péndulo segundero es de 0.992 7 m en Tokyo, Japón, y de 0.994 2 m en Cambridge, Inglaterra. ¿Cuál es la relación de las aceleraciones en caída libre en estas dos ubicaciones?

25. ● Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Se desplaza a través de un ángulo de 15.0° y luego se libera. ¿Cuáles son a) la rapidez máxima, b) la aceleración angular máxima y c) la fuerza restauradora máxima? **¿Qué pasaría si?** Resuelva este problema mediante el modelo de movimiento armónico simple para el movimiento del péndulo y luego resuelva el problema con principios más generales. Compare las respuestas.

26. La posición angular de un péndulo se representa mediante la ecuación $\theta = (0.032\,0 \text{ rad}) \cos \omega t$, donde θ está en radianes y $\omega = 4.43$ rad/s. Determine el periodo y la longitud del péndulo.

27. Una partícula de masa m se desliza sin fricción dentro de un tazón hemisférico de radio R. Demuestre que, si la partícula parte del reposo con un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual al de un péndulo simple de longitud R. Es decir, $\omega = \sqrt{g/R}$.

28. **Problema de repaso.** Un péndulo simple tiene 5.00 m de longitud. a) ¿Cuál es el periodo de oscilaciones pequeñas para este péndulo, si se ubica en un elevador que acelera hacia arriba a 5.00 m/s^2? b) ¿Cuál es su periodo si el elevador acelera hacia abajo a 5.00 m/s^2? c) ¿Cuál es el periodo de este péndulo si se coloca en un camión que acelera horizontalmente a 5.00 m/s^2?

29. Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 0.450 Hz. El péndulo tiene una masa de 2.20 kg y el eje se ubica a 0.350 m del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.

30. Un objeto pequeño se une al extremo de un resorte para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para pequeños desplazamientos angulares y tres longitudes. Para cada longitud, el intervalo de tiempo para 500 oscilaciones se mide con un cronómetro. Para longitudes de 1.000 m, 0.750 m y 0.500 m, se miden los intervalos de tiempo total de 99.8 s, 86.6 s y 71.1 s para 50 oscilaciones. a) Determine el periodo de movimiento para cada longitud. b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelas con el valor aceptado. c) Grafique T^2 con L y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica de línea recta de mejor ajuste. Compare este valor con el obtenido en el inciso b).

31. Considere el péndulo físico de la figura 15.17. a) Represente su momento de inercia en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa y paralelo al eje que pasa a través de su punto de giro como I_{CM}. Demuestre que su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$$

donde d es la distancia entre el punto de giro y el centro de masa. b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{CM}$.

32. Una barra rígida muy ligera con una longitud de 0.500 m se extiende recta desde un extremo de una regleta. La regleta está suspendida de un eje en el extremo lejano de la barra y se pone en oscilación. a) Determine el periodo de oscilación. *Sugerencia:* Use el teorema de ejes paralelos de la sección 10.5. b) ¿En qué porcentaje difiere del periodo de un péndulo simple de 1.00 m de largo?

33. El volante de un reloj (figura P15.33) tiene un periodo de oscilación de 0.250 s. La rueda está construida de modo que su masa de 20.0 g se concentra alrededor de un borde de 0.500 cm de radio. ¿Cuáles son a) el momento de inercia del volante y b) la constante de torsión del resorte unido?



Figura P15.33

Sección 15.6 Oscilaciones amortiguadas

34. Demuestre que la relación de cambio con el tiempo de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no impulsado se conoce por $dE/dt = -bv^2$ y por eso siempre es negativa. Para hacerlo, derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, y use la ecuación 15.31.

35. Un péndulo con una longitud de 1.00 m se libera desde un ángulo inicial de 15.0°. Después de 1 000 s, su amplitud se reduce por fricción a 5.50°. ¿Cuál es el valor de $b/2m$?

36. Demuestre que la ecuación 15.32 es una solución de la ecuación 15.31 siempre que $b^2 < 4mk$.

37. Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de 2.05×10^4 N/m. El efecto de la resistencia del aire se representa mediante el coeficiente de amortiguamiento $b = 3.00$ N · s/m. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? c) Encuentre el intervalo de tiempo que transcurre mientras la energía del sistema cae a 5.00% de su valor inicial.

Sección 15.7 Oscilaciones forzadas

38. Un bebé se regocija durante el día haciendo sonidos y rebotando arriba y abajo en su cuna. Su masa es de 12.5 kg y el colchón de la cuna se modela como un resorte ligero con constante de fuerza de 4.30 kN/m. a) La bebé pronto aprende a rebotar con máxima amplitud y mínimo esfuerzo al doblar sus rodillas, ¿a qué frecuencia? b) Ella aprende a usar el colchón como trampolín y pierde contacto con él durante parte de cada ciclo, ¿cuándo su amplitud supera qué valor?

39. Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción y es impulsado por una fuerza externa conocida por $F = (3.00 \text{ N})$ sen $(2\pi t)$. La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine a) el periodo y b) la amplitud del movimiento.

40. Si considera un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), demuestre que la ecuación 15.35 es una solución de la ecuación 15.34, con una amplitud conocida por la ecuación 15.36.

41. Un bloque que pesa 40.0 N está suspendido de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema no está amortiguado y está sujeto a una fuerza impulsora armónica de 10.0 Hz de frecuencia, lo que resulta en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza impulsora.

42. El amortiguamiento es despreciable para un objeto de 0.150 kg que cuelga de un resorte ligero de 6.30 N/m. Una fuerza sinusoidal, con una amplitud de 1.70 N, impulsa al sistema. ¿A qué frecuencia la fuerza hará vibrar al objeto con una amplitud de 0.440 m?

43. Usted es un biólogo investigador. Aun cuando las baterías de emergencia del localizador están bajas, lleva el localizador a un fino restaurante. Configura el pequeño localizador para que vibre en lugar de sonar y lo coloca en un bolsillo lateral de su abrigo. El brazo de su silla presiona la ligera ropa contra su cuerpo en un punto. El tejido, con una longitud de 8.21 cm, cuelga libremente bajo dicho punto, con el localizador en el fondo. Un colaborador necesita urgentemente instrucciones y le marca desde el laboratorio. El movimiento del localizador hace que la parte colgante de su abrigo se balancee de atrás para adelante con una amplitud notablemente grande. El mesero, el capitán, el catador y los comensales cercanos lo notan inmediatamente y quedan en silencio. Su hija, con voz chillona, dice, con suficiente precisión, "¡Papi, mira! ¡Tus cucarachas debieron salirse otra vez!" Encuentre la frecuencia a la que vibra su localizador.

Problemas adicionales

44. ● **Problema de repaso.** El problema extiende el razonamiento del problema 54 del capítulo 9. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. El deslizador uno tiene masa $m_1 = 0.240$ kg y velocidad $0.740\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Tendrá una colisión posterior con el deslizador numero dos, de masa $m_2 = 0.360$ kg, que tiene velocidad original $0.120\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Un resorte ligero con constante de fuerza de 45.0 N/m se une al extremo posterior del deslizador dos, como se muestra en la figura P9.54. Cuando el deslizador uno toca el resorte, un súper pegamento hace que instantánea e inmediatamente se pegue a su extremo del resorte. a) Encuentre la velocidad común que tienen los dos deslizadores cuando la compresión del resorte es un máximo. b) Encuentre la distancia máxima de compresión de resorte. c) Argumente que el movimiento después de que los deslizadores quedan unidos consiste en el centro de masa del sistema de dos deslizadores que se mueven con la velocidad constante encontrada en el inciso a) mientras ambos deslizadores oscilan en movimiento armónico simple relativo con el centro de masa. d) Encuentre la energía del movimiento del centro de masa. e) Encuentre la energía de la oscilación.

45. ● Un objeto de masa m se mueve en movimiento armónico simple con 12.0 cm de amplitud en un resorte ligero. Su aceleración máxima es 108 cm/s^2. Considere m como variable. a) Encuentre el periodo T del objeto. b) Encuentre su frecuencia f. c) Halle la rapidez máxima $v_{máx}$ del objeto. d) Localice la energía E de la vibración. e) Encuentre la constante de fuerza k del resorte. f) Describa el patrón de dependencia de cada una de las cantidades T, F, $v_{máx}$, E y k en m.

46. ● **Problema de repaso.** Una roca descansa sobre una acera de concreto. Se presenta un terremoto, que mueve al suelo verticalmente en movimiento armónico con una frecuencia constante de 2.40 Hz y con amplitud gradualmente creciente. a) ¿Con qué amplitud vibra el suelo cuando la roca comienza a perder contacto con la acera? Otra roca está asentada sobre el concreto en el fondo de una alberca llena con agua. El terremoto sólo produce movimiento vertical, así que el agua no salpica de lado a lado. b) Presente un argumento convincente de que, cuando el suelo vibra con la amplitud encontrada en el inciso a), la roca sumergida también apenas pierde contacto con el suelo de la alberca.

47. Una bola pequeña de masa M está unida al extremo de una barra uniforme de igual masa M y longitud L que está articulada en la parte superior (figura P15.47). a) Determine las tensiones en la barra en el eje y en el punto P cuando el sistema es estable. b) Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos desde el equilibrio y determine este periodo para $L = 2.00$ m. *Sugerencia:* Modele el objeto en el extremo de la barra como una partícula y use la ecuación 15.28.

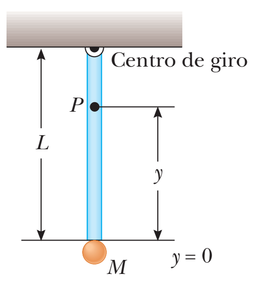


Figura P15.47

48. Un objeto de masa $m_1 = 9.00$ kg está en equilibrio, conectado a un resorte ligero de constante $k = 100$ N/m que está sujeto a una pared como se muestra en la figura P15.48a. Un segundo objeto, $m_2 = 7.00$ kg, se empuja lentamente contra m_1, lo que comprime al resorte la cantidad $A = 0.200$ m (véase la figura P15.48b). Luego el sistema se libera y ambos objetos comienzan a moverse hacia la derecha sobre la superficie sin fricción. a) Cuando m_1 alcanza el punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (véase la figura P15.48c) y se mueve hacia la derecha con rapidez v. Determine el valor de v. b) ¿Qué tan separado están los objetos cuando el resorte se estira completamente por primera vez (D en la figura P15.48d)? *Sugerencia:* Primero determine el periodo de oscilación y la amplitud del sistema m_1−resorte, después de que m_2 pierde contacto con m_1.

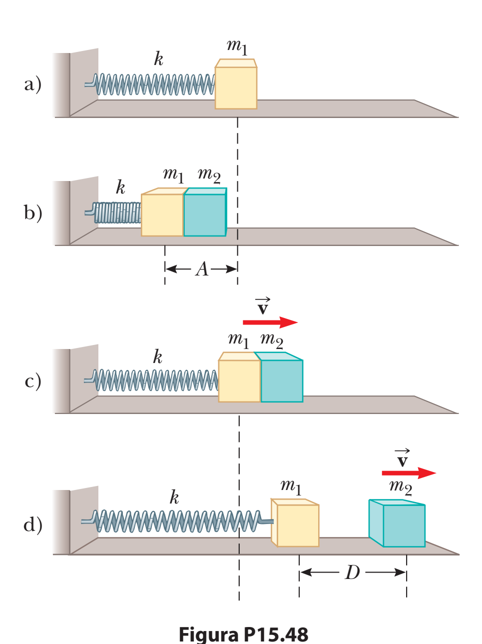


Figura P15.48

49. Un gran bloque P realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción, con una frecuencia $f = 1.50$ Hz. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.49, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es $\mu_s = 0.600$. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque B no se desliza?

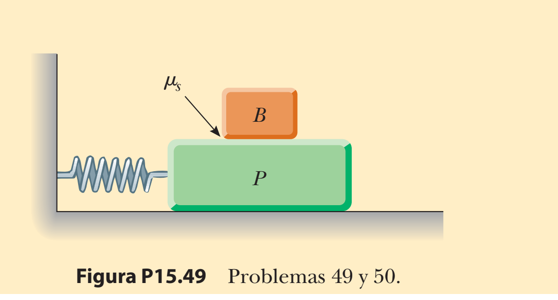


Figura P15.49 Problemas 49 y 50.

50. Un gran bloque P realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción con una frecuencia f. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.49, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es μ_s. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener si el bloque superior no se desliza?

51. La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la de la molécula de hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración del H_2 es 1.30×10^{14} Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración del D_2? Suponga que la "constante de resorte" de las fuerzas atractivas es la misma para las dos moléculas.

52. ● *Ahora puede analizar más completamente la situación del problema 54 del capítulo 7.* Dos bolas de acero, cada una de 25.4 cm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5.00 m/s. Chocan de manera frontal y rebotan elásticamente. a) ¿Su interacción dura sólo un instante o un intervalo de tiempo distinto de cero? Establezca su evidencia. b) Una de las bolas se aprieta en un tornillo de banco mientras se realizan mediciones precisas de la cantidad de compresión resultante. Suponga que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la bola. Como dato, una fuerza de 16.0 kN que ejerce cada mandíbula del tornillo reduce el diámetro en 0.200 mm. Al modelar la bola como un resorte, encuentre su constante de resorte. c) Suponga que las bolas tienen la densidad del hierro. Calcule la energía cinética de cada bola antes de que las bolas choquen. d) Modele cada bola como una partícula con un resorte sin masa como su defensa frontal. Sea que la partícula tiene la energía cinética encontrada en el inciso c) y que la defensa tiene la constante de resorte encontrada en el inciso b). Calcule la cantidad de compresión máxima que cada bola experimenta cuando las bolas chocan. e) Modele el movimiento de cada bola, mientras las bolas están en contacto, como la mitad de un ciclo de movimiento armónico simple. Calcule el intervalo de tiempo durante el que las bolas están en contacto.

53. Un contenedor cúbico ligero de volumen a^3 al inicio está lleno con un líquido de densidad de masa ρ. El cubo inicialmente está soportado por un resorte ligero para formar un péndulo simple de longitud L_i, medida desde el centro de masa del contenedor lleno, donde $L_i >> a$. Al líquido se le permite fluir desde el fondo del contenedor a una rapidez constante (dM/dt). En cualquier tiempo t, el nivel del fluido en el contenedor es h y la longitud del péndulo es L (medida relativa con el centro de masa instantáneo). a) Bosqueje el aparato y etiquete las dimensiones a, h, L_i y L. b) Encuentre la rapidez de cambio en el tiempo del periodo como función del tiempo t. c) Encuentre el periodo como función del tiempo.

54. Después de una caída emocionante, los saltadores *bungee* rebotan libremente en la cuerda durante muchos ciclos (figura P15.20). Después de los primeros ciclos, la cuerda no queda floja. Su hermano menor se puede convertir en plaga si calcula la masa de cada persona al usar una proporción que usted establece para resolver este problema: un objeto de masa m oscila libremente en un resorte vertical con un periodo T. Otro objeto de masa desconocida m' en el mismo resorte oscila con un periodo T'. Determine a) la constante de resorte y b) la masa desconocida.

55. Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte con constante de fuerza k conectado a él a una distancia h bajo su punto de suspensión (figura P15.55). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para pequeños valores de la amplitud (θ pequeño). Suponga que la barra de suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.

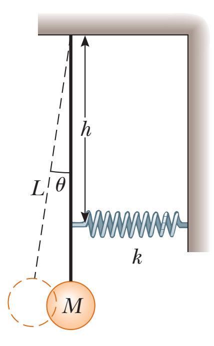


Figura P15.55

56. Una partícula con una masa de 0.500 kg está unida a un resorte con una constante de fuerza de 50.0 N/m. En el momento en que $t = 0$, la partícula tiene su rapidez máxima de 20.0 m/s y es móvil a la izquierda. a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula y especifique su posición como función del tiempo. b) ¿Dónde, en el movimiento la energía potencial, es tres veces la energía cinética? c) Encuentre la longitud de un péndulo simple con el mismo periodo. d) Encuentre el intervalo de tiempo mínimo requerido para que la partícula se mueva de $x = 0$ a $x = 1.00$ m.

57. Un tablón horizontal de masa m y longitud L se articula en un extremo. El otro extremo del tablón está sostenido por un resorte con constante de fuerza k (figura P15.57). El momento de inercia del tablón en torno al eje es $\frac{1}{3}mL^2$. El tablón se desplaza un ángulo pequeño θ desde su posición de equilibrio horizontal y se libera. a) Demuestre que el tablón se mueve con movimiento armónico simple con frecuencia angular $\omega = \sqrt{3k/m}$. b) Evalúe la frecuencia, considere que la masa es de 5.00 kg y la constante de fuerza del resorte es 100 N/m.

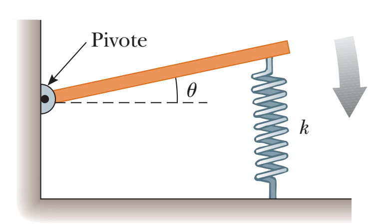


Figura P15.57

58. ● **Problema de repaso.** Una partícula de 4.00 kg de masa está unida a un resorte con una constante de fuerza de 100 N/m. La cual oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 2.00 m. Un objeto de 6.00 kg se deja caer verticalmente en la parte superior del objeto de 4.00 kg mientras pasa a través de su punto de equilibrio. Los dos objetos quedan pegados. a) ¿Por cuánto cambia la amplitud del sistema en vibración como resultado de la colisión? b) ¿Por cuanto cambia el periodo? c) ¿Por cuánto cambia la energía? d) Explique el cambio en energía.

59. Un péndulo simple con una longitud de 2.23 m y una masa de 6.47 kg recibe una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que se somete a movimiento armónico simple. Determine su a) periodo, b) energía total y c) máximo desplazamiento angular.

60. **Problema de repaso.** Un extremo de un resorte ligero, con constante de fuerza de 100 N/m, se une a una pared vertical. Una cuerda ligera se amarra al otro extremo del resorte horizontal. La cuerda cambia de horizontal a vertical conforme pasa sobre una polea sólida de 4.00 cm de diámetro. La polea es libre de girar sobre un eje fijo uniforme. La sección vertical de la cuerda sostiene un objeto de 200 g. La cuerda no se desliza en su contacto con la polea. Encuentre la frecuencia de oscilación del objeto, si supone que la masa de la polea es a) despreciable, b) 250 g y c) 750 g.

61. ● Quienes viajan en motocicletas y bicicletas aprenden a prestar atención a los baches en el camino, y en especial a las *tablas de lavar*, una condición en la que muchos bordes igualmente espaciados se forman en el camino. ¿Qué es tan malo en las tablas de lavar? Una motocicleta tiene muchos resortes y amortiguadores en su suspensión, pero usted puede modelarla como un solo resorte que sostiene un bloque. Puede estimar la constante de fuerza al pensar en cuánto se comprime el resorte cuando un motociclista pesado conduce. Un motociclista que viaja con rapidez de carretera debe tener particular cuidado de los baches en forma de tablas de lavar que están separados cierta distancia. ¿Cuál es el orden de magnitud de su distancia de separación? Establezca las cantidades que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

62. Un bloque de masa M está conectado a un resorte de masa m y oscila en movimiento armónico simple sobre una pista horizontal sin fricción (figura P15.62). La constante de fuerza del resorte es k y la longitud de equilibrio es ℓ. Suponga que todas las porciones del resorte oscilan en fase y que la velocidad de un segmento dx es proporcional a la distancia x desde el extremo fijo; esto es, $v_x = (x/\ell)v$. Además, advierta que la masa de un segmento del resorte es $dm = (m/\ell)\,dx$. Encuentre a) la energía cinética del sistema cuando el bloque tiene una rapidez v y b) el periodo de oscilación.

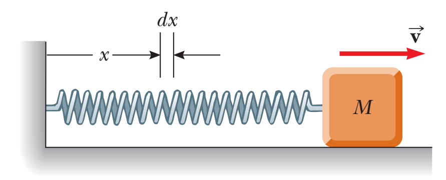


Figura P15.62

63. Una bola de masa m se conecta a dos bandas de hule de longitud L, cada una bajo tensión T, como se muestra en la figura P15.63. La bola se desplaza una pequeña distancia y perpendicular a la longitud de las bandas de hule. Si supone que la tensión no cambia, demuestre que a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$ y b) el sistema muestra movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

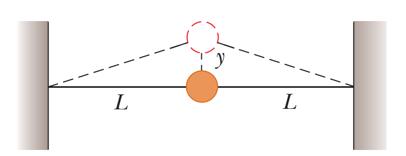


Figura P15.63

64. Cuando un bloque de masa M, conectado al extremo de un resorte de masa $m_s = 7.40$ g y constante de fuerza k, se pone en movimiento armónico simple, el periodo de su movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m_s/3)}{k}}$$

Se conduce un experimento en dos partes con el uso de bloques de diferentes masas suspendidas verticalmente del resorte, como se muestra en la figura P15.64. a) Extensiones estáticas de 17.0, 29.3, 35.3, 41.3, 47.1 y 49.3 cm se miden para valores de M de 20.0, 40.0, 50.0, 60.0, 70.0 y 80.0 g, respectivamente. Construya una gráfica de Mg con x y realice un ajuste lineal por mínimos cuadrados a los datos. De la pendiente de su gráfica, determine un valor para k de este resorte. b) El sistema ahora se pone en movimiento armónico simple y se miden los periodos con cronómetro. Con $M = 80.0$ g, el intervalo de tiempo total requerido para 10 oscilaciones se mide en 13.41 s. El experimento se repite con valores M de 70.0, 60.0, 50.0, 40.0 y 20.0 g, con intervalos de tiempo correspondientes para 10 oscilaciones de 12.52, 11.67, 10.67, 9.62 y 7.03 s. Calcule el valor experimental para T a partir de cada una de estas mediciones. Trace una gráfica de T^2 con M y determine un valor para k a partir de la pendiente del ajuste lineal de mínimos cuadrados a través de los puntos de datos. Compare este valor de k con el obtenido en el inciso a). c) Obtenga un valor para m_s a partir de su gráfica y compárelo con el valor conocido de 7.40 g.

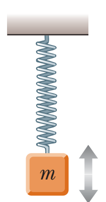


Figura P15.64

65. Un disco de radio r y masa m se pega a la cara de un segundo disco más grande de radio R y masa M, como se muestra en la figura P15.65. El centro del disco pequeño se ubica en el borde del disco grande. El disco grande se monta en su centro en un eje sin fricción. El ensamble da vueltas a través de un pequeño ángulo θ desde su posición de equilibrio y se libera. a) Demuestre que mientras pasa a través de la posición de equilibrio la rapidez del centro del disco pequeño es

$$v = 2\left[\frac{Rg(1 - \cos\theta)}{(M/m) + (r/R)^2 + 2}\right]^{1/2}$$

b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR}\right]^{1/2}$$

66. Considere el oscilador amortiguado que se muestra en las figuras 15.20 y 15.21. La masa del objeto es 375 g, la constante de resorte es 100 N/m y $b = 0.100$ N · s/m. a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la amplitud cae a la mitad de su valor inicial? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Durante qué intervalo de tiempo la energía mecánica cae a la mitad de su valor inicial? c) Demuestre que, en general, la relación fraccionaria a la cual la amplitud disminuye en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la relación fraccionaria a la que disminuye la energía mecánica.

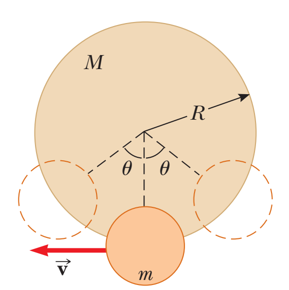


Figura P15.65

67. Un bloque de masa m se conecta a dos resortes con constantes de fuerza k_1 y k_2 en dos formas, como se muestra en las figuras P15.67a y P15.67b. En ambos casos el bloque se mueve sobre una mesa sin fricción después de desplazarse desde el equilibrio y liberarse. Demuestre que en los dos casos el bloque muestra movimiento armónico simple con periodos

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$ y b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$

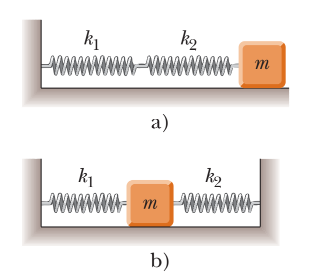


Figura P15.67

68. Una boya de langostero es un cilindro de madera sólida de radio r y masa M, a la cual se le coloca peso en un extremo, de modo que flote vertical en agua de mar tranquila, que tiene densidad ρ. Un tiburón que pasa tensa la soga floja que amarra la boya a una trampa de langosta y jala la boya una distancia x desde su posición de equilibrio y la libera. Demuestre que la boya ejecutará movimiento armónico simple si se ignoran los efectos resistivos del agua y determine el periodo de las oscilaciones.

69. **Problema de repaso.** Imagine que, a través del centro de la Tierra, se cava un hoyo que sale hasta el otro lado. Un objeto de masa m a una distancia r del centro de la Tierra se jala hacia el centro de la Tierra sólo por la masa dentro de la esfera de radio r (la región rojiza de la figura P15.69). a) Escriba la ley de gravitación de Newton para un objeto a la distancia r desde el centro de la Tierra y demuestre que la fuerza sobre él es de la forma de la ley de Hooke, $F = -kr$, donde la constante de fuerza efectiva es $k = \frac{4}{3}\pi\rho G m$. Aquí ρ es la densidad de la Tierra, supuesta uniforme, y G es la constante gravitacional. b) Demuestre que un saco de correo soltado en el hoyo ejecutará movimiento armónico simple si se mueve sin fricción. ¿Cuándo llegará al otro lado de la Tierra?

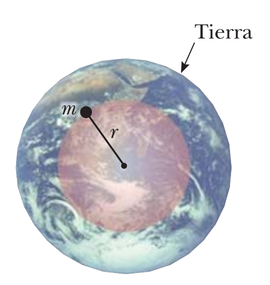


Figura P15.69

70. Su pulgar rechina en un plato que acaba de lavar. Sus zapatos tenis rechinan en el piso del gimnasio. Las llantas de los autos rechinan con un arranque o frenado abrupto. Las uniones de las cerraduras gimen en un viejo granero. El violín concertino suena sobre toda una orquesta. Usted puede hacer cantar un cáliz al secar su dedo humedecido alrededor de su borde. Mientras lo desliza a través de una mesa, un vaso de espuma de estireno puede no hacer mucho sonido, pero hace que la superficie de un poco de agua en su interior baile en una complicada vibración de resonancia. Cuando el gis rechina en un pizarrón, usted puede ver que hace una hilera de rayas regularmente espaciadas. Como sugieren estos ejemplos, la vibración comúnmente resulta cuando la fricción actúa sobre un objeto elástico en movimiento. La oscilación no es un movimiento armónico simple, sino que se llama *pegar y deslizar*. Este problema modela el movimiento de pegar y deslizar.

Un bloque de masa m se une a un soporte fijo mediante un resorte horizontal, con constante de fuerza k y masa despreciable (figura P15.70). La ley de Hooke describe el resorte tanto en extensión como en compresión. El bloque descansa sobre una larga tabla horizontal, con la que tiene coeficiente de fricción estático μ_s y un coeficiente de fricción cinética μ_k menor. La tabla se mueve hacia la derecha con rapidez constante v. Suponga que el bloque pasa la mayor parte de su tiempo pegado a la tabla y en movimiento hacia la derecha, de modo que la rapidez v es pequeña en comparación con la rapidez promedio que tiene el bloque mientras se desliza de regreso hacia la izquierda. a) Demuestre que la máxima extensión del resorte, desde su posición no estirada, es muy cercana a la que se conoce mediante $\mu_s mg/k$. b) Demuestre que el bloque oscila en torno a una posición de equilibrio en la que el resorte se estira en $\mu_k mg/k$. c) Grafique la posición del bloque con el tiempo. d) Demuestre que la amplitud del movimiento del bloque es

$$A = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k}$$

e) Demuestre que el periodo del movimiento del bloque es

$$T = \frac{2(\mu_s - \mu_k)mg}{vk} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

f) Evalúe la frecuencia del movimiento, si considera $\mu_s = 0.400$, $\mu_k = 0.250$, $m = 0.300$ kg, $k = 12.0$ N/m y $v = 2.40$ cm/s. g) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué sucede con la frecuencia si aumenta la masa? h) ¿Si aumenta la constante de resorte? i) ¿Si aumenta la rapidez de la tabla? j) ¿Si aumenta el coeficiente de fricción estática relativo con el coeficiente de fricción cinética? El exceso de fricción estática sobre la cinética es el que resulta importante para la vibración. "La rueda chirriante obtiene la grasa", porque incluso un fluido viscoso no puede ejercer una fuerza de fricción estática.

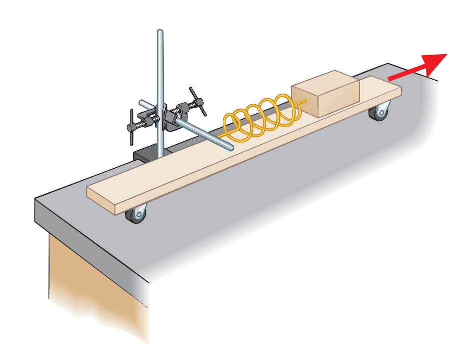


Figura P15.70

Respuestas a las preguntas rápidas

15.1 d). Desde su máxima posición positiva a la posición de equilibrio, el bloque recorre una distancia A. Enseguida recorre una distancia igual y pasa la posición de equilibrio a su máxima posición negativa. Luego repite estos dos movimientos en la dirección inversa para regresar a su posición original y completar un ciclo.

15.2 f). El objeto está en la región $x < 0$, así que la posición es negativa. Ya que el objeto se mueve de regreso hacia el origen en esta región, la velocidad es positiva.

15.3 a). La amplitud es mayor porque la curva para el objeto B muestra que el desplazamiento desde el origen (el eje vertical en la gráfica) es mayor. La frecuencia es mayor para el objeto B porque hay más oscilaciones por intervalo de tiempo unitario.

15.4 b). De acuerdo con la ecuación 15.13, el periodo es proporcional a la raíz cuadrada de la masa.

15.5 c). La amplitud del movimiento armónico simple es la misma que el radio del movimiento circular. La posición inicial del objeto en su movimiento circular es π radianes desde el eje x positivo.

15.6 **i**), a). Con una longitud mayor, el periodo del péndulo aumentará. Por lo tanto, tomará más tiempo en ejecutar cada balanceo, así que cada segundo de acuerdo con el reloj tardará más que un segundo real y el reloj funcionará lento. **ii**), a). En lo alto de la montaña, el valor de g es menor que a nivel del mar. Como resultado, el periodo del péndulo aumentará y el reloj funcionará lento.



Las olas combinan propiedades de las ondas transversales y longitudinales. Con el equilibrio y el ritmo adecuados, un surfista puede capturar una ola y dar un paseo en ella. (© Rick Doyle/Corbis)

16 Movimiento ondulatorio

Al ser niños la mayoría de las personas observó lo que es una onda, cuando soltaron una piedra en un estanque. En el punto donde la piedra choca con la superficie del agua, se crean ondas. Estas ondas se mueven hacia fuera, a partir del punto de creación, en círculos que se expanden hasta que alcanzan la orilla. Si usted estudiara con detenimiento el movimiento de un pequeño objeto que flota sobre el agua perturbada, verá que el objeto se mueve vertical y horizontalmente en torno a su posición original, pero no experimenta ningún desplazamiento neto desde o hacia el punto donde la piedra golpea el agua. Los pequeños elementos del agua en contacto con el objeto, así como todos los otros elementos del agua sobre la superficie del estanque, se comportan de la misma forma. La *onda* del agua se mueve desde el punto de origen hacia la orilla, pero el agua no se va con ella.

El mundo está lleno de ondas, los dos tipos principales son las ondas *mecánicas* y las ondas *electromagnéticas*. En el caso de las ondas mecánicas, algunos medios físicos se perturban; en el ejemplo de la piedra, los elementos del agua se perturban. Las ondas electromagnéticas no requieren un medio para propagarse; algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son la luz visible, las ondas de radio, las señales de televisión y los rayos X. En esta parte del libro sólo se estudiarán las ondas mecánicas.

Considere de nuevo el pequeño objeto que flota sobre el agua. Se hizo que el objeto se moviera en un punto en el agua al dejar caer una piedra en otra posición. El objeto ganó energía cinética a causa de esta acción, así que la energía se debió transferir desde

el punto donde se dejó caer la piedra hasta la posición del objeto. Esta característica es central del movimiento ondulatorio: la *energía* se transfiere a través de una distancia, pero la *materia* no.

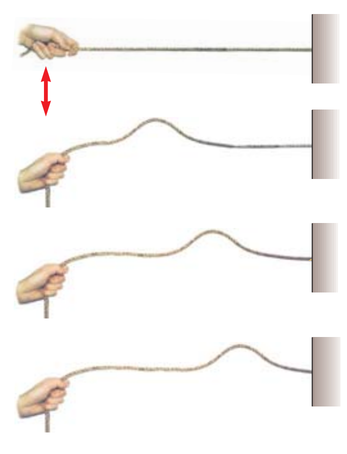


Figura 16.1 Un pulso viaja por una cuerda estirada. La forma del pulso es aproximadamente invariable mientras viaja a lo largo de la cuerda.

16.1 Propagación de una perturbación

En la introducción a este capítulo se refirió a la esencia del movimiento ondulatorio: la transferencia de energía a través del espacio sin la transferencia de materia. En la lista de mecanismos de transferencia de energía del capítulo 8, las ondas mecánicas y la radiación electromagnética, dependen de las ondas. En contraste, en otro mecanismo, la transferencia de materia, la transferencia de energía está acompañada por un movimiento de materia a través del espacio.

Todas las ondas mecánicas requieren 1) alguna fuente de perturbación, 2) un medio que contenga elementos que sean factibles de perturbación y 3) algún mecanismo físico a partir del cual los elementos del medio puedan influirse mutuamente. Una forma de demostrar el movimiento ondulatorio es sacudir un extremo de una larga cuerda que esté bajo tensión y tenga su extremo opuesto fijo como se muestra en la figura 16.1. De esta forma, se crea un solo "chichón" (llamado *pulso*) que viaja a lo largo de la cuerda con una rapidez definida. La figura 16.1 representa cuatro "instantáneas" consecutivas de la creación y propagación del pulso viajero. La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso; éste alcanza una altura y una rapidez de propagación definidas a lo largo del medio (la cuerda). La forma del pulso cambia muy poco a medida que viaja a lo largo de la cuerda.[1]

El primer enfoque será sobre un pulso que viaja a través de un medio. Una vez que se explore el comportamiento de un pulso, la atención se dirigirá a una *onda*, que es una perturbación *periódica* que viaja a través de un medio. Al sacudir el extremo de la cuerda una vez, se crea un pulso en ella, como en la figura 16.1. Si se moviera el extremo de la cuerda hacia arriba y hacia abajo repetidamente, se crearía una onda viajera con las características que no tiene un pulso. Estas características se explorarán en la sección 16.2.

A medida que viaja el pulso de la figura 16.1, cada elemento perturbado de la cuerda se mueve en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. La figura 16.2 ilustra este punto para un elemento particular, etiquetado *P*. Note que ninguna parte de la cuerda se mueve alguna vez en la dirección de la propagación. Una onda viajera o pulso que

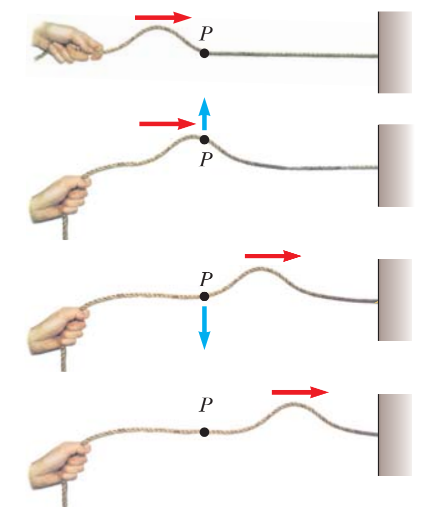


Figura 16.2 Un pulso transversal viaja sobre una cuerda estirada. La dirección de movimiento de cualquier elemento *P* de la cuerda (flechas azules) es perpendicular a la dirección de propagación (flechas rojas).

[1] En realidad, el pulso cambia de forma y gradualmente se dispersa durante el movimiento. Este efecto, llamado *dispersión*, es común a muchas ondas mecánicas, así como a ondas electromagnéticas. En este capítulo no se considera la dispersión.

Compresión

Figura 16.3 Un pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado. El desplazamiento de las espiras es paralelo a la dirección de la propagación.

hace que los elementos del medio perturbado se muevan perpendiculares a la dirección de propagación se llama **onda transversal**.

Compare esta onda con otro tipo de pulso, uno que se mueve por un largo resorte estirado, como se muestra en la figura 16.3. El extremo izquierdo del resorte recibe un ligero empuje hacia la derecha y después recibe un ligero jalón hacia la izquierda. Este movimiento crea una súbita compresión de una región de las espiras. La región comprimida viaja a lo largo del resorte (a la derecha en la figura 16.3). Observe que la dirección del desplazamiento de las espiras es *paralela* a la dirección de propagación de la región comprimida. Una onda viajera o pulso que mueve a los elementos del medio en paralelo a la dirección de propagación se llama **onda longitudinal**.

Las ondas sonoras, que se explicarán en el capítulo 17, son otro ejemplo de ondas longitudinales. La perturbación en una onda sonora es una serie de regiones de alta y baja presiones que viajan en el aire.

Algunas ondas en la naturaleza muestran una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. Las ondas en la superficie del agua son un buen ejemplo. Cuando una onda acuática viaja sobre la superficie del agua profunda, los elementos del agua en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares, como se muestra en la figura 16.4. La perturbación tiene componentes tanto transversales como longitudinales. Los desplazamientos transversales que se ven en la figura 16.4 representan las variaciones en posición vertical de los elementos del agua. Los desplazamientos longitudinales representan elementos de agua móvil de atrás para adelante en una dirección horizontal.

Las ondas tridimensionales que viajan desde un punto abajo de la superficie de la Tierra donde se presenta un terremoto, son de ambos tipos, transversales y longitudinales. Las ondas longitudinales son las más rápidas de las dos y viajan con magnitudes de velocidad en el intervalo de 7 a 8 km/s cerca de la superficie. Se llaman **ondas P**, donde "P" es por *primarias*, porque viajan más rápido que las ondas transversales y llegan primero a un sismógrafo (el dispositivo que se usa para detectar ondas debidas a terremotos). Las ondas transversales más lentas, llamadas **ondas S**, donde "S" es para *secundarias*, viajan a través de la Tierra a 4 o 5 km/s cerca de la superficie. Al registrar en un sismógrafo el intervalo de tiempo entre las llegadas de estos dos tipos de ondas, se determina la distancia desde el sismógrafo al punto de origen de las ondas. Una sola medición establece una esfera imaginaria con centro en el sismógrafo, donde el radio de la esfera se determina mediante la diferencia en los tiempos de llegada de las ondas P y S. El origen de las ondas se ubica en alguna parte sobre dicha esfera. Las esferas imaginarias desde tres o más estaciones de monitoreo, ubicadas muy separadas unas de otras, se intersecan en una región de la Tierra, y esta región es donde se presentó el terremoto.

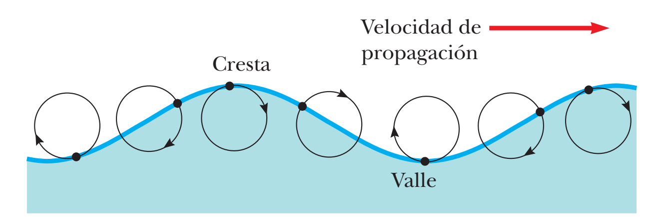


Figura 16.4 El movimiento de los elementos del agua, situados sobre la superficie del agua profunda, en la que una onda se propaga es una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. El resultado es que los elementos en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares. Cada elemento se desplaza tanto horizontal como verticalmente desde su posición de equilibrio.

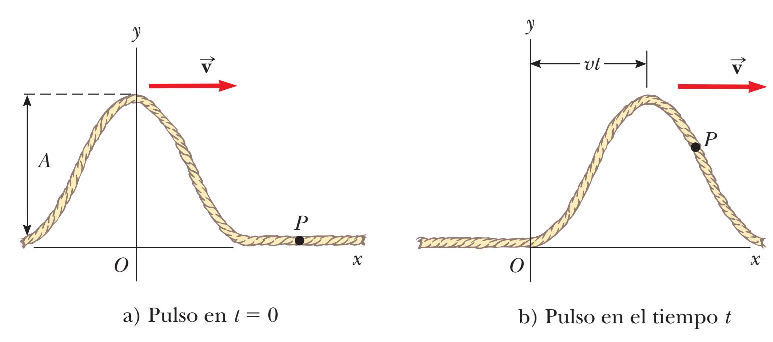


Figura 16.5 Un pulso unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v. a) En $t = 0$, la forma del pulso se conoce por $y = f(x)$. b) En algún tiempo posterior t, la forma permanece invariable y la posición vertical de un elemento del medio en cualquier punto P se conoce por $y = f(x - vt)$.

Considere un pulso que viaja hacia la derecha en una cuerda larga, como se muestra en la figura 16.5. La figura 16.5a representa la forma y posición del pulso en el tiempo $t = 0$. En este tiempo, la forma del pulso, cualquiera que sea, se puede representar mediante alguna función matemática que se escribirá como $y(x, 0) = f(x)$. Esta función describe la posición transversal y del elemento de la cuerda ubicado en cada valor de x en el tiempo $t = 0$. Ya que la rapidez del pulso es v, el pulso viajó hacia la derecha una distancia vt en el tiempo t (figura 16.5b). Se supone que la forma del pulso no cambia con el tiempo. Por lo tanto, en el tiempo t, la forma del pulso es la misma que tenía en el tiempo $t = 0$, como en la figura 16.5a. En consecuencia, un elemento de la cuerda en x en este tiempo tiene la misma posición y que un elemento ubicado en $x - vt$ tenía en el tiempo $t = 0$:

$$y(x, t) = y(x - vt, 0)$$

En general, después, se representa la posición transversal y para todas las posiciones y tiempos, medida en un marco estable con el origen en O, como

Pulso que viaja hacia la derecha ▶

$$y(x, t) = f(x - vt) \tag{16.1}$$

De igual modo, si el pulso viaja hacia la izquierda, las posiciones transversales de los elementos de la cuerda se describen mediante

Pulso que viaja hacia la izquierda ▶

$$y(x, t) = f(x + vt) \tag{16.2}$$

La función y, a veces llamada **función de onda**, depende de las dos variables x y t. Por esta explicación, con frecuencia se escribe $y(x, t)$, que se lee "y como función de x y t".

Es importante entender el significado de y. Considere un elemento de la cuerda en el punto P, identificado mediante un valor particular de su coordenada x. Mientras el pulso pasa por P, la coordenada y de este elemento aumenta, llega a un máximo y luego disminuye a cero. **La función de onda $y(x, t)$ representa la coordenada y, la posición transversal, de cualquier elemento ubicado en la posición x en cualquier tiempo t.** Además, si t es fijo (como en el caso de tomar una instantánea del pulso), la función de onda $y(x)$, a veces llamada **forma de onda**, define una curva que representa la forma geométrica del pulso en dicho tiempo.

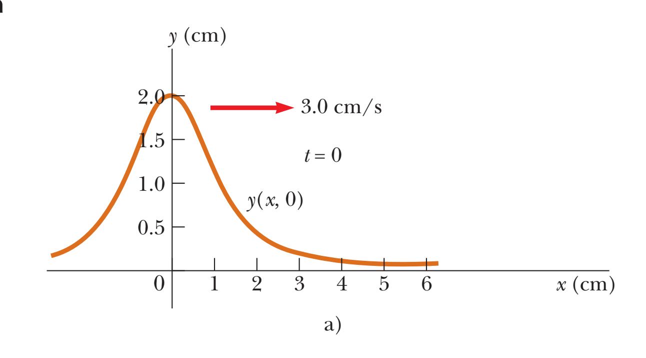
Pregunta rápida 16.1 **i)** En una larga fila de personas que esperan comprar boletos, la primera persona sale y un pulso de movimiento se presenta a medida que las personas caminan hacia adelante para llenar el hueco. A medida que cada persona camina hacia adelante, el hueco se mueve a través de la fila. La propagación de este hueco es, ¿a) transversal, o b) longitudinal? **ii)** Considere la "ola" en un juego de beisbol: las personas se ponen de pie y levantan sus brazos a medida que la ola llega a sus posiciones, y el pulso resultante se mueve alrededor del estadio. Esta onda es, ¿a) transversal, o b) longitudinal?

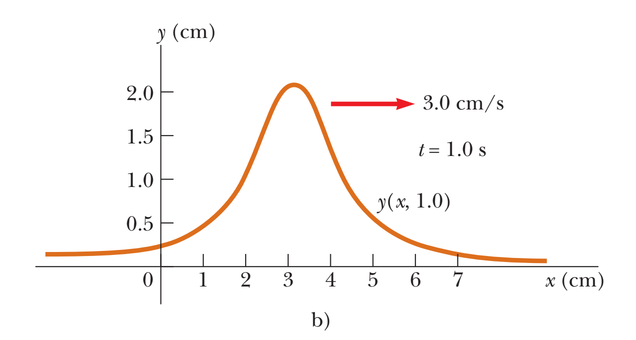
EJEMPLO 16.1 Un pulso que se mueve hacia la derecha

Un pulso que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x se representa mediante la función de onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3.0t)^2 + 1}$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos. Encuentre expresiones para la función de onda en $t = 0$, $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.





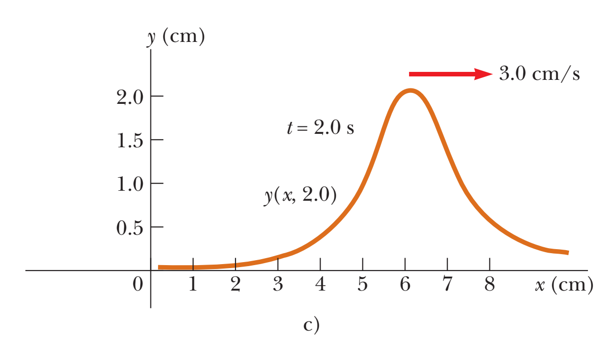


Figura 16.6 (Ejemplo 16.1) Gráficas de la función $y(x, t) = 2/[(x - 3.0t)^2 + 1]$ en a) $t = 0$, b) $t = 1.0$ s y c) $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.6a muestra el pulso representado por esta función de onda en $t = 0$. Imagine que este pulso se mueve hacia la derecha y mantiene su forma como sugieren las figuras 16.6b y 16.6c.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis relativamente simple en el que se interpreta la representación matemática de un pulso.

Analizar La función de onda es de la forma $y = f(x - vt)$. La inspección de la expresión para $y(x, t)$ revela que la rapidez de la onda es $v = 3.0$ cm/s. Además, al hacer $x - 3.0t = 0$, se encuentra que el valor máximo de y está dado por $A = 2.0$ cm.



Escriba la expresión para la función de onda en $t = 0$:

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 1.0$ s:

$$y(x, 1.0) = \frac{2}{(x - 3.0)^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 2.0$ s:

$$y(x, 2.0) = \frac{2}{(x - 6.0)^2 + 1}$$

Para cada una de estas expresiones, se pueden sustituir varios valores de x y graficar la función de onda. Este procedimiento produce las funciones de onda que se muestran en las tres partes de la figura 16.6.

Finalizar Estas instantáneas muestran que el pulso se mueve hacia la derecha sin cambiar su forma y que tiene una rapidez constante de 3.0 cm/s.

¿Qué pasaría si? ¿Si la función de onda fuese

$$y(x, t) = \frac{4}{(x + 3.0t)^2 + 1}?$$

¿Esto cómo cambiaría la situación?

Respuesta Una nueva característica en esta expresión es el signo más en el denominador en lugar del signo menos. La nueva expresión representa un pulso con la misma forma que en la figura 16.6, pero que se mueve hacia la izquierda a medida que avanza el tiempo. Otra nueva característica en este caso es el numerador 4 en vez de 2. Por lo tanto, la nueva expresión representa un pulso con el doble de alto que en la figura 16.6.

16.2 El modelo de onda progresiva

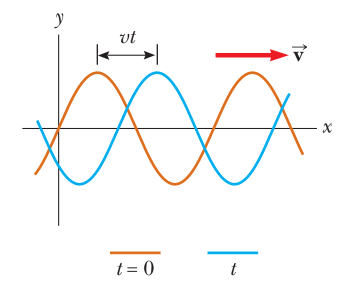


Figura 16.7 Una onda sinusoidal unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v. La curva café representa una instantánea de la onda en $t = 0$ y la curva azul representa una instantánea en algún tiempo después t.

En esta sección se introduce una función de onda importante cuya forma se muestra en la figura 16.7. La onda representada por esta curva se llama **onda sinusoidal** porque la curva es la misma que en la función seno θ trazada con θ. Una onda sinusoidal se podría establecer en una soga al agitar el extremo de la soga arriba y abajo en movimiento armónico simple.

La onda sinusoidal es el ejemplo más simple de una onda periódica continua y se puede usar para construir ondas más complejas (véase la sección 18.8). La curva café en la figura 16.7 representa una instantánea de una onda sinusoidal progresiva en $t = 0$, y la curva azul representa una instantánea de la onda en algún tiempo posterior t. Imagine dos tipos de movimiento que pueden presentarse. Primero, la forma de onda completa en la figura 16.7 se mueve hacia la derecha de modo que la curva café se mueve hacia la derecha y al final llega a la posición de la curva azul. Este es el movimiento de la *onda*. Si se concentra en un elemento del medio, como el elemento en $x = 0$, observará que cada elemento se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje y en movimiento armónico simple. Este es el movimiento de los *elementos del medio*. Es importante diferenciar entre el movimiento de la onda y el movimiento de los elementos del medio.

En capítulos anteriores de este libro se elaboraron varios modelos de análisis en función del modelo de partícula. Con la introducción a las ondas se puede elaborar un nuevo modelo de simplificación, el **modelo de onda**, que permitirá explorar más modelos de análisis para resolver problemas. Una partícula ideal tiene tamaño cero. Se pueden construir objetos físicos con tamaño distinto de cero como combinaciones de partículas. Por lo tanto, la partícula se considera como un bloque de construcción básico. Una onda ideal tiene una sola frecuencia y es infinitamente larga; es decir, la onda existe en todo el Universo. (Una onda no ligada de longitud finita necesariamente debe tener una mezcla de frecuencias.) Cuando este concepto se explore en la sección 18.8, se encontrará que las ondas ideales son combinables, tal como se combinan partículas.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.1

¿Cuál es la diferencia entre las figuras 16.8a y 16.8b?

Advierta la similitud visual entre las figuras 16.8a y 16.8b. Las formas son iguales, pero a) es una gráfica de posición vertical comparada con posición horizontal, mientras que b) es posición vertical en función de tiempo. La figura 16.8a es una representación de la onda *para una serie de partículas del medio*; es lo que vería en un instante de tiempo. La figura 16.8b es una representación gráfica de la posición de *un elemento del medio* como función del tiempo. Que ambas figuras tengan forma idéntica representa la ecuación 16.1: una onda es la *misma* función tanto de x como de t.

Enseguida se desarrollarán las características principales y representaciones matemáticas del modelo de análisis de una **onda progresiva**. Este modelo se usa cuando una onda se mueve a través del espacio sin interactuar con otras ondas o partículas.

La figura 16.8a muestra una instantánea de una onda móvil a través de un medio. La figura 16.8b muestra una gráfica de la posición de un elemento del medio como función del tiempo. Un punto en la figura 16.8a en que el desplazamiento del elemento de su posición normal está más alto se llama **cresta** de la onda. El punto más bajo se llama **valle**. La distancia de una cresta a la siguiente se llama **longitud de onda** λ (letra griega lambda). De manera más general, **la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos cualesquiera en ondas adyacentes**, como se muestra en la figura 16.8a.

Si usted cuenta el número de segundos entre las llegadas de dos crestas adyacentes en un punto determinado en el espacio, debe medir el **periodo** T de las ondas. En general, **el periodo es el intervalo de tiempo requerido para que dos puntos idénticos de ondas adyacentes pasen por un punto**, como se muestra en la figura 16.8b. El periodo de la onda es el mismo que el periodo de la oscilación armónica simple de un elemento del medio.

La misma información a menudo se conoce por el inverso del periodo, que se llama **frecuencia** f. En general, **la frecuencia de una onda periódica es el número de crestas (o valles o cualquier otro punto en la onda) que pasa un punto determinado en un intervalo de tiempo unitario**. La frecuencia de una onda sinusoidal se relaciona con el periodo mediante la expresión

$$f = \frac{1}{T} \qquad \textbf{(16.3)}$$

La frecuencia de la onda es la misma que la frecuencia de la oscilación armónica simple de un elemento del medio. La unidad de frecuencia más común, como se aprendió en el capítulo 15, es s^{-1}, o **hertz** (Hz). La correspondiente unidad para T es segundos.

La máxima posición de un elemento del medio relativo a su posición de equilibrio se llama **amplitud** A de la onda.

Las ondas viajan con una rapidez específica, y esta rapidez depende de las propiedades del medio perturbado. Por ejemplo, las ondas sonoras viajan a través de aire a temperatura ambiente con una rapidez aproximada de 343 m/s (781 mi/h), mientras que en la mayoría de los sólidos viajan con una rapidez mayor a 343 m/s.

Considere la onda sinusoidal de la figura 16.8a, que muestra la posición de la onda en $t = 0$. Ya que la onda es sinusoidal, se espera que la función de onda en este instante se exprese como $y(x, 0) = A \operatorname{sen} ax$, donde A es la amplitud y a es una constante a determinar. En $x = 0$, se ve que $y(0, 0) = A \operatorname{sen} a(0) = 0$, consistente con la figura 16.8a. El siguiente valor de x para el que y es cero es $x = \lambda/2$. Debido a eso

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A \operatorname{sen}\left(a\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Para que esta ecuación sea cierta, debe tener $a\lambda/2 = \pi$ o $a = 2\pi/\lambda$. En consecuencia, la función que describe las posiciones de los elementos del medio a través del que viaja la onda sinusoidal se puede escribir

$$y(x, 0) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad \textbf{(16.4)}$$

donde la constante A representa la amplitud de onda y la constante λ es la longitud de onda. Note que la posición vertical de un elemento del medio es la misma siempre que x aumente por un múltiplo entero de λ. Si la onda se mueve hacia la derecha con una rapidez v, la función de onda en algún tiempo posterior t es

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad \textbf{(16.5)}$$

La función de onda tiene la forma $f(x - vt)$ (ecuación 16.1). Si la onda viajara hacia la izquierda, la cantidad $x - vt$ se sustituiría por $x + vt$ como aprendió cuando se desarrollaron las ecuaciones 16.1 y 16.2.

Por definición, la onda viaja a través de un desplazamiento Δx igual a una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo Δt de un periodo T. Por tanto, la rapidez de onda, la longitud de onda y el periodo se relacionan mediante la expresión

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} \qquad \textbf{(16.6)}$$

Al sustituir esta expresión para v en la ecuación 16.5 se obtiene

$$y = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \qquad \textbf{(16.7)}$$

Esta forma de la función de onda muestra la naturaleza *periódica* de y. Advierta que con frecuencia se usará y en lugar de $y(x, t)$ como una notación abreviada. En cualquier tiempo dado t, y tiene el *mismo* valor en las posiciones x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. Además, en cualquier posición determinada x, el valor de y es el mismo en los tiempos t, $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

La función de onda se expresa en una forma conveniente al definir otras dos cantidades, el **número de onda angular** k (por lo general simplemente llamado **número de onda**) y la **frecuencia angular** ω:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \textbf{(16.8)}$$

◄ Número de onda angular

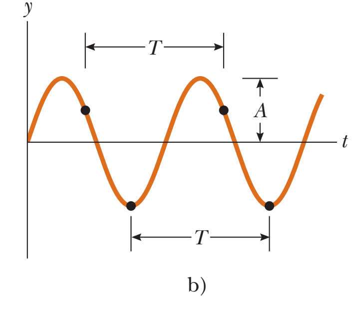


Figura 16.8 a) Una instantánea de una onda sinusoidal. La longitud de onda λ de una onda es la distancia entre crestas o valles adyacentes. b) Posición de un elemento del medio como función del tiempo. El periodo T de una onda es el intervalo de tiempo requerido para que el elemento complete un ciclo de su oscilación y para que la onda viaje una longitud de onda.

Frecuencia angular ▶

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \textbf{(16.9)}$$

Al usar estas definiciones, la ecuación 16.7 se puede escribir en la forma más compacta

Función de onda para una onda sinusoidal ▶

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad \textbf{(16.10)}$$

Al usar las ecuaciones 16.3, 16.8 y 16.9, la rapidez de onda v originalmente conocida en la ecuación 16.6 se expresa en las formas alternativas siguientes:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \textbf{(16.11)}$$

Rapidez de una onda sinusoidal ▶

$$v = \lambda f \quad \textbf{(16.12)}$$

La función de onda conocida en la ecuación 16.10 supone que la posición vertical y de un elemento del medio es cero en $x = 0$ y $t = 0$. Este no necesita ser el caso. Si no lo es, la función de onda por lo general se expresa en la forma

Expresión general para una onda sinusoidal ▶

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \quad \textbf{(16.13)}$$

donde ϕ es la **constante de fase**, tal como aprendió en el estudio del movimiento periódico en el capítulo 15. Esta constante se determina a partir de las condiciones iniciales.

Pregunta rápida 16.2 Una onda sinusoidal de frecuencia f viaja a lo largo de una cuerda estirada. La cuerda se lleva al reposo y una segunda onda progresiva con frecuencia $2f$ se establece en la cuerda. **i)** ¿Cuál es la rapidez de onda de la segunda onda? a) el doble de la primera onda, b) la mitad de la primera onda, c) la misma que la primera onda, d) imposible de determinar. **ii)** A partir de las mismas opciones, describa la longitud de onda de la segunda onda. **iii)** A partir de las mismas opciones, describa la amplitud de la segunda onda.

EJEMPLO 16.2 Una onda sinusoidal progresiva

Una onda sinusoidal progresiva en la dirección x positiva tiene una amplitud de 15.0 cm, longitud de onda de 40.0 cm y frecuencia de 8.00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en $t = 0$ y $x = 0$ también es de 15.0 cm, como se muestra en la figura 16.9.

A) Encuentre el número de onda k, periodo T, frecuencia angular ω y rapidez v de la onda.

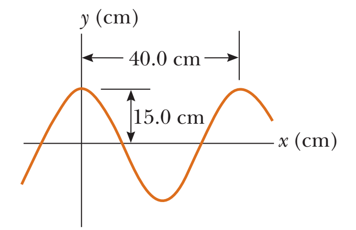


Figura 16.9 (Ejemplo 16.2) Una onda sinusoidal con longitud de onda $\lambda = 40.0$ cm y amplitud $A = 15.0$ cm. La función de onda se puede escribir en la forma $y = A \cos(kx - \omega t)$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.9 muestra la onda en $t = 0$. Imagine esta onda móvil hacia la derecha y mantiene su forma.

Categorizar Se evaluarán los parámetros de la onda mediante las ecuaciones generadas en la explicación anterior, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe el número de onda a partir de la ecuación 16.8:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40.0 \text{ cm}} = 0.157 \text{ rad/cm}$$

Calcule el periodo de la onda a partir de la ecuación 16.3:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00 \text{ s}^{-1}} = 0.125 \text{ s}$$

Evalúe la frecuencia angular de la onda a partir de la ecuación 16.9:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00 \text{ s}^{-1}) = 50.3 \text{ rad/s}$$

Calcule la rapidez de onda a partir de la ecuación 16.12:

$$v = \lambda f = (40.0 \text{ cm})(8.00 \text{ s}^{-1}) = 320 \text{ cm/s}$$

B) Determine la constante de fase ϕ y escriba una expresión general para la función de onda.

SOLUCIÓN

Sustituya $A = 15.0$ cm, $y = 15.0$ cm, $x = 0$ y $t = 0$ en la ecuación 16.13:

$$15.0 = (15.0)\operatorname{sen}\phi \rightarrow \operatorname{sen}\phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

Escriba la función de onda:

$$y = A\operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(kx - \omega t)$$

Sustituya los valores para A, k y ω en esta expresión:

$$y = (15.0\text{ cm})\cos(0.157x - 50.3t)$$

Ondas sinusoidales en cuerdas

En la figura 16.1 se demostró cómo crear un pulso al sacudir una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo una vez. Para crear una serie de tales pulsos, una onda, sustituya la mano con una varilla oscilatoria que vibre en movimiento armónico simple. La figura 16.10 representa instantáneas de la onda creada de esta forma a intervalos de $T/4$. Ya que el extremo de la varilla oscila en movimiento armónico simple, **cada elemento de la cuerda, como el que se encuentra en *P*, también oscila verticalmente con movimiento armónico simple**. Este debe ser el caso porque cada elemento sigue el movimiento armónico simple de la varilla. Por lo tanto, todo elemento de la cuerda se puede tratar como un oscilador armónico simple que vibra con una frecuencia igual a la frecuencia de oscilación de la varilla.[2] Advierta que, aun cuando cada elemento oscila en la dirección y, la onda viaja en la dirección x con una rapidez v. Desde luego, esta es la definición de una onda transversal.

Si la onda en $t = 0$ es como se describe en la figura 16.10b, la función de onda se puede escribir como

$$y = A\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

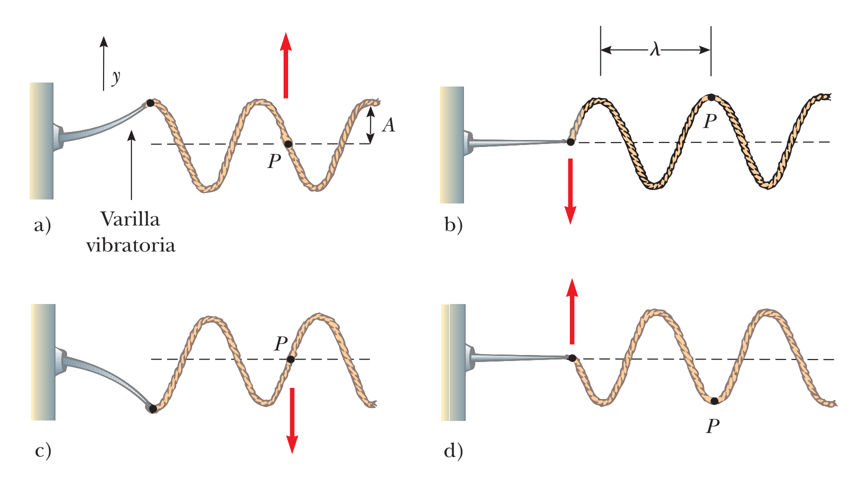


Figura 16.10 Un método para producir una onda sinusoidal sobre una cuerda. El extremo izquierdo de la cuerda se conecta a una varilla que se pone a oscilar. Cualquier elemento de la cuerda, como el que se encuentra en el punto *P*, oscila con movimiento armónico simple en la dirección vertical.

[2] En esta disposición se supone que un elemento de cuerda siempre oscila en línea vertical. La tensión en la cuerda variaría si a un elemento se le permitiera moverse hacia los lados. Tal movimiento haría el análisis muy complejo.

Se puede usar esta expresión para describir el movimiento de cualquier elemento de la cuerda. Un elemento en el punto P (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, y de este modo su coordenada x permanece constante. Por lo tanto, la **rapidez transversal** v_y (no confundir con la rapidez de onda v) y la **aceleración transversal** a_y de los elementos de la cuerda son

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos (kx - \omega t) \quad \textbf{(16.14)}$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \text{ sen } (kx - \omega t) \quad \textbf{(16.15)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.2

Dos tipos de rapidez/velocidad

No confunda v, la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y, la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

Estas expresiones incorporan derivadas parciales (véase la sección 7.8) porque y depende tanto de x como de t. En la operación $\partial y/\partial t$, por ejemplo, se toma una derivada respecto de t mientras se mantiene x constante. Los valores máximos de la rapidez transversal y la aceleración transversal son simplemente los valores absolutos de los coeficientes de las funciones coseno y seno:

$$v_{y,\text{ máx}} = \omega A \quad \textbf{(16.16)}$$

$$a_{y,\text{ máx}} = \omega^2 A \quad \textbf{(16.17)}$$

La rapidez transversal y la aceleración transversal de los elementos de la cuerda no llegan simultáneamente a sus valores máximos. La rapidez transversal llega a su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transversal llega a su valor máximo ($\omega^2 A$) cuando $y = \pm A$. Por último, las ecuaciones 16.16 y 16.17 son idénticas en forma matemática a las correspondientes ecuaciones para movimiento armónico simple, ecuaciones 15.17 y 15.18.

Pregunta rápida 16.3 La amplitud de una onda se duplica, sin que se hagan otros cambios a la onda. Como resultado de esta duplicación, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto? a) La rapidez de la onda cambia. b) La frecuencia de la onda cambia. c) La máxima rapidez transversal de un elemento del medio cambia. d) Los enunciados del inciso a) al c) son todos verdaderos. e) Ninguno de los enunciados del inciso a) al c) es verdadero.

16.3 La rapidez de ondas en cuerdas

En esta sección se determina la rapidez de un pulso transversal que viaja en una cuerda tensa. Primero se predicen conceptualmente los parámetros que determinan la rapidez. Si una cuerda bajo tensión se jala hacia los lados y luego se libera, la fuerza de tensión es responsable por acelerar un elemento particular de la cuerda de regreso hacia su posición de equilibrio. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del elemento aumenta con tensión creciente. Si el elemento regresa al equilibrio más rápidamente debido a esta aceleración aumentada, intuitivamente se argumentaría que la rapidez de la onda es mayor. En consecuencia, se espera que la rapidez de la onda aumente con tensión creciente.

Del mismo modo, ya que es más difícil acelerar un elemento pesado de la cuerda que un elemento ligero, la rapidez de la onda debe disminuir a medida que aumente la masa por unidad de longitud de la cuerda. Si la tensión en la cuerda es T y su masa por unidad de longitud es μ (letra griega mu), la rapidez de onda, como se demostrará, es

Rapidez de una onda sobre una cuerda estirada ►

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \textbf{(16.18)}$$

Se usará un análisis mecánico para deducir la ecuación 16.18. Considere un pulso móvil en una cuerda tensa hacia la derecha, con una rapidez uniforme v medida en relación con

un marco de referencia estacionario. En lugar de permanecer en este marco de referencia, es más conveniente elegir un marco de referencia inercial diferente que se mueva junto con el pulso con la misma rapidez que el pulso, de modo que el pulso está en reposo dentro del marco. Este cambio de marco de referencia se permite porque las leyes de Newton son válidas en un marco estable o en uno que se mueva con velocidad constante. En el nuevo marco de referencia, todos los elementos de la cuerda se mueven hacia la izquierda, un elemento determinado inicialmente a la derecha del pulso se mueve hacia la izquierda, se eleva y sigue la forma del pulso, y luego continúa moviéndose hacia la izquierda. La figura 16.11a muestra tal elemento en el instante en que se ubica en lo alto del pulso.

El pequeño elemento de la cuerda de longitud Δs que se muestra en la figura 16.11a, y se amplifica en la figura 16.11b, forma un arco aproximado de un círculo de radio R. En el marco de referencia móvil (que se mueve hacia la derecha con una rapidez v junto con el pulso), el elemento sombreado se mueve hacia la izquierda con una rapidez v. Este elemento tiene una aceleración centrípeta igual a v^2/R, que la proporcionan los elementos de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ cuya magnitud es la tensión en la cuerda. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ actúa a ambos lados del elemento y es tangente al arco, como se muestra en la figura 16.11b. Las componentes horizontales de $\vec{\mathbf{T}}$ se cancelan y cada componente vertical $T \text{ sen } \theta$ actúa radialmente hacia el centro del arco. Por eso, la fuerza radial total sobre el elemento es $2T \text{ sen } \theta$. Ya que el elemento es pequeño, θ es pequeño, y por lo tanto se puede usar la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx \theta$. De este modo, la fuerza radial total es

$$F_r = 2T \text{ sen } \theta \approx 2T\theta$$

El elemento tiene una masa $m = \mu \Delta s$. Ya que el elemento forma parte de un círculo y subtiende a un ángulo 2θ en el centro, $\Delta s = R(2\theta)$ y

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta$$

Al aplicar a este elemento la segunda ley de Newton en la dirección radial se obtiene

$$F_r = ma = \frac{mv^2}{R}$$

$$2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Esta expresión para v es la ecuación 16.18.

Advierta que esta deducción es de acuerdo con la suposición de que la altura del pulso es pequeña en relación con la longitud de la cuerda. Al usar esta suposición, se tiene posibilidad de usar la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Además, el modelo supone que la tensión T no es afectada por la presencia del pulso; en consecuencia, T es la misma en todos los puntos en la cuerda. Por último, esta prueba *no* supone alguna forma particular para el pulso. Por lo tanto, un pulso *de cualquier forma* viaja a lo largo de la cuerda con rapidez $v = \sqrt{T/\mu}$ sin cambio alguno en la forma del pulso.

Pregunta rápida 16.4 Suponga que con la mano crea un pulso al mover una vez el extremo libre de una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo, comience en $t = 0$. La cuerda se une en su otro extremo a una pared distante. El pulso alcanza la pared en el tiempo t. ¿Cuál de las siguientes acciones, tomada por sí misma, disminuye el intervalo de tiempo requerido para que el pulso llegue a la pared? Puede ser correcta más de una opción. a) Mover la mano más rápidamente, pero sólo hacia arriba y hacia abajo una vez en la misma cantidad, b) mover la mano más lentamente, pero sólo hacia arriba y hacia abajo por la misma cantidad, c) mover la mano una mayor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, d) mover la mano una menor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, e) usar una cuerda más pesada de la misma longitud y bajo la misma tensión, f) usar una cuerda más ligera de la misma longitud y bajo la misma tensión, g) usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión decreciente, h) usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión creciente.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.3
Múltiples *Ts*

No confunda la T en la ecuación 16.18 para la tensión con el símbolo T que se usa en este capítulo para el periodo de una onda. El contexto de la ecuación debe ayudarle a identificar a cuál cantidad se hace referencia. ¡Simplemente no hay suficientes letras en el abecedario para asignar una letra única a cada variable!

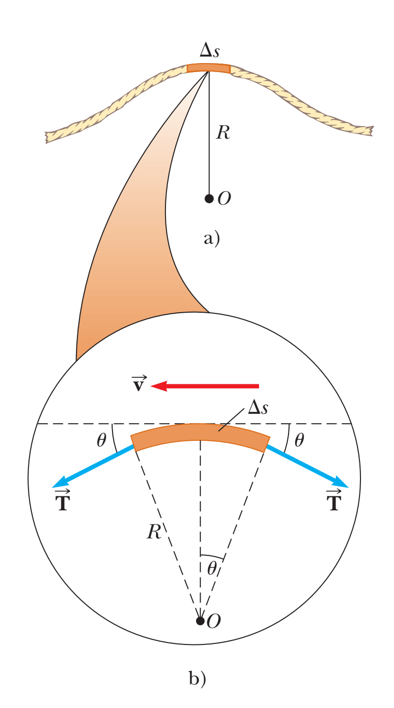


Figura 16.11 a) Para obtener la rapidez v de una onda en una cuerda estirada, es conveniente describir el movimiento de un pequeño elemento de la cuerda en un marco de referencia en movimiento. b) En el marco de referencia en movimiento, el pequeño elemento de longitud Δs se mueve hacia la izquierda con rapidez v. La fuerza neta en el elemento está en la dirección radial porque se cancelan las componentes horizontales de la fuerza de tensión.

EJEMPLO 16.3 La rapidez de un pulso en una cuerda

Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.300 kg y una longitud de 6.00 m (figura 16.12). La cuerda pasa sobre una polea y soporta un objeto de 2.00 kg. Encuentre la rapidez de un pulso que viaje a lo largo de esta cuerda.

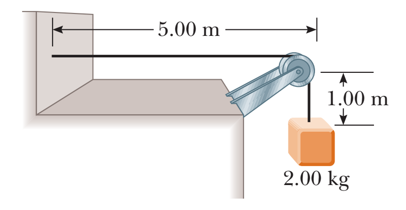


Figura 16.12 (Ejemplo 16.3) La tensión T en la cuerda se mantiene mediante el objeto suspendido. La rapidez de cualquier onda que viaje a lo largo de la cuerda está dada por $v = \sqrt{T/\mu}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 16.12, el bloque colgante establece una tensión en la cuerda horizontal. Esta tensión determina la rapidez con que la onda se mueve en la cuerda.

Categorizar Para encontrar la tensión en la cuerda, modele el bloque colgante como una partícula en equilibrio. Luego, con la tensión evalúe la rapidez de la onda en la cuerda, use la ecuación 16.18.

Analizar Aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio:

$$\sum F_y = T - m_{\text{bloque}}\, g = 0$$

Resuelva para la tensión en la cuerda:

$$T = m_{\text{bloque}}\, g$$

Aplique la ecuación 16.18 para encontrar la rapidez de la onda, use $\mu = m_{\text{cuerda}}/\ell$ para la densidad de masa lineal de la cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_{\text{bloque}}\, g\ell}{m_{\text{cuerda}}}}$$

Evalúe la rapidez de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{(2.00\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(6.00\text{ m})}{0.300\text{ kg}}} = 19.8\text{ m/s}$$

Finalizar El cálculo de la tensión desprecia la pequeña masa de la cuerda. En sentido estricto, la cuerda nunca puede ser exactamente recta; por lo tanto, la tensión no es uniforme.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el bloque se balancea de atrás para adelante respecto de la vertical? ¿Cómo afectaría a la rapidez de onda en la cuerda?

Respuesta El bloque en balanceo se clasifica como una partícula bajo una fuerza neta. La magnitud de una de las fuerzas sobre el bloque es la tensión en la cuerda, que determina la rapidez de la onda. A medida que el bloque se balancea, la tensión cambia, de modo que la rapidez de la onda cambia.

Cuando el bloque está en en la parte baja del balanceo, la cuerda es vertical y la tensión es mayor que el peso del bloque porque la fuerza neta debe ser hacia arriba para proporcionar la aceleración centrípeta del bloque. Por lo tanto, la rapidez de onda debe ser mayor que 19.8 m/s.

Cuando el bloque está en su punto más alto al final de un balanceo, está en reposo momentáneo, así que no hay aceleración centrípeta en dicho instante. El bloque es una partícula en equilibrio en la dirección radial. La tensión se equilibra mediante una componente de la fuerza gravitacional sobre el bloque. Por lo tanto, la tensión es menor que el peso y la rapidez de la onda es menor que 19.8 m/s.

EJEMPLO 16.4 Rescate del excursionista

Un excursionista de 80.0 kg queda atrapado en la saliente de una montaña después de una tormenta. Un helicóptero rescata al excursionista: se mantiene encima de él y le baja un cable, la masa del cable es de 8.00 kg y su longitud de 15.0 m. El cable se amarra a un cabestrillo de 70.0 kg de masa. El excursionista se ata al cabestrillo y después el helicóptero acelera hacia arriba. Aterrorizado por colgar del cable a mitad del aire, el excursionista intenta enviar señales al piloto lanzando pulsos transversales por el cable. Un pulso tarda 0.250 s en recorrer la longitud del cable. ¿Cuál es la aceleración del helicóptero?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el efecto de la aceleración del helicóptero sobre el cable. Mientras mayor sea la aceleración hacia arriba, mayor será la tensión en el cable. A su vez, a mayor tensión, mayor la rapidez de los pulsos en el cable.

Categorizar Este problema combina dos aspectos: la rapidez de los pulsos en una cuerda y la representación del excursionista y el cabestrillo como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar Use el intervalo de tiempo en que el pulso viaja del excursionista al helicóptero para encontrar la rapidez de los pulsos en el cable:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15.0 \text{ m}}{0.250 \text{ s}} = 60.0 \text{ m/s}$$

Resuelva la ecuación 16.18 para la tensión en el cable:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow T = \mu v^2$$

Modele al excursionista y el cabestrillo como una partícula bajo una fuerza neta, y note que la aceleración de esta partícula de masa m es la misma que la aceleración del helicóptero:

$$\sum F = ma \rightarrow T - mg = ma$$

Resuelva para la aceleración:

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{\mu v^2}{m} - g = \frac{m_{\text{cable}} v^2}{\ell_{\text{cable}} m} - g$$

Sustituya valores numéricos:

$$a = \frac{(8.00 \text{ kg})(60.0 \text{ m/s})^2}{(15.0 \text{ m})(150.0 \text{ kg})} - 9.80 \text{ m/s}^2 = 3.00 \text{ m/s}^2$$

Finalizar Un cable tiene rigidez además de tensión. La rigidez tiende a regresar un alambre a su forma recta original incluso cuando no esté bajo tensión. Por ejemplo, una cuerda de piano se endereza si se le libera de una forma curva; las cuerdas de embalaje no.

La rigidez representa una fuerza restauradora además de la tensión y aumenta la rapidez de la onda. En consecuencia, para un cable real, la rapidez de 60.0 m/s que se determinó muy probablemente se asocia con una aceleración menor del helicóptero.

16.4 Reflexión y transmisión

El modelo de onda progresiva describe ondas que viajan a través de un medio uniforme sin interactuar con algo más en el camino. Ahora se considerará cómo una onda progresiva es afectada cuando encuentra un cambio en el medio. Por ejemplo, considere un pulso que viaja en una cuerda que está rígidamente unida a un soporte en un extremo, como en la figura 16.13. Cuando el pulso alcanza el soporte, se presenta un cambio severo en el medio: la cuerda termina. Como resultado, el pulso experimenta **reflexión**; es decir, el pulso se mueve de regreso a lo largo de la cuerda en la dirección opuesta.

Note que el pulso reflejado está *invertido*. Esta inversión se explica del modo siguiente: cuando el pulso alcanza el extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Por la tercera ley de Newton, el soporte debe ejercer sobre al cuerda una fuerza de reacción de igual magnitud y con dirección opuesta (hacia abajo). Esta fuerza hacia abajo hace que el pulso se invierta en la reflexión.

Ahora considere otro caso. Esta vez, el pulso llega al final de una cuerda que es libre de moverse verticalmente, como en la figura 16.14. La tensión en el extremo libre se mantiene porque la cuerda está amarrada a un anillo de masa despreciable que tiene libertad para deslizarse verticalmente sobre un poste uniforme sin fricción. De nuevo, el pulso se refleja, pero esta vez no se invierte. Cuando llega al poste, el pulso ejerce una fuerza sobre el extremo libre de la cuerda, lo que hace que el anillo acelere hacia arriba. El anillo se eleva tan alto como el pulso entrante, y luego la componente hacia abajo de la fuerza de tensión jala el anillo de vuelta hacia abajo. Este movimiento del anillo produce un pulso reflejado que no se invierte y que tiene la misma amplitud que el pulso entrante.

Para finalizar, considere una situación en la que la frontera es intermedia entre estos dos extremos. En este caso, parte de la energía en el pulso incidente se refleja y parte se somete a **transmisión**; es decir: parte de la energía pasa a través de la frontera. Por ejemplo, suponga que una cuerda ligera se une a una cuerda más pesada, como en la figura

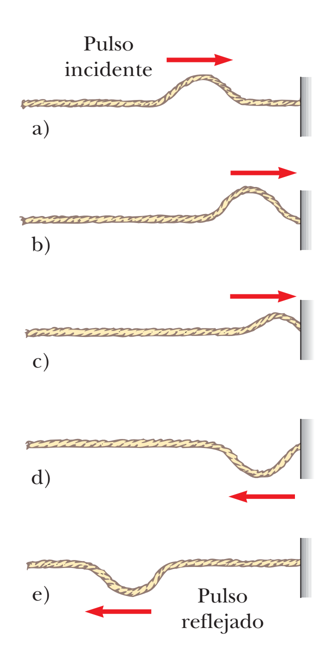


Figura 16.13 Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada. El pulso reflejado está invertido, pero su forma no cambia de otra manera.

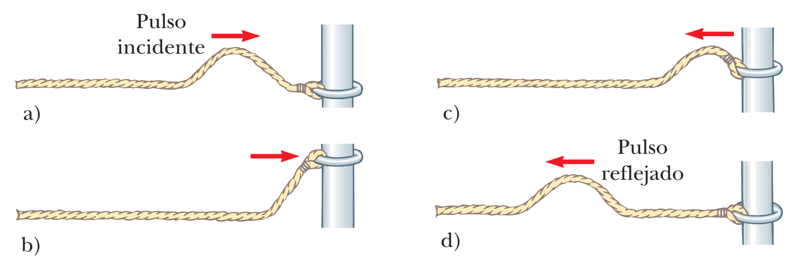


Figura 16.14 Reflexión de un pulso viajero en el extremo libre de una cuerda estirada. El pulso reflejado no está invertido.

16.15. Cuando un pulso que viaja sobre la cuerda ligera alcanza la frontera entre las dos cuerdas, parte del pulso se refleja e invierte y parte se transmite a la cuerda más pesada. El pulso reflejado se invierte por los mismos motivos descritos en el caso de la cuerda unida rígidamente a un soporte.

El pulso reflejado tiene una amplitud menor que el pulso incidente. En la sección 16.5 se demostró que la energía que porta una onda se relaciona con su amplitud. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, cuando el pulso se descompone en un pulso reflejado y un pulso transmitido en la frontera, la suma de las energías de estos dos pulsos debe ser igual a la energía del pulso incidente. Ya que el pulso reflejado sólo contiene parte de la energía del pulso incidente, su amplitud debe ser menor.

Cuando un pulso que viaja sobre una cuerda pesada golpea la frontera entre la cuerda pesada y una ligera, como en la figura 16.16, de nuevo, parte se refleja y parte se transmite. En este caso, el pulso reflejado no se invierte.

En cualquier caso, las alturas relativas de los pulsos reflejado y transmitido dependen de las densidades relativas de las dos cuerdas. Si las cuerdas son idénticas, no hay discontinuidad en la frontera y no se presenta reflexión.

De acuerdo con la ecuación 16.18, la rapidez de una onda sobre una cuerda aumenta a medida que disminuye la masa por unidad de longitud de la cuerda. En otras palabras, una onda viaja más lentamente en una cuerda pesada que sobre una cuerda ligera, si ambas están bajo la misma tensión. Las siguientes reglas generales se aplican a las ondas reflejadas: **cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A > v_B$ (es decir, cuando B es más denso que A), se invierte en la reflexión. Cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A < v_B$ (es decir, cuando A es más denso que B), no se invierte en la reflexión**.

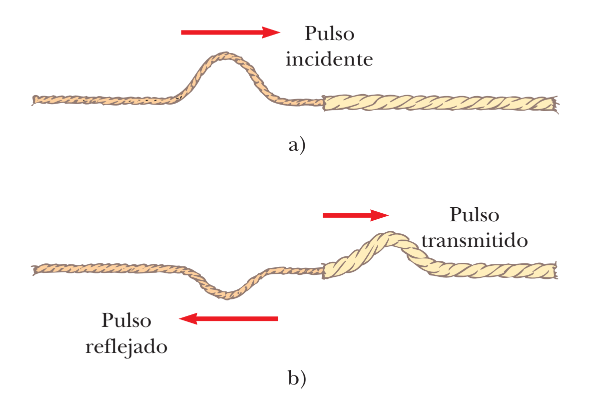


Figura 16.15 a) Pulso que viaja a la derecha sobre una cuerda ligera unida a una cuerda más pesada. b) Parte del pulso incidente se refleja (e invierte) y parte se transmite a la cuerda más pesada.

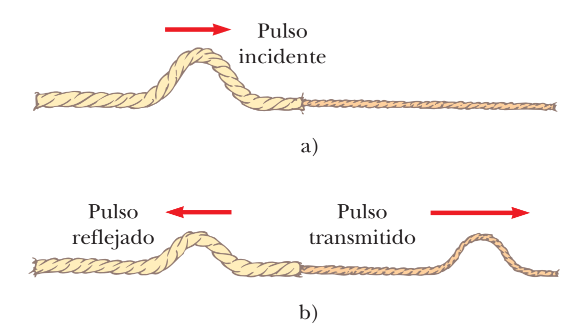


Figura 16.16 a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda pesada unida a una cuerda más ligera. b) El pulso incidente tiene un reflejo parcial y se transmite en partes, y el pulso reflejado no se invierte.

16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas

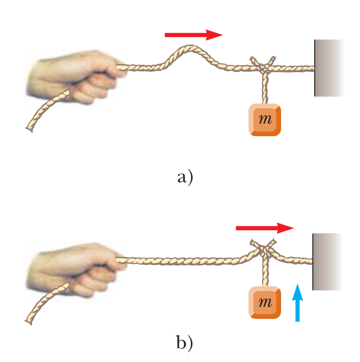


Figura 16.17 a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda estirada que tiene un objeto suspendido en ella. b) Cuando el pulso llega, se transmite energía al objeto suspendido.

Las ondas transportan energía a través de un medio mientras se propagan. Por ejemplo, suponga que un objeto cuelga de una cuerda estirada y se envía un pulso por la cuerda, como en la figura 16.17a. Cuando el pulso llega al objeto suspendido, el objeto se desplaza momentáneamente hacia arriba, como en la figura 16.17b. En el proceso se transfirió energía al objeto y apareció como un aumento en la energía potencial gravitacional del sistema objeto–Tierra. Esta sección examina la rapidez a la que se transporta la energía a lo largo de una cuerda. Se supondrá una onda sinusoidal unidimensional en el cálculo de la energía transferida.

Considere una onda sinusoidal que viaja en una cuerda (figura 16.18). La fuente de la energía es algún agente externo en el extremo izquierdo, que realiza trabajo para producir las oscilaciones. Se puede considerar que la cuerda es un sistema no aislado. A medida que el agente externo realiza trabajo sobre el extremo de la cuerda, moviéndola hacia arriba y hacia abajo, entra energía al sistema de la cuerda y se propaga a lo largo de su longitud. Concentre su atención en un elemento infinitesimal de la cuerda de longitud dx y masa dm. Cada uno de tales elementos se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. Por lo tanto, cada elemento de la cuerda se modela como un oscilador armónico simple, con la oscilación en la dirección y. Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A. La energía cinética K asociada con una partícula móvil es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Si esta ecuación se aplica al elemento infinitesimal, la energía cinética dK de este elemento es

$$dK = \tfrac{1}{2}(dm)v_y^{\,2}$$

donde v_y es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa dm del elemento de longitud dx es igual a $\mu\, dx$. Por tanto, la energía cinética de un elemento de la cuerda se expresa como

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu dx)v_y^{\,2} \qquad \textbf{(16.19)}$$

Al sustituir con la ecuación 16.14 para la rapidez transversal general de un oscilador armónico simple se obtiene

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu[-\omega A\cos(kx - \omega t)]^2\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\cos^2(kx - \omega t)\, dx$$

Si se toma una instantánea de la onda en el tiempo $t = 0$, la energía cinética de un elemento dado es

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\cos^2(kx)\, dx$$

Al integrar esta expresión sobre todos los elementos de cuerda en una longitud de onda de la onda produce la energía cinética total K_λ en una longitud de onda:

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\cos^2(kx)\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\int_0^\lambda \cos^2(kx)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\left[\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\,\text{sen}\, 2kx\right]_0^\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\left[\tfrac{1}{2}\lambda\right] = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2A^2\lambda$$

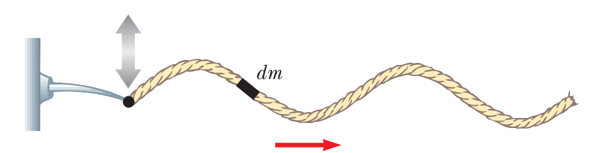


Figura 16.18 Una onda sinusoidal que viaja a lo largo del eje x sobre una cuerda estirada. Todo elemento de la cuerda se mueve verticalmente y todo elemento tiene la misma energía total.

Además de la energía cinética, hay energía potencial asociada con cada elemento de la cuerda debido a su desplazamiento de la posición de equilibrio y las fuerzas restauradoras de elementos colindantes. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total U_A en una longitud de onda produce exactamente el mismo resultado:

$$U_\lambda = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \qquad \textbf{(16.20)}$$

A medida que la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado en la cuerda durante un intervalo de tiempo de un periodo de la oscilación. Por lo tanto, la potencia $\mathcal{P}$, o rapidez de transferencia de energía T_{OM} asociada con la onda mecánica, es

Potencia de una onda ▶

$$\mathcal{P} = \frac{T_{\text{OM}}}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\left(\frac{\lambda}{T}\right) \qquad \textbf{(16.21)}$$

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

La ecuación 16.1 muestra que la rapidez de transferencia de energía por una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a a) el cuadrado de la frecuencia, b) el cuadrado de la amplitud y c) la rapidez de la onda. De hecho, **la rapidez de transferencia de energía en cualquier onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud**.

Pregunta rápida 16.5 ¿Cuál de los siguientes, tomado por sí mismo, sería más efectivo para aumentar la rapidez a la que se transfiere la energía mediante una onda que viaja a lo largo de una cuerda? a) reducir a la mitad la densidad de masa lineal de la cuerda, b) duplicar la longitud de onda de la onda, c) duplicar la tensión en la cuerda, d) duplicar la amplitud de la onda

---

EJEMPLO 16.5 Potencia suministrada a una cuerda en vibración

Una cuerda tensa para la que $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m está bajo una tensión de 80.0 N. ¿Cuánta potencia se debe suministrar a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere una vez más la figura 16.10 y advierta que la varilla vibratoria suministra energía a la cuerda con cierta rapidez. En tal caso esta energía se propaga hacia la derecha a lo largo de la cuerda.

Categorizar Se evalúan cantidades de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la rapidez de onda sobre la cuerda a partir de la ecuación 16.18:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{80.0\text{ N}}{5.00 \times 10^{-2}\text{ kg/m}}} = 40.0\text{ m/s}$$

Calcule la frecuencia angular ω de las ondas sinusoidales sobre la cuerda a partir de la ecuación 16.9:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0\text{ Hz}) = 377\text{ s}^{-1}$$

Use estos valores y $A = 6.00 \times 10^{-2}$ m en la ecuación 16.1 para evaluar la potencia:

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

$$= \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^{-2}\text{ kg/m})(377\text{ s}^{-1})^2(6.00 \times 10^{-2}\text{ m})^2(40.0\text{ m/s})$$

$$= 512\text{ W}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la cuerda debe transferir energía a una rapidez de 1 000 W? ¿Cuál debe ser la amplitud requerida si todos los otros parámetros permanecen iguales?

Respuesta Establezca una relación de la potencia nueva a la anterior, que refleje sólo un cambio en la amplitud:

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{nueva}}}{\mathcal{P}_{\text{anterior}}} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{nueva}}^2 v}{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{anterior}}^2 v} = \frac{A_{\text{nueva}}^2}{A_{\text{anterior}}^2}$$

Al resolver para la nueva amplitud se obtiene

$$A_{\text{nueva}} = A_{\text{anterior}}\sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{nueva}}}{\mathcal{P}_{\text{anterior}}}} = (6.00 \text{ cm})\sqrt{\frac{1\,000 \text{ W}}{512 \text{ W}}} = 8.39 \text{ cm}$$

16.6 La ecuación de onda lineal

En la sección 16.1 se introdujo el concepto de función de onda para representar ondas que viajan sobre una cuerda. Todas las funciones de onda $y(x, t)$ representan soluciones de una ecuación llamada *ecuación de onda lineal*. Esta ecuación da una descripción completa del movimiento ondulatorio, y a partir de ella uno puede deducir una expresión para la rapidez de onda. Además, la ecuación de onda lineal es básica para muchas formas de movimiento ondulatorio. En esta sección se deduce esta ecuación como se aplica a ondas sobre cuerdas.

Suponga que una onda viajera se propaga a lo largo de una cuerda que está bajo una tensión T. Considere un pequeño elemento de cuerda de longitud Δx (figura 16.19). Los extremos del elemento forman pequeños ángulos θ_A y θ_B con el eje x. La fuerza neta que actúa sobre el elemento en la dirección vertical es

$$\sum F_y = T \operatorname{sen} \theta_B - T \operatorname{sen} \theta_A = T(\operatorname{sen} \theta_B - \operatorname{sen} \theta_A)$$

Ya que los ángulos son pequeños, se puede usar la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx$ tan θ para expresar la fuerza neta como

$$\sum F_y \approx T(\tan \theta_B - \tan \theta_A) \qquad \textbf{(16.22)}$$

Imagine experimentar un desplazamiento infinitesimal hacia afuera desde el extremo del elemento de soga en la figura 16.19 a lo largo de la línea azul que representa la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$. Este desplazamiento tiene componentes x y y infinitesimales y se puede representar mediante el vector $dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$. La tangente del ángulo respecto al eje x para este desplazamiento es dy/dx. Ya que esta tangente se evalúa en un instante particular de tiempo, se le debe expresar en forma parcial como $\partial y/\partial x$. Al sustituir para las tangentes en la ecuación 16.22 se obtiene

$$\sum F_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] \qquad \textbf{(16.23)}$$

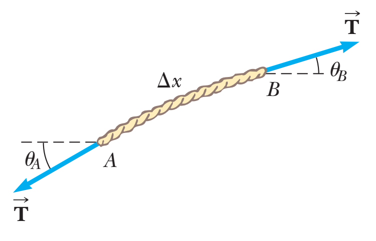


Figura 16.19 Un elemento de cuerda bajo tensión T.

Ahora aplique la segunda ley de Newton al elemento, con la masa del elemento conocido por $m = \mu\,\Delta x$:

$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \qquad \textbf{(16.24)}$$

Al combinar la ecuación 16.23 con la ecuación 16.24 se obtiene

$$\mu \Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/dx)_A}{\Delta x} \qquad \textbf{(16.25)}$$

El lado derecho de la ecuación 16.25 se expresa en una forma diferente si advierte que la derivada parcial de cualquier función se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Al asociar $f(x + \Delta x)$ con $(\partial y/\partial x)_B$ y $f(x)$ con $(\partial y/\partial x)_A$, se ve que, en el límite $\Delta x \to 0$, la ecuación 16.25 se convierte en

Ecuación de onda lineal para una cuerda ▶

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \textbf{(16.26)}$$

Esta expresión es la ecuación de onda lineal como se aplica a ondas en una cuerda.

La ecuación de onda lineal (ecuación 16.26) con frecuencia se escribe en la forma

Ecuación de onda lineal en general ▶

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \textbf{(16.27)}$$

En general la ecuación 16.27 se aplica a diferentes tipos de ondas progresivas. Para ondas en cuerdas y representa la posición vertical de los elementos de la cuerda. Para ondas sonoras y corresponde a la posición longitudinal de los elementos de aire desde el equilibrio o variaciones o en presión o en densidad del gas a través del que se propaga la onda sonora. En el caso de ondas electromagnéticas y corresponde a los componentes del campo eléctrico o magnético.

Se demostró que la función de onda sinusoidal (ecuación 16.10) es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27). Aunque no se probó en este caso, la ecuación de onda lineal es satisfecha por *cualquier* función de onda que tenga la forma $y = f(x \pm vt)$. Además, se vio que la ecuación de onda lineal es una consecuencia directa de la segunda ley de Newton aplicada a cualquier elemento de una cuerda que transporta una onda progresiva.

Resumen

DEFINICIONES

Una **onda sinusoidal** unidimensional es aquella para la cual las posiciones de los elementos del medio varían en forma sinusoidal. Una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha se puede expresar con una **función de onda**

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \quad \textbf{(16.5)}$$

donde A es la **amplitud**, λ es la **longitud de onda** y v es la **rapidez de onda**.

El **número de onda angular** k y la **frecuencia angular** ω de una onda se definen del modo siguiente:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad \textbf{(16.8)}$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \textbf{(16.9)}$$

donde T es el **periodo** de la onda y f es su **frecuencia**

En una **onda transversal** los elementos del medio se mueven en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. En una **onda longitudinal** los elementos del medio se mueven en una dirección *paralela* a la dirección de propagación.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cualquier onda unidimensional que viaja con una rapidez v en la dirección x se representa mediante una función de onda de la forma

$$y(x, t) = f(x \pm vt) \qquad \textbf{(16.1, 16.2)}$$

donde el signo positivo se aplica a una onda que viaja en la dirección x negativa y el signo negativo se aplica a una onda que viaja en la dirección x positiva. La forma de la onda en cualquier instante en el tiempo (una instantánea de la onda) se obtiene al mantener t constante.

La rapidez de una onda que viaja sobre una cuerda tensa de masa por unidad de longitud μ y tensión T es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \textbf{(16.18)}$$

Una onda se refleja total o parcialmente cuando llega al final del medio en el que se propaga o cuando llega a una frontera donde su rapidez cambia de manera discontinua. Si una onda que viaja en una cuerda alcanza un extremo fijo, la onda se refleja e invierte. Si la onda llega a un extremo libre, se refleja mas no se invierte.

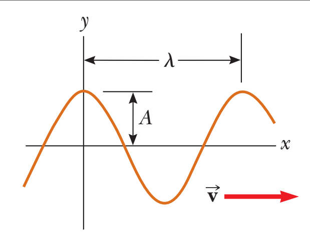
La **potencia** transmitida por una onda sinusoidal sobre una cuerda estirada es

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad \textbf{(16.21)}$$

Las funciones de onda son soluciones a una ecuación diferencial llamada **ecuación de onda lineal:**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(16.27)}$$

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Onda progresiva. La rapidez de onda de una onda sinusoidal es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \textbf{(16.6, 16.12)}$$

Una onda sinusoidal se expresa como

$$y = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad \textbf{(16.10)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Por qué un pulso sobre una cuerda se considera como transversal?
2. ¿Cómo crearía una onda longitudinal en un resorte estirado? ¿Sería posible crear una onda transversal en un resorte?
3. **O i)** Clasifique las ondas representadas por las siguientes funciones de acuerdo con sus amplitudes, de mayor a menor. Si dos ondas tienen la misma amplitud, muéstrelas con igual clasificación.
   a) $y = 2$ sen $(3x - 15t + 2)$ b) $y = 4$ sen $(3x - 15t)$
   c) $y = 6$ cos $(3x + 15t - 2)$ d) $y = 8$ sen $(2x + 15t)$
   e) $y = 8$ cos $(4x + 20t)$ f) $y = 7$ sen $(6x - 24t)$
   ii) Clasifique las mismas ondas de acuerdo con sus longitudes de onda, de mayor a menor. **iii)** Clasifique las mismas ondas de acuerdo con sus frecuencias, de mayor a menor. **iv)** Clasifique las mismas ondas de acuerdo con sus periodos, de mayor a menor. **v)** Clasifique las mismas ondas de acuerdo con sus magnitudes de velocidad, de mayor a menor.
4. **O** Si la cuerda no se estira, ¿en qué factor tendría que multiplicar la tensión en una cuerda tensa de modo que duplique la rapidez de la onda? a) 8, b) 4, c) 2, d) 0.5, e) No podría cambiar la rapidez en un factor predecible al cambiar la tensión.

5. **O** Cuando todas las cuerdas en una guitarra se estiran a la misma tensión, ¿la rapidez de una onda a lo largo de la cuerda grave con más masa será a) más rápida, b) más lenta o c) igual que la rapidez de una onda en las cuerdas más agudas? Una alternativa, d) ¿la rapidez en la cuerda grave no necesariamente es alguna de estas respuestas?
6. **O** Si estira una manguera de hule y le da un tirón, puede observar un pulso que viaja hacia arriba y hacia abajo por la manguera. **i)** ¿Qué sucede con la rapidez del pulso si estira la manguera con mayor firmeza? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Es constante. d) Cambia de manera impredecible. **ii)** ¿Qué sucede con la rapidez si llena la manguera con agua? Elija de las mismas posibilidades.
7. Cuando un pulso viaja en una cuerda tensa, ¿siempre se invierte en la reflexión? Explique.
8. La rapidez vertical de un segmento de una cuerda tensa horizontal, a través de la que viaja una onda, ¿depende de la rapidez de la onda?
9. **O** a) ¿Una onda en una cuerda puede moverse con una rapidez de onda que sea mayor que la rapidez transversal máxima $v_{y,\text{máx}}$ de un elemento de la cuerda? b) ¿La rapidez de la onda puede ser mucho mayor que la máxima rapidez del elemento? c) ¿La rapidez de la onda puede ser igual a la máxima rapidez del elemento? d) ¿La rapidez de la onda puede ser menor que $v_{y,\text{máx}}$?
10. Si agita un extremo de una soga tensa de manera estable tres veces cada segundo, ¿cuál sería el periodo de la onda sinusoidal establecida en la soga?
11. Si una soga larga cuelga del techo y se envían ondas hacia arriba de la soga desde su extremo inferior, no ascienden con rapidez constante. Explique.
12. **O** Una fuente vibratoria con frecuencia constante genera una onda sinusoidal en una cuerda bajo tensión constante. Si la potencia entregada a la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambia la amplitud? a) 4, b) 2, c) $\sqrt{2}$, d) 1, e) 0.707, f) no se puede predecir
13. **O** Si un extremo de una soga pesada se une a un extremo de una soga ligera, una onda se mueve de la soga pesada a la soga más ligera. **i)** ¿Qué sucede con la rapidez de la onda? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Es constante. d) Cambia de manera impredecible. **ii)** ¿Qué sucede con la frecuencia? Elija de las mismas posibilidades. **iii)** ¿Qué sucede con la longitud de onda? Elija entre las mismas posibilidades.
14. Un sólido puede transportar tanto ondas longitudinales como ondas transversales, pero un fluido homogéneo sólo transporta ondas longitudinales. ¿Por qué?
15. En un terremoto, desde el foco del movimiento, se propagan ondas S (transversales) y P (longitudinales). El foco está en el suelo abajo del epicentro en la superficie. Suponga que las ondas se mueven en línea recta a través de material uniforme. Las ondas S viajan a través de la Tierra más lentamente que las ondas P (aproximadamente a 5 km/s comparado con 8 km/s). Al detectar el tiempo de llegada de las ondas, ¿cómo puede determinar la distancia al foco del terremoto? ¿Cuántas estaciones de detección se necesitan para localizar el foco sin ambigüedades?
16. En mecánica, con frecuencia, se suponen cuerdas sin masa. ¿Por qué esto no es una buena suposición cuando se discuten ondas sobre cuerdas?

Problemas

Sección 16.1 Propagación de una perturbación

1. En $t = 0$, se describe un pulso transversal en un alambre mediante la función

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

donde x y y están en metros. Encuentre la función $y(x, t)$ que describa este pulso si viaja en la dirección x positiva con una rapidez de 4.50 m/s.

2. ● Las olas con una distancia de cresta a cresta de 10.0 m se describen mediante la función de onda

$$y(x, t) = (0.800 \text{ m}) \text{ sen } [0.628(x - vt)]$$

donde $v = 1.20$ m/s. a) Bosqueje $y(x, t)$ en $t = 0$. b) Esboce $y(x, t)$ en $t = 2.00$ s. Compare esta gráfica con la del inciso a) y explique similitudes y diferencias. ¿Qué hizo la ola entre la descripción a) y la b)?

3. Dos puntos A y B en la superficie de la Tierra están a la misma longitud y 60.0° separados en latitud. Suponga que un terremoto en el punto A crea una onda P que llega al punto B al viajar recta a través del cuerpo de la Tierra con una rapidez constante de 7.80 km/s. El terremoto también radia una onda Rayleigh que viaja a lo largo de la superficie de la Tierra a 4.50 km/s. a) ¿Cuál de estas dos ondas sísmicas llega primero a B? b) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre las llegadas de estas dos ondas a B? Considere que el radio de la Tierra es de 6 370 km.

4. Una estación sismográfica recibe ondas S y P de un terremoto, separadas 17.3 s. Suponga que las ondas viajaron sobre la misma trayectoria con magnitudes de velocidad de 4.50 km/s y 7.80 km/s. Encuentre la distancia desde el sismógrafo al hipocentro del terremoto.

Sección 16.2 El modelo de onda progresiva

5. La función de onda para una onda progresiva en una cuerda tensa es (en unidades SI)

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \text{ sen } \left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) ¿Cuáles son la rapidez y dirección de viaje de la onda? b) ¿Cuál es la posición vertical de un elemento de la cuerda en $t = 0$, $x = 0.100$ m? c) ¿Cuáles son la longitud de onda y frecuencia de la onda? d) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de un elemento de la cuerda?

6. ● Cierta cuerda uniforme se mantiene bajo tensión constante. a) Dibuje una instantánea lateral de una onda sinusoidal en una cuerda, como se muestra en los diagramas del texto. b) Abajo del diagrama a), dibuje la misma onda en un momento posterior de un cuarto del periodo de la onda. c) Luego, dibuje una onda con una amplitud 1.5 veces mayor que la onda en el diagrama a). d) A continuación, dibuje una onda que difiera de la del diagrama a) sólo por tener una longitud de onda 1.5 veces mayor. e) Por último, dibuje una onda que difiera del diagrama a) por tener una frecuencia 1.5 veces mayor.
7. Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una soga. El oscilador que genera la onda completa 40.0 vibraciones en 30.0 s. Además, dado un máximo viaja 425 cm a lo largo de la soga en 10.0 s. ¿Cuál es la longitud de onda de la onda?
8. Para cierta onda transversal, la distancia entre dos crestas sucesivas es 1.20 m, y ocho crestas pasan un punto determinado a lo largo de la dirección de viaje cada 12.0 s. Calcule la rapidez de la onda.
9. Una onda se describe mediante $y = (2.00 \text{ cm}) \text{ sen } (kx - \omega t)$, donde $k = 2.11$ rad/m, $\omega = 3.62$ rad/s, x está en metros y t en segundos. Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y rapidez de la onda.
10. Cuando un alambre particular vibra con una frecuencia de 4.00 Hz, se produce una onda transversal con longitud de onda de 60.0 cm. Determine la rapidez de las ondas a lo largo del alambre.
11. La cuerda que se muestra en la figura 16.10 se impulsa a una frecuencia de 5.00 Hz. La amplitud del movimiento es 12.0 cm y la rapidez de la onda es de 20.0 m/s. Además, la onda es tal que $y = 0$ en $x = 0$ y $t = 0$. Determine a) la frecuencia angular y b) el número de onda para esta onda. c) Escriba una expresión para la función de onda. Calcule d) la máxima rapidez transversal y e) la máxima aceleración transversal de un punto sobre la cuerda.
12. Considere la onda sinusoidal del ejemplo 16.2 con la función de onda

$$y = (15.0 \text{ cm}) \cos (0.157x - 50.3t)$$

En cierto instante, el punto A está en el origen y el punto B es el primer punto a lo largo del eje x donde la onda está 60.0° fuera de fase con A. ¿Cuál es la coordenada de B?
13. Una onda sinusoidal se describe mediante la función de onda

$$y = (0.25 \text{ m}) \text{ sen } (0.30x - 40t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Determine para esta onda a) la amplitud, b) la frecuencia angular, c) el número de onda angular, d) la longitud de onda, e) la rapidez de onda y f) la dirección de movimiento.
14. ● a) Grafique y en función de t en $x = 0$ para una onda sinusoidal de la forma y (15.0 cm) cos $(0.157x - 50.3t)$, donde x y y están en centímetros y t en segundos. b) Determine el periodo de vibración de esta gráfica. Argumente la comparación de su resultado con el valor encontrado en el ejemplo 16.2.
15. a) Escriba la expresión para y como función de x y t para una onda sinusoidal que viaja a lo largo de una soga en la dirección *x negativa* con las siguientes características: $A = 8.00$ cm, $\lambda = 80.0$ cm, $f = 3.00$ Hz y $y(0, t) = 0$ en $t = 0$. b) **¿Qué pasaría si?** Escriba la expresión para y como función de x y t para la onda en el inciso a) si supone que $y(x, 0) = 0$ en el punto $x = 10.0$ cm.
16. Una onda sinusoidal que viaja en la dirección $-x$ (hacia la izquierda) tiene una amplitud de 20.0 cm, longitud de onda de 35.0 cm y frecuencia de 12.0 Hz. La posición transversal de un elemento del medio en $t = 0$, $x = 0$ es $y = -3.00$ cm, y el elemento tiene en este caso una velocidad positiva. a) Bosqueje la onda en $t = 0$. b) Encuentre su número de onda angular, periodo, frecuencia angular y rapidez de onda. c) Escriba una expresión para la función de onda $y(x, t)$.
17. Una onda transversal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = (0.120 \text{ m}) \text{ sen } \left(\frac{\pi}{8} x + 4\pi t\right)$$

a) Determine la rapidez y aceleración transversales de la cuerda en $t = 0.200$ s para el punto en la cuerda ubicado en $x = 1.60$ m. b) ¿Cuáles son la longitud de onda, periodo y rapidez de propagación de esta onda?
18. Una onda sinusoidal transversal en una cuerda tiene un periodo $T = 25.0$ ms y viaja en la dirección x negativa con una rapidez de 30.0 m/s. En $t = 0$, un elemento de la cuerda en $x = 0$ tiene una posición transversal de 2.00 cm y viaja hacia abajo con una rapidez de 2.00 m/s. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? b) ¿Cuál es el ángulo de fase inicial? c) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de un elemento de la cuerda? d) Escriba la función de onda para la onda.
19. Una onda sinusoidal, con 2.00 m de longitud de onda y 0.100 m de amplitud, viaja en una cuerda con una rapidez de 1.00 m/s hacia la derecha. Al inicio, el extremo izquierdo de la cuerda está en el origen. Encuentre a) la frecuencia y frecuencia angular, b) el número de onda angular y c) la función de onda. Determine la ecuación de movimiento para d) el extremo izquierdo de la cuerda y e) el punto en la cuerda en $x = 1.50$ m a la derecha del extremo izquierdo. f) ¿Cuál es la máxima rapidez de cualquier punto en la cuerda?
20. Una onda en una cuerda se describe mediante la función de onda $y = (0.100 \text{ m}) \text{ sen } (0.50x - 20t)$. a) Demuestre que un elemento de la cuerda en $x = 2.00$ m ejecuta movimiento armónico. b) Determine la frecuencia de oscilación de este punto particular.

Sección 16.3 La rapidez de ondas en cuerdas

21. Un cordón de teléfono de 4.00 m de largo, que tiene una masa de 0.200 kg. Un pulso transversal se produce al sacudir un extremo del cordón tenso. El pulso hace cuatro viajes de atrás para adelante a lo largo del cordón en 0.800 s. ¿Cuál es la tensión del cordón?
22. Una onda progresiva transversal en un alambre tenso tiene una amplitud de 0.200 mm y una frecuencia de 500 Hz. Viaja con una rapidez de 196 m/s. a) Escriba una ecuación en unidades SI de la forma $y = A \text{ sen } (kx - \omega t)$ para esta onda. b) La masa por unidad de longitud de este alambre es 4.10 g/m. Encuentre la tensión en el alambre.
23. Una cuerda de piano, que tiene una masa por unidad de longitud igual a 5.00×10^{-3} kg/m, está bajo una tensión de 1 350 N. Encuentre la rapidez con la que una onda viaja en esta cuerda.
24. Pulsos transversales viajan con una rapidez de 200 m/s a lo largo de un alambre de cobre tenso cuyo diámetro es de 1.50 mm. ¿Cuál es la tensión en el alambre? (La densidad del cobre es 8.92 g/cm^3.)

25. Un astronauta en la Luna quiere medir el valor local de la aceleración en caída libre al cronometrar pulsos que viajan por un alambre del que cuelga un objeto de gran masa. Suponga que un alambre tiene una masa de 4.00 g y una longitud de 1.60 m, y suponga que de él está suspendido un objeto de 3.00 kg. Un pulso requiere 36.1 ms para atravesar la longitud del alambre. Calcule g_{Luna} a partir de estos datos. (Puede ignorar la masa del alambre cuando calcule la tensión en él.)

26. Un péndulo simple consiste de una bola de masa M que cuelga de una cuerda uniforme de masa m y longitud L, con $m << M$. Sea T el periodo de oscilaciones para el péndulo. Determine la rapidez de una onda transversal en la cuerda cuando el péndulo cuelga en reposo.

27. Ondas transversales viajan con una rapidez de 20.0 m/s en una cuerda bajo una tensión de 6.00 N. ¿Qué tensión se requiere para una rapidez de onda de 30.0 m/s en la misma cuerda?

28. **Problema de repaso.** Una cuerda ligera, con una masa por unidad de longitud de 8.00 g/m, tiene sus extremos amarrados a dos paredes separadas por una distancia igual a tres cuartos la longitud de la cuerda (figura P16.28). Un objeto de masa m se suspende del centro de la cuerda y pone tensión en la cuerda. a) Encuentre una expresión para la rapidez de onda transversal en la cuerda como función de la masa del objeto colgante. b) ¿Cuál debe ser la masa del objeto suspendido de la cuerda si la rapidez de onda es de 60.0 m/s?

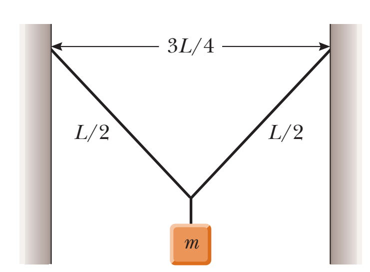


Figura P16.28

29. El límite elástico de una pieza de alambre de acero es 2.70×10^8 Pa. ¿Cuál es la máxima rapidez a la que pulsos de onda transversales pueden propagarse a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es 7.86×10^3 kg/m^3.)

30. ● Una estudiante en un examen encuentra en una hoja de referencia las dos ecuaciones siguientes

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ella olvidó lo que representa T en cada ecuación. a) Use análisis dimensional para determinar las unidades requeridas para T en cada ecuación. b) Explique cómo puede identificar, a partir de las unidades, la cantidad física que representa cada T.

31. Un alambre de acero de 30.0 m de longitud y un alambre de cobre de 20.0 m de longitud, ambos con 1.00 mm de diámetro, se conectan extremo con extremo y se estiran a una tensión de 150 N. ¿Durante qué intervalo de tiempo una onda transversal viajará toda la longitud de los dos alambres?

Sección 16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas

32. Una soga tensa tiene una masa de 0.180 kg y una longitud de 3.60 m. ¿Qué potencia se debe suministrar a la soga para que genere ondas sinusoidales que tengan una amplitud de 0.100 m y una longitud de onda de 0.500 m y viajen con una rapidez de 30.0 m/s?

33. Una onda acuática en dos dimensiones se dispersa en ondulaciones circulares. Demuestre que la amplitud A a una distancia r desde la perturbación inicial es proporcional a $1/\sqrt{r}$. *Sugerencia:* Considere la energía que porta una ondulación que se mueve hacia afuera.

34. En una soga bajo tensión constante se generan ondas transversales. ¿En qué factor aumenta o disminuye la potencia requerida si a) la longitud de la soga se duplica y la frecuencia angular permanece constante, b) la amplitud se duplica y la frecuencia angular se reduce a la mitad, c) se duplican tanto la longitud de onda como la amplitud, y d) se reducen a la mitad tanto la longitud de la cuerda como la longitud de onda?

35. Ondas sinusoidales de 5.00 cm de amplitud se transmitirán a lo largo de una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 4.00×10^{-2} kg/m. La fuente puede entregar una potencia máxima de 300 W y la cuerda está bajo una tensión de 100 N. ¿Cuál es la frecuencia más alta a la que puede funcionar la fuente?

36. Un segmento de 6.00 m de una cuerda larga contiene cuatro ondas completas y tiene una masa de 180 g. La cuerda vibra sinusoidalmente con una frecuencia de 50.0 Hz y un desplazamiento de cresta a valle de 15.0 cm. (La distancia "cresta a valle" es la distancia vertical desde la posición positiva más lejana hasta la posición negativa más lejana.) a) Encuentre la función que describe esta onda que viaja en la dirección x positiva. b) Determine la potencia a suministrar a la cuerda.

37. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = (0.15 \text{ m}) \text{ sen } (0.80x - 50t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La masa por unidad de longitud de esta cuerda es 12.0 g/m. Determine a) la rapidez de la onda, b) la longitud de onda, c) la frecuencia y d) la potencia transmitida a la onda.

38. La función de onda para una onda sobre una cuerda tensa es

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \text{ sen } \left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

donde x está en metros y t en segundos. a) ¿Cuál es la rapidez promedio a la que se transmite la energía a lo largo de la cuerda si la densidad de masa lineal es de 75.0 g/m? b) ¿Cuál es la energía contenida en cada ciclo de la onda?

39. Una cuerda horizontal puede transmitir una potencia máxima $\mathcal{P}_0$ (sin romperse) si por ella viaja una onda con amplitud A y frecuencia angular ω. Para aumentar esta potencia máxima, un estudiante dobla la cuerda y usa esta "cuerda doble" como medio. Determine la potencia máxima que se puede transmitir a lo largo de la "cuerda doble", si supone que la tensión en las dos hebras juntas es la misma que la tensión original en la cuerda individual.

40. ● En una región lejana del epicentro de un terremoto, una onda sísmica se modela como transporte de energía en una sola dirección sin absorción, tal como lo hace una onda en una cuerda. Suponga que la onda sísmica se mueve de granito a

fango con densidad similar pero con un módulo volumétrico mucho menor. Suponga que la rapidez de la onda cae gradualmente en un factor de 25.0, con reflexión despreciable de la onda. Explique si la amplitud del suelo que se agita aumentará o disminuirá. ¿Cambia en un factor predecible? Este fenómeno condujo al colapso de parte de la autopista Nimitz en Oakland, California, durante el terremoto de Loma Prieta en 1989.

Sección 16.6 La ecuación de onda lineal

41. ● a) Evalúe A en la igualdad escalar $(7 + 3)4 = A$. b) Evalúe A, B y C en la igualdad vectorial $7.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{k}} = A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} + C\hat{\mathbf{k}}$. Explique las respuestas para convencer a un estudiante, quien cree que usted no puede resolver una sola ecuación para tres incógnitas diferentes. c) **¿Qué pasaría si?** La igualdad funcional o identidad

$$A + B\cos(Cx + Dt + E) = (7.00 \text{ mm})\cos(3x + 4t + 2)$$

es verdadera para todos los valores de las variables x y t, medida en metros y en segundos, respectivamente. Evalúe las constantes A, B, C, D y E. Explique cómo llega a las respuestas.

42. Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x-vt)}$ es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27), donde b es una constante.

43. Demuestre que la función de onda $y = \text{In}[b(x - vt)]$ es una solución de la ecuación 16.27, donde b es una constante.

44. a) Demuestre que la función $y(x, t) = x^2 + v^2t^2$ es una solución a la ecuación de onda. b) Demuestre que la función en el inciso a) se puede escribir como $f(x + vt) + g(x - vt)$ y determine las formas funcionales para f y g. c) **¿Qué pasaría si?** Repita los incisos a) y b) para la función $y(x, t) = \text{sen}(x)\cos(vt)$.

Problemas adicionales

45. La "ola" es un tipo particular de pulso que se puede propagar a través de una gran multitud reunida en un estadio deportivo (figura P16.45). Los elementos del medio son los espectadores, con posición cero cuando están sentados y posición máxima cuando están de pie y elevan sus brazos. Si una gran cantidad de espectadores participa en el movimiento ondulatorio, se desarrolla una forma de pulso de cierta estabilidad. La rapidez de la onda depende del tiempo de reacción de las personas, que por lo general está en el orden de 0.1 s. Estime el orden de magnitud, en minutos, del intervalo de tiempo requerido para que tal pulso dé una vuelta completa alrededor de un gran estadio deportivo. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.



Figura P16.45

46. ● Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = (0.150 \text{ m})\,\text{sen}\,(0.800x - 50.0t)$$

donde x está en metros y t en segundos. La masa por cada longitud de la cuerda es 12.0 g/m. a) Encuentre la máxima aceleración transversal de un elemento en esta cuerda. b) Determine la máxima fuerza transversal sobre un segmento de cuerda de 1.00 cm. Establezca cómo se compara esta fuerza con la tensión en la cuerda.

47. Las películas se proyectan a 24.0 cuadros por segundo. Cada cuadro es una fotografía de 19.0 mm de alto. ¿Con qué rapidez constante pasa la película en el proyector?

48. Una onda transversal sobre una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m})\,\text{sen}\,[(1.25 \text{ rad/m})x + (99.6 \text{ rad/s})t]$$

Considere el elemento de la cuerda en $x = 0$. a) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los primeros dos instantes cuando este elemento tiene una posición de $y = 0.175$ m? b) ¿Qué distancia recorre la onda durante este intervalo de tiempo?

49. **Problema de repaso.** Un bloque de 2.00 kg cuelga de una cuerda de caucho, y se sostiene de modo que la cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es de 0.500 m y su masa es de 5.00 g. La "constante de resorte" para la cuerda es 100 N/m. El bloque se libera y detiene en el punto más bajo. a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en este punto más bajo. b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición "estirada"? c) Encuentre la rapidez de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

50. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de caucho. El bloque se suspende de modo que la cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es L_0 y su masa es m, mucho menor que M. La "constante de resorte" para la cuerda es k. El bloque se libera y detiene en el punto más bajo. a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en la posición "estirada"? c) Encuentre la rapidez de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en la posición más baja.

51. ● Un terremoto o un deslizamiento de tierra produce una onda oceánica de corta duración que transporte gran energía, llamada tsunami. Cuando su longitud de onda es grande comparada con la profundidad del océano d, la rapidez de una onda acuática se conoce aproximadamente por $v = \sqrt{gd}$. a) Explique por qué la amplitud de la onda aumenta a medida que la onda se aproxima a la playa. ¿Qué se considera constante en el movimiento de cualquier cresta de la onda? b) Suponga que un terremoto se presenta a lo largo de la frontera de una placa tectónica que corre de norte a sur y produce una cresta de onda tsunami recta que se mueve en todas partes hacia el oeste. Si la onda tiene una amplitud de 1.80 m cuando su rapidez es de 200 m/s, ¿cuál será su amplitud donde el agua tenga 9.00 m de profundidad? c) Explique por qué se debe esperar que la amplitud en la playa sea todavía mayor, pero no se puede predecir significativamente mediante su modelo.

52. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M, sostenido por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo θ con la horizontal (figura P16.52). La

longitud de la cuerda es L y su masa es $m << M$. Deduzca una expresión para el intervalo de tiempo para que una onda transversal viaje de un extremo de la cuerda al otro.

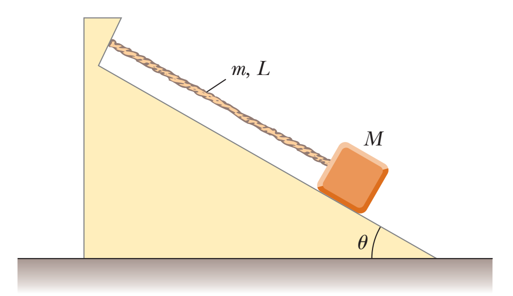


Figura P16.52

53. ● Una cuerda con densidad lineal de 0.500 g/m se mantiene bajo tensión de 20.0 N. A medida que una onda sinusoidal transversal se propaga en la cuerda, los elementos de la cuerda se mueven con máxima rapidez $v_{y,\text{máx}}$. a) Determine la potencia transmitida por la onda como función de $v_{y,\text{máx}}$. b) Establezca cómo la potencia depende de $v_{y,\text{máx}}$. c) Encuentre la energía contenida en una sección de cuerda de 3.00 m de largo. Exprésela como función de $v_{y,\text{máx}}$ y la masa m_3 de esta sección. d) Encuentre la energía que la onda porta al pasar por un punto en 6.00 s.

54. Una onda sinusoidal en una soga se describe mediante la función de onda

$$y = (0.20 \text{ m}) \text{ sen } (0.75\pi x + 18\pi t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La soga tiene una densidad de masa lineal de 0.250 kg/m. La tensión en la soga la proporciona un arreglo como el que se ilustra en la figura 16.12. ¿Cuál es la masa del objeto suspendido?

55. Un bloque de 0.450 kg de masa se une al un extremo de una cuerda de 0.003 20 kg de masa; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque da vueltas con rapidez angular constante en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción. ¿A través de qué ángulo el bloque da vueltas en el intervalo de tiempo durante el que una onda transversal viaja a lo largo de la cuerda desde el centro del círculo hasta el bloque?

56. Un alambre de densidad ρ se afila de modo que su área de sección transversal varía con x de acuerdo con

$$A = (1.0 \times 10^{-3}x + 0.010) \text{ cm}^2$$

a) La tensión en el alambre es T. Deduzca una relación para la rapidez de una onda como función de la posición. b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que el alambre es de aluminio y está bajo una tensión de 24.0 N. Determine la rapidez de onda en el origen y en $x = 10.0$ m.

57. Una soga con masa total m y longitud L está suspendida verticalmente. Demuestre que un pulso transversal recorre la longitud de la soga en un intervalo de tiempo $\Delta t = 2\sqrt{L/g}$. *Sugerencia:* Primero encuentre una expresión para la rapidez de onda en cualquier punto a una distancia x desde el extremo inferior, al considerar la tensión de la soga como resultado del peso del segmento abajo de dicho punto.

58. Suponga que un objeto de masa M está suspendido de la parte baja de la soga en el problema 57. a) Demuestre que el intervalo de tiempo para que un pulso transversal recorra la longitud de la soga es

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{mg}}\left(\sqrt{M + m} - \sqrt{M}\right)$$

¿Qué pasaría si? b) Demuestre que la expresión en el inciso a) se reduce al resultado del problema 57 cuando $M = 0$. c) Demuestre que para $m << M$, la expresión en el inciso a) se reduce a

$$\Delta t = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

59. En el problema 57 se establece que un pulso viaja desde la parte baja hasta lo alto de una soga colgante de longitud L en un intervalo de tiempo $\Delta t = 2\sqrt{L/g}$. Use este resultado para responder las siguientes preguntas. (No es necesario establecer alguna integración nueva.) a) ¿Durante qué intervalo de tiempo un pulso viaja a la mitad de la soga? Dé su respuesta como una fracción de la cantidad $2\sqrt{L/g}$. b) Un pulso comienza a viajar por la soga. ¿Qué distancia viajó el pulso después de un intervalo de tiempo $\sqrt{L/g}$?

60. Si un rizo de cadena se hace girar con gran rapidez, puede rodar a lo largo del suelo como un aro circular sin colapsar. Considere una cadena con densidad de masa lineal uniforme μ cuyo centro de masa viaja hacia la derecha con gran rapidez v_0. a) Determine la tensión en la cadena en términos de μ y v_0. b) Si el rizo rueda sobre un bache, la deformación resultante de la cadena hace que dos pulsos transversales se propaguen a lo largo de la cadena, uno en sentido de las manecillas del reloj y otra en sentido contrario. ¿Cuál es la rapidez de los pulsos que viajan a lo largo de la cadena? c) ¿A través de qué ángulo viaja cada pulso durante el intervalo de tiempo en el que el rizo da una revolución?

61. **Problema de repaso.** Un alambre de aluminio se sujeta fuertemente en cada extremo bajo tensión cero a temperatura ambiente. Al reducir la temperatura, lo que resulta en una disminución en la longitud de equilibrio del alambre, aumenta la tensión en el alambre. ¿Qué deformación ($\Delta L/L$) resulta en una rapidez de onda transversal de 100 m/s? Considere que el área de sección transversal del alambre es igual a 5.00×10^{-6} m^2, la densidad es de 2.70×10^3 kg/m^3 y el módulo de Young es 7.00×10^{10} N/m^2.

62. a) Demuestre que la rapidez de las ondas longitudinales a lo largo de un resorte con constante de fuerza k es $v = \sqrt{kL/\mu}$, donde L es la longitud no estirada del resorte y μ es la masa por unidad de longitud. b) Un resorte con una masa de 0.400 kg tiene una longitud no estirada de 2.00 m y una constante de fuerza de 100 N/m. Con el resultado obtenido en el inciso a), determine la rapidez de las ondas longitudinales a lo largo de este resorte.

63. Un pulso que viaja a lo largo de una cuerda con densidad de masa lineal μ se describe mediante la función de onda

$$y = [A_0 e^{-bx}] \text{ sen } (kx - \omega t)$$

donde el factor entre corchetes se dice que es la amplitud. a) ¿Cuál es la potencia $\mathcal{P}(x)$ que porta esta onda en un punto x? b) ¿Cuál es la potencia que porta esta onda en el origen? c) Calcule la proporción $\mathcal{P}(x)/\mathcal{P}(0)$.

64. Un terremoto en el suelo del océano del golfo de Alaska produce un tsunami que alcanza Hilo, Hawaii, a 4 450 km de distancia, en un intervalo de tiempo de 9 h 30 min. Los tsunami tienen enormes longitudes de onda (100 a 200 km)

y la rapidez de propagación para estas ondas es $v \approx \sqrt{g\bar{d}}$, donde $\bar{d}$ es la profundidad promedio del agua. A partir de la información dada, encuentre la rapidez de onda promedio y la profundidad oceánica promedio entre Alaska y Hawaii. (Este método se usó en 1856 para estimar la profundidad promedio del océano Pacífico mucho antes de que los sonares produjeran una determinación directa.)

65. Una cuerda en un instrumento musical se mantiene bajo tensión T y se extiende desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = L$. La cuerda está devanada con alambre de tal forma que su masa por unidad de longitud $\mu(x)$ aumenta uniformemente de μ_0 en $x = 0$ a μ_L en $x = L$. a) Encuentre una expresión para $\mu(x)$ como una función de x sobre el intervalo $0 \leq x \leq L$. b) Demuestre que el intervalo de tiempo requerido para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda se conoce por

$$\Delta t = \frac{2L\left(\mu_L + \mu_0 + \sqrt{\mu_L \mu_0}\right)}{3\sqrt{T}\left(\sqrt{\mu_L} + \sqrt{\mu_0}\right)}$$

Respuestas a las preguntas rápidas

16.1 **i)**, b). Es longitudinal porque la perturbación (el corrimiento de posición de las personas) es paralela a la dirección en que viaja la onda. **ii)**, a). Es transversal porque las personas se paran de pie y se sientan (movimiento vertical), mientras que la ola se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha.

16.2 **i)**, c). La rapidez de la onda está determinada por el medio, de modo que no se afecta al cambiar la frecuencia. **ii)**, b). Ya que la rapidez de onda permanece igual, el resultado de duplicar la frecuencia es que la longitud de onda reduce a la mitad. **iii)**, d). La amplitud de una onda no se relaciona con la rapidez de la onda, así que no se puede determinar la nueva amplitud sin más información.

16.3 c). Con una amplitud más grande, un elemento de la cuerda tiene más energía asociada con su movimiento armónico simple, así que el elemento pasa a través de la posición de equilibrio con una rapidez transversal máxima mayor.

16.4 Sólo las respuestas f) y h) son correctas. Las opciones a) y b) afectan la rapidez transversal de una partícula de la cuerda, mas no la rapidez de la onda a lo largo de la cuerda. Las opciones c) y d) cambian la amplitud. Las opciones e) y g) aumentan el intervalo de tiempo al reducir la rapidez de la onda.

16.5 d). Duplicar la amplitud de la onda hace que la potencia sea mayor en un factor de 4. En la opción a), reducir a la mitad la densidad de masa lineal de la cuerda hace que la potencia cambie en un factor de 0.71 y la rapidez disminuye. En la opción b), duplicar la longitud de onda de la onda reduce a la mitad la frecuencia y hace que la potencia cambie en un factor de 0.25, y la rapidez disminuye. En la opción c), duplicar la tensión en la cuerda cambia la rapidez de onda y hace que la potencia cambie en un factor de 1.4, que no es tan grande como en la opción d).



Los oídos humanos evolucionaron para detectar ondas sonoras e interpretarlas, como la música o el habla. Algunos animales, como este joven zorro orejas de murciélago, tienen oídos adaptados para detectar sonidos muy débiles. (Getty Images)

17 Ondas sonoras

Las ondas sonoras viajan a través de cualquier medio material con una rapidez que depende de las propiedades del medio. A medida que las ondas sonoras viajan a través del aire, los elementos del aire vibran para producir cambios en densidad y presión a lo largo de la dirección del movimiento de la onda. Si la fuente de las ondas sonoras vibra sinusoidalmente, las variaciones de presión también son sinusoidales. La descripción matemática de las ondas sonoras sinusoidales es muy parecida a las ondas sinusoidales en cuerdas, que se explicaron en el capítulo 16.

Las ondas sonoras se dividen en tres categorías que cubren diferentes intervalos de frecuencia. 1) Las *ondas audibles* se encuentran dentro del intervalo de sensibilidad del oído humano. Es posible generarlas en una variedad de formas, como de instrumentos musicales, voces humanas o bocinas. 2) Las *ondas infrasónicas* tienen frecuencias por abajo del intervalo audible. Los elefantes usan ondas infrasónicas para comunicarse mutuamente, aun cuando estén separados por varios kilómetros. 3) Las *ondas ultrasónicas* tienen frecuencias por arriba del alcance audible. Es posible que usted haya usado silbatos "silenciosos" para llamar a su perro. Los perros escuchan el sonido ultrasónico que emite este silbato, para los humanos es imposible detectarlo. Las ondas ultrasónicas también se usan para la formación de imagen médica.

Este capítulo inicia con una explicación de la rapidez de las ondas sonoras y continúa con la intensidad de onda, que es una función de la amplitud de onda. Después se pro-

porciona una descripción alternativa de la intensidad de las ondas sonoras que resume la gran variación de intensidades a las cuales el oído es sensible, en un intervalo más pequeño por conveniencia. También se investigan los efectos que el movimiento de las fuentes y los escuchas tienen sobre la frecuencia de un sonido. Por último, se explora la reproducción digital del sonido, con un enfoque particular en los sistemas sonoros que se usan en las películas actuales.

17.1 Rapidez de ondas sonoras

En la figura 17.1 se describe gráficamente el movimiento de un pulso longitudinal unidimensional móvil a través de un tubo largo que contiene un gas compresible. Un pistón en el extremo izquierdo se mueve hacia la derecha para comprimir el gas y crear el pulso. Antes de que el pistón se mueva, el gas no está perturbado y tiene densidad uniforme, como se representa mediante la región coloreada en el mismo tono de la figura 17.1a. Cuando el pistón se empuja súbitamente hacia la derecha (figura 17.1b), el gas justo enfrente de él se comprime (como se representa mediante la región con el tono más oscuro); la presión y la densidad en esta región ahora son mayores de lo que eran antes de que el pistón se moviera. Cuando el pistón se detiene (figura 17.1c), la región comprimida del gas continúa en movimiento hacia la derecha, lo que corresponde a un pulso longitudinal que viaja a través del tubo con rapidez v.

La rapidez de las ondas sonoras en un medio depende de la compresibilidad y la densidad del medio; si éste es un líquido o un gas y tiene un módulo volumétrico B (véase la sección 12.4) y densidad ρ, la rapidez de las ondas sonoras en dicho medio es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textbf{(17.1)}$$

Resulta interesante comparar esta expresión con la ecuación 16.18 para la rapidez de las ondas transversales en una cuerda, $v = \sqrt{T/\mu}$. En ambos casos la rapidez de la onda depende de una propiedad elástica del medio (módulo volumétrico B o tensión en la cuerda T) y de una propiedad inercial del medio (ρ o μ). De hecho, la rapidez de todas las ondas mecánicas sigue una expresión de la forma general

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica}}{\text{propiedad inercial}}}$$

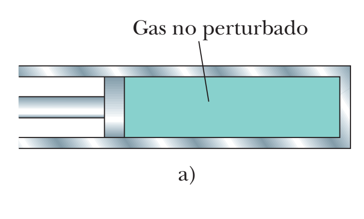
Para ondas sonoras longitudinales en una barra sólida de material, por ejemplo, la rapidez del sonido depende del módulo de Young Y y de la densidad ρ. La tabla 17.1 proporciona la rapidez del sonido en materiales diferentes.

La rapidez del sonido también depende de la temperatura del medio. La relación entre la rapidez de la onda y la temperatura del aire, para sonido que viaja a través del aire, es

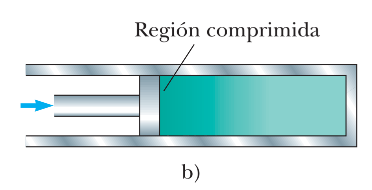
$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{1 + \frac{T_C}{273°\text{C}}}$$

donde 331 m/s es la rapidez del sonido en aire a 0°C y T_C es la temperatura del aire en grados Celsius. Con esta ecuación, uno encuentra que, a 20°C, la rapidez del sonido en el aire es aproximadamente 343 m/s.

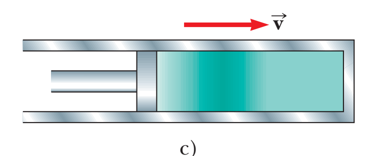
Esta información proporciona una forma conveniente de estimar la distancia de una tormenta. Primero cuente el número de segundos entre ver el destello del relámpago y escuchar el trueno. Dividir este tiempo entre 3 da la distancia aproximada al relámpago en kilómetros, porque 343 m/s es aproximadamente $\frac{1}{3}$ km/s. Dividir el tiempo en segundos entre 5 da la distancia aproximada al relámpago en millas, porque la rapidez del sonido es aproximadamente $\frac{1}{5}$ mi/s.



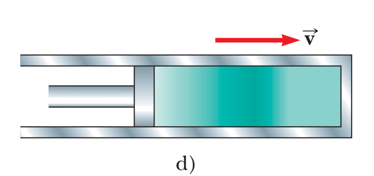
a)



b)



c)



d)

Figura 17.1 Movimiento de un pulso longitudinal a través de un gas compresible. La compresión (región más oscura) la produce el pistón en movimiento.

TABLA 17.1

Rapidez del sonido en diferentes medios

Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)
Gases		**Líquidos a 25°C**		**Sólidos**[a]	
Hidrógeno (0°C)	1 286	Glicerol	1 904	Vidrio Pyrex	5 640
Helio (0°C)	972	Agua de mar	1 533	Hierro	5 950
Aire (20°C)	343	Agua	1 493	Aluminio	6 420
Aire (0°C)	331	Mercurio	1 450	Latón	4 700
Oxígeno (0°C)	317	Queroseno	1 324	Cobre	5 010
		Alcohol metílico	1 143	Oro	3 240
		Tetracloruro de carbono	926	Lucita	2 680
				Plomo	1 960
				Caucho	1 600

[a] Los valores conocidos son para propagación de ondas longitudinales en medios volumétricos. Las magnitudes de velocidad para ondas longitudinales en barras delgadas son menores, y las magnitudes de velocidad de ondas transversales en volumen son aún más pequeñas.

17.2 Ondas sonoras periódicas

Uno puede producir una onda sonora periódica unidimensional en un tubo largo delgado que contenga un gas, mediante un pistón en oscilación en un extremo, como se muestra en la figura 17.2. Las partes más oscuras de las áreas coloreadas en esta figura representan regiones en las que el gas está comprimido y la densidad y presión están por arriba de sus valores de equilibrio. Una región comprimida se forma siempre que el pistón se empuje en el tubo. Esta región comprimida, llamada **compresión**, se mueve a través del tubo, y comprime continuamente la región justo enfrente de ella misma. Cuando el pistón se jala hacia atrás, el gas enfrente de él se expande y la presión y la densidad en esta región caen por abajo de sus valores de equilibrio (representada por las partes más claras de las áreas coloreadas en la figura 17.2). Estas regiones de baja presión, llamadas **enrarecimiento**, también se propagan a lo largo del tubo, siguiendo las compresiones. Ambas regiones se mueven a la rapidez del sonido en el medio.

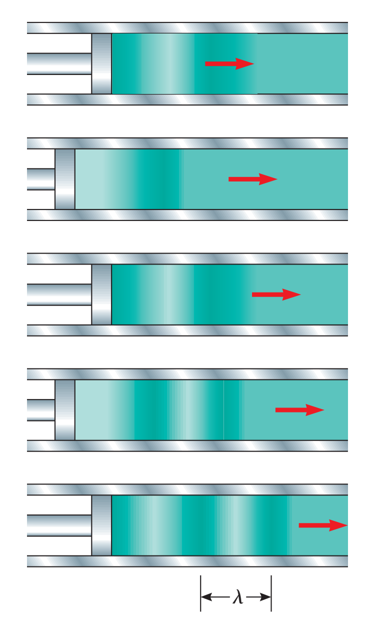


Figura 17.2 Una onda longitudinal que se propaga a través de un tubo lleno de gas. La fuente de la onda es un pistón en oscilación a la izquierda.

A medida que el pistón tiene una oscilación sinusoidal, se establecen continuamente regiones de compresión y enrarecimiento. La distancia entre dos compresiones sucesivas (o dos enrarecimientos sucesivos) iguala la longitud de onda λ de la onda sonora. Mientras estas regiones viajan a través del tubo, cualquier elemento pequeño del medio se mueve con movimiento armónico simple paralelo a la dirección de la onda. Si $s(x, t)$ es la posición de un elemento pequeño en relación con su posición de equilibrio,[1] se puede expresar esta función de posición armónica como

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \qquad \textbf{(17.2)}$$

donde $s_{\text{máx}}$ es la posición máxima del elemento relativo al equilibrio. Con frecuencia, este parámetro se llama **amplitud de desplazamiento** de la onda. El parámetro k es el número de onda, y ω es la frecuencia angular de la onda. Advierta que el desplazamiento del elemento es a lo largo de x, en la dirección de propagación de la onda sonora, lo que significa que se trata de una onda longitudinal.

La variación en la presión del gas ΔP observada desde el valor de equilibrio también es periódica. Para la función de posición en la ecuación 17.2, ΔP se conoce por

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t) \qquad \textbf{(17.3)}$$

[1] En este caso se usa $s(x, t)$ en lugar de $y(x, t)$ porque el desplazamiento de los elementos del medio no es perpendicular a la dirección x.

donde **la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$**, que es el cambio máximo en presión desde el valor de equilibrio, se proporciona por

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \tag{17.4}$$

La ecuación 17.3 se deduce en el ejemplo 17.1.

Se considera que una onda sonora es una onda de desplazamiento o una onda de presión. Una comparación de las ecuaciones 17.2 y 17.3 muestra que **la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento**. En la figura 17.3 se muestran gráficas de estas funciones. La variación de presión es un máximo cuando el desplazamiento desde el equilibrio es cero, y el desplazamiento desde el equilibrio es un máximo cuando la variación de presión es cero.

Pregunta rápida 17.1 Si usted sopla a través de la parte superior de una botella de refresco vacía, un pulso de sonido viaja a través del aire en la botella. En el momento cuando el pulso llega al fondo de la botella, ¿cuál es la descripción correcta del desplazamiento de elementos de aire desde sus posiciones de equilibrio y la presión del aire en este punto? a) El desplazamiento y la presión están en un máximo. b) El desplazamiento y la presión están en un mínimo. c) El desplazamiento es cero y la presión es un máximo. d) El desplazamiento es cero y la presión es un mínimo.

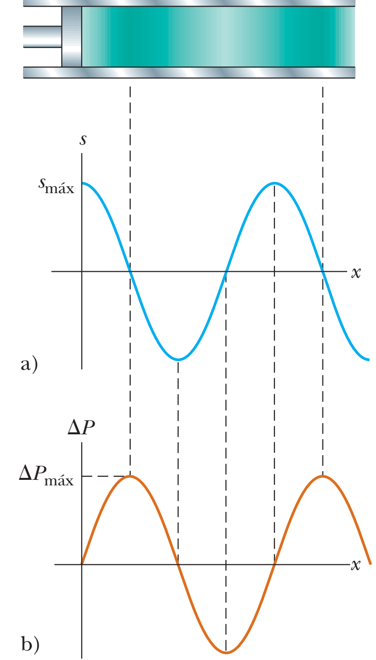


Figura 17.3 a) Amplitud de desplazamiento y b) amplitud de presión en función de la posición para una onda longitudinal sinusoidal.

EJEMPLO 17.1 Deducción de la ecuación 17.3

Obtener la expresión para la variación de presión en una onda sonora conocida por la ecuación 17.3.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere un elemento de gas con forma de disco delgado, cuyas caras planas sean paralelas al pistón en la figura 17.2. Este elemento se someterá a cambios en posición, presión y densidad a medida que una onda sonora se propaga a través del gas.

Categorizar Esta deducción combina propiedades elásticas de un gas (capítulo 12) con el fenómeno ondulatorio explicado en este capítulo.

Analizar El elemento de gas tiene un grosor Δx en la dirección horizontal y un área de sección transversal A, de modo que su volumen es $V_i = A\,\Delta x$. Cuando una onda sonora desplaza el elemento, las dos caras planas del disco se mueven a través de diferentes distancias s. El cambio en volumen ΔV del elemento cuando una onda sonora desplaza al elemento es igual a $A\,\Delta s$, donde Δs es la diferencia entre los valores de s entre las dos caras planas del disco.

A partir de la definición de módulo volumétrico (véase la ecuación 12.8), exprese la variación de presión en el elemento de gas como una función de su cambio de volumen:

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i}$$

Sustituya para el volumen inicial y el cambio en volumen del elemento:

$$\Delta P = -B\frac{A\,\Delta s}{A\,\Delta x} = -B\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

Permita que el grosor Δx del disco se aproxime a cero de modo que la relación $\Delta s/\Delta x$ se convierta en una derivada parcial:

$$\Delta P = -B\frac{\partial s}{\partial x}$$

Sustituya la función de posición conocida por la ecuación 17.2:

$$\Delta P = -B\frac{\partial}{\partial x}[s_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] = Bs_{\text{máx}}k\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Use la ecuación 17.1 para expresar el módulo volumétrico como $B = \rho v^2$ y sustituya:

$$\Delta P = \rho v^2 s_{\text{máx}} k \text{ sen } (kx - \omega t)$$

Aplique la ecuación 16.11 en la forma $k = \omega / v$ y sustituya:

$$\Delta P = \rho v \omega s_{\text{máx}} \text{ sen } (kx - \omega t)$$

Ya que la función seno tiene un valor máximo de 1, identifique el valor máximo de la variación de presión como $\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}}$ (véase la ecuación 17.4) y sustituya para esta combinación en la expresión previa:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \text{ sen } (kx - \omega t)$$

Finalizar Esta expresión final para la variación de presión del aire en una onda sonora coincide con la ecuación 17.3.

17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

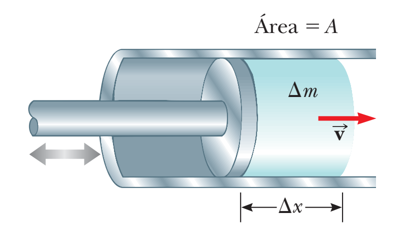


Figura 17.4 Un pistón en oscilación transfiere energía al aire en el tubo, por lo que el elemento de aire de longitud Δx y masa Δm oscila con una amplitud $s_{\text{máx}}$.

En el capítulo 16 se demostró que una onda que viaja sobre una cuerda tensa transporta energía. Se aplica el mismo concepto a ondas sonoras. Considere un elemento de aire de masa Δm y longitud Δx enfrente de un pistón de área A que oscila con una frecuencia ω, como se muestra en la figura 17.4. El pistón transmite energía a este elemento de aire en el tubo y la energía se propaga alejándose del pistón mediante la onda sonora. Para evaluar la rapidez de transferencia de energía en la onda sonora, evalúe la energía cinética de este elemento de aire, que se somete a movimiento armónico simple. Un procedimiento similar al de la sección 16.5, donde se evaluó la rapidez de transferencia de energía para una onda sobre una cuerda, muestra que la energía cinética en una longitud de onda de la onda sonora es

$$K_\lambda = \tfrac{1}{4}(\rho A)\omega^2 s_{\text{máx}}^2 \lambda$$

Como en el caso de la onda en una cuerda de la sección 16.5, la energía potencial total para una longitud de onda tiene el mismo valor que la energía cinética total; por lo tanto, la energía mecánica total para una longitud de onda es

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \tfrac{1}{2}(\rho A)\omega^2 s_{\text{máx}}^2 \lambda$$

A medida que la onda sonora se mueve a través del aire, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado durante un periodo de oscilación. Por tanto, la rapidez de transferencia de energía es

$$\mathcal{P} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2}(\rho A)\omega^2 s_{\text{máx}}^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}(\rho A)\omega^2 s_{\text{máx}}^2 \left(\frac{\lambda}{T}\right) = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_{\text{máx}}^2$$

donde v es la rapidez del sonido en el aire. Compare esta expresión con la ecuación 16.21 para una onda sobre una cuerda.

La **intensidad** I de una onda, o la potencia por cada unidad de área, se define como la rapidez a la cual la energía transportada por la onda se transfiere a través de una unidad de área A perpendicular a la dirección de viaje de la onda:

$$I \equiv \frac{\mathcal{P}}{A} \qquad \textbf{(17.5)}$$

En este caso, la intensidad es, debido a eso,

Intensidad de una onda sonora ►

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v(\omega s_{\text{máx}})^2$$

En consecuencia, la intensidad de una onda sonora periódica es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento y al cuadrado de la frecuencia angular. Esta expresión también se puede escribir en términos de la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$; en este caso, se usa la ecuación 17.4 para obtener

$$I = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \qquad \textbf{(17.6)}$$

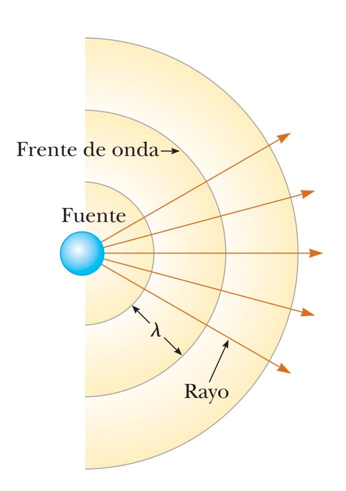


Figura 17.5 Ondas esféricas emitidas por una fuente puntual. Los arcos circulares representan los frentes de onda esférica que son concéntricos con la fuente. Los rayos son líneas radiales que se dirigen hacia afuera desde la fuente, perpendiculares a los frentes de onda.

Ahora considere una fuente puntual que emite ondas sonoras por igual en todas direcciones. A partir de la experiencia cotidiana, se sabe que la intensidad del sonido disminuye conforme uno se aleja de la fuente. Cuando una fuente emite sonido por igual en todas direcciones, el resultado es una **onda esférica**. La figura 17.5 muestra estas ondas esféricas como una serie de arcos circulares concéntricos con la fuente. Cada arco representa una superficie sobre la cual es constante la fase de la onda. A tal superficie de fase constante se le llama **frente de onda**. La distancia entre frentes de onda adyacentes que tienen la misma fase es la longitud de onda λ de la onda. Las líneas radiales que se dirigen hacia afuera desde la fuente se llaman **rayos**.

La potencia promedio $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ emitida por la fuente debe tener una distribución uniforme sobre cada frente de onda esférica de área $4\pi r^2$. Por tanto, la intensidad de la onda a una distancia r de la fuente es

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{A} = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \qquad \textbf{(17.7)}$$

◀ Comportamiento de cuadrado inverso de la intensidad para una fuente puntual

Esta ley del cuadrado inverso, que recuerda el comportamiento de la gravedad en el capítulo 13, establece que la intensidad disminuye en proporción al cuadrado de la distancia desde la fuente.

Pregunta rápida 17.2 Una cuerda de guitarra que vibra hace muy poco sonido si no está montada en el cuerpo de una guitarra. ¿Por qué el sonido tiene mayor intensidad si la cuerda se une al cuerpo de la guitarra? a) La cuerda vibra con más energía. b) La energía deja la guitarra a mayor rapidez. c) La potencia del sonido se dispersa sobre un área más grande en la posición del escucha. d) La potencia del sonido se concentra en un área más pequeña en la posición del escucha. e) La rapidez del sonido es mayor en el material del cuerpo de la guitarra. f) Ninguna de estas respuestas es correcta.

EJEMPLO 17.2 Límites auditivos

Los sonidos más débiles que el oído humano puede detectar a una frecuencia de 1 000 Hz corresponden a una intensidad de aproximadamente 1.00×10^{-12} W/m^2, que se llama *umbral de audición*. Los sonidos más fuertes que el oído tolera a esta frecuencia corresponden a una intensidad de aproximadamente 1.00 W/m^2, el *umbral de dolor*. Determine la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento asociadas con estos dos límites.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el ambiente más tranquilo que haya experimentado alguna vez. Es probable que la intensidad del sonido, incluso en este ambiente tan tranquilo, sea mayor que el umbral de audición.

Categorizar Ya que se proporcionan intensidades y se pide calcular las amplitudes de presión y desplazamiento, este problema requiere los conceptos explicados en esta sección.

Analizar Para hallar la amplitud de presión en el umbral de audición, use la ecuación 17.6 y considere que la rapidez de las ondas sonoras en el aire es $v = 343$ m/s y la densidad del aire es $\rho = 1.20$ kg/m^3:

$$\Delta P_{\text{máx}} = \sqrt{2\rho v I}$$
$$= \sqrt{2(1.20 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})(1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2)}$$
$$= 2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

Calcule la correspondiente amplitud de desplazamiento con la ecuación 17.4, y recuerde que $\omega = 2\pi f$ (ecuación 16.9):

$$s_{\text{máx}} = \frac{\Delta P_{\text{máx}}}{\rho v \omega} = \frac{2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2}{(1.20 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})(2\pi \times 1\,000 \text{ Hz})}$$
$$= 1.11 \times 10^{-11} \text{ m}$$

De manera similar, uno encuentra que los sonidos más fuertes que puede tolerar el oído humano corresponden a una amplitud de presión de 28.7 N/m^2 y una amplitud de desplazamiento igual a 1.11×10^{-5} m.

Finalizar Ya que la presión atmosférica es casi 10^5 N/m^2, ¡el resultado para la amplitud de presión dice que el oído es sensible a fluctuaciones de presión tan pequeñas como 3 partes en 10^{10}! ¡La amplitud de desplazamiento también es un número notablemente pequeño! Si este resultado para $s_{\text{máx}}$ se compara con el tamaño de un átomo (aproximadamente 10^{-10} m), se ve que el oído es un detector extremadamente sensible de ondas sonoras.

EJEMPLO 17.3 Variaciones de intensidad de una fuente puntual

Una fuente puntual emite ondas sonoras con una salida de potencia promedio de 80.0 W.

A) Encuentre la intensidad a 3.00 m de la fuente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una pequeña bocina que envía sonido con rapidez promedio de 80.0 W de manera uniforme en todas direcciones. Usted está de pie a 3.00 m de distancia de las bocinas. A medida que el sonido se propaga, la energía de las ondas sonoras se dispersa sobre una esfera siempre en expansión.

Categorizar Evalúe la intensidad a partir de una ecuación determinada, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Ya que una fuente puntual emite energía en la forma de ondas esféricas, use la ecuación 17.7 para encontrar la intensidad:

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{80.0 \text{ W}}{4\pi(3.00 \text{ m})^2} = 0.707 \text{ W/m}^2$$

Esta intensidad es cercana al umbral del dolor.

B) Hallar la distancia a la cual la intensidad del sonido es 1.00×10^{-8} W/m^2.

SOLUCIÓN

Resuelva para r en la ecuación 17.7 y use el valor conocido para I:

$$r = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80.0 \text{ W}}{4\pi(1.00 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2)}}$$
$$= 2.52 \times 10^4 \text{ m}$$

Nivel sonoro en decibeles

El ejemplo 17.2 ilustra el amplio intervalo de intensidades que puede detectar el oído humano. Ya que este intervalo es tan amplio, es conveniente usar una escala logarítmica, donde el **nivel sonoro** β (letra griega beta) se define mediante la ecuación

Nivel sonoro en decibeles ▶

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \textbf{(17.8)}$$

La constante I_0 es la *intensidad de referencia*, considerada como el umbral de audición ($I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m²) e I es la intensidad en watts por cada metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β, donde β se mide[2] en **decibeles** (dB). En esta escala, el umbral de dolor ($I = 1.00$ W/m²) corresponde a un nivel sonoro de $\beta = 10 \log [(1 \text{ W/m}^2)/(10^{-12} \text{ W/m}^2)] = 10 \log (10^{12}) = 120$ dB, y el umbral de audición corresponde a $\beta = 10 \log [(10^{-12} \text{ W/m}^2)/(10^{-12} \text{ W/m}^2)] = 0$ dB.

La exposición prolongada a niveles sonoros altos puede dañar seriamente el oído humano. Siempre que los niveles sonoros superen los 90 dB, se recomienda el uso de tapones de oídos. Evidencia reciente sugiere que la "contaminación acústica" puede ser un factor que contribuye a la presión arterial alta, ansiedad y nerviosismo. La tabla 17.2 presenta algunos niveles sonoros representativos.

Pregunta rápida 17.3 Aumentar la intensidad de un sonido en un factor de 100 ocasiona que el nivel sonoro aumente, ¿en qué cantidad? a) 100 dB, b) 20 dB, c) 10 dB, d) 2 dB.

TABLA 17.2

Niveles sonoros

Fuente del sonido	β (dB)
Avión jet cercano	150
Martillo hidráulico; ametralladora	130
Sirena; concierto de rock	120
Transporte subterráneo; podadora potente	100
Congestionamiento de tránsito	80
Aspiradora	70
Conversación normal	50
Zumbido de mosquito	40
Susurro	30
Hojas meciéndose	10
Umbral de audición	0

EJEMPLO 17.4 Niveles sonoros

Dos máquinas idénticas se colocan a la misma distancia de un trabajador. La intensidad del sonido entregado por cada máquina en funcionamiento en la posición del trabajador es de 2.0×10^{-7} W/m².

A) Hallar el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando una máquina está en funcionamiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una situación en la cual una fuente de sonido está activa y se une a una segunda fuente idéntica, como una persona que habla, luego una segunda persona habla al mismo tiempo o un instrumento musical toca y después se le une un segundo instrumento.

Categorizar Ya que se pide un nivel sonoro, se realizarán cálculos con la ecuación 17.8.

Analizar Aplique la ecuación 17.8 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador con una máquina en funcionamiento:

$$\beta_1 = 10 \log \left(\frac{2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 10 \log (2.0 \times 10^5) = 53 \text{ dB}$$

B) Hallar el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando dos máquinas están en funcionamiento:

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 17.8 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador, con el doble de intensidad:

$$\beta_2 = 10 \log \left(\frac{4.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 10 \log (4.0 \times 10^5) = 56 \text{ dB}$$

Finalizar Estos resultados demuestran que, cuando se duplica la intensidad, el nivel sonoro aumenta sólo en 3 dB.

¿Qué pasaría si? La *sonoridad* (magnitud de la sensación auditiva) es una respuesta psicológica a un sonido. Depende tanto de la intensidad como de la frecuencia del sonido. Como regla empírica, una sonoridad duplicada se asocia aproximadamente con un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. (Esta regla empírica es relativamente imprecisa a frecuencias o muy bajas o muy altas.) Si la sonoridad de las máquinas en este ejemplo se duplica, ¿cuántas máquinas a la misma distancia del trabajador deben estar en funcionamiento?

[2] La unidad *bel* recibe su nombre por el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847–1922). El prefijo *deci–* es el prefijo del SI que representa 10^{-1}.

Respuesta Con la regla empírica, un doble de sonoridad corresponde a un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. Debido a eso,

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \text{ dB} = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_0} \right) - 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$\log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) = 1 \quad \rightarrow \quad I_2 = 10 I_1$$

En consecuencia, deben estar en funcionamiento 10 máquinas para duplicar la sonoridad.

Sonoridad y frecuencia

La explicación del nivel sonoro en decibeles se relaciona con una medición *física* de la intensidad de un sonido. Ahora se extenderá la explicación del ejemplo 17.4 concerniente a la “medición” *psicológica* de la intensidad de un sonido.

Desde luego, no se tienen instrumentos en el cuerpo que puedan desplegar valores numéricos de las reacciones a los estímulos. Se tienen que “calibrar” las reacciones de algún modo para comparar diferentes sonidos con un sonido de referencia, pero esto no es fácil de lograr. Por ejemplo, antes se mencionó que la intensidad umbral es 10^{-12} W/m^2, que corresponde a un nivel de intensidad de 0 dB. En realidad, este valor es el umbral sólo para un valor de 1 000 Hz de frecuencia, que es una frecuencia de referencia estándar en acústica. Si se realiza un experimento para medir la intensidad umbral a otras frecuencias, se encontrará una variación distinta de este umbral como función de la frecuencia. Por ejemplo, a 100 Hz, un sonido apenas audible debe tener una intensidad de ¡aproximadamente 30 dB! Por desgracia, no hay una correspondencia simple entre las mediciones físicas y las “mediciones” psicológicas. El sonido de 100 Hz y 30 dB es psicológicamente “igual” al sonido de 1 000 Hz y 0 dB (ambos son apenas audibles), pero no son físicamente iguales (30 dB $\neq$ 0 dB).

Con el uso de sujetos experimentales se ha podido estudiar la respuesta humana a los sonidos, y los resultados se muestran en el área blanca de la figura 17.6, junto con la frecuencia aproximada y los alcances de nivel sonoro de otras fuentes sonoras. La curva inferior del área blanca corresponde al umbral de audición. Su variación con la frecuencia es clara a partir de este diagrama. Note que los humanos son sensibles a frecuencias en el intervalo de casi 20 Hz hasta aproximadamente 20 000 Hz. La frontera superior del área

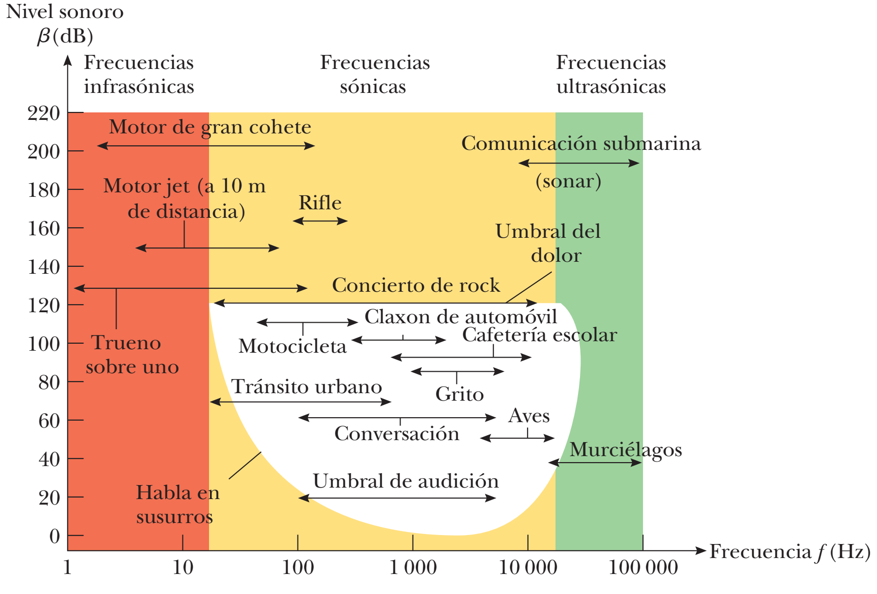


Figura 17.6 Intervalos aproximados de frecuencia y nivel sonoro de varias fuentes y la audición humana normal, que se muestra por el área blanca. (Tomado de R.L. Reese, *University Physics*, Pacific Grove, Brooks/Cole, 2000.)

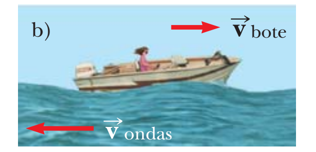
blanca es el umbral del dolor. En este caso la frontera del área blanca es recta porque la respuesta psicológica es en cierta medida independiente de la frecuencia a este nivel sonoro alto.

El cambio más dramático con la frecuencia está en la región inferior izquierda del área blanca, para frecuencias bajas y niveles de intensidad bajos. Los oídos humanos son insensibles en esta región. Si usted escucha su estéreo y los sonidos graves (frecuencias bajas) y agudos (frecuencias altas) se equilibran a un volumen alto, intente bajar el volumen y escuchar de nuevo. Quizá notará que el grave parece débil, lo que se debe a la insensibilidad del oído a frecuencias bajas a niveles sonoros bajos, como se muestra en la figura 17.6.

17.4 El efecto Doppler

Tal vez haya notado cómo varía el sonido del claxon de un vehículo a medida que éste se aleja. La frecuencia del sonido que escucha mientras el vehículo se aproxima a usted es más alta que la frecuencia que escucha mientras se aleja. Esta experiencia es un ejemplo del **efecto Doppler**.[3]





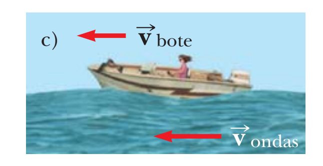


Figura 17.7 a) Ondas que se mueven hacia un bote estable. Las ondas viajan hacia la izquierda y su fuente está lejos hacia la derecha del bote, fuera del marco de la fotografía. b) El bote se mueve hacia la fuente de ondas. c) El bote se mueve alejándose de la fuente de ondas.

Para comprender qué causa este cambio de frecuencia aparente, imagine que está en un bote anclado en un mar tranquilo donde las ondas tienen un periodo $T = 3.0$ s. Por tanto, cada 3.0 s una cresta golpea su bote. La figura 17.7a muestra esta situación, con las ondas acuáticas moviéndose hacia la izquierda. Si usted pone su reloj en $t = 0$ justo cuando una cresta golpea, la lectura en el reloj es 3.0 s cuando la siguiente cresta golpea, 6.0 s cuando la tercera cresta golpea, y así sucesivamente. A partir de estas observaciones, concluye que la frecuencia ondulatoria es $f = 1/T = 1/(3.0 \text{ s}) = 0.33$ Hz. Ahora suponga que enciende su motor y se dirige directamente hacia las ondas que se acercan, como en la figura 17.7b. Una vez más pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea el frente (la proa) de su bote. Sin embargo, ahora, ya que se mueve hacia la cresta de onda siguiente mientras ella se mueve hacia usted, lo golpea a menos de 3.0 s después del primer golpe. En otras palabras, el periodo que ahora observa es más corto que el periodo de 3.0 s que observó cuando estaba en posición estable. Ya que $f = 1/T$, observa una frecuencia ondulatoria mayor que cuando estaba en reposo.

Si usted da vuelta y se mueve en la misma dirección que las ondas (figura 17.7c), se observa el efecto opuesto. Pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea la parte trasera del bote (la popa). Ya que ahora se mueve alejándose de la siguiente cresta, en su reloj transcurren más de 3.0 s para cuando dicha cresta lo alcanza. Por lo tanto, se observa una frecuencia más baja que cuando estaba en reposo.

Estos efectos se presentan porque la rapidez *relativa* entre su bote y las ondas depende de la dirección de viaje y de la rapidez de su bote. Cuando se mueve hacia la derecha en la figura 17.7b, esta rapidez relativa es mayor que la rapidez de la onda, lo que conduce a la observación de una frecuencia aumentada. Cuando da vuelta y se mueve hacia la izquierda, la rapidez relativa es menor, como lo es la frecuencia observada de las ondas del agua.

Ahora examine una situación análoga con ondas sonoras en la cual las ondas del agua se convierten en ondas sonoras, el agua se convierte en aire y la persona en el bote se convierte en un observador que escucha el sonido. En este caso, un observador O se mueve y una fuente sonora S se encuentra estable. Para simplificar, se supone que el aire también queda estable y que el observador va directo hacia la fuente (figura 17.8). El observador se mueve con una rapidez v_O hacia una fuente puntual estable ($v_S = 0$), donde *estable* significa en reposo respecto del medio, aire.

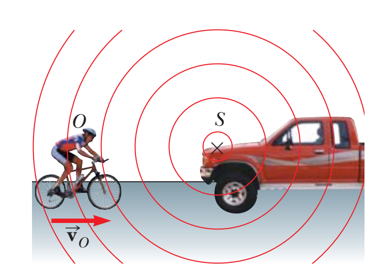


Figura 17.8 Un observador O (el ciclista) se mueve con una rapidez v_0 hacia una fuente puntual estable S, el claxon de una camioneta estacionada. El observador escucha una frecuencia f' mayor que la frecuencia de la fuente.

Si una fuente puntual emite ondas sonoras y el medio es uniforme, las ondas se mueven con la misma rapidez en todas direcciones, se alejan radialmente de la fuente; el resultado es una onda esférica, como se mencionó en la sección 17.3. La distancia entre frentes de onda adyacentes es igual a la longitud de onda λ. En la figura 17.8, los círculos son las intersecciones de estos frentes de onda tridimensionales con el papel en dos dimensiones.

Sean f la frecuencia de la fuente, λ la longitud de onda y v la rapidez del sonido en la figura 17.8. Si el observador también queda estable, detectará frentes de onda a una

[3] Llamado en honor del físico austriaco Christian Johann Doppler (1803–1853), quien predijo en 1842 el efecto tanto para ondas sonoras como para ondas luminosas.

frecuencia f. (Es decir, cuando $v_O = 0$ y $v_S = 0$, la frecuencia observada es igual a la frecuencia de la fuente.) Cuando el observador se mueve hacia la fuente, la rapidez de las ondas relativa al observador es $v' = v + v_O$, como en el caso del bote en la figura 17.7, pero la longitud de onda λ no cambia. Por tanto, al usar la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, se puede decir que la frecuencia f' que escucha el observador está *aumentada* y se conoce por

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_O}{\lambda}$$

Ya que $\lambda = v/f$, f' se puede expresar como

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v}\right)f \quad \text{(observador en movimiento hacia la fuente)} \qquad \textbf{(17.9)}$$

Si el observador es móvil alejándose de la fuente, la rapidez de la onda relativa al observador es $v' = v - v_O$. En este caso la frecuencia escuchada por el observador queda *reducida* y se encuentra por

$$f' = \left(\frac{v - v_O}{v}\right)f \quad \text{(observador alejándose de la fuente)} \qquad \textbf{(17.10)}$$

En general, siempre que un observador se mueva con una rapidez v_O en relación con una fuente estable, la frecuencia escuchada por el observador se conoce por la ecuación 17.9, con una convención de signo: un valor positivo para v_O cuando el observador se mueve hacia la fuente, y un valor negativo cuando el observador se mueve alejándose de la fuente.

Ahora suponga que la fuente está en movimiento y que el observador queda en reposo. Si la fuente avanza directo hacia el observador A en la figura 17.9a, los frentes de onda escuchados por el observador están más juntos de lo que estarían si la fuente no se moviera. Como resultado, la longitud de onda λ' medida por el observador A es más corta que la longitud de onda λ de la fuente. Durante cada vibración, que dura un intervalo de tiempo T (el periodo), la fuente se mueve una distancia $v_S T = v_S/f$ y la longitud de onda se *acorta* en esta cantidad. Por lo tanto, la longitud de onda observada λ' es

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_S}{f}$$

Como $\lambda = v/f$, la frecuencia f' que escucha el observador A es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - (v_S/f)} = \frac{v}{(v/f) - (v_S/f)}$$

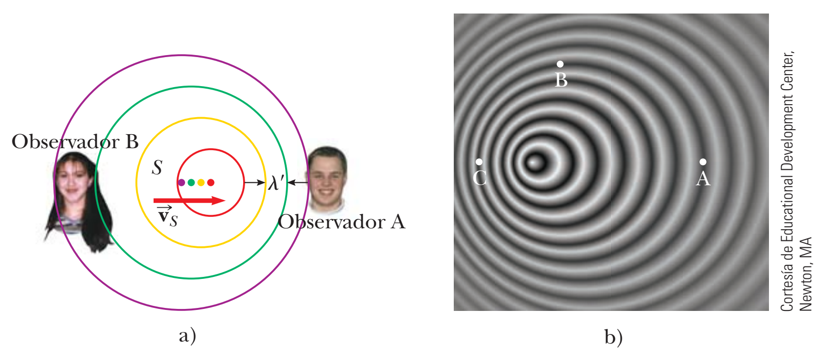


Figura 17.9 a) Una fuente S se mueve con una rapidez v_S hacia un observador estable A y se aleja de un observador estable B. El observador A escucha una frecuencia aumentada y el observador B una frecuencia reducida. b) El efecto Doppler en el agua, observado en un tanque de ondas. Una fuente puntual se mueve hacia la derecha con rapidez v_S. Las letras que se muestran en la fotografía se refieren a la pregunta rápida 17.4.

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_S}\right)f \quad \text{(fuente móvil hacia el observador)} \qquad \textbf{(17.11)}$$

Es decir: la frecuencia observada *aumenta* siempre que la fuente se mueva hacia el observador.

Cuando la fuente se aleja de un observador estacionario, como es el caso del observador B en la figura 17.9a, el observador mide una longitud de onda λ' que es *mayor* que λ y escucha una frecuencia *reducida*:

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_S}\right)f \quad \text{(fuente que se aleja del observador)} \qquad \textbf{(17.12)}$$

La correspondencia general para la frecuencia observada cuando una fuente es móvil y un observador está en reposo se expresa como la ecuación 17.11, con la misma convención de signo aplicada a v_S como se aplicó a v_O: un valor positivo se sustituye para v_S cuando la fuente se mueve hacia el observador, y un valor negativo se sustituye cuando la fuente se aleja del observador.

Por último, al combinar las ecuaciones 17.9 y 17.11 se obtiene la siguiente correspondencia general para la frecuencia observada:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right)f \qquad \textbf{(17.13)}$$

◄ Expresión general de corrimiento Doppler

En esta expresión los signos para los valores sustituidos para v_O y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo se usa para movimiento del observador o la fuente *hacia* el otro (asociado con un *aumento* en la frecuencia observada), y un valor negativo se usa para movimiento de uno *alejándose* del otro (asociado con una *disminución* en la frecuencia observada).

Aunque el efecto Doppler se experimenta más comúnmente con ondas sonoras, es un fenómeno común a todas las ondas. Por ejemplo, el movimiento relativo de la fuente y el observador produce un corrimiento de frecuencia en las ondas luminosas. El efecto Doppler se usa en los sistemas de radar policiacos para medir la rapidez de los vehículos automotores. Del mismo modo, los astrónomos usan el efecto para determinar la rapidez de estrellas, galaxias y otros objetos celestes en relación con la Tierra.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 17.1

El efecto Doppler no depende de la distancia

Algunas personas creen que el efecto Doppler depende de la distancia entre la fuente y el observador. Aunque la intensidad de un sonido varía a medida que la distancia cambia, la frecuencia aparente sólo depende de la rapidez relativa de la fuente y el observador. Mientras usted escucha una fuente que se aproxima, detectará intensidad creciente pero frecuencia constante. Mientras la fuente pasa, escuchará que la frecuencia cae súbitamente a un nuevo valor constante y la intensidad comienza a disminuir.

Pregunta rápida 17.4 Considere los detectores de ondas acuáticas en tres posiciones A, B y C de la figura 17.9b. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? a) La rapidez de onda es mayor en la posición A. b) La rapidez de onda es mayor en la posición C. c) La longitud de onda detectada es mayor en la posición B. d) La longitud de onda detectada es mayor en la posición C. e) La frecuencia detectada es mayor en la posición C. f) La frecuencia detectada es mayor en la posición A.

Pregunta rápida 17.5 Usted está de pie sobre una plataforma en una estación de tren y escucha un tren que se aproxima a la estación con velocidad constante. Mientras el tren se aproxima, pero antes de que llegue, ¿qué escucha? a) la intensidad y la frecuencia del sonido aumentan, b) la intensidad y la frecuencia del sonido disminuyen, c) la intensidad aumenta y la frecuencia disminuye, d) la intensidad disminuye y la frecuencia aumenta, e) la intensidad aumenta y la frecuencia permanece igual, f) la intensidad disminuye y la frecuencia permanece igual.

EJEMPLO 17.5 El radio–reloj descompuesto

Su radio–reloj lo despierta con un sonido estable e irritante de 600 Hz de frecuencia. Una mañana funciona mal y no se puede apagar. Frustrado, arroja el radio–reloj por la ventana de su dormitorio en el cuarto piso, a 15.0 m del suelo. Suponga que la rapidez del sonido es de 343 m/s. Mientras escucha al radio–reloj que cae, ¿qué frecuencia escucha justo antes de que lo oiga chocar con el suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La rapidez del radio–reloj aumenta mientras cae. Por lo tanto, es una fuente de sonido móvil alejándose con una rapidez creciente, de modo que la frecuencia que escucha debe ser menor a 600 Hz.

Categorizar Este es un problema en el que se deben combinar la interpretación de los objetos que caen con la del corrimiento de frecuencia debida al efecto Doppler.

Analizar Ya que el radio–reloj se modela como una partícula bajo aceleración constante debida a la gravedad, use la ecuación 2.13 para expresar la rapidez de la fuente de sonido:

$$v_S = v_{yi} + a_y t = 0 - gt = -gt$$

Aplique la ecuación 17.13 para determinar la frecuencia de corrimiento Doppler que se escucha del radio–reloj que cae:

$$1) \quad f' = \left[\frac{v + 0}{v - (-gt)}\right] f = \left(\frac{v}{v + gt}\right) f$$

A partir de la ecuación 2.61, hallar el tiempo en el que el reloj golpea el suelo:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$-15.0 \text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$t = 1.75 \text{ s}$$

De la ecuación 1), evalúe la frecuencia de corrimiento Doppler justo cuando el radio–reloj golpea el suelo:

$$f' = \left[\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + (9.80 \text{ m/s}^2)(1.75 \text{ s})}\right](600 \text{ Hz})$$

$$= 571 \text{ Hz}$$

Finalizar La frecuencia es menor que la frecuencia real de 600 Hz porque el radio–reloj es móvil alejándose. Si cayera desde un piso superior, de modo que pasara por abajo de $y = -15.0$ m, el radio–reloj continuaría acelerando y la frecuencia continuaría cayendo.

EJEMPLO 17.6 Submarinos Doppler

Un submarino (sub A) viaja a través de agua con una rapidez de 8.00 m/s y emite una onda de sonar con una frecuencia de 1 400 Hz. La rapidez del sonido en el agua es de 1 533 m/s. Un segundo submarino (sub B) se localiza de tal modo que ambos submarinos viajan directamente uno hacia el otro. El segundo submarino se mueve a 9.00 m/s.

A) ¿Qué frecuencia detecta un observador que viaja en el sub B mientras los submarinos se aproximan uno al otro?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aun cuando el problema involucra submarinos móviles en agua, hay un efecto Doppler tal como lo hay cuando usted está en un automóvil en movimiento y escucha un sonido que se mueve a través del aire desde otro auto.

Categorizar Ya que ambos submarinos se mueven, este problema involucra el efecto Doppler tanto para la fuente móvil como para un observador móvil.

Analizar Aplique la ecuación 17.13 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B y tenga cuidado con los signos de las velocidades de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+8.00 \text{ m/s})}\right](1\,400 \text{ Hz}) = 1\,416 \text{ Hz}$$

B) Los submarinos apenas evitan el choque. ¿Qué frecuencia detecta un observador en el sub B mientras los submarinos se alejan uno del otro?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 17.13 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B, y de nuevo tenga cuidado con los signos de las velocidades de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (-9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (-8.00 \text{ m/s})}\right](1\,400 \text{ Hz}) = 1\,385 \text{ Hz}$$

Finalizar Advierta que la frecuencia cae de 1 416 Hz a 1 385 Hz a medida que los submarinos se pasan. Este efecto es similar a la caída en frecuencia que usted escucha cuando un automóvil pasa junto a usted mientras suena el claxon.

¿Qué pasaría si? Mientras los submarinos se aproximan mutuamente, algo del sonido desde el sub A se refleja desde el sub B y regresa al sub A. Si este sonido lo detectara un observador en el sub A, ¿cuál es su frecuencia?

Respuesta El sonido de la frecuencia aparente de 1 416 Hz que encontró en el inciso A) se refleja de una fuente móvil (sub B) y después lo detecta un observador móvil (sub A). Por lo tanto, la frecuencia detectada por el sub A es

$$f'' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f'$$

$$= \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+8.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+9.00 \text{ m/s})}\right](1\,416 \text{ Hz}) = 1\,432 \text{ Hz}$$

Esta técnica la aplican los oficiales de policía para medir la rapidez de un auto en movimiento. Desde la patrulla se emiten microondas que se reflejan en el automóvil en movimiento. Al detectar la frecuencia de corrimiento Doppler de las microondas reflejadas, el oficial de policía puede determinar la rapidez del auto en movimiento.

Ondas de choque

Considere ahora lo que sucede cuando la rapidez v_S de una fuente *supera* la rapidez de onda v. Esta situación se muestra gráficamente en la figura 17.10a. Los círculos representan frentes de onda esféricos emitidos por la fuente en diferentes momentos durante su movimiento. En $t = 0$, la fuente está en S_0, y en un tiempo posterior t, la fuente está en S_n. En el tiempo t, el frente de onda con centro en S_0 alcanza un radio de vt. En este

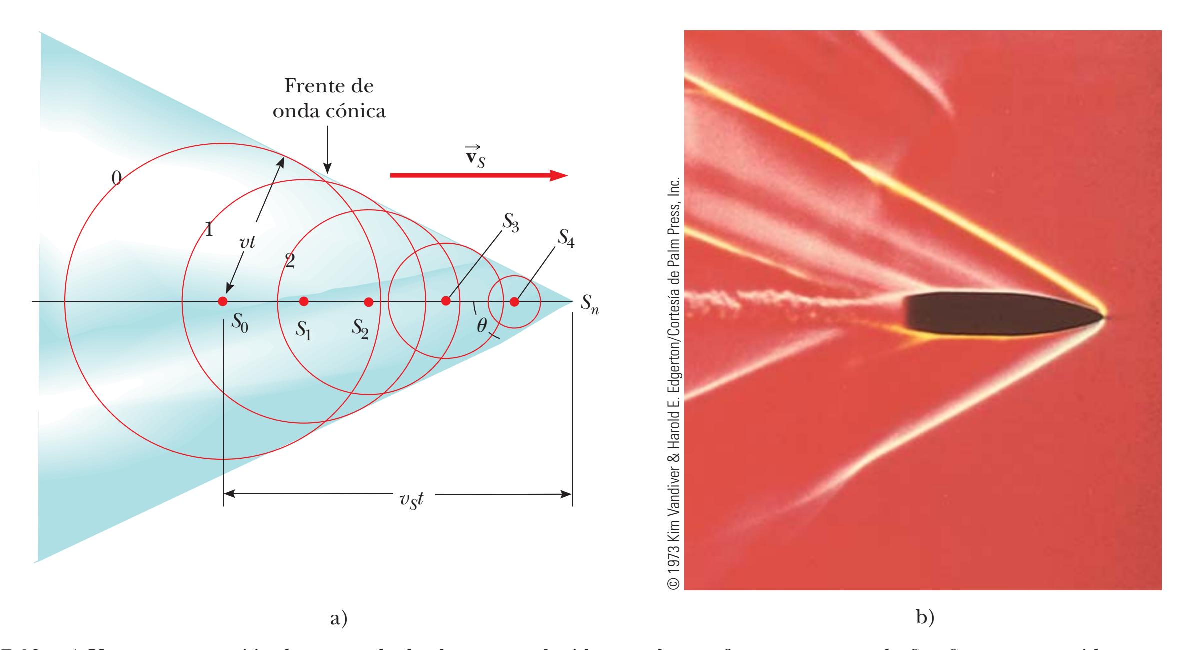


Figura 17.10 a) Una representación de una onda de choque producida cuando una fuente se mueve de S_0 a S_n con una rapidez v_S, que es mayor que la rapidez de onda v en el medio. La envolvente de los frentes de onda forman un cono cuyo semiángulo del vértice se conoce por sen $\theta = v/v_S$. b) Fotografía estroboscópica de una bala que se mueve con rapidez supersónica a través del aire caliente sobre una vela. Advierta la onda de choque en la vecindad de la bala.



Figura 17.11 La onda de proa con forma en V de un bote se forma debido a que la rapidez del bote es mayor que la rapidez de las ondas del agua que genera. Una onda de proa es análoga a una onda de choque formada por un avión que viaja más rápido que el sonido.

mismo intervalo de tiempo, la fuente recorre una distancia $v_S t$ a S_n. En el instante en que la fuente está en S_n, las ondas apenas comienzan a generarse en esta ubicación; por tanto, el frente de onda tiene radio cero en este punto. La línea tangente dibujada desde S_n al frente de onda con centro en S_0 es tangente a todos los otros frentes de onda generados en tiempos intermedios. Por lo tanto, la envolvente de estos frentes de onda es un cono cuyo semiángulo del vértice θ (el "ángulo Mach") se conoce por

$$\text{sen}\ \theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S}$$

La relación v_S/v se conoce como *número Mach*, y el frente de onda cónico que se produce cuando $v_S > v$ (rapidez supersónica) se conoce como *onda de choque*. Una analogía interesante con las ondas de choque son los frentes de onda con forma en V producidos por un bote (la onda de proa) cuando la rapidez del bote supera la rapidez de las ondas en la superficie del agua (figura 17.11).

Los aviones jet que viajan con magnitudes de velocidad supersónicas producen ondas de choque, que son responsables del fuerte "estampido sónico" que uno escucha. La onda de choque lleva una gran cantidad de energía concentrada en la superficie del cono, con grandes variaciones de presión correspondientes. Tales ondas de choque son desagradables de escuchar y pueden causar daño a los edificios cuando los aviones vuelan supersónicamente a bajas altitudes. De hecho, un avión que vuela con rapidez supersónica produce un doble estampido porque se forman dos ondas de choque, una desde la nariz del avión y otra desde la cola. Las personas cerca de la trayectoria de un trasbordador espacial mientras se aproxima a su punto de aterrizaje, con frecuencia reportan escuchar lo que suena como dos crujidos de trueno muy cercanamente espaciados.

Pregunta rápida 17.6 Un avión que vuela con una velocidad constante se mueve desde una masa de aire frío hacia una masa de aire caliente. ¿El número Mach a) aumenta, b) disminuye, o c) permanece igual?

17.5 Grabación de sonido digital

El primer dispositivo de grabación de sonido, el fonógrafo, lo inventó Thomas Edison en el siglo XIX. Las ondas sonoras se registraban en los primeros fonógrafos al codificar las formas de onda sonoras como variaciones en la profundidad de un surco continuo cortado en una delgada hoja enrollada alrededor de un cilindro. Durante la reproducción, a medida que una aguja seguía el surco del cilindro rotatorio, la aguja empujaba de atrás para adelante de acuerdo con las ondas sonoras codificadas en el disco. La aguja se unía a un diafragma y una bocina, lo que hacía al sonido lo suficientemente intenso para escucharse.

Con el desarrollo continuo del fonógrafo, el sonido se grababa en cilindros de cartón recubiertos con cera. Durante la última década del siglo XIX y la primera mitad del XX, el sonido se grabó en discos hechos de laca y arcilla. En 1948, se introdujo el disco plástico de fonógrafo y dominó el mercado de la industria de la grabación hasta la llegada de los discos compactos digitales en los años ochenta.

Grabación digital

En la grabación digital la información se convierte a código binario (unos y ceros), parecido a los puntos y rayas del código Morse. Primero, la forma de onda del sonido se *muestrea* (samplea), típicamente 44 100 veces por segundo. La figura 17.12a ilustra este proceso. Entre cada par de líneas azules en la figura, la presión de la onda se mide y convierte a un voltaje. Por lo tanto, existen 44 100 números asociados con cada segundo del sonido a muestrear. La frecuencia de muestreo es mucho mayor que el alcance superior de audición humana, aproximadamente 20 000 Hz, de modo que todas las frecuencias de sonido audible se muestrean adecuadamente en esta cantidad.

Luego estas mediciones se convierten en *números binarios*, que son números expresados con el uso de base 2 en lugar de base 10. La tabla 17.3 muestra algunos números binarios de muestra. Por lo general, las mediciones de voltaje se registran en "palabras" de 16 bits,

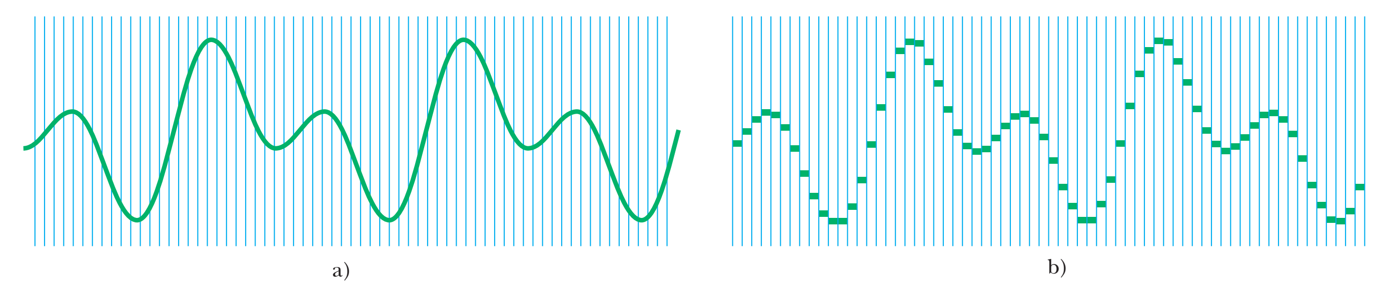


Figura 17.12 a) El sonido se digitaliza mediante el muestreo electrónico de la forma de onda sonora a intervalos periódicos. Durante cada intervalo de tiempo entre las líneas azules, se registra un número para el voltaje promedio durante el intervalo. La proporción de muestreo que se presenta aquí es mucho más lenta que la proporción de muestreo real de 44 100 muestras por segundo. b) Reconstrucción de la onda sonora muestreada en a). Advierta la reconstrucción escalonada en lugar de la forma de onda continua en a).

TABLA 17.3

Números binarios de muestra

Número en base 10	Número en binario	Suma
1	0000000000000001	1
2	0000000000000010	2 + 0
3	0000000000000011	2 + 1
10	0000000000001010	8 + 0 + 2 + 0
37	0000000000100101	32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1
275	0000000100010011	256 + 0 + 0 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1

en las cuales cada bit es un uno o un cero. Por tanto, el número de diferentes niveles de voltaje a los que se pueden asignar códigos es $2^{16} = 65\ 536$. El número de bits en un segundo de sonido es $16 \times 44\ 100 = 705\ 600$. Es esta cadena de unos y ceros, en palabras de 16 bits, la que se registra en la superficie de un disco compacto.

La figura 17.13 muestra una amplificación de la superficie de un disco compacto. El láser del sistema reproductor detecta dos tipos de áreas: *parte plana* (lands) y *depresiones* (pits). Las partes planas son regiones no tocadas de la superficie del disco que son muy reflexivas. Las depresiones, que son áreas quemadas en la superficie, dispersan la luz en lugar de reflejarla de regreso al sistema de detección. El sistema reproductor muestrea la luz reflejada 750 600 veces por segundo. Cuando el láser se mueve desde una depresión hasta un plano o de un plano a una depresión, la luz reflejada cambia durante el muestreo y el bit se registra como un uno. Si no hay cambio durante el muestreo, el bit se registra como un cero.

Los números binarios que se leen desde el disco compacto se convierten de regreso en voltajes, y la forma de onda se reconstruye como se muestra en la figura 17.12b. Ya que la proporción de muestreo es tan alta, no es evidente en el sonido que la forma de onda se construye a partir de voltajes discretos escalonados.

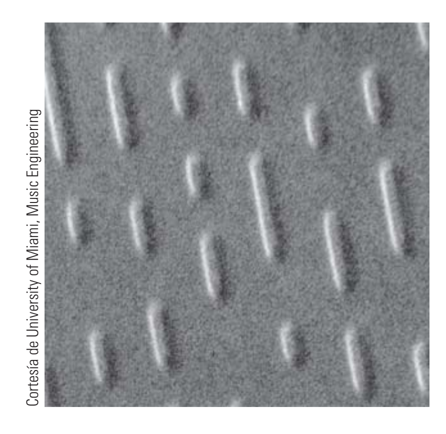


Figura 17.13 Superficie de un disco compacto que muestra las depresiones. Las transiciones entre depresiones y partes planas corresponden a unos binarios. Las regiones sin transiciones corresponden a ceros binarios.

La ventaja de la grabación digital está en la alta fidelidad del sonido. Con la grabación analógica, cualquier imperfección pequeña en la superficie de grabación o el equipo de grabación puede causar una distorsión de la forma de onda. Por ejemplo, recortar todos los picos de una forma de onda en 10% tiene un gran efecto sobre el espectro del sonido en una grabación analógica. Sin embargo, con la grabación digital, genera una mayor imperfección convertir un uno en cero. Si una imperfección hace que la magnitud de un uno sea 90% el valor original, todavía lo registra como un uno y no hay distorsión. Otra ventaja de la grabación digital es que la información se extrae de manera óptica, así que no hay uso mecánico del disco.

EJEMPLO 17.7 ¿Qué tan grandes son las depresiones?

En el ejemplo 10.2 se mencionó que la rapidez con la cual la superficie de un disco compacto pasa por el láser es de 1.3 m/s. ¿Cuál es la longitud promedio de la pista de audio sobre un disco compacto asociada con cada bit de la información de audio?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la superficie del disco pasa por el láser a 1.3 m/s. En un segundo, una pista de audio de 1.3 m de longitud pasa por el láser. Esta longitud incluye 705 600 bits de información de audio.

Categorizar Este ejemplo es un simple problema de sustitución.

A partir del conocimiento del número de bits en una longitud de 1.3 m, encuentre la longitud promedio por bit:

$$\text{Longitud por bit} = \frac{1.3 \text{ m}}{705\ 600 \text{ bits}} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ m/bit}$$

$$= 1.8\,\mu\text{m/bit}$$

La longitud promedio por bit de información *total* en el disco compacto es menor que este valor porque hay información adicional en el disco, además de la información de audio. Esta información incluye códigos de corrección de error, número de canciones y códigos de temporización. Como resultado, la longitud más corta por bit en realidad es de aproximadamente 0.8 μm.

EJEMPLO 17.8 ¿Cuál es el número?

Los datos de audio en un disco compacto experimentan un procesamiento complicado para reducir una variedad de errores en la lectura de los datos. Por lo tanto, una "palabra" de audio no se tiende linealmente en el disco. Suponga que se leen datos del disco, que se quita el código de error y que la palabra de audio resultante es

1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1

¿Cuál es el número decimal representado por esta palabra de 16 bits?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando observa el número binario anterior, es muy probable que, en función de su falta de experiencia con representaciones binarias, no pueda identificar de inmediato el número. Sin embargo, recuerde que sólo es una cadena de multiplicadores de potencias de 2, tal como los números con los que está familiarizado en las cadenas de multiplicadores de potencias de 10.

Categorizar Este ejemplo es un problema directo en el que se cambia una representación de código binario a código decimal.

Convierta cada uno de estos bits a una potencia de 2 y sume los resultados:

$1 \times 2^{15} = 32\,768$	$1 \times 2^{9} = 512$	$1 \times 2^{3} = 8$
$0 \times 2^{14} = 0$	$1 \times 2^{8} = 256$	$0 \times 2^{2} = 0$
$1 \times 2^{13} = 8\,192$	$1 \times 2^{7} = 128$	$1 \times 2^{1} = 2$
$1 \times 2^{12} = 4\,096$	$0 \times 2^{6} = 0$	$1 \times 2^{0} = 1$
$1 \times 2^{11} = 2\,048$	$1 \times 2^{5} = 32$	
$0 \times 2^{10} = 0$	$1 \times 2^{4} = 16$	suma = 48 059

Este número es convertido por el reproductor de disco compacto en un voltaje, que representa uno de los 44 100 valores que se usan para construir un segundo de la forma de onda electrónica que representa al sonido grabado.

17.6 Sonido cinematográfico

Otra aplicación interesante del sonido digital es la banda sonora de una película. Las películas de principios del siglo XX grababan el sonido en discos de fonógrafo, que se sincronizaba con la acción en la pantalla. Con las primeras películas de noticiarios, se introdujo el proceso de *banda sonora óptica de área variable*; el sonido se grababa sobre una pista óptica en la película. El ancho de la porción transparente de la pista variaba de acuerdo con la onda sonora que se grababa. Una fotocelda detectaba la luz que pasaba a través de la pista y convertía la intensidad de luz variable en una onda sonora. Como con la grabación de fonógrafo, había algunas dificultades con este sistema de grabación. Por ejemplo, el polvo o las huellas digitales en la película causaban fluctuaciones en la intensidad y pérdida de fidelidad.

La grabación digital en película apareció por primera vez con *Dick Tracy* (1990), usando el sistema Cinema Digital Sound, CDS. Este sistema carecía de un sistema de respaldo analógico en caso de falla del equipo y ya no se usa en la industria cinematográfica. Sin embargo, introdujo el uso de 5.1 canales de sonido: izquierda, centro, derecha, derecha surround (envolvente), izquierda surround y efectos de baja frecuencia (LFE). El canal LFE, que es el "canal 0.1" de 5.1, transporta frecuencias muy bajas para sonido dramático de explosiones, terremotos y cosas parecidas.

Las películas actuales se producen con tres sistemas de grabación de sonido digital:

Dolby digital. En el formato Dolby digital, los 5.1 canales de sonido digital se almacenan ópticamente entre los agujeros de la rueda de cadena de la película. Hay un respaldo óptico analógico en caso de falla del sistema digital. La primera película que usó esta técnica fue *Batman Returns* (1992).

Sonido digital para sala de cine (DTS). En el DTS, los 5.1 canales de sonido se almacenan en un CD–ROM separado, que se sincroniza con la película impresa mediante códigos de tiempo en la película. Hay un respaldo óptico analógico en caso de falla del sistema digital. La primera película que usó esta técnica fue *Jurassic Park* (1993).

Sonido digital dinámico Sony (SDDS). En el SDDS, ocho canales completos de sonido digital se almacenan ópticamente afuera de los agujeros de la rueda de cadena a ambos lados de la película. Hay un respaldo óptico analógico en caso de falla del sistema digital. La primera película que usó esta técnica fue *Last Action Hero* (1993). La existencia de información en ambos lados de la película es un sistema de redundancia; en caso de que un lado se dañe, el sistema todavía opera. El SDDS emplea un canal LFE de espectro completo y dos canales adicionales (izquierda centro y derecha centro detrás de la pantalla).

Resumen

DEFINICIONES

La **intensidad** de una onda sonora periódica, que es la potencia por cada unidad de área, es

$$I \equiv \frac{\mathcal{P}}{A} = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \qquad \textbf{(17.5, 17.6)}$$

El **nivel sonoro** de una onda sonora en decibeles es

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \textbf{(17.8)}$$

La constante I_0 es una intensidad de referencia, que usualmente se considera como el umbral de audición (1.00×10^{-12} W/m^2), e I es la intensidad de la onda sonora en watts por metro cuadrado.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las ondas sonoras son longitudinales y viajan a través de un medio comprimible con una rapidez que depende de las propiedades elásticas e inerciales de dicho medio. La rapidez del sonido en un líquido o gas que tenga un módulo volumétrico B y densidad ρ es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textbf{(17.1)}$$

Para ondas sonoras sinusoidales, la variación en la posición de un elemento del medio es

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \qquad \textbf{(17.2)}$$

y la variación en presión a partir del valor de equilibrio es

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t) \qquad \textbf{(17.3)}$$

donde $\Delta P_{\text{máx}}$ es la **amplitud de presión**. La onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento. La correspondencia entre $s_{\text{máx}}$ y $\Delta P_{\text{máx}}$ es

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \qquad \textbf{(17.4)}$$

El cambio en la frecuencia que escucha un observador siempre que hay movimiento relativo entre una fuente de ondas sonoras y el observador se llama **efecto Doppler**. La frecuencia observada es

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f \qquad \textbf{(17.13)}$$

En esta expresión, los signos para los valores sustituidos para v_O y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo para la velocidad del observador o fuente se sustituye si la velocidad de uno es hacia el otro, mientras que un valor negativo representa una velocidad de uno alejándose del otro.

En la grabación digital de sonido, la forma de onda sonora se muestrea 44 100 veces por segundo. La presión de la onda por cada muestreo se mide y convierte en número binario. En la reproducción estos números binarios se leen y usan para construir la forma de onda original.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** La tabla 17.1 muestra que la rapidez del sonido por lo general tiene un orden de magnitud mayor en sólidos que en gases. ¿A qué se puede atribuir este valor más alto? a) la diferencia en densidad entre sólidos y gases, b) la diferencia en compresibilidad entre sólidos y gases, c) el tamaño limitado de un objeto sólido en comparación con un gas libre, d) la imposibilidad de mantener un gas bajo tensión significativa.
2. Si una alarma se coloca en un buen vacío y luego se activa, no se escucha sonido. Explique.
3. Un vigilante sónico es un dispositivo que determina la distancia a un objeto al enviar un pulso sonoro ultrasónico y medir el intervalo de tiempo requerido para que la onda regrese por reflexión desde el objeto. Por lo general, estos dispositivos no pueden detectar confiablemente un objeto que esté a menos de un metro del sensor. ¿Por qué es esto?
4. Una amiga sentada en su automóvil, muy lejos en el camino, agita las manos y comienza a sonar su claxon al mismo tiempo. ¿A qué distancia debe estar para que usted calcule la rapidez del sonido a dos cifras significativas, al medir el intervalo de tiempo requerido para que el sonido llegue hasta usted?
5. **O** Suponga que un cambio en la fuente de sonido reduce la longitud de onda de una onda sonora en el aire en un factor de 2. **i)** ¿Qué sucede con su frecuencia? a) Aumenta en un factor de 4. b) Aumenta en un factor de 2. c) No

cambia. d) Disminuye en un factor de 2. e) Cambia por un factor impredecible. **ii)** ¿Qué sucede con su rapidez? Elija entre las mismas posibilidades.

6. **O** Una onda sonora viaja en aire con una frecuencia de 500 Hz. Si la onda viaja del aire al agua, **i)** ¿qué sucede con su frecuencia? a) Aumenta. b) Disminuye. c) No cambia. **ii)** ¿Qué sucede con su longitud de onda? Elija entre las mismas posibilidades.

7. Al escuchar una banda u orquesta, ¿cómo puede determinar que la rapidez del sonido es la misma para todas las frecuencias?

8. **O** Una fuente puntual transmite sonido en un medio uniforme. Si la distancia desde la fuente se triplica, ¿cómo cambia la intensidad? a) Se convierte en un noveno. b) Se convierte en un tercio. c) No cambia. d) Se vuelve tres veces más grande. e) Se vuelve nueve veces más grande.

9. **O** En un campanario la campana suena una vez. A 300 m enfrente de la iglesia, la intensidad sonora máxima es 2 μW/m^2. A 950 m detrás de la iglesia, la intensidad máxima es 0.2 μW/m^2. ¿Cuál es el motivo principal para la diferencia en intensidad? a) La mayor parte del sonido es absorbida por el aire antes de llegar muy lejos desde la fuente. b) La mayor parte del sonido es absorbida por el suelo mientras viaja alejándose de la fuente. c) La campana transmite el sonido principalmente hacia el frente. d) A mayor distancia, la potencia se dispersa sobre un área más grande. e) A mayor distancia, la potencia se dispersa a través de un volumen esférico más grande.

10. **O** Entre los siguientes sonidos, ¿cuál tiene más probabilidad de alcanzar un nivel sonoro de 60 dB? a) un concierto de rock, b) el voltear una página de este libro, c) una conversación en la mesa a la hora de cenar, d) una animada multitud en un partido de futbol.

11. **O** Con un medidor sensible del nivel sonoro mida el sonido de una araña que corre a -10 dB. ¿Qué implica el signo negativo? a) La araña se mueve alejándose de usted. b) La frecuencia del sonido es muy baja para ser audible para los humanos. c) La intensidad del sonido es muy débil para ser audible para los humanos. d) Cometió un error: los signos negativos no encajan con los logaritmos.

12. *El evento Tunguska.* El 30 de junio de 1908, un meteoro se quemó y explotó en la atmósfera sobre el valle del río Tunguska, en Siberia. Derribó árboles en miles de kilómetros cuadrados e inició un incendio forestal, pero no produjo cráter y aparentemente no causó pérdidas humanas. Un testigo sentado en su pórtico afuera de la zona de los árboles caídos recordó los eventos en la siguiente secuencia. Él vio una luz moverse en el cielo, más brillante que el Sol, y descender en un ángulo bajo hacia el horizonte. Sintió que su cara se calentaba, que el suelo se sacudía. Un agente invisible lo levantó y de inmediato lo soltó aproximadamente un metro más lejos de donde había estado la luz. Escuchó un retumbar prolongado muy fuerte. Sugiera una explicación para estas observaciones y para el orden en el que ocurrieron.

13. Explique qué sucede con la frecuencia del eco del claxon de su automóvil mientras conduce hacia la pared de un cañón. ¿Qué sucede con la frecuencia mientras se aleja de la pared?

14. **O** Una fuente de sonido vibra con frecuencia constante. Clasifique la frecuencia del sonido observado en los siguientes casos, de mayor a menor. Si dos frecuencias son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. Sólo una cosa se mueve a la vez, y todos los movimientos mencionados tienen la misma rapidez, 25 m/s. a) Fuente y observador estables entre aire estable. b) La fuente se mueve hacia el observador entre aire tranquilo. c) La fuente se mueve alejándose del observador entre aire tranquilo. d) El observador se mueve hacia la fuente entre aire tranquilo. e) El observador se mueve alejándose de la fuente entre aire tranquilo. f) Fuente y observador estables, con un viento estable que sopla desde la fuente hacia el observador. g) Fuente y observador estables, con un viento estable que sopla desde el observador hacia la fuente.

15. **O** Suponga que un observador y una fuente de sonido están en reposo y un fuerte viento sopla alejándose de la fuente hacia el observador. **i)** ¿Qué efecto tiene el viento sobre la frecuencia observada? a) Hace que aumente. b) Hace que disminuya. c) No genera cambios. **ii)** ¿Qué efecto tiene el viento sobre la longitud de onda observada? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** ¿Qué efecto tiene el viento sobre la rapidez observada de la onda? Elija entre las mismas posibilidades.

16. ¿Cómo puede un objeto moverse respecto de un observador de modo que el sonido proveniente de él no se corra en frecuencia?

Problemas

Sección 17.1 Rapidez de ondas sonoras

El problema 60 del capítulo 2 también se puede asignar con esta sección.

1. ● Suponga que usted escucha el chasquido de un trueno 16.2 s después de ver el relámpago asociado. La rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s, y la rapidez de la luz en el aire es de 3.00×10^8 m/s. ¿Qué tan lejos está del relámpago? ¿Necesita saber el valor de la rapidez de la luz para responder? Explique.

2. Encuentre la rapidez del sonido a través del mercurio, que tiene un módulo volumétrico de 2.80×10^{10} N/m^2 y una densidad de 13 600 kg/m^3.

3. Un delfín en agua de mar, a una temperatura de 25°C, da un chirrido. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que escuche un eco desde el fondo del océano, 150 m abajo?

4. La rapidez del sonido en el aire (en metros por segundo) depende de la temperatura, de acuerdo con la expresión aproximada

$$v = 331.5 + 0.607T_C$$

donde T_C es la temperatura Celsius. En aire seco, la temperatura disminuye casi 1°C por cada 150 m de aumento en altura. a) Suponga que este cambio es constante hasta una altura de 9 000 m. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que el so-

nido de un avión que vuela a 9 000 m llegue al suelo en un día cuando la temperatura del suelo es de 30°C? b) **¿Qué pasaría si?** Compare su respuesta con el intervalo de tiempo requerido si el aire estuviese uniformemente a 30°C. ¿Qué intervalo de tiempo es más largo?

5. Una maceta es derribada desde un balcón, 20.0 m arriba de la acera, y cae hacia un confiado hombre de 1.75 m de alto que está de pie abajo. ¿Qué tan cerca de la acera puede caer la maceta antes de que sea demasiado tarde para que un grito de advertencia desde el balcón llegue a tiempo al hombre? Suponga que el hombre abajo requiere 0.300 s para responder a la advertencia. La temperatura ambiente es de 20°C.

6. Un avión de rescate vuela horizontalmente con rapidez constante en busca de un bote descompuesto. Cuando el avión está directamente arriba del bote, la tripulación del bote suena una gran sirena. Para cuando el detector sonoro del avión recibe el sonido de la sirena, el avión recorrió una distancia igual a la mitad de su altura sobre el océano. Si supone que el sonido tarda 2.00 s en llegar al avión, determine a) la rapidez del avión y b) su altura. Considere que la rapidez del sonido es de 343 m/s.

7. Un vaquero está de pie sobre suelo horizontal entre dos riscos verticales paralelos. No está a la mitad entre los riscos. Dispara un tiro y escucha su eco. El segundo eco llega 1.92 s después que el primero y 1.47 s antes que el tercero. Considere sólo el sonido que viaja paralelo al suelo y se refleja de los riscos. Considere que la rapidez del sonido es de 340 m/s. a) ¿Cuál es la distancia entre los riscos? b) **¿Qué pasaría si?** Si él puede escuchar un cuarto eco, ¿en cuánto tiempo llega, después del tercer eco?

Sección 17.2 Ondas sonoras periódicas

Nota: Use los siguientes valores como necesarios a menos que se especifique de otro modo. La densidad de equilibrio del aire a 20°C es $\rho = 1.20$ kg/m^3 y la rapidez del sonido es $v = 343$ m/s. Las variaciones de presión ΔP se miden en relación con la presión atmosférica, 1.013×10^5 N/m^2.

8. ● Una onda sonora se propaga en aire a 27°C con frecuencia de 4.00 kHz. Pasa a través de una región donde la temperatura cambia gradualmente y luego se mueve a través de aire a 0°C. a) ¿Qué sucede con la rapidez de la onda? b) ¿Qué sucede con su frecuencia? c) ¿Qué sucede con su longitud de onda? Dé respuestas numéricas a estas preguntas en la medida de lo posible y establezca su razonamiento acerca de lo que sucede físicamente con la onda.

9. El ultrasonido se usa en medicina tanto para formación de imagen diagnóstica como para terapia. Para diagnosis: pulsos cortos de ultrasonido pasan a través del cuerpo del paciente, se registra un eco reflejado de una estructura de interés y es posible determinar la distancia a la estructura a partir del retraso de tiempo para que regrese el eco. Un solo transductor emite y detecta el ultrasonido. Al reducir los datos con una computadora se obtiene una imagen de la estructura. Con sonido de baja intensidad, esta técnica no es invasiva y es inocua: se usa para examinar fetos, tumores, aneurismas, cálculos y muchas otras estructuras. Para revelar detalles, la longitud de onda del ultrasonido reflejado debe ser pequeña comparada con el tamaño del objeto que refleja la onda. a) ¿Cuál es la longitud de onda del ultrasonido con una frecuencia de 2.40 MHz que se usa en ecocardiografía para mapear el latido del corazón humano? b) En todo el conjunto de técnicas de formación de imagen se usan frecuencias en el intervalo de 1.00 a 20.0 MHz. ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda que corresponden a este intervalo de frecuencias? La rapidez del ultrasonido en el tejido humano es de aproximadamente 1 500 m/s (casi la misma que la rapidez del sonido en el agua).

10. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión igual a 4.00×10^{-3} N/m^2. Calcule la amplitud de desplazamiento de la onda a una frecuencia de 10.0 kHz.

11. Una onda sonora sinusoidal se describe mediante la función de onda de desplazamiento

$$s(x, t) = (2.00\ \mu\text{m}) \cos\left[(15.7\ \text{m}^{-1})x - (858\ \text{s}^{-1})t\right]$$

a) Encuentre la amplitud, longitud de onda y rapidez de esta onda. b) Determine el desplazamiento instantáneo del equilibrio de los elementos de aire en la posición $x = 0.050\,0$ m en $t = 3.00$ ms. c) Determine la máxima rapidez del movimiento oscilatorio del elemento.

12 A medida que cierta onda sonora viaja a través del aire, produce variaciones de presión (arriba y abajo de la presión atmosférica) conocidas por $\Delta P = 1.27 \operatorname{sen}(\pi x - 340\pi t)$ en unidades del SI. Encuentre: a) la amplitud de las variaciones de presión, b) la frecuencia, c) la longitud de onda en el aire y d) la rapidez de la onda sonora.

13. Escriba una expresión que describa la variación de presión como función de la posición y el tiempo para una onda sonora sinusoidal en aire. Suponga que $\lambda = 0.100$ m y $\Delta P_{\text{máx}} = 0.200$ N/m^2.

14. El esfuerzo de tensión en una gruesa barra de cobre es 99.5% de su punto de rompimiento elástico de 13.0×10^{10} N/m^2. Si a través del material se transmite una onda sonora, a) ¿qué amplitud de desplazamiento hará que se rompa la barra? b) ¿Cuál es la máxima rapidez de los elementos de cobre en este momento? c) ¿Cuál es la intensidad sonora en la barra?

15. Un experimentador quiere generar en aire una onda sonora que tenga una amplitud de desplazamiento de 5.50×10^{-6} m. La amplitud de presión estará limitada a 0.840 N/m^2. ¿Cuál es la longitud de onda mínima que puede tener la onda sonora?

Sección 17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

16. El área de un tímpano representativo es casi 5.00×10^{-5} m^2. Calcule la potencia sonora incidente en un tímpano a a) el umbral de audición y b) el umbral de dolor.

17. Calcule el nivel sonoro (en decibeles) de una onda sonora que tenga una intensidad de 4.00 μW/m^2.

18. El tubo que se muestra en la figura 17.2 está lleno con aire a 20°C y presión de equilibrio de 1 atm. El diámetro del tubo es de 8.00 cm. El pistón se impulsa con una frecuencia de 600 Hz con una amplitud de 0.120 cm. ¿Qué potencia se debe suministrar para mantener la oscilación del pistón?

19. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a 1.00 kHz es de 0.600 W/m^2. a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a 2.50 kHz mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0.500 kHz y se duplica la amplitud de desplazamiento.

20. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra con una frecuencia f es I. a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a f' mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante.

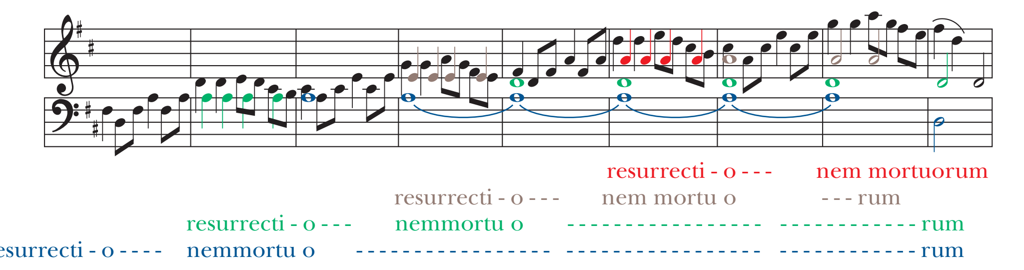


Figura P17.21 Partes de bajo (azul), tenor (verde), alto (café) y primera soprano (rojo) de una parte de la *Misa en Si menor* de Bach. Los bajos cantan la melodía de primer plano durante dos tiempos, luego los tenores durante dos tiempos, luego los altos y luego las primeras sopranos. Para enfatizar, esta línea se imprimió toda en negro. Se omitieron las partes para las segundas sopranos, violines, viola, flautas, oboes y continuo. La parte de tenor se escribe como se canta.

b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a $f/2$ y se duplica la amplitud de desplazamiento.

21. La melodía vocal más excelsa está en la *Misa en Si menor* de Johann Sebastian Bach. En la figura P17.21 aparece una parte de la partitura para la sección *Credo*, número 9, barras 25 a 33. La sílaba repetida O en la frase "resurrectionem mortuorum" (la resurrección de los muertos) pasa sin corte de bajos a tenores a altos a primeras sopranos, como una estafeta en una carrera de relevos. Cada voz lleva la melodía de primer plano a través de un pasaje que se eleva y abarca una octava o más. Juntas, las voces la llevan de Re abajo del Do medio a La arriba de un Do alto de tenor. En tono de concierto, a estas notas ahora se les asignan frecuencia de 146.8 Hz y 880.0 Hz. a) Encuentre las longitudes de onda de las notas inicial y final. b) Suponga que el coro canta la melodía con un nivel sonoro uniforme de 75.0 dB. Encuentre las amplitudes de presión de las notas inicial y final. c) Encuentre las amplitudes de desplazamiento de las notas inicial y final. d) **¿Qué pasaría si?** En la época de Bach, antes de la invención del diapasón, las frecuencias se asignaban a las notas como una cuestión de conveniencia local inmediata. Suponga que la melodía ascendente se cantó comenzando en 134.3 Hz y finalizó en 804.9 Hz. ¿Cómo cambiarían las respuestas a los incisos de la a) a la c)?

22. Demuestre que la diferencia entre los niveles de decibeles β_1 y β_2 de un sonido se relacionan con la relación de las distancias r_1 y r_2 desde la fuente sonora mediante

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

23. En un estadio cerrado se realiza un espectáculo familiar en hielo. Los patinadores actúan con música a un nivel de 80.0 dB. Este nivel es muy bajo para su bebé, quien llora a 75.0 dB. a) ¿Qué intensidad sonora total absorbe usted? b) ¿Cuál es el nivel sonoro combinado?

24. Un martillo neumático, funciona continuamente en un sitio de construcción, se comporta como una fuente puntual de ondas sonoras esféricas. Un supervisor de la construcción está de pie a 50.0 m al norte de esta fuente sonora y comienza a caminar hacia el oeste. ¿Cuánto tiene que caminar para que la amplitud de la función de onda caiga en un factor de 2.00?

25. La potencia de salida de cierta bocina pública es de 6.00 W. Suponga que transmite por igual en todas direcciones. a) ¿Desde la bocina a qué distancia el sonido sería doloroso al oído? b) ¿A qué distancia, desde la bocina, el sonido sería apenas audible?

26. Dos bocinas pequeñas emiten ondas sonoras de diferentes frecuencias, por igual, en todas direcciones. La bocina *A* tiene una salida de 1.00 mW, y la bocina *B* tiene una salida de 1.50 mW. Determine el nivel sonoro (en decibeles) en el punto *C* de la figura P17.26, si supone que a) sólo la bocina *A* emite sonido, b) sólo la bocina *B* emite sonido y c) ambas bocinas emiten sonido.

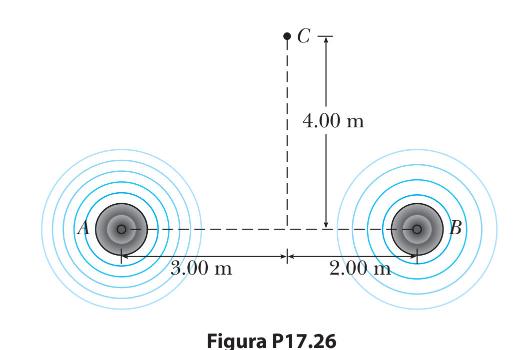


Figura P17.26

27. Una carga de explosivo se detona a muchos metros sobre el suelo. A una distancia de 400 m de la explosión, la presión acústica alcanza un máximo de 10.0 N/m^2. Suponga que la rapidez del sonido es constante en 343 m/s a través de la atmósfera sobre la región considerada, que el suelo absorbe todo el sonido que cae en él y que el aire absorbe energía sonora como se describe en la proporción de 7.00 dB/km. ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) a 4.00 km de la explosión?

28. Un cohete explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador en el suelo, directamente abajo de la explosión, experimenta una intensidad sonora promedio de 7.00×10^{-2} W/m^2 durante 0.200 s. a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? b) ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) que escucha el observador?

29. El nivel sonoro a una distancia de 3.00 m de una fuente es de 120 dB. ¿A qué distancia el nivel sonoro es de a) 100 dB y b) 10.0 dB?

30. El cambio más pequeño en nivel sonoro que una persona puede distinguir es de aproximadamente 1 dB. Cuando usted se para junto a su podadora mientras está en funcionamiento,

¿puede escuchar el ronroneo estable de la podadora de su vecino? Haga un cálculo de un orden de magnitud para sustentar su respuesta y establezca los datos que mida o estime.

31. Mientras la gente canta en la iglesia, el nivel sonoro en todas partes en el interior es de 101 dB. Ningún sonido se transmite a través de las grandes paredes, pero todas las ventanas y puertas están abiertas una mañana de verano. Su área total es de 22.0 m^2. a) ¿Cuánta energía sonora se radia en 20.0 min? b) Suponga que el suelo es un buen reflector y que el sonido radia uniformemente en todas direcciones horizontalmente y hacia arriba. Encuentre el nivel sonoro a 1.00 km de distancia.

Sección 17.4 El efecto Doppler

32. Unos padres expectantes están emocionados por escuchar el latido cardiaco de su bebé nonato, revelado por un detector de movimiento ultrasónico. Suponga que la pared ventricular del feto se mueve en movimiento armónico simple con una amplitud de 1.80 mm y una frecuencia de 115 por minuto. a) Encuentre la rapidez máxima lineal de la pared cardiaca. Suponga que el detector de movimiento en contacto con el abdomen de la madre produce sonido a 2 000 000.0 Hz, que viajan a través del tejido a 1.50 km/s. b) Encuentre la frecuencia máxima a la cual el sonido llega a la pared del corazón del bebé. c) Encuentre la frecuencia máxima a la cual el sonido reflejado se recibe en el detector de movimiento. Al "escuchar" electrónicamente los ecos a una frecuencia diferente de la frecuencia transmitida, el detector de movimiento puede producir sonido corto y agudo audible en sincronización con el latido fetal.

33. Un conductor viaja hacia el norte sobre una autopista con una rapidez de 25.0 m/s. Una patrulla de caminos, que viaja hacia el sur con una rapidez de 40.0 m/s, se aproxima con su sirena produciendo sonido a una frecuencia de 2 500 Hz. a) ¿Qué frecuencia observa el conductor mientras se aproxima la patrulla? b) ¿Qué frecuencia detecta el conductor después de que lo rebasa la patrulla? c) Repita los incisos a) y b) para cuando la patrulla viaje hacia el norte.

34. Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte $k = 20.0$ N/m, como se muestra en la figura P17.34. La masa total del bloque y la bocina es de 5.00 kg, y la amplitud de movimiento de esta unidad es 0.500 m. a) La bocina emite ondas sonoras de 440 Hz de frecuencia. Determine las frecuencias más alta y más baja que escucha una persona a la derecha de la bocina. b) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es de 60.0 dB cuando está más cerca de la bocina, a 1.00 m de distancia, ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador? Suponga que la rapidez del sonido es de 343 m/s.



Figura P17.34

35. De pie en un crucero, usted escucha una frecuencia de 560 Hz de la sirena de una ambulancia que se aproxima. Después de que la ambulancia pasa, la frecuencia observada de la sirena es de 480 Hz. Determine la rapidez de la ambulancia a partir de estas observaciones.

36. En los juegos olímpicos de invierno, una atleta monta en su luge por la pista mientras una campana justo arriba de la pared del tobogán suena continuamente. Cuando el luge pasa la campana, la atleta escucha que la frecuencia de la campana cae por el intervalo musical llamado tercer menor. Esto es, la frecuencia que ella escucha cae a cinco sextos de su valor original. a) Encuentre la rapidez del sonido en el aire a la temperatura ambiente de $-10.0°$C. b) Encuentre la rapidez de la atleta.

37. Un diapasón que vibra a 512 Hz cae desde el reposo y acelera a 9.80 m/s^2. ¿Qué tan abajo del punto de liberación se encuentra el diapasón cuando ondas de 485 Hz de frecuencia llegan al punto de liberación? Considere que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s.

38. Una sirena montada en el techo de una estación de bomberos emite sonido con una frecuencia de 900 Hz. Un viento estable sopla con una rapidez de 15.0 m/s. Si considera que la rapidez del sonido en aire tranquilo es de 343 m/s, encuentre la longitud de onda del sonido a) a favor del viento de la sirena y b) contra el viento de la sirena. Los bomberos se aproximan a la sirena desde diferentes direcciones a 15.0 m/s. ¿Qué frecuencia escucha un bombero c) si se aproxima desde una posición a favor del viento, de modo que se mueve en la dirección en la que el viento sopla, y d) si se aproxima desde una posición contraria al viento?

39. Un avión supersónico que viaja a Mach 3.00 a una altura de 20 000 m está directamente arriba de una persona en el tiempo $t = 0$, como se muestra en la figura P17.39. a) ¿En qué tiempo la persona encontrará la onda de choque? b) ¿Dónde estará el avión cuando finalmente se escuche el "estallido"? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es de 335 m/s.

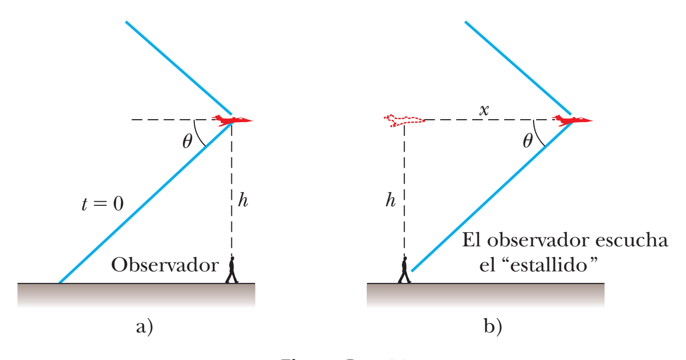


Figura P17.39

40. El bucle del látigo de un maestro de pista de circo viaja a Mach 1.38 (esto es, $v_S/v = 1.38$). ¿Qué ángulo forma el frente de choque con la dirección de movimiento del látigo?

41. Cuando partículas con cargas de alta energía se mueven a través de un medio transparente con una rapidez mayor que la rapidez de la luz en dicho medio, se produce una onda de choque, u onda de proa, de luz. Este fenómeno se llama *efecto Cerenkov*. Cuando un reactor nuclear se blinda mediante una gran alberca de agua, la radiación Cerenkov se puede ver como un brillo azul en la vecindad del núcleo del reactor de-

bido a electrones de alta rapidez que se mueven a través del agua. En un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de onda con un semiángulo de vértice de 53.0°. Calcule la rapidez de los electrones en el agua. La rapidez de la luz en el agua es 2.25×10^8 m/s.

Sección 17.5 Grabación de sonido digital

Sección 17.6 Sonido cinematográfico

42. ● Este problema representa una posible forma (aunque no recomendable) de codificar presiones instantáneas en una onda sonora en palabras digitales de 16 bits. El ejemplo 17.2 menciona que la amplitud de presión de un sonido de 120 dB es 28.7 N/m^2. Sea 65 536 el código digital que representa esta variación de presión. Sea la palabra digital 0 en la grabación la representación de la variación de presión cero. Represente otras presiones intermedias mediante palabras digitales de tamaño intermedio, en proporción directa con la presión. a) ¿Qué palabra digital representaría la máxima presión en un sonido de 40 dB? b) Explique por qué este esquema funciona pobremente para sonidos suaves. c) Explique cómo este esquema de codificación cortaría la mitad de la forma de onda de cualquier sonido, ignorando la forma real de la onda y convirtiéndola en una cadena de ceros. Al introducir esquinas agudas en cada forma de onda registrada, este esquema de codificación haría que todo sonido fuera como un zumbador o una flauta de un solo agujero.

Problemas adicionales

43. ● Un deslizador de 150 g, móvil a 2.30 m/s sobre una pista de aire, experimenta una colisión completamente inelástica con un deslizador de 200 g originalmente estacionario, y los dos deslizadores quedan unidos durante un intervalo de tiempo de 7.00 ms. Un estudiante sugiere que aproximadamente la mitad de la energía mecánica perdida va a sonido. ¿Esta sugerencia es razonable? Para evaluar la idea, encuentre el nivel implicado del sonido a 0.800 m de los deslizadores. Si la idea del estudiante no es razonable, sugiera una mejor idea.

44. ● Explique cómo la función de onda

$$\Delta P(r, t) = \left(\frac{25.0 \text{ Pa}\cdot\text{m}}{r}\right) \text{sen}\,(1.36r \text{ rad/m} - 2\,030t \text{ rad/s})$$

se puede aplicar a una onda que radia desde una fuente pequeña, con r como la distancia radial desde el centro de la fuente hasta cualquier punto afuera de la fuente. Dé la descripción más detallada que pueda de la onda. Incluya respuestas a preguntas como las siguientes. ¿La onda se mueve más hacia la derecha o la izquierda? Mientras se aleja de la fuente, ¿qué sucede con su amplitud? ¿Su rapidez? ¿Su frecuencia? ¿Su longitud de onda? ¿Su potencia? ¿Su intensidad? ¿Cuáles son los valores representativos para cada una de estas cantidades? ¿Qué puede decir acerca de la fuente de la onda? ¿Acerca del medio a través del que viaja?

45. ● Un gran conjunto de gradas de futbol desocupadas tiene asientos y contrahuellas sólidos. Usted está de pie en el campo, enfrente de las gradas y aplaude bruscamente una vez con dos tableros de madera, el pulso sonoro que produce no tiene frecuencia ni longitud de onda definidas. El sonido que escucha reflejado de las gradas tiene una frecuencia identificable y puede recordarle una breve nota de trompeta o de un zumbador o flauta de un solo agujero. Explique este sonido. a) Calcule una estimación del orden de magnitud para la frecuencia, longitud de onda y duración del sonido, sobre la base de los datos que especifique. b) Cada cara de una gran pirámide maya es como una escalera con escalones muy estrechos. ¿Puede producir un eco de una palmada que suene como el canto de un ave? Explique su respuesta.

46. ● Ondas esféricas con 45.0 cm de longitud de onda, se propagan hacia afuera de una fuente puntual. a) Explique la comparación entre la intensidad a una distancia de 240 cm con la intensidad a una distancia de 60.0 cm. b) Explique la comparación entre la amplitud a una distancia de 240 cm, con la amplitud a una distancia de 60.0 cm. c) Explique la comparación entre la fase de la onda a una distancia de 240 cm, con la fase a 60.0 cm en el mismo momento.

47. Una onda sonora en un cilindro se describe mediante las ecuaciones 17.2 a la 17.4. Demuestre que $\Delta P = \pm\rho v \omega\sqrt{s_{\text{máx}}^2 - s^2}$.

48. Muchos artistas cantan notas muy altas en notas improvisadas y cadencias. La nota más alta escrita para un cantante en una fuente publicada fue el Fa sostenido sobre Do alto, 1.480 kHz, para Zerbinetta en la versión original de la ópera de Richard Strauss *Ariadne auf Naxos*. a) Encuentre la longitud de onda de este sonido en aire. b) Suponga que las personas en la cuarta fila de asientos escuchan esta nota con un nivel de 81.0 dB. Encuentre la amplitud de desplazamiento del sonido. c) **¿Qué pasaría si?** En respuesta a las quejas, Strauss transpuso la nota más baja Fa sobre Do alto, 1.397 kHz. ¿En qué incremento cambió la longitud de onda? (La Reina de la Noche en la *Flauta Mágica* de Mozart también canta Fa sobre Do alto.)

49. Una mañana de sábado, las camionetas y vehículos deportivos utilitarios que llevan basura al depósito municipal forman una procesión casi estable en un camino vecinal, y todos viajan a 19.7 m/s. Desde una dirección, dos camiones llegan al depósito cada 3 minutos. Un ciclista también viaja hacia el depósito a 4.47 m/s. a) ¿Con qué frecuencia los camiones pasan al ciclista? b) **¿Qué pasaría si?** Una colina no frena a los camiones, pero hace que la rapidez del ciclista fuera de forma baje a 1.56 m/s. ¿Con qué frecuencia los ruidosos, olorosos, ineficientes, derramabasura, maleducados camiones pasan zumbando ahora al ciclista?

50. **Problema de repaso.** Para cierto tipo de acero, el esfuerzo siempre es proporcional a la deformación con el módulo de Young que se muestra en la tabla 12.1. El acero tiene la densidad que se menciona para el hierro en la tabla 14.1. Quedará permanentemente doblado si se somete a un esfuerzo compresivo mayor que su límite elástico σ_y = 400 MPa. Una barra de 80.0 cm de largo, hecha de este acero, se dispara a 12.0 m/s directo a una pared muy dura o a otra barra idéntica que se mueve en la dirección opuesta. a) La rapidez de una onda compresiva unidimensional móvil a lo largo de la barra se conoce por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde Y es el módulo de Young para la barra y ρ es la densidad. Calcule esta rapidez. b) Después de que el extremo frontal de la barra golpea la pared y se detiene, el extremo posterior de la barra sigue en movimiento como se describe mediante la primera ley de Newton hasta que se detiene por presión excesiva en una onda sonora móvil de regreso a través de la barra. ¿Qué intervalo de tiempo transcurre antes de que el extremo posterior de la barra reciba el mensaje de que debe detenerse? c) ¿Cuánto se movió el extremo posterior de la barra en este intervalo de tiempo? Encuentre d) la deformación y e) el esfuerzo en la barra. f) Si no debe fallar, demuestre que la máxima rapidez de impacto que una barra puede tener se conoce por la expresión $v = \sigma_y/\sqrt{\rho Y}$.

51. Para permitir la medición de su rapidez, un paracaidista porta un zumbador que emite un tono estable a 1 800 Hz. Un amigo ubicado en el suelo en el sitio de aterrizaje directamente abajo escucha el sonido amplificado que recibe. Suponga que el aire está tranquilo y que la rapidez del sonido es 343 m/s, independiente de la altitud. Mientras el paracaidista cae con rapidez terminal, su amigo en el suelo recibe ondas de 2 150 Hz de frecuencia. a) ¿Cuál es la rapidez de descenso del paracaidista? b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que el paracaidista puede escuchar el sonido del zumbador reflejado del suelo. ¿Qué frecuencia recibe?

52. Pruebe que las ondas sonoras se propagan con una rapidez determinada por la ecuación 17.1. Proceda del modo siguiente: en la figura 17.2, considere una delgada capa cilíndrica de aire en el cilindro, con área de cara A y grosor Δx. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de esta delgada capa. Demuestre que $\Sigma F_x = ma_x$ implica que

$$-\frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} A\ \Delta x = \rho A\ \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Al sustituir $\Delta P = -B(\partial s/\partial x)$, deducir la siguiente ecuación de onda para el sonido

$$\frac{B}{\rho}\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Para un físico matemático, esta ecuación demuestra la existencia de ondas sonoras y determina su rapidez. Como estudiante de física, usted debe dar otro paso o dos. Sustituya en la ecuación de onda la solución de prueba $s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$. Demuestre que esta función satisface la ecuación de onda siempre que $\omega/k = \sqrt{B/\rho}$. Este resultado revela que las ondas sonoras existen siempre que se muevan con la rapidez $v = f\lambda = (2\pi f)(\lambda/2\pi) = \omega/k = \sqrt{B/\rho}$.

53. Dos barcos se mueven a lo largo de una línea hacia el este. El buque trasero tiene una rapidez, relativa a un punto de observación con base en tierra, de 64.0 km/h, y el buque delantero tiene una rapidez de 45.0 km/h en relación con dicho punto. Los dos barcos están en una región del océano donde el movimiento de la corriente es uniforme hacia el oeste a 10.0 km/h. El barco trasero transmite una señal de sonar a una frecuencia de 1 200.0 Hz. ¿Qué frecuencia monitorea el barco delantero? Use 1 520 m/s como la rapidez del sonido en agua oceánica.

54. Un murciélago, que se mueve a 5.00 m/s, persigue a un insecto volador. Si el murciélago emite un chillido de 40.0 kHz y recibe de vuelta un eco a 40.4 kHz, ¿a qué rapidez se mueve el insecto hacia o alejándose del murciélago? (Considere que la rapidez del sonido en el aire es $v = 340$ m/s.)

55. Suponga que una bocina transmite sonido por igual en todas direcciones y produce sonido con un nivel de 103 dB a una distancia de 1.60 m desde su centro. a) Encuentre su potencia de salida sonora. b) Si un vendedor afirma que le da 150 W por cada canal, él se refiere a la entrada de potencia eléctrica a la bocina. Encuentre la eficiencia de la bocina, es decir, la fracción de potencia de entrada que se convierte en potencia de salida útil.

56. Una patrulla viaja hacia el este a 40.0 m/s a lo largo de un camino recto, y rebasa a un automóvil adelante de ella que se mueve al este a 30.0 m/s. A la patrulla se le descompone la sirena, que se pega a 1 000 Hz. a) Bosqueje la apariencia de los frentes de onda del sonido producido por la sirena. Muestre los frentes de onda tanto al este como al oeste de la patrulla. b) ¿Cuál sería la longitud de onda en aire del sonido de la sirena si la patrulla estuviera en reposo? c) ¿Cuál es la longitud de onda enfrente de la patrulla? d) ¿Cuál es detrás de la patrulla? e) ¿Cuál es la frecuencia que escucha el conductor que es perseguido?

57. ● La rapidez de una onda compresiva unidimensional que viaja a lo largo de una barra delgada de cobre es 3.56 km/s. A una barra de cobre se le da un martillazo en un extremo. Un escucha en el extremo lejano de la barra percibe el sonido dos veces, transmitido a través del metal y a través del aire a 0°C, con un intervalo de tiempo Δt entre los dos pulsos. a) ¿Cuál sonido llega primero? b) Encuentre la longitud de la barra como función de Δt. c) Evalúe la longitud de la barra si $\Delta t =$ 127 ms. d) Imagine que el cobre se sustituye por un material mucho más rígido a través del cual el sonido viajaría mucho más rápido. ¿Cómo cambiaría la respuesta del inciso b)? ¿Iría a un límite bien definido a medida que la rapidez de la señal en la barra tiende a infinito? Explique su respuesta.

58. Una autopista interestatal se construyó a través de un vecindario pobre en la ciudad. En la tarde, el nivel sonoro en una habitación rentada es de 80.0 dB cuando 100 automóviles pasan afuera de la ventana cada minuto. En la madrugada, cuando el inquilino del cuarto está en su trabajo en una fábrica, el flujo de tránsito es de sólo cinco automóviles por minuto. ¿Cuál es el nivel sonoro promedio en la madrugada?

59. Un meteoroide del tamaño de un camión entra a la atmósfera de la Tierra con una rapidez de 20.0 km/s y no se frena significativamente antes de entrar al océano. a) ¿Cuál es el ángulo Mach de la onda de choque del meteoroide en la atmósfera? (Use 331 m/s como la rapidez del sonido.) b) Si supone que el meteoroide sobrevive al impacto con la superficie del océano, ¿cuál es el ángulo Mach (inicial) de la onda de choque que produce el meteoroide en el agua? (Use la rapidez de onda para agua de mar dada en la tabla 17.1.)

60. La ecuación 17.7 afirma que, a una distancia r de una fuente puntual con potencia $\mathcal{P}_{\text{prom}}$, la intensidad de onda es

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2}$$

Estudie la figura 17.9 y pruebe que, a una distancia r justo enfrente de una fuente puntual con potencia $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ que se mueve con rapidez constante v_S, la intensidad de onda es

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2}\left(\frac{v - v_S}{v}\right)$$

61. Con métodos experimentales particulares, es posible producir y observar en una larga barra delgada tanto una onda longitudinal como una onda transversal cuya rapidez depende principalmente de la tensión en la barra. La rapidez de la onda longitudinal está determinada por el módulo de Young y la densidad del material, de acuerdo con la expresión $v = \sqrt{Y/\rho}$. La onda transversal se puede modelar como una onda en una cuerda estirada. Una barra metálica particular tiene 150 cm de largo y un radio de 0.200 cm y una masa de 50.9 g. El módulo de Young para el material es 6.80×10^{10} N/m^2. ¿Cuál debe ser la tensión en la barra si la relación de la rapidez de las ondas longitudinales a la rapidez de las ondas transversales es 8.00?

62. La ecuación Doppler que se presentó en el texto es válida cuando el movimiento entre el observador y la fuente se presenta en línea recta, de modo que la fuente y el observador se mueven directamente uno hacia el otro o directamente uno alejándose del otro. Si esta restricción se relaja, uno debe usar la ecuación Doppler más general

$$f' = \left(\frac{v + v_O \cos \theta_O}{v - v_S \cos \theta_S}\right) f$$

donde θ_O y θ_S se definen en la figura P17.62a. a) Demuestre que, si el observador y la fuente se mueven alejándose directamente uno de otro, la ecuación anterior se reduce a la ecuación 17.13, con valores negativos tanto para v_O como para v_S. b) Use la ecuación precedente para resolver el siguiente problema: un tren se mueve con una rapidez constante de 25.0 m/s hacia la intersección que se muestra en la figura P17.62b. Un automóvil se detiene cerca del cruce, a 30.0 m de las vías. Si el silbato del tren emite una frecuencia de 500 Hz, ¿cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros en el automóvil cuando el tren está a 40.0 m de la intersección? Considere que la rapidez del sonido es de 343 m/s.

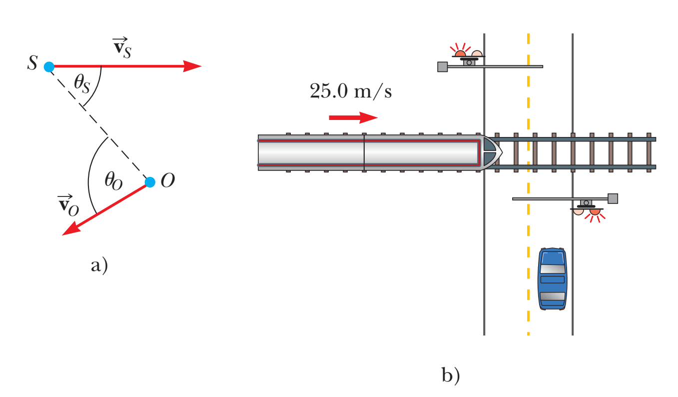
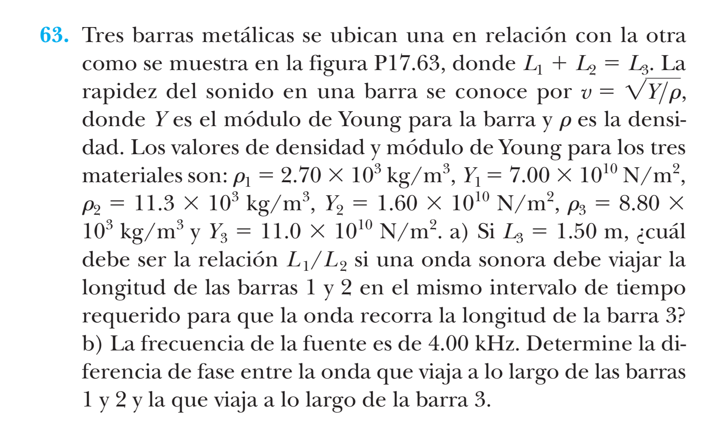


Figura P17.62



63. Tres barras metálicas se ubican una en relación con la otra como se muestra en la figura P17.63, donde $L_1 + L_2 = L_3$. La rapidez del sonido en una barra se conoce por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde Y es el módulo de Young para la barra y ρ es la densidad. Los valores de densidad y módulo de Young para los tres materiales son: $\rho_1 = 2.70 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_1 = 7.00 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho_2 = 11.3 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_2 = 1.60 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho_3 = 8.80 \times 10^3$ kg/m^3 y $Y_3 = 11.0 \times 10^{10}$ N/m^2. a) Si $L_3 = 1.50$ m, ¿cuál debe ser la relación L_1/L_2 si una onda sonora debe viajar la longitud de las barras 1 y 2 en el mismo intervalo de tiempo requerido para que la onda recorra la longitud de la barra 3? b) La frecuencia de la fuente es de 4.00 kHz. Determine la diferencia de fase entre la onda que viaja a lo largo de las barras 1 y 2 y la que viaja a lo largo de la barra 3.

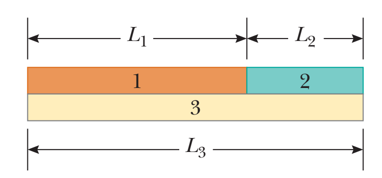


Figura P17.63

Respuestas a las preguntas rápidas

17.1 c). Ya que el fondo de la botella es una barrera rígida, el desplazamiento de los elementos de aire en el fondo es cero. Ya que la variación de presión es un mínimo o un máximo cuando el desplazamiento es cero, y ya que el pulso se mueve hacia abajo, la variación de presión en el fondo es un máximo.

17.2 b). La gran área del cuerpo de la guitarra pone muchos elementos de aire en oscilación y permite que la energía deje el sistema mediante ondas mecánicas en una proporción mucho mayor que de la delgada cuerda en vibración.

17.3 b). El factor de 100 es dos potencias de 10. El logaritmo de 100 es 2, que multiplicado por 10 da 20 dB.

17.4 e). La rapidez de onda no se puede cambiar al mover la fuente, de modo que las opciones a) y b) son incorrectas. La longitud de onda detectada es mayor en A, así que las opciones c) y d) son incorrectas. La opción f) es incorrecta porque la frecuencia detectada es menor en A.

17.5 e). La intensidad del sonido aumenta porque el tren se mueve más cerca de usted. Ya que el tren se mueve con velocidad constante, la frecuencia de corrimiento Doppler permanece fija.

17.6 b). El número Mach es la relación de la rapidez del avión (que no cambia) a la rapidez del sonido, que es mayor en el aire caliente que en el frío. El denominador de esta relación aumenta, mientras que el numerador permanece constante. Por lo tanto, la relación como un todo, el número Mach, disminuye.



El guitarrista Carlos Santana aprovecha las ondas estacionarias en las cuerdas. Él cambia a notas más altas en la guitarra al empujar las cuerdas contra los trastes en el diapasón, lo que acorta la longitud de las porciones de las cuerdas que vibran. (Bettmann/Corbis)

18 Sobreposición y ondas estacionarias

Se introdujo el modelo ondulatorio en los dos capítulos anteriores. Se vio que las ondas son muy diferentes de las partículas. Una partícula es de tamaño cero, mientras que una onda tiene un tamaño característico, su longitud de onda. Otra diferencia importante entre ondas y partículas es que se puede explorar la posibilidad de dos o más ondas combinadas en un punto en el mismo medio. Las partículas se combinan para formar objetos extendidos, pero las partículas deben estar en *diferentes* posiciones. En contraste, dos ondas pueden estar presentes en la misma posición. Las ramificaciones de esta posibilidad se exploran en este capítulo.

Cuando las ondas se combinan en sistemas con condiciones de frontera, sólo existen ciertas frecuencias permitidas, y se dice que las frecuencias están *cuantizadas*. La cuantización es una noción que está en el corazón de la mecánica cuántica, un tema que se introduce de manera formal en el capítulo 40. Ahí se demuestra que las ondas bajo condiciones de frontera explican muchos de los fenómenos cuánticos. En este capítulo se usa la cuantización para entender el comportamiento de la amplia variedad de instrumentos musicales que se basan en cuerdas y columnas de aire.

También se considera la combinación de ondas que tienen diferentes frecuencias. Cuando interfieren dos ondas sonoras que tienen casi la misma frecuencia, se escuchan variaciones en la sonoridad llamadas *batimientos*. Por último, se analiza cómo cualquier onda periódica no sinusoidal se describe como una suma de funciones seno y coseno.

18.1 Sobreposición e interferencia

Muchos fenómenos ondulatorios interesantes en la naturaleza no se pueden describir mediante una sola onda progresiva. En vez de ello, se debe analizar estos fenómenos en términos de una combinación de ondas progresivas. Para analizar tales combinaciones ondulatorias, se utiliza el **principio de sobreposición**:

> Si dos o más ondas progresivas se mueven a través de un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales.

◄ Principio de sobreposición

Las ondas que obedecen este principio se llaman *ondas lineales*. En el caso de ondas mecánicas, las ondas lineales generalmente se caracterizan por tener amplitudes mucho menores que sus longitudes de onda. Las ondas que violan el principio de sobreposición se llaman *ondas no lineales* y con frecuencia se caracterizan por grandes amplitudes. En este libro sólo se tratará con ondas lineales.

Una consecuencia del principio de sobreposición es que **dos ondas progresivas pueden pasar una a través de la otra sin destruirse o alterarse**. Por ejemplo, cuando dos guijarros se lanzan en un estanque y golpean la superficie en diferentes posiciones, las ondas circulares superficiales que se expanden desde las dos posiciones no se destruyen entre sí sino que pasan una sobre la otra. El complejo patrón resultante se puede ver como dos conjuntos independientes de círculos en expansión.

La figura 18.1 es una representación gráfica de la sobreposición de dos pulsos. La función de onda para el pulso móvil hacia la derecha es y_1, y la función de onda para el pulso móvil hacia la izquierda es y_2. Los pulsos tienen la misma rapidez pero diferentes formas y el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos. Cuando las ondas comienzan a traslaparse (figura 18.1b), la función de onda para la onda compleja resultante se conoce por $y_1 + y_2$. Cuando las crestas de los pulsos coinciden (figura 18.1c), la onda resultante conocida por $y_1 + y_2$ tiene una amplitud mayor que los pulsos individuales. Los dos pulsos finalmente se separan y continúan su movimiento en sus direcciones originales (figura 18.1d). Advierta que la forma del pulso permanece invariable después de la interacción, ¡como si los dos pulsos nunca se hubieran encontrado!

La combinación de ondas separadas en la misma región de espacio para producir una onda resultante se llama **interferencia**. Para los dos pulsos que se muestran en la figura 18.1, el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos, y el pulso resultante (creado cuando los pulsos individuales se traslapan) muestra una amplitud mayor que la de cualquier pulso individual. Ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en la misma dirección, a esta interferencia se le refiere como **interferencia constructiva**.

◄ Interferencia constructiva

Ahora considere dos pulsos que viajan en direcciones opuestas en una cuerda tensa donde un pulso se invierte relativo con el otro, como se ilustra en la figura 18.2. Cuando estos pulsos comienzan a traslapar, el pulso resultante se conoce por $y_1 + y_2$, pero los valores de la función y_2 son negativos. De nuevo, los dos pulsos pasan uno a través del otro; sin embargo, ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en direcciones opuestas, a su superposición se le refiere como **interferencia destructiva**.

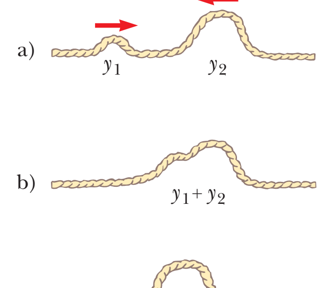
◄ Interferencia destructiva

El principio de sobreposición es la composición central del **modelo de ondas en interferencia**. En muchas situaciones, tanto en acústica como en óptica, las ondas se combinan de acuerdo con este principio y muestran interesantes fenómenos con aplicaciones prácticas.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.1
¿Las ondas realmente interfieren?

En el uso popular el término *interferir* implica que un agente afecta una situación en alguna forma, de modo que evita que algo ocurra. Por ejemplo, en el futbol americano, *interferencia de pase* significa que un jugador defensivo afectó al receptor de modo que el receptor fue incapaz de atrapar el balón. Este uso es muy diferente del dado en física, donde las ondas pasan una a través de otra e interfieren, pero no se afectan mutuamente en forma alguna. En física, interferencia es similar a la noción de *combinación*, como se describe en este capítulo.

Pregunta rápida 18.1 Dos pulsos se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda y son idénticos en forma, excepto que uno tiene desplazamientos positivos de los elementos de la cuerda y el otro tiene desplazamientos negativos. En el momento en que los dos pulsos se traslapan por completo en la cuerda, ¿qué sucede? a) La energía asociada con los pulsos desaparece. b) La cuerda no es móvil. c) La cuerda forma una línea recta. d) Los pulsos desaparecen y no reaparecerán.



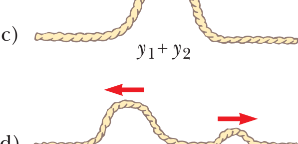
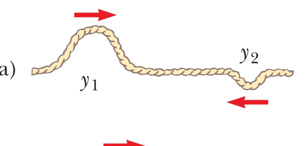
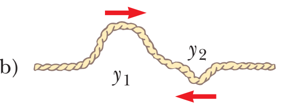
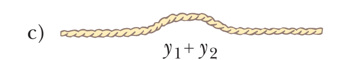


Figura 18.1 (a–d) Dos pulsos que viajan en direcciones opuestas en una cuerda estirada pasan una a través de la otra. Cuando los pulsos se traslapan, como se muestra en b) y c), el desplazamiento neto de la cuerda es igual a la suma de los desplazamientos producidos por cada pulso. Ya que cada pulso produce desplazamientos positivos de la cuerda, a su sobreposición se le refiere como *interferencia constructiva.*







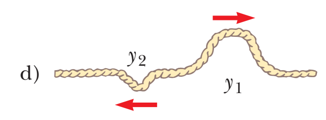


Figura 18.2 (a–d) Dos pulsos que viajan en direcciones opuestas y tienen desplazamientos invertidos uno en relación con el otro. Cuando los dos se traslapan en c), sus desplazamientos se cancelan parcialmente uno a otro.

Sobreposición de ondas sinusoidales

Ahora se aplicará el principio de sobreposición a dos ondas sinusoidales que viajan en la misma dirección en un medio lineal. Si las dos ondas viajan hacia la derecha y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud pero difieren en fase, sus funciones de onda individuales se pueden expresar como

$$y_1 = A \operatorname{sen}\,(kx - \omega t) \qquad y_2 = A \operatorname{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$$

donde, como es usual, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$ y ϕ es la constante de fase como se explicó en la sección 16.2. Por tanto, la función de onda resultante y es

$$y = y_1 + y_2 = A[\operatorname{sen}\,(kx - \omega t) + \operatorname{sen}\,(kx - \omega t + \phi)]$$

Para simplificar esta expresión, se usa la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Al hacer $a = kx - \omega t$ y $b = kx - \omega t + \phi$, se encuentra que la función de onda resultante y se reduce a

Resultante de dos ondas sinusoidales viajeras ►

$$y = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Este resultado tiene muchas características importantes. La función de onda resultante y también es sinusoidal y tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas individuales porque la función seno incorpora los mismos valores de k y ω que aparecen en las funciones de onda originales. La amplitud de la onda resultante es $2A \cos(\phi/2)$ y su fase es $\phi/2$. Si la constante de fase ϕ es igual a 0, en tal caso $\cos(\phi/2) = \cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es $2A$, el doble de la amplitud de cualquier onda individual. En este caso, se dice que las ondas están *en fase* en cualquier parte y, por tanto, interfieren constructivamente. Esto es, las crestas y valles de las ondas individuales y_1 y y_2 se presentan

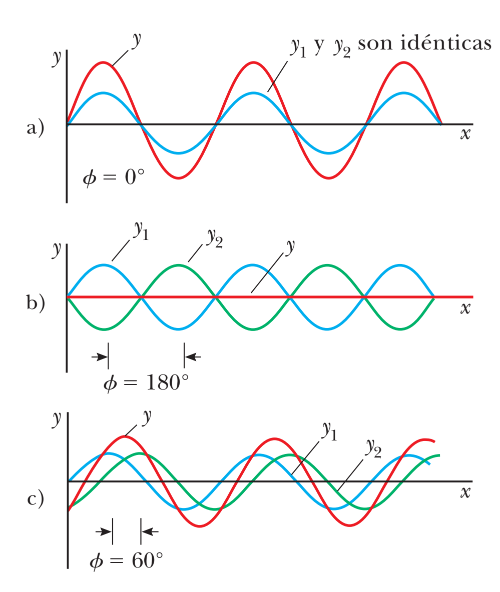


Figura 18.3 Sobreposición de dos ondas idénticas y_1 y y_2 (azul y verde, respectivamente) para producir una onda resultante (rojo). a) Cuando y_1 y y_2 están en fase, el resultado es interferencia constructiva. b) Cuando y_1 y y_2 están π radianes fuera de fase, el resultado es interferencia destructiva. c) Cuando el ángulo de fase tiene un valor distinto de 0 o π radianes, la onda resultante y cae en alguna parte entre los extremos que se muestran en a) y b).

en las mismas posiciones y se combinan para formar la curva roja y de amplitud $2A$ que se muestra en la figura 18.3a. Ya que las ondas individuales están en fase, son indistinguibles en la figura 18.3a, en la que aparecen como una sola curva azul. En general, la interferencia constructiva ocurre cuando $\cos(\phi/2) = \pm 1$. Esto es cierto, por ejemplo, cuando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ radianes, es decir, cuando ϕ es un múltiplo *par* de π.

Cuando ϕ es igual a π radianes o a cualquier múltiplo *impar* de π, en tal caso $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y las crestas de una onda se presentan en las mismas posiciones que los valles de la segunda onda (figura 18.3b). Por lo tanto, como consecuencia de la interferencia destructiva, la onda resultante tiene amplitud *cero* en todas partes. En último lugar, cuando la constante de fase tiene un valor arbitrario distinto de 0 o un múltiplo entero de π radianes (figura 18.3c), la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está en alguna parte entre 0 y $2A$.

En el caso más general en el que las ondas tienen la misma longitud de onda pero diferentes amplitudes, los resultados son similares con las siguientes excepciones. En el caso en fase, la amplitud de la onda resultante no es el doble que en una sola onda, sino más bien es la suma de las amplitudes de las dos ondas. Cuando las ondas están π radianes fuera de fase, no se cancelan completamente como en la figura 18.3b. El resultado es una onda cuya amplitud es la diferencia en las amplitudes de las ondas individuales.

Interferencia de ondas sonoras

En la figura 18.4 se muestra un dispositivo simple para demostrar la interferencia de las ondas sonoras. El sonido de una bocina S se envía a un tubo en el punto P, donde hay una unión en forma de T. La mitad de la energía sonora viaja en una dirección y la mitad viaja en la dirección opuesta. Por lo tanto, las ondas sonoras que alcanzan al receptor R pueden viajar a lo largo de cualquiera de las dos trayectorias. La distancia a lo largo de cualquier trayectoria de la bocina al receptor se llama **longitud de trayectoria** r. La longitud de trayectoria inferior r_1 es fija, pero la longitud de trayectoria superior r_2 se puede variar al deslizar el tubo en forma de U, que es similar al de un trombón. Cuando la diferencia en las longitudes de trayectoria $\Delta r = |r_2 - r_1|$ es cero o algún múltiplo entero de la longitud de onda λ (es decir, $\Delta r = n\lambda$, donde $n = 0, 1, 2, 3,\ldots$), las dos ondas que llegan al receptor

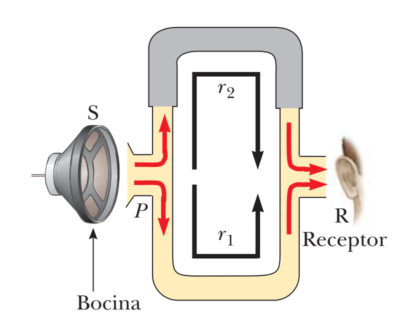


Figura 18.4 Un sistema acústico para demostrar la interferencia de las ondas de sonido. Una onda de sonido de la bocina (S) se propaga en un tubo y se divide en dos partes en el punto P. Las dos ondas, que se combinan en el lado opuesto, son detectadas por el receptor (R). La longitud de trayectoria superior r_2 puede variar al deslizar la sección superior.

en cualquier instante están en fase y se interfieren constructivamente, como se muestra en la figura 18.3a. Para este caso, en el receptor se detecta un máximo en la intensidad sonora. Si la longitud de trayectoria r_2 se ajusta de tal modo que la diferencia de trayectoria $\Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2,..., n\lambda/2$ (para n impar), las dos ondas están exactamente π radianes, o 180°, fuera de fase en el receptor y por tanto se cancelan mutuamente. En este caso de interferencia destructiva el receptor no detecta sonido. Este experimento simple demuestra que entre dos ondas generadas por la misma fuente puede surgir una diferencia de fase cuando viajan a lo largo de trayectorias de longitudes distintas. Este importante fenómeno será indispensable en la investigación de la interferencia de ondas luminosas en el capítulo 37.

EJEMPLO 18.1 Dos bocinas accionadas por la misma fuente

Dos bocinas idénticas colocadas con una separación de 3.00 m son accionadas por el mismo oscilador (figura 18.5). Un escucha está originalmente en el punto O, ubicado a 8.00 m del centro de la línea que conecta las dos bocinas. Luego el escucha se mueve al punto P, que está a una distancia perpendicular de 0.350 m de O, y experimenta el *primer mínimo* en la intensidad del sonido. ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?

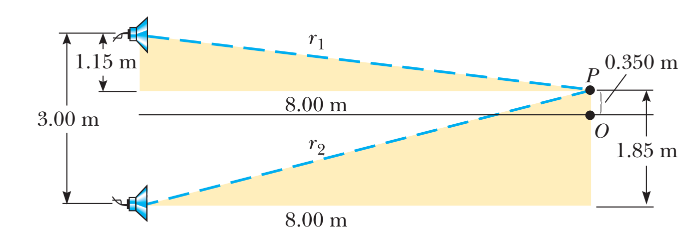


Figura 18.5 (Ejemplo 18.1) Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras a un escucha en P.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 18.4, una onda sonora entra a un tubo y después se divide *acústicamente* en dos diferentes trayectorias antes de recombinarse en el otro extremo. En este ejemplo, una señal que representa el sonido se divide *eléctricamente* y sale a dos bocinas diferentes. Después de dejar las bocinas, las ondas sonoras se recombinan en la posición del escucha. A pesar de la diferencia en como se presenta la división, en este caso aplica la explicación de la diferencia de trayectoria vista en la figura 18.4.

Categorizar Ya que las ondas sonoras de las dos fuentes separadas se combinan, se aplica el modelo de análisis de ondas en interferencia.

Analizar La figura 18.5 muestra el ordenamiento físico de las bocinas, junto con dos triángulos rectángulos sombreados que se pueden dibujar sobre la base de las longitudes descritas en el problema. El primer mínimo se presenta cuando las dos ondas que llegan al escucha en el punto P están 180° fuera de fase, en otras palabras, cuando su diferencia de trayectoria Δr es igual a $\lambda/2$.

A partir de los triángulos sombreados, encuentre las longitudes de trayectoria de las bocinas al escucha:

$$r_1 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.15 \text{ m})^2} = 8.08 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.85 \text{ m})^2} = 8.21 \text{ m}$$

Por eso, la diferencia de trayectoria es $r_2 - r_1 = 0.13$ m. Ya que esta diferencia de trayectoria debe ser igual a $\lambda/2$ para el primer mínimo, $\lambda = 0.26$ m.

Para obtener la frecuencia del oscilador, use la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, donde v es la rapidez del sonido en el aire, 343 m/s:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{0.26 \text{ m}} = \boxed{1.3 \text{ kHz}}$$

Finalizar Este ejemplo permite entender por qué los alambres de las bocinas en un aparato de sonido se deben conectar de manera adecuada. Cuando se conectan del modo equivocado (es decir, cuando el alambre positivo, o rojo, es conectado a la terminal negativa, o negra, en una de las bocinas y la otra se conecta correctamente) se dice que las bocinas están "fuera de fase", y una bocina es móvil hacia afuera mientras la otra se mueve hacia adentro. En consecuencia, la onda sonora proveniente de una bocina interfiere destructivamente con la onda que viene de la otra en el punto O de la figura 18.5. Una región de enrarecimiento debida a una bocina se sobrepone a una región de compresión de la otra bocina. Auque los dos sonidos probablemente no se cancelen por completo uno a otro (porque las señales estereofónicas izquierda y derecha por lo general no son idénticas), en el punto O se presenta una sustancial pérdida de calidad sonora.

¿Qué pasaría si? ¿Y si las bocinas se conectaran fuera de fase? ¿Qué sucede en el punto P en la figura 18.5?

Respuesta En esta situación, la diferencia de trayectoria de $\lambda/2$ se combina con una diferencia de fase de $\lambda/2$ debido al cableado incorrecto para dar una diferencia de fase completa de λ. Como resultado, las ondas están en fase y hay una intensidad *máxima* en el punto P.

18.2 Ondas estacionarias

Las ondas sonoras a causa del par de bocinas del ejemplo 18.1 salen de las bocinas hacia adelante, y hacen interferencia en un punto enfrente de las bocinas. Suponga que da vuelta a las bocinas de modo que una quede frente a la otra y luego hace que emitan sonido a la misma frecuencia y amplitud. En esta situación dos ondas idénticas viajan en direcciones opuestas en el mismo medio, como en la figura 18.6. Dichas ondas se combinan de acuerdo con el modelo de ondas en interferencia.

Para tal situación se consideran funciones de onda para dos ondas sinusoidales transversales que tengan la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda pero que viajen en direcciones opuestas en el mismo medio:

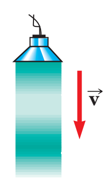
$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad y_2 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

donde y_1 representa una onda que viaja en la dirección $+x$ y y_2 representa una que viaja en la dirección $-x$. Al sumar estas dos funciones da la función de onda resultante y:

$$y = y_1 + y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Cuando se usa la identidad trigonométrica $(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b)$, esta expresión se reduce a

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cos \omega t \qquad \textbf{(18.1)}$$



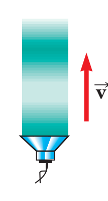


Figura 18.6 Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras una hacia otra. Cuando se traslapan, las ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas se combinarán para formar ondas estacionarias.

La ecuación 18.1 representa la función de onda de una **onda estacionaria**. Una onda estacionaria, como la de una cuerda que se muestra en la figura 18.7, es un patrón de oscilación *con un contorno estacionario* que resulta de la sobreposición de dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas.

Advierta que la ecuación 18.1 no contiene una función de $kx - \omega t$. Por lo tanto, no es una expresión para una sola onda progresiva. Cuando usted observa una onda estacionaria, no hay sentido de movimiento en la dirección de propagación de cualquier onda original. Al comparar la ecuación 18.1 con la ecuación 15.6, es clara la descripción de una clase especial de movimiento armónico simple. Cada elemento del medio oscila en movimiento armónico con la misma frecuencia angular ω (de acuerdo con el factor cos ωt en la ecuación). Sin embargo, la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.2

Tres tipos de amplitud

Es necesario distinguir con claridad entre la **amplitud de las ondas individuales**, que es A, y la **amplitud del movimiento armónico simple de los elementos del medio**, que es $2A$ sen kx. Un elemento determinado en una onda estacionaria vibra dentro de las restricciones de la función *envolvente* $2A$ sen kx, donde x es la posición en el medio de dicho elemento. Tal vibración está en contraste con las ondas sinusoidales viajeras, en las que todos los elementos oscilan con la misma amplitud y la misma frecuencia y la amplitud A de la onda es la misma que la amplitud A del movimiento armónico simple de los elementos. Además, se puede identificar la **amplitud de la onda estacionaria** como $2A$.

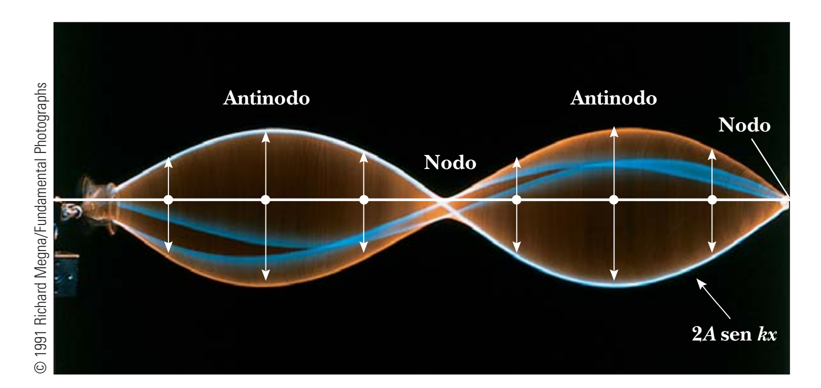


Figura 18.7 Fotografía múltiple de una onda estacionaria en una cuerda. El comportamiento temporal del desplazamiento vertical desde el equilibrio de un elemento individual de la cuerda se conoce por cos ωt. Es decir, cada elemento vibra con una frecuencia angular ω. La amplitud de la oscilación vertical de cualquier elemento de la cuerda depende de la posición horizontal del elemento. Cada elemento vibra dentro de los confines de la función envolvente $2A$ sen kx.

(dada por el factor $2A$ sen kx, el coeficiente de la función coseno) depende de la ubicación x del elemento en el medio.

La amplitud del movimiento armónico simple de un elemento del medio tiene un valor mínimo de cero cuando x satisface la condición sen $kx = 0$, es decir, cuando

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

Ya que $k = 2\pi/\lambda$, estos valores para kx producen

Posiciones de nodos ▶

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(18.2)}$$

Estos puntos de amplitud cero se llaman **nodos**.

El elemento del medio con el *mayor* desplazamiento posible desde el equilibrio tiene una amplitud de $2A$, que se define como la amplitud de la onda estacionaria. Las posiciones en el medio donde se presenta este desplazamiento máximo se llaman **antinodos**. Los antinodos se ubican en posiciones que satisfacen la condición sen $kx = \pm 1$ de la coordenada x, es decir, cuando

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Por lo tanto, las posiciones de los antinodos se dan por

Posiciones de antinodos ▶

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \textbf{(18.3)}$$

En la figura 18.7 se etiquetan dos nodos y dos antinodos en la onda estacionaria. La curva azul claro etiquetada $2A$ sen kx en la figura 18.7 representa una longitud de onda de las ondas progresivas que se combinan para formar la onda estacionaria. La figura 18.7 y las ecuaciones 18.2 y 18.3 proporcionan las siguientes características de las ubicaciones de nodos y antinodos:

La distancia entre antinodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre nodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$.

En la figura 18.8 aparecen los patrones de onda de los elementos del medio producidos en diferentes momentos por dos ondas viajeras transversales que se mueven en direcciones opuestas. Las curvas azul y verde son los patrones de onda para las ondas progresivas in-

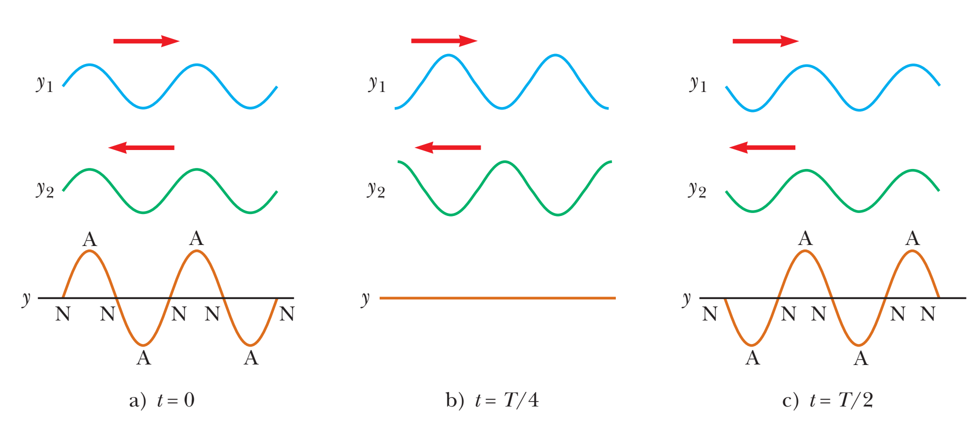


Figura 18.8 Patrones de onda estacionaria producidos en diferentes momentos por dos ondas de igual amplitud que viajan en direcciones opuestas. Para la onda resultante y, los nodos (N) son puntos de desplazamiento cero y los antinodos (A) son puntos de desplazamiento máximo.

dividuales y las curvas cafés son los patrones de onda para la onda estacionaria resultante. En $t = 0$ (figura 18.8a), las dos ondas progresivas están en fase, lo que da un patrón de onda en el que cada elemento del medio está en reposo y experimenta su máximo desplazamiento desde el equilibrio. Un cuarto de periodo después, en $t = T/4$ (figura 18.8b), las ondas progresivas se movieron un cuarto de longitud de onda (una a la derecha y la otra a la izquierda). En este momento, las ondas progresivas están fuera de fase y cada elemento del medio pasa a través de la posición de equilibrio en su movimiento armónico simple. El resultado es desplazamiento cero para los elementos en todos los valores de x; es decir, el patrón de onda es una línea recta. En $t = T/2$ (figura 18.8c), las ondas progresivas de nuevo están en fase, lo que produce un patrón de onda que está invertido relativo con el patrón $t = 0$. En la onda estacionaria, los elementos del medio alternan en tiempo entre los extremos que se muestran en la figura 18.8a y c.

Pregunta rápida 18.2 Considere una onda estacionaria en una cuerda, como se muestra en la figura 18.8. Defina la velocidad de los elementos de la cuerda como positiva si se mueven hacia arriba en la figura. **i)** En el momento en que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 18.8a, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda? a) cero para todos los elementos, b) positiva para todos los elementos, c) negativa para todos los elementos, d) varía con la posición del elemento. **ii)** A partir de las mismas opciones, en el momento en que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 18.8b, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda?

EJEMPLO 18.2 Formación de una onda estacionaria

Dos ondas que viajan en direcciones opuestas producen una onda estacionaria. Las funciones de onda individuales son

$$y_1 = (4.0 \text{ cm}) \text{ sen } (3.0x - 2.0t)$$

$$y_2 = (4.0 \text{ cm}) \text{ sen } (3.0x + 2.0t)$$

donde x y y se miden en centímetros.

A) Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento del medio ubicado en $x = 2.3$ cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas descritas por las ecuaciones conocidas son idénticas excepto por sus direcciones de viaje, así que de hecho se combinan para formar una onda estacionaria como se explicó en esta sección.

Categorizar Se sustituirán valores en las ecuaciones por desarrollar en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

A partir de las ecuaciones para las ondas $A = 4.0$ cm, $k = 3.0$ rad/cm y $\omega = 2.0$ rad/s. Use la ecuación 18.1 para escribir una expresión para la onda estacionaria:

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t = [(8.0 \text{ cm}) \text{ sen } 3.0x] \cos 2.0t$$

Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento en la posición $x = 2.3$ cm al evaluar el coeficiente de la función coseno en esta posición:

$$y_{\text{máx}} = (8.0 \text{ cm}) \text{ sen } 3.0x \big|_{x=2.3}$$

$$= (8.0 \text{ cm}) \text{ sen } (6.9 \text{ rad}) = 4.6 \text{ cm}$$

B) Encuentre las posiciones de los nodos y antinodos si un extremo de la cuerda está en $x = 0$.

SOLUCIÓN

Encuentre la longitud de onda de las ondas progresivas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.0 \text{ rad/cm} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{3.0} \text{ cm}$$

Aplique la ecuación 18.2 para hallar las posiciones de los nodos:

$$x = n\frac{\lambda}{2} = n\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Utilice la ecuación 18.3 para encontrar las posiciones de los antinodos:

$$x = n\frac{\lambda}{4} = n\left(\frac{\pi}{6}\right)\text{ cm} \quad n = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

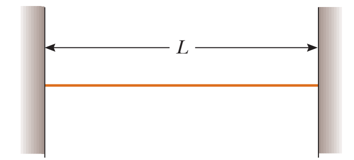


Figura 18.9 Una cuerda de longitud L fija en ambos extremos.

18.3 Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos

Considere una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, como se muestra en la figura 18.9. Este sistema se usará como modelo para una cuerda de guitarra o piano. En la cuerda se pueden establecer ondas estacionarias mediante una sobreposición continua de ondas incidentes y reflejadas desde los extremos. Advierta que hay una condición frontera para las ondas en la cuerda. Ya que los extremos de la cuerda están fijos, necesariamente tienen desplazamiento cero y, por ende, son nodos por definición. Esta condición frontera resulta en que la cuerda tenga un número de patrones de oscilación naturales discretos, llamados **modos normales**, cada uno con una frecuencia característica que se calcula con facilidad. Esta situación en la que sólo se permiten ciertas frecuencias de oscilación se llama **cuantización**; la cual es un acontecimiento común cuando las ondas se someten a condiciones frontera y es una característica central para las explicaciones de física cuántica en la versión extendida de este texto. Note que en la figura 18.8 no hay condiciones frontera, así que se pueden establecer ondas estacionarias de *cualquier* frecuencia; no hay cuantización sin condiciones frontera. Ya que las condiciones frontera se presentan con tanta frecuencia para las ondas, para la explicación que sigue se identifica un modelo de análisis llamado **modelo de ondas bajo condiciones de frontera**.

Los modos de oscilación normales para la cuerda de la figura 18.9 se describen al imponer las condiciones frontera de que los extremos sean nodos y que los nodos y antinodos estén separados por un cuarto de longitud de onda. El primer modo normal que es consistente con estos requisitos, que se muestra en la figura 18.10a, tiene nodos en sus extremos y un antinodo en medio: es el modo de longitud de onda más larga que es consistente con las condiciones frontera. El primer modo normal se presenta cuando la longitud de onda λ_1 es igual al doble de la longitud de la cuerda, o $\lambda_1 = 2L$. La sección de una onda estacionaria de un nodo al siguiente se llama *bucle*. En el primer modo normal, la cuerda vibra en un bucle. En el segundo modo normal (véase la figura 18.10b), la cuerda vibra en dos bucles. En este caso, la longitud de onda λ_2 es igual a la longitud de la cuerda, como se expresa por $\lambda_2 = L$. El tercer modo normal (véase la figura 18.10c) corresponde al caso en que $\lambda_3 = 2L/3$ y la cuerda vibra en tres bucles. En general, las longitudes de onda de los diferentes modos normales para una cuerda de longitud L fija en ambos extremos son

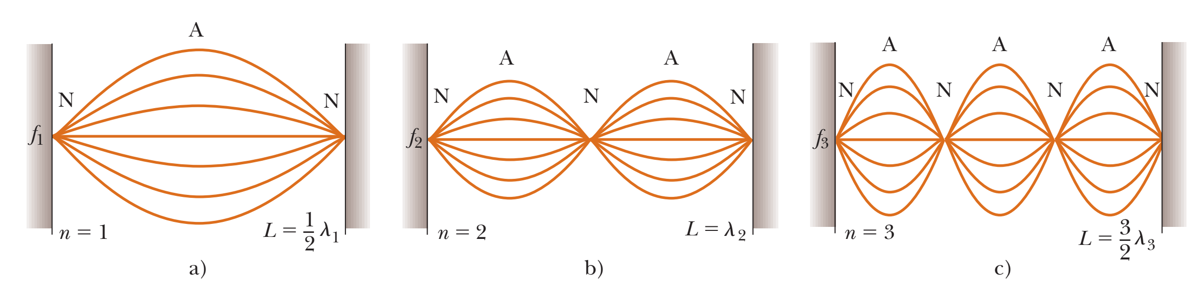


Figura 18.10 Los modos normales de vibración de la cuerda de la figura 18.9 forman una serie armónica: a) la fundamental, o primer armónico; b) el segundo armónico; c) el tercer armónico.

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.4}$$

◀ Longitudes de onda de modos normales

donde el índice n se refiere al n–ésimo modo normal de oscilación. Estos nodos son los modos *posibles* de oscilación de la cuerda. Se discuten brevemente los modos *reales* que se excitan en una cuerda.

Las frecuencias naturales asociadas con los modos de oscilación se obtienen de la relación $f = v/\lambda$, donde la rapidez de onda v es la misma para todas las frecuencias. Al usar la ecuación 18.4 se encuentra que las frecuencias naturales f_n de los modos normales son

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.5}$$

◀ Frecuencias de modos normales como funciones de la rapidez de onda y la longitud de la cuerda

Estas frecuencias naturales también se llaman *frecuencias cuantizadas* asociadas con la cuerda oscilante fija en ambos extremos.

Ya que $v = \sqrt{T/\mu}$ (véase la ecuación 16.18) para ondas en una cuerda, donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal, también se expresan las frecuencias naturales de una cuerda tensa como

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.6}$$

◀ Frecuencia de modos normales como funciones de la tensión en la cuerda y la densidad de masa lineal

La frecuencia más baja de todas, f_1, que corresponde a $n = 1$, se llama **fundamental** o **frecuencia fundamental** y se conoce por

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{18.7}$$

◀ Frecuencia fundamental de una cuerda tensa

Las frecuencias de los modos restantes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Las frecuencias de los modos normales que exhiben una correspondencia de múltiplo entero como ésta forman una **serie armónica**, y los modos normales se llaman **armónicos**. La frecuencia fundamental f_1 es la frecuencia del primer armónico, la frecuencia $f_2 = 2f_1$ es la frecuencia del segundo armónico y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia del n–ésimo armónico. Otros sistemas oscilatorios, como un parche de tambor, muestran modos normales, pero las frecuencias no se relacionan como múltiplos enteros de una fundamental (véase la sección 18.6). Por lo tanto, no se usa el término *armónico* en asociación con estos tipos de sistemas.

Examine un poco más cómo se crean en una cuerda los diferentes armónicos. Para excitar únicamente un solo armónico, la cuerda se debe distorsionar en una forma que corresponda a la del armónico deseado. Después de liberarse, la cuerda vibra a la frecuencia de dicho armónico. Sin embargo, esta maniobra es difícil de realizar y no es como se excita la cuerda de un instrumento musical. Si la cuerda se distorsiona de tal modo que su forma no sea sólo de un armónico, la vibración resultante incluye una combinación de diferentes armónicos. Tal distorsión se presenta en instrumentos musicales cuando la cuerda se puntea (como en una guitarra), se arquea (como en un chelo) o se golpea (como en un piano). Cuando la cuerda se distorsiona en una forma no sinusoidal, sólo las ondas que satisfacen las condiciones de frontera pueden persistir en la cuerda. Estas ondas son los armónicos.

La frecuencia de una cuerda que define la nota musical que se toca es la fundamental. La frecuencia de la cuerda se varía al cambiar la tensión de la cuerda o su longitud. Por ejemplo, la tensión en las cuerdas de guitarra y violín se varía mediante un mecanismo de ajuste de tornillo o clavijas de afinación ubicadas en el diapasón del instrumento. A medida que aumenta la tensión, la frecuencia de los modos normales aumenta en concordancia con la ecuación 18.6. Una vez que el instrumento se "afina", los intérpretes varían la frecuencia al mover sus dedos a lo largo del diapasón, lo que por tanto cambia la longitud de la porción oscilatoria de la cuerda. A medida que la longitud se acorta, la frecuencia aumenta porque, como especifica la ecuación 18.6, las frecuencias de modo normal son inversamente proporcionales a la longitud de la cuerda.

Pregunta rápida 18.3 Cuando una onda estacionaria se establece en una cuerda fija en ambos extremos, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? a) El número de nodos es igual al número de antinodos. b) La longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda dividida por un entero. c) La frecuencia es igual al número de nodos por la frecuencia fundamental. d) La forma de la cuerda en cualquier instante muestra una simetría en torno al punto medio de la cuerda.

EJEMPLO 18.3 ¡Dame un Do!

El Do medio en un piano tiene una frecuencia fundamental de 262 Hz, y la primera La sobre el Do medio tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

A) Calcule las frecuencias de los siguientes dos armónicos de la cuerda Do.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que los armónicos de una cuerda oscilante tienen frecuencias que se relacionan mediante múltiplos enteros de la fundamental.

Categorizar Esta primera parte del ejemplo es un simple problema de sustitución.

Al saber que la frecuencia fundamental es $f_1 = 262$ Hz, encuentre las frecuencias de los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = 524 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 786 \text{ Hz}$$

B) Si las cuerdas La y Do tienen la misma densidad de masa lineal μ y longitud L, determine la relación de tensiones en las dos cuerdas.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del ejemplo es más un problema de análisis que el inciso A).

Analizar Use la ecuación 18.7 para escribir expresiones para las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas:

$$f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad \text{y} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda y resuelva para la relación de tensiones:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440}{262}\right)^2 = 2.82$$

Finalizar Si las frecuencias de las cuerdas de piano estuvieran determinadas exclusivamente por la tensión, este resultado sugiere que la relación de tensiones de la cuerda más baja a la cuerda más alta en el piano sería enorme. Tales tensiones tan grandes harían difícil diseñar un marco para sostener las cuerdas. En realidad, las frecuencias de las cuerdas de piano varían debido a parámetros adicionales, incluidas la masa por unidad de longitud y la longitud de la cuerda. El siguiente **¿Qué pasaría si?** explora una variación de longitud.

¿Qué pasaría si? Si usted observa el interior de un piano real, verá que la suposición hecha en el inciso B) sólo es parcialmente verdadera. Es probable que las cuerdas no tengan la misma longitud. Las densidades de las cuerdas son iguales, pero suponga que la longitud de la cuerda la sólo es 64% de la longitud de la cuerda Do. ¿Cuál esa la relación de sus tensiones?

Respuesta Una vez más con la ecuación 18.7 se establece la relación de frecuencias:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \frac{L_C}{L_A}\sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{L_A}{L_C}\right)^2\left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2$$

$$\frac{T_A}{T_C} = (0.64)^2\left(\frac{440}{262}\right)^2 = 1.16$$

Advierta que este resultado sólo representa 16% de aumento en tensión, comparado con 182% de aumento en el inciso B).

EJEMPLO 18.4 Cambio en la vibración de una cuerda con agua

Un extremo de una cuerda horizontal se amarra a una varilla oscilante y el otro extremo pasa sobre una polea, como en la figura 18.11a. Una esfera de 2.00 kg de masa cuelga en el extremo de la cuerda. La cuerda oscila en su segundo armónico. Un contenedor de agua se eleva bajo la esfera de modo que ésta se sumerge por completo. En esta configuración, la cuerda vibra en su quinto armónico, como se muestra en la figura 18.11b. ¿Cuál es el radio de la esfera?

a)

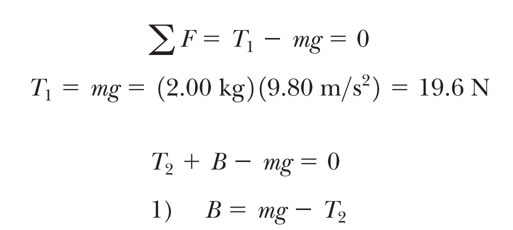
b)

Figura 18.11 (Ejemplo 18.4) a) Cuando la esfera cuelga en aire, la cuerda vibra en su segundo armónico. b) Cuando la esfera se sumerge en agua, la cuerda vibra en su quinto armónico.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede cuando la esfera se sumerge en el agua. La fuerza de flotación actúa hacia arriba sobre la esfera, lo que reduce la tensión en la cuerda. El cambio en tensión causa un cambio en la rapidez de las ondas sobre la cuerda, que a su vez ocasiona un cambio en la longitud de onda. Esta longitud de onda alterada produce que la cuerda vibre en su quinto modo normal en lugar de hacerlo en el segundo.

Categorizar La esfera colgante se modela como una partícula en equilibrio. Una de las fuerzas que actúan en ella es la fuerza de flotación del agua. También se aplica el modelo de ondas bajo condiciones de frontera a la cuerda.



Analizar Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 18.11a e identifique T_1 como la tensión en la cuerda mientras la esfera cuelga en aire:

$$\sum F = T_1 - mg = 0$$

$$T_1 = mg = (2.00\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 19.6\text{ N}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 18.11b, donde T_2 es la tensión en la cuerda mientras la esfera se sumerge en agua:

$$T_2 + B - mg = 0$$

$$1)\quad B = mg - T_2$$

La cantidad deseada, el radio de la esfera, aparecerá en la expresión para la fuerza de flotación B. No obstante, antes de proceder en esta dirección, debe evaluar T_2 a partir de la información acerca de la onda estacionaria.

Escriba la ecuación para la frecuencia de una onda estacionaria sobre una cuerda (ecuación 18.6) dos veces, una vez antes de que la esfera se sumerja y otra después. Note que la frecuencia f es la misma en ambos casos porque está determinada por la varilla oscilante. Además, la densidad de masa lineal μ y la longitud L de la porción oscilante de la cuerda son las mismas en ambos casos. Divida las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f &= \frac{n_1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} \\ f &= \frac{n_2}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Resuelva para T_2:

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 (19.6\text{ N}) = 3.14\text{ N}$$

Sustituya este resultado en la ecuación 1):

$$B = mg - T_2 = 19.6\text{ N} - 3.14\text{ N} = 16.5\text{ N}$$

Con la ecuación 14.5, exprese la fuerza de flotación en términos del radio de la esfera:

$$B = \rho_{\text{agua}}\, gV_{\text{esfera}} = \rho_{\text{agua}}\, g\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Resuelva para el radio de la esfera:

$$r = \left(\frac{3B}{4\pi\rho_{\text{agua}}\, g}\right)^{1/3} = \left(\frac{3(16.5\text{ N})}{4\pi(1\,000\text{ kg/m}^3)(9.80\text{ m/s}^2)}\right)^{1/3}$$

$$= 7.38 \times 10^{-2}\text{ m} = \boxed{7.38\text{ cm}}$$

Finalizar Note que sólo ciertos radios de la esfera resultarán en que la cuerda vibre en un modo normal; la rapidez de las ondas en la cuerda debe cambiar a un valor tal que la longitud de la cuerda sea un múltiplo entero de medias longitudes de onda. Esta limitación es una característica de la *cuantización* que se introdujo en este capítulo: los radios de la esfera que hacen vibrar la cuerda en un modo normal están *cuantizados*.

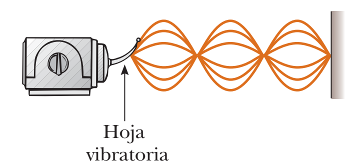


Figura 18.12 En una cuerda se establecen ondas estacionarias cuando un extremo se conecta a una hoja oscilante. Cuando la hoja vibra a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se crean ondas estacionarias de gran amplitud.

18.4 Resonancia

Se vio que un sistema como una cuerda tensa es capaz de oscilar en uno o más modos de oscilación normales. **Si una fuerza periódica se aplica a tal sistema, la amplitud del movimiento resultante es mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema.** Este fenómeno, conocido como *resonancia*, se discutió en la sección 15.7. Aunque un sistema bloque–resorte o un péndulo simple sólo tienen una frecuencia natural, los sistemas de onda estacionaria tienen todo un conjunto de frecuencias naturales, como las dadas por la ecuación 18.6 para una cuerda. Ya que un sistema en oscilación muestra una gran amplitud cuando se activa a cualquiera de sus frecuencias naturales, a estas frecuencias por lo general se les refiere como **frecuencias de resonancia**.

Considere una cuerda tensa fija en un extremo y conectada en el extremo opuesto a una hoja oscilante, como se muestra en la figura 18.12. El extremo fijo es un nodo, y el extremo conectado a la hoja es casi un nodo porque la amplitud del movimiento de la hoja es pequeña en comparación con el de los elementos de la cuerda. A medida que la hoja oscila, las ondas transversales que envía por la cuerda se reflejan desde el extremo fijo. Como aprendió en la sección 18.3, la cuerda tiene frecuencias naturales que están determinadas por su longitud, tensión y densidad de masa lineal (véase la ecuación 18.6). Cuando la frecuencia de la hoja es igual a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se producen ondas estacionarias y la cuerda oscila con una gran amplitud. En este caso de resonancia, la onda generada por la hoja oscilante está en fase con la onda reflejada y la cuerda absorbe energía de la varilla. Si la cuerda es impulsada a una frecuencia que no es una de sus frecuencias naturales, las oscilaciones son de baja amplitud y no muestran un patrón estable.

La resonancia es muy importante en la excitación de los instrumentos musicales en función de columnas de aire. Esta aplicación de la resonancia se explicará en la sección 18.5.

18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

El modelo de ondas bajo condiciones frontera también se aplica a ondas sonoras en una columna de aire como la que se encuentra en el interior de un órgano de tubos. Las ondas estacionarias son resultado de la interferencia entre ondas sonoras longitudinales que viajan en direcciones opuestas.

En un tubo cerrado en un extremo, **dicho extremo es un nodo de desplazamiento porque la barrera rígida en este extremo no permite el movimiento longitudinal del aire**. Ya que la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento (véase la sección 17.2), el **extremo cerrado de una columna de aire corresponde a un antinodo de presión** (es decir, un punto de máxima variación de presión).

El extremo abierto de una columna de aire es aproximadamente un antinodo de desplazamiento[1] y un nodo de presión. Se puede entender por qué no se presenta variación de presión en un extremo abierto al notar que el extremo de la columna de aire está abierto a la atmósfera; por lo tanto, la presión en este extremo debe permanecer constante a presión atmosférica.

Acaso se pregunte cómo una onda sonora se refleja de un extremo abierto, porque al parecer no ha habido cambio en el medio en este punto: el medio a través del que se mueve la onda sonora es aire, tanto dentro como fuera del tubo. Sin embargo, el sonido es una onda de presión, y una región de compresión de la onda sonora está restringida por los lados del tubo en tanto la región esté dentro del tubo. A medida que la región de compresión sale en el extremo abierto del tubo, la restricción del tubo se retira y el aire comprimido es libre de expandirse en la atmósfera. En consecuencia, hay un cambio en el *distintivo* del medio entre el interior del tubo y el exterior, aun cuando no haya cambio en el *material* del medio. Este cambio en distintivo es suficiente para permitir cierta reflexión.

[1] En sentido estricto, el extremo abierto de una columna de aire no es exactamente un antinodo de desplazamiento. Alcanzar una compresión en el extremo abierto no se refleja hasta que pasa más allá del extremo. A la longitud de la columna de aire para un tubo de sección transversal circular, se debe agregar una corrección terminal aproximadamente igual a $0.6R$, donde R es el radio del tubo. Por eso, la longitud efectiva de la columna de aire es un poco mayor que la verdadera longitud L. En esta explicación se ignora esta corrección terminal.

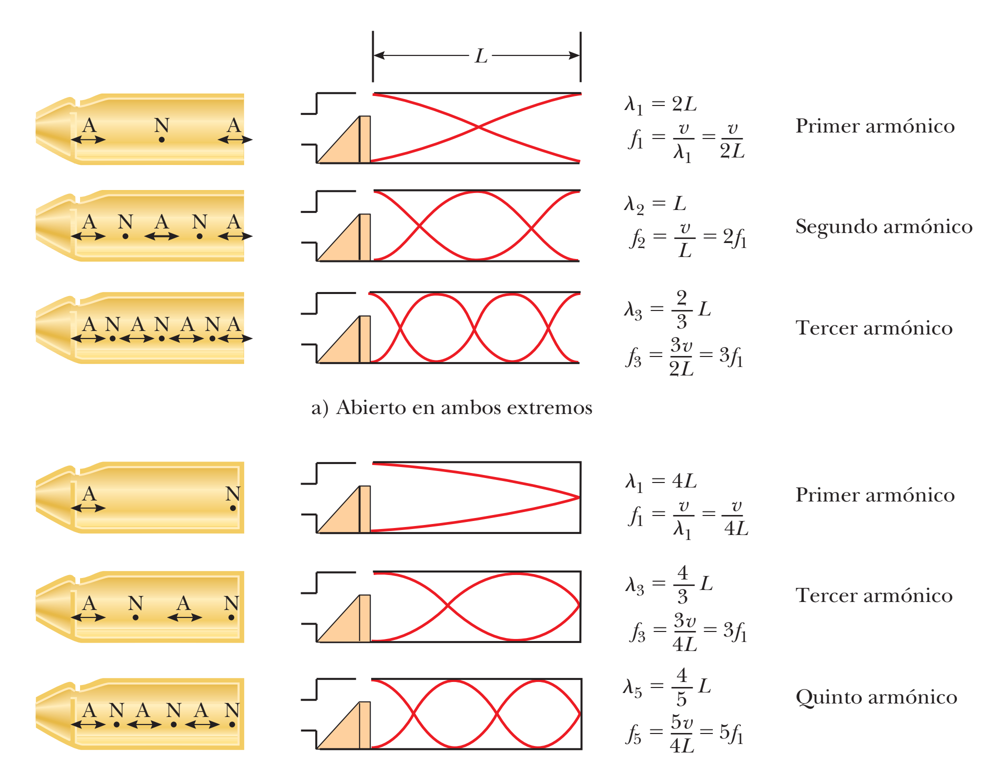


Figura 18.13 Movimiento de elementos de aire en ondas longitudinales estacionarias en un tubo, junto con representaciones esquemáticas de las ondas. En las representaciones esquemáticas, la estructura en el extremo izquierdo tiene el propósito de excitar la columna de aire en un modo normal. El hoyo en el borde superior de la columna asegura que el extremo izquierdo actúa como un extremo abierto. Las gráficas representan las amplitudes de desplazamiento, no las amplitudes de presión. a) En un tubo abierto en ambos extremos, la serie armónica creada consiste de todos los múltiples enteros de la frecuencia fundamental: f_1, $2f_1$, $3f_1$, . . . b) En un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro, la serie armónica creada consiste sólo de múltiplos de entero impar de la frecuencia fundamental: f_1, $3f_1$, $5f_1$, . . .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.3

Las ondas sonoras en el aire son longitudinales, no transversales

En la figura 18.13 las ondas longitudinales estacionarias se dibujan como ondas transversales. Ya que están en la misma dirección que la propagación, es difícil dibujar desplazamientos longitudinales. Por lo tanto, es mejor interpretar las curvas rojas de la figura 18.13 como una representación gráfica de las ondas (los diagramas de ondas en cuerda son representaciones gráficas), con el eje vertical que representa desplazamiento horizontal de los elementos del medio.

Con las condiciones frontera de nodos o antinodos en los extremos de la columna de aire, se tiene un conjunto de modos normales de oscilación, como es el caso para la cuerda fija en ambos extremos. Por lo tanto, la columna de aire tiene frecuencias cuantizadas.

En la figura 18.13a se muestran los primeros tres modos normales de oscilación de un tubo abierto en ambos extremos. Note que ambos extremos son antinodos de desplazamiento (aproximadamente). En el primer modo normal, la onda estacionaria se extiende entre dos antinodos adyacentes, que es una distancia de media longitud de onda. En consecuencia, la longitud de onda tiene el doble de largo que el tubo, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/2L$. Como muestra la figura 18.13a, las frecuencias de los armónicos superiores son $2f_1$, $3f_1$, . . .

> En un tubo abierto en ambos extremos, las frecuencias naturales de oscilación forman una serie armónica que incluye todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Ya que todos los armónicos están presentes y porque la frecuencia fundamental se conoce por la misma expresión que en la cuerda (véase la ecuación 18.5), las frecuencias de oscilación naturales se expresan como

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(18.8)}$$

◀ Frecuencias naturales de un tubo abierto en ambos extremos

A pesar de la similitud con las ecuaciones 18.5 y 18.8, debe recordar que v en la ecuación 18.5 es la rapidez de las ondas en la cuerda, mientras que v en la ecuación 18.8 es la rapidez del sonido en el aire.

Si un tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro, el extremo cerrado es un nodo de desplazamiento (véase la figura 18.13b). En este caso, la onda estacionaria para el modo fundamental se extiende desde un antinodo hasta el nodo adyacente, que es un cuarto de una longitud de onda. Por tanto, la longitud de onda para el primer modo normal es $4L$, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/4L$. Como muestra la figura 18.13b, las ondas de frecuencia más alta que satisfacen las condiciones son aquellas que tienen un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto; en consecuencia, los armónicos superiores tienen frecuencias $3f_1$, $5f_1$, . . .

> En un tubo cerrado en un extremo, las frecuencias de oscilación naturales forman una serie armónica que incluye sólo múltiplos enteros impares de la frecuencia fundamental.

Este resultado se expresa matemáticamente como

Frecuencias naturales de un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro ▶



$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \textbf{(18.9)}$$

Es interesante investigar qué sucede con las frecuencias de los instrumentos en función de columnas de aire y cuerdas durante un concierto mientras sube la temperatura. Por ejemplo, el sonido emitido por una flauta se vuelve más agudo (eleva su frecuencia) ya que ésta se calienta porque la rapidez del sonido aumenta en el aire cada vez más caliente en su interior (considere la ecuación 18.8). El sonido producido por un violín se vuelve plano (disminuye en frecuencia) a medida que las cuerdas se expanden térmicamente porque la expansión hace que su tensión disminuya (véase la ecuación 18.6).

Los instrumentos musicales en función de columnas de aire por lo general se excitan mediante resonancia. La columna de aire recibe una onda sonora que es rica en muchas frecuencias. En tal caso la columna de aire responde con una oscilación de mayor amplitud a las frecuencias que coinciden con las frecuencias cuantizadas en su conjunto de armónicos. En muchos instrumentos de viento hechos con madera, el rico sonido inicial lo proporciona una lengüeta que vibra. En los instrumentos metálicos, dicha excitación la proporciona el sonido proveniente de la vibración de los labios del intérprete. En una flauta, la excitación inicial proviene de soplar sobre un borde en la boca del instrumento, en forma similar a soplar a través de la abertura de una botella con un cuello estrecho. El sonido del aire que corre a través del borde tiene muchas frecuencias, incluida una que pone en resonancia la cavidad de aire en la botella.

Pregunta rápida 18.4 Un tubo abierto en ambos extremos resuena a una frecuencia fundamental f_{abierto}. Cuando un extremo se cubre y de nuevo se hace resonar el tubo, la frecuencia fundamental es f_{cerrado}. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe cómo se comparan estas dos frecuencias resonantes? a) $f_{\text{cerrado}} = f_{\text{abierto}}$, b) $f_{\text{cerrado}} = \frac{1}{2}f_{\text{abierto}}$, c) $f_{\text{cerrado}} = 2f_{\text{abierto}}$, d) $f_{\text{cerrado}} = \frac{3}{2}f_{\text{abierto}}$.

Pregunta rápida 18.5 El Parque Balboa en San Diego tiene un órgano abierto. Cuando la temperatura del aire aumenta, la frecuencia fundamental de uno de los tubos del órgano a) permanece igual, b) baja, c) sube, o d) es imposible de determinar.

EJEMPLO 18.5 **Viento en una alcantarilla**

Una sección de alcantarillas de drenaje de 1.23 m de largo hace un ruido de aullido cuando el viento sopla a través de sus extremos abiertos.

A) Determine las frecuencias de los primeros tres armónicos de la alcantarilla si tiene forma cilíndrica y está abierto en ambos extremos. Considere $v = 343$ m/s como la rapidez del sonido en el aire.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sonido del viento que sopla a través del extremo del tubo contiene muchas frecuencias y la alcantarilla responde al sonido mediante vibración a las frecuencias naturales de la columna de aire.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Hallar la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire abierta en ambos extremos:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343\text{ m/s}}{2(1.23\text{ m})} = \boxed{139\text{ Hz}}$$

Encuentre los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = \boxed{278\text{ Hz}}$$

$$f_3 = 3f_1 = \boxed{417\text{ Hz}}$$

B) ¿Cuáles son las tres frecuencias naturales más bajas de la alcantarilla si está bloqueada en un extremo?

SOLUCIÓN

Encuentre la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire cerrada en un extremo.

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343\text{ m/s}}{4(1.23\text{ m})} = \boxed{69.7\text{ Hz}}$$

Encuentre los siguientes dos armónicos al multiplicar por enteros impares:

$$f_3 = 3f_1 = \boxed{209\text{ Hz}}$$

$$f_5 = 5f_1 = \boxed{349\text{ Hz}}$$

EJEMPLO 18.6 Medición de la frecuencia de un diapasón

En la figura 18.14 se ilustra un aparato simple para demostrar la resonancia en columnas de aire. Un tubo vertical abierto en ambos extremos se sumerge parcialmente en agua y un diapasón oscilante con una frecuencia desconocida se coloca cerca de la parte superior del tubo. La longitud L de la columna de aire se ajusta al mover el tubo verticalmente. Las ondas sonoras generadas por el diapasón se refuerzan cuando L corresponde a una de las frecuencias de resonancia del tubo. Para cierto tubo, el valor más pequeño de L para el que se presenta un pico en la intensidad sonora es 9.00 cm.

Figura 18.14 (Ejemplo 18.6) a) Aparato para demostrar la resonancia de ondas sonoras en un tubo cerrado en un extremo. La longitud L de la columna de aire varía al mover el tubo verticalmente mientras se sumerge parcialmente en agua. b) Primeros tres modos normales del sistema que se muestra en a).

A) ¿Cuál es la frecuencia del diapasón?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere cómo difiere este problema del ejemplo anterior. En la alcantarilla, la longitud era fija y la columna de aire se presentó con una mezcla de muchas frecuencias. El tubo en este ejemplo aparece con una sola frecuencia del diapasón y la longitud del tubo varía hasta que se logra resonancia.

Categorizar Este ejemplo es un simple problema de sustitución. Aunque el tubo está abierto en su extremo inferior para permitir que entre agua, la superficie del agua actúa como una barrera. Por lo tanto, esta configuración se modela como una columna de aire cerrada en un extremo.

Use la ecuación 18.9 para hallar la frecuencia fundamental para $L = 0.090\ 0$ m:

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343\text{ m/s}}{4(0.090\ 0\text{ m})} = \boxed{953\text{ Hz}}$$

Ya que el diapasón hace que la columna de aire resuene a esta frecuencia, esta frecuencia también debe ser la del diapasón.

B) ¿Cuáles son los valores de L para las dos siguientes condiciones de resonancia?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 16.12 para encontrar la longitud de onda de la onda sonora del diapasón:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{953 \text{ Hz}} = 0.360 \text{ m}$$

Advierta de la figura 18.14b que la longitud de la columna de aire para la segunda resonancia es $3\lambda/4$:

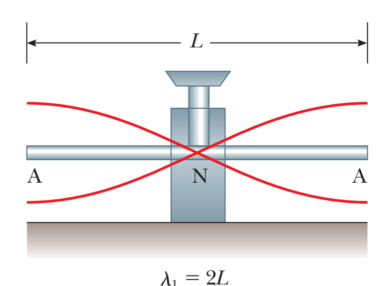
$$L = 3\lambda/4 = \boxed{0.270 \text{ m}}$$

Observe en la figura 18.14b que la longitud de la columna de aire para la tercera resonancia es $5\lambda/4$:

$$L = 5\lambda/4 = \boxed{0.450 \text{ m}}$$

18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

Las ondas estacionarias también se presentan en barras y membranas. Una barra sujeta en la parte media y que recibe un golpe, paralelo a la barra, en un extremo, oscila como se muestra en la figura 18.15a. Las oscilaciones de los elementos de la barra son longitudinales, y por eso las curvas rojas en la figura 18.15 representan desplazamientos *longitudinales* de diferentes partes de la barra. Para tener más claridad, los desplazamientos se dibujaron en la dirección transversal, como si fuesen columnas de aire. El punto medio es un nodo de desplazamiento porque está fijo por el tornillo de banco, mientras los extremos son antinodos de desplazamiento porque tienen libertad para oscilar. Las oscilaciones en este arreglo son análogas a las de un tubo abierto en ambos extremos. Las líneas rojas en la figura 18.15a representan el primer modo normal, para el que la longitud de onda es $2L$ y la frecuencia es $f = v/2L$, donde v es la rapidez de las ondas longitudinales en la barra. Otros modos normales se excitan al sujetar la barra en diferentes puntos. Por ejemplo, el segundo modo normal (figura 18.15b) se excita al sujetar la barra a una distancia $L/4$ desde un extremo.



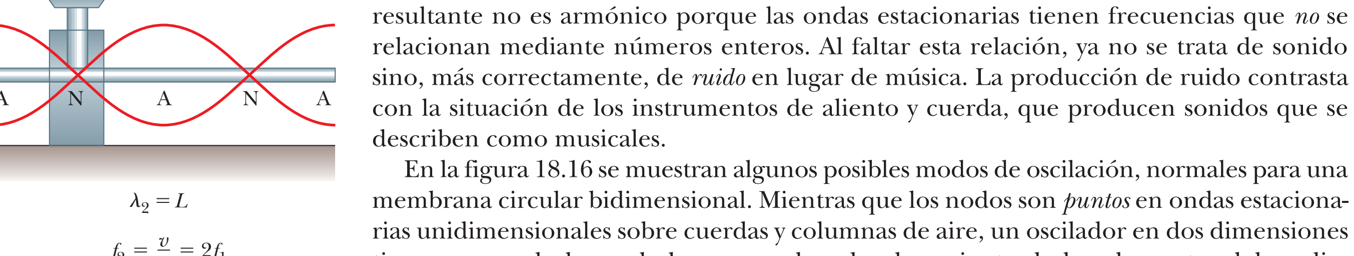
$\lambda_1 = 2L$

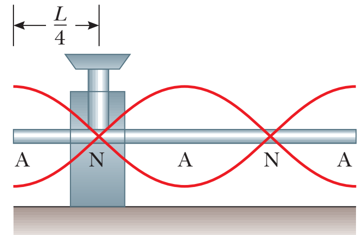
$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$

a)

También es posible establecer ondas estacionarias transversales en barras. Los instrumentos musicales que dependen de ondas estacionarias transversales en barras incluyen triángulos, marimbas, xilófonos, órgano de campanas, carillones y vibráfonos. Otros dispositivos que hacen sonidos de barras oscilantes incluyen las cajas musicales y los carillones de viento.

En una membrana flexible estirada sobre un aro circular, como la de un parche de tambor, se establecen oscilaciones bidimensionales. Mientras la membrana se golpea en algún punto, las ondas que llegan a la frontera fija se reflejan muchas veces. El sonido resultante no es armónico porque las ondas estacionarias tienen frecuencias que *no* se relacionan mediante números enteros. Al faltar esta relación, ya no se trata de sonido sino, más correctamente, de *ruido* en lugar de música. La producción de ruido contrasta con la situación de los instrumentos de aliento y cuerda, que producen sonidos que se describen como musicales.





$\lambda_2 = L$

$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$

b)

Figura 18.15 Vibraciones longitudinales de modo normal de una barra de longitud L a) sujeta en el punto medio para producir el primer modo normal y b) sujeta a una distancia $L/4$ desde un extremo para producir el segundo modo normal. Note que las curvas rojas representan oscilaciones paralelas a la barra (ondas longitudinales).

En la figura 18.16 se muestran algunos posibles modos de oscilación, normales para una membrana circular bidimensional. Mientras que los nodos son *puntos* en ondas estacionarias unidimensionales sobre cuerdas y columnas de aire, un oscilador en dos dimensiones tiene *curvas* a lo largo de las que no hay desplazamiento de los elementos del medio. El modo normal más bajo, que tiene una frecuencia f_1, sólo contiene una curva nodal; esta curva corre alrededor del borde exterior de la membrana. Los otros posibles modos normales muestran curvas nodales adicionales que son círculos y líneas rectas a través del diámetro de la membrana.

18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

El fenómeno de interferencia estudiado hasta el momento involucra la sobreposición de dos o más ondas que tienen la misma frecuencia. Ya que la amplitud de la oscilación de los elementos del medio varía con la posición en el espacio del elemento en tal onda, a

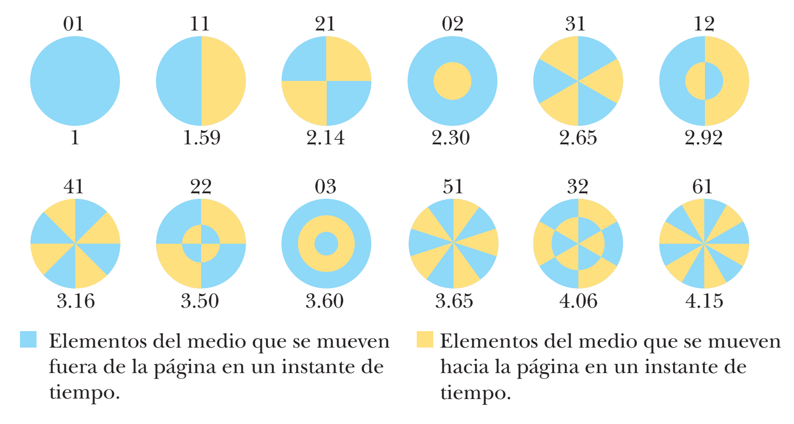


Figura 18.16 Representación de algunos de los posibles modos normales en una membrana circular fija en su perímetro. El par de números en cada patrón corresponde al número de nodos radiales y al número de nodos circulares, respectivamente. Bajo cada patrón hay un factor por el que la frecuencia del modo es mayor que la del modo 01. Las frecuencias de oscilación no forman una serie armónica porque dichos factores no son enteros. En cada diagrama, los elementos de la membrana en cualquier lado de una línea nodal se mueven en direcciones opuestas, como se indica por los colores. (Adaptado de T.D. Rossing, *La ciencia del sonido*, 2a. ed., Reading, Massachusetts, Addison–Wesley Publiching Co., 1990)

dicho fenómeno se le refiere como *interferencia espacial*. Las ondas estacionarias en cuerdas y tubos son ejemplos comunes de interferencia espacial.

Ahora considere otro tipo de interferencia, uno que resulta de la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente *diferentes*. En este caso, cuando las dos ondas se observan en un punto en el espacio, están periódicamente en y fuera de fase. Es decir: hay una alternación *temporal* (tiempo) entre interferencia constructiva y destructiva. Debido a este fenómeno se le refiere como *interferencia en el tiempo* o *interferencia temporal*. Por ejemplo, si se golpean dos diapasones de frecuencias ligeramente diferentes, uno escucha un sonido de amplitud periódicamente variable. Este fenómeno se llama **batimiento**.

El batimiento es la variación periódica en amplitud en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

◀ Definición de batimiento

El número de máximos de amplitud que uno escucha por segundo, o la *frecuencia de batimiento*, es igual a la diferencia en frecuencia entre las dos fuentes, como se demostrará a continuación. La máxima frecuencia de batimiento que detecta el oído humano es de aproximadamente 20 batimientos/s. Cuando la frecuencia de batimiento supera este valor, los batimientos se mezclan de manera indistinguible con los sonidos que los producen.

Considere dos ondas sonoras de igual amplitud que viajan a través de un medio con frecuencias ligeramente diferentes f_1 y f_2. Con ecuaciones similares a la ecuación 16.10 representan las funciones de onda para estas dos ondas en un punto que se elige de modo que $kx = \pi/2$:

$$y_1 = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) = A \cos\,(2\pi f_1 t)$$

$$y_2 = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t\right) = A \cos\,(2\pi f_2 t)$$

Al usar el principio de sobreposición, se encuentra que la función de onda resultante en este punto es

$$y = y_1 + y_2 = A\,(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

La identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

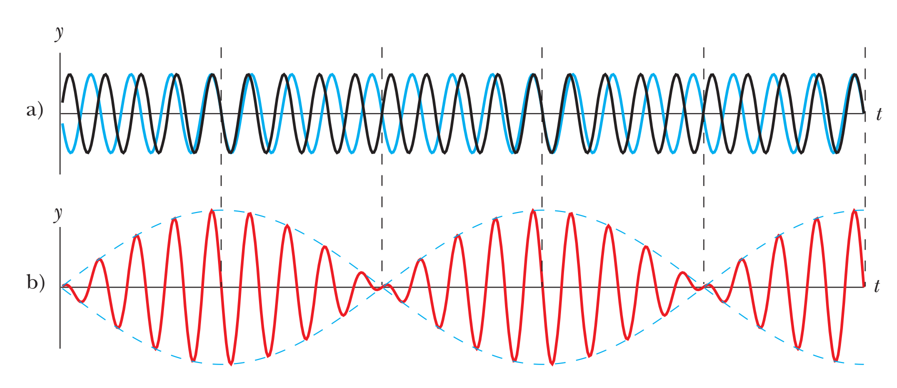


Figura 18.17 Los batimientos se forman por la combinación de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes. a) Ondas individuales. b) Onda combinada. La onda envolvente (línea discontinua) representa el batimiento de los sonidos combinados.

permite escribir la expresión para y como

Resultante de dos ondas de frecuencias diferentes pero igual amplitud ▶

$$y = \left[2A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \quad \textbf{(18.10)}$$

En la figura 18.17 se muestran gráficas de las ondas individuales y la onda resultante. A partir de los factores de la ecuación 18.10, se ve que la onda resultante tiene una frecuencia efectiva igual a la frecuencia promedio $(f_1 + f_2)/2$. Esta onda se multiplica por una onda envolvente conocida por la expresión entre corchetes:

$$y_{\text{envolvente}} = 2A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \quad \textbf{(18.11)}$$

Es decir: la **amplitud y por lo tanto la intensidad del sonido resultante varía en el tiempo**. La línea azul discontinua en la figura 18.17b es una representación gráfica de la onda envolvente en la ecuación 18.11 y es una onda seno que varía con frecuencia $(f_1 - f_2)/2$.

En la onda sonora resultante se detecta un máximo en la amplitud siempre que

$$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \pm 1$$

Por tanto, existen *dos* máximos en cada periodo de la onda envolvente. Ya que la amplitud varía con la frecuencia como $(f_1 - f_2)/2$, el número de batimientos por segundo, o la frecuencia de batimiento $f_{\text{batimiento}}$, es el doble de este valor. Es decir,

Frecuencia de batimiento ▶

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \quad \textbf{(18.12)}$$

Por ejemplo, si un diapasón vibra a 438 Hz y un segundo después vibra a 442 Hz, la onda sonora resultante de la combinación tiene una frecuencia de 440 Hz (la nota musical La) y una frecuencia de batimiento de 4 Hz. Un escucha oiría una onda sonora de 440 Hz que pasaría por un máximo de intensidad cuatro veces cada segundo.

EJEMPLO 18.7 Las cuerdas de piano desafinadas

Dos cuerdas de piano idénticas, de 0.750 m de longitud, se afinan cada una exactamente a 440 Hz. La tensión en una de las cuerdas después aumenta en 1.0%. Si ahora se golpean, ¿cuál es la frecuencia de batimiento entre las fundamentales de las dos cuerdas?

SOLUCIÓN

Categorizar A medida que la tensión en una de las cuerdas cambia, su frecuencia fundamental cambia. Por lo tanto, cuando ambas cuerdas se tocan, tendrán diferentes frecuencias y se escucharán batimientos.

Categorizar Se debe combinar la interpretación del modelo de las ondas bajo condiciones frontera para cuerdas con el reciente conocimiento de los batimientos.

Analizar Establezca una relación de las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas con la ecuación 18.5:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(v_2/2L)}{(v_1/2L)} = \frac{v_2}{v_1}$$

Aplique la ecuación 16.18 para sustituir las magnitudes de velocidad de onda en las cuerdas:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{T_2/\mu}}{\sqrt{T_1/\mu}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Incorpore que la tensión en una cuerda es 1.0% mayor que la otra; es decir, $T_2 = 1.010t_1$:

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{1.010\,T_1}{T_1}} = 1.005$$

Resuelva para la frecuencia de la cuerda tensada:

$$f_2 = 1.005f_1 = 1.005(440\text{ Hz}) = 442\text{ Hz}$$

Encuentre la frecuencia de batimiento con la ecuación 18.12:

$$f_{\text{batimiento}} = 442\text{ Hz} - 440\text{ Hz} = 2\text{ Hz}$$

Finalizar Advierta que una desafinación de 1.0% en la tensión conduce a una frecuencia de batimiento fácilmente audible de 2 Hz. Un afinador de piano puede usar batimientos para afinar un instrumento de cuerda al "batir" una nota contra un tono de referencia de frecuencia conocida. Después el afinador puede ajustar la tensión de la cuerda hasta que la frecuencia del sonido que emite sea igual a la frecuencia del tono de referencia. El afinador lo hace al apretar o aflojar la cuerda hasta que los batimientos producidos por ella y la fuente de referencia se vuelven prácticamente imposibles de notar.

18.8 Patrones de ondas no sinusoidales

Es sencillo distinguir los sonidos que surgen de un violín y un saxofón, aun cuando ambos ejecuten la misma nota. Por otra parte, una persona no entrenada en música tendrá dificultades para distinguir una nota tocada en un clarinete de la misma nota tocada en un oboe. Se puede usar el patrón de las ondas sonoras de diferentes fuentes para explicar estos efectos.

Cuando las frecuencias que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental se combinan para hacer un sonido, el resultado es un sonido *musical*. Un escucha puede asignar un tono al sonido de acuerdo con la frecuencia fundamental. El tono es una reacción psicológica a un sonido que permite al escucha colocar el sonido en una escala de bajo a alto (grave a agudo). Las combinaciones de las frecuencias que no son múltiplos enteros de una fundamental resultan en un *ruido* en lugar de un sonido musical. Es mucho más difícil para un escucha asignar un tono a un ruido que a un sonido musical.

Los patrones de onda producidos por un instrumento musical son el resultado de la sobreposición de frecuencias que son múltiplos enteros de una fundamental. Esta sobreposición resulta en la correspondiente riqueza de tonos musicales. La respuesta perceptiva humana asociada con diferentes mezclas de armónicos es la *calidad* o *timbre* del sonido. Por ejemplo, el sonido de la trompeta se percibe con una calidad "chillona" (se aprendió a asociar el adjetivo *chillón* con dicho sonido); esta calidad permite distinguir el sonido de la trompeta del propio del saxofón, cuya calidad se percibe como "alengüetada". Sin embargo, el clarinete y el oboe contienen columnas de aire excitadas por lengüetas; debido a esta similitud, tienen mezclas de frecuencias similares y es más difícil para el oído humano distinguirlas sobre la base de su calidad sonora.

Los patrones de onda sonora producidos por la mayoría de los instrumentos musicales son no sinusoidales. En la figura 18.18, se muestran los patrones característicos producidos por un diapasón, una flauta y un clarinete, cada uno tocando la misma nota. Cada instrumento tiene su propio patrón característico. Sin embargo, note que a pesar de las

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.4

Tono contra frecuencia

No confunda el término *tono* con *frecuencia*. La frecuencia es la medición física del número de oscilaciones por segundo. El tono es una reacción psicológica al sonido que permite a una persona colocar el sonido en una escala de alto a bajo o de agudo a grave. Por tanto, la frecuencia es el estímulo y el tono es la respuesta. Aunque el tono se relaciona principalmente (pero no por completo) con la frecuencia, no son lo mismo. Una frase como "el tono del sonido" es incorrecta, porque el tono no es una propiedad física del sonido.

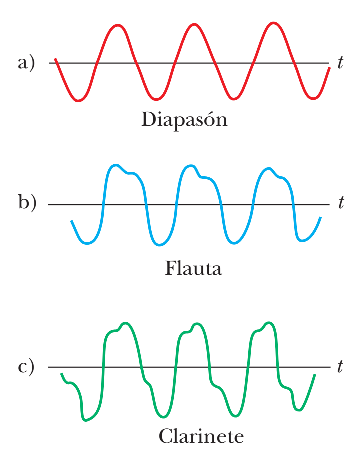


Figura 18.18 Patrones de onda sonora producidos por a) un diapasón, b) una flauta y c) un clarinete, cada uno aproximadamente a la misma frecuencia.

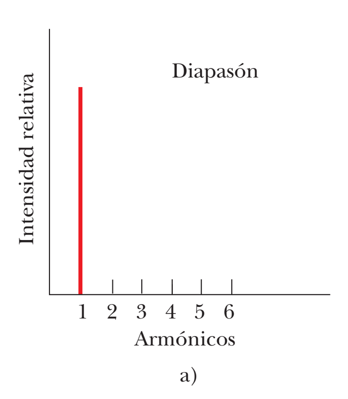
diferencias en los patrones, cada patrón es periódico. Este punto es importante para el análisis de estas ondas.

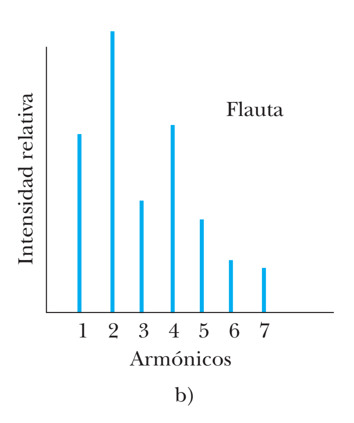
El problema de analizar patrones de onda no sinusoidales aparece a primera vista como una tarea formidable. Sin embargo, si el patrón de onda es periódico, **se puede representar tan cercano como se desee mediante la combinación de un número suficientemente grande de ondas sinusoidales que formen una serie armónica**. De hecho, cualquier función periódica se representa como una serie de términos seno y coseno con el uso de una técnica matemática en términos del **teorema de Fourier**.[2] La correspondiente suma de términos que representan el patrón de onda periódica se llama **serie de Fourier**. Sea $y(t)$ cualquier función periódica en el tiempo con un periodo T tal que $y(t + T) = y(t)$. El teorema de Fourier afirma que esta función se puede escribir como

Teorema de Fourier ▶

$$y(t) = \sum (A_n \operatorname{sen} 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t) \qquad \textbf{(18.13)}$$

donde la frecuencia más baja es $f_1 = 1/T$. Las frecuencias más altas son múltiplos enteros de la fundamental, $f_n = nf_1$, y los coeficientes A_n y B_n representan las amplitudes de las diferentes ondas. La figura 18.19 representa un análisis armónico de los patrones de onda que se muestran en la figura 18.18. Cada barra en la gráfica representa uno de los términos en la serie en la ecuación 18.13. Advierta que un diapasón golpeado sólo pro-





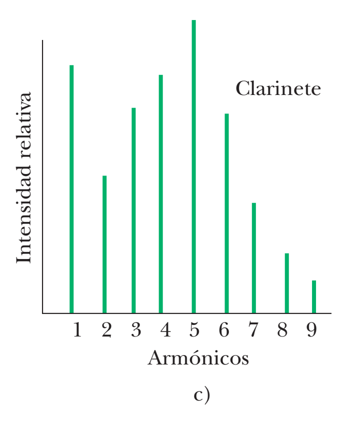


Figura 18.19 Armónicos de los patrones de onda que se muestran en la figura 18.18. Note las variaciones en intensidad de los diferentes armónicos. Los incisos a), b) y c) corresponden a los de la figura 18.18.

[2] Desarrollada por Jean Baptiste Joseph Fourier (1786–1830).

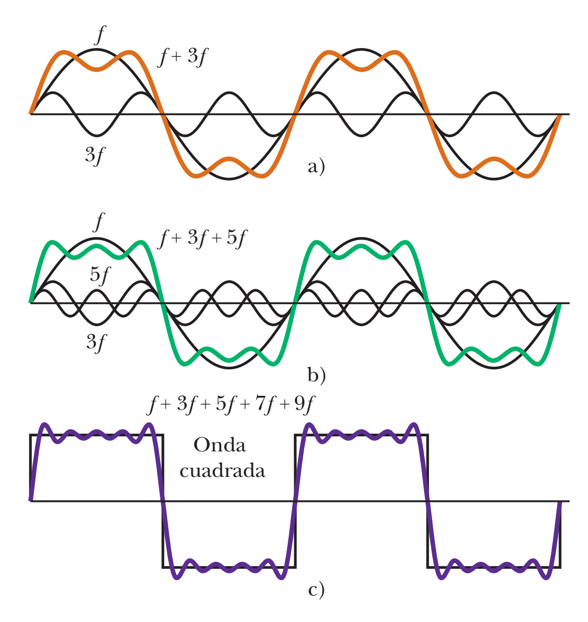


Figura 18.20 Síntesis de Fourier de una onda cuadrada, que se representa mediante la suma de múltiplos impares del primer armónico, que tiene frecuencia f. a) Se suman ondas de frecuencia f y $3f$. b) Se agrega un armónico impar más de frecuencia $5f$. c) La curva de síntesis se aproxima más a la onda cuadrada cuando se suman las frecuencias impares hasta $9f$.

duce un armónico (el primero), mientras que la flauta y el clarinete producen el primer armónico y muchos superiores.

Note la variación en intensidad relativa de los diferentes armónicos para la flauta y el clarinete. En general, cualquier sonido musical consiste de una frecuencia fundamental f más otras frecuencias que son múltiplos enteros de f y todos tienen diferentes intensidades.

Se explicó el *análisis* de un patrón de onda con el uso del teorema de Fourier. El análisis implica la determinación de los coeficientes de los armónicos en la ecuación 18.13 a partir de un conocimiento del patrón de onda. El proceso inverso, llamado *síntesis de Fourier,* también se puede realizar. En este proceso, los diversos armónicos se suman para formar un patrón de onda resultante. Como ejemplo de la síntesis de Fourier, considere la construcción de una onda cuadrada, como se muestra en la figura 18.20. La simetría de la onda cuadrada sólo resulta en múltiplos impares de la frecuencia fundamental que se combina en su síntesis. En la figura 18.20a, la curva anaranjada muestra la combinación de f y $3f$. En la figura 18.20b, se sumó $5f$ a la combinación y se obtuvo la curva verde. Note cómo se aproxima la forma general de la onda cuadrada, aun cuando las porciones superior e inferior no son planas como debieran.

La figura 18.20c muestra el resultado de sumar frecuencias impares hasta $9f$. Esta aproximación (curva púrpura) a la onda cuadrada es mejor que las aproximaciones en las figuras 18.20a y 18.20b. Para aproximar la onda cuadrada tan cerca como sea posible, se deben sumar todos los múltiplos impares de la frecuencia fundamental, hasta la frecuencia infinita.

Con el uso de tecnología moderna, los sonidos musicales se pueden generar electrónicamente al mezclar diferentes amplitudes de cualquier número de armónicos. Estos sintetizadores musicales electrónicos ampliamente usados son capaces de producir una variedad infinita de tonos musicales.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El **principio de sobreposición** especifica que, cuando dos o más ondas se mueven a través de un medio, el valor de la función de onda resultante es igual a la suma algebraica de los valores de las funciones de onda individuales.

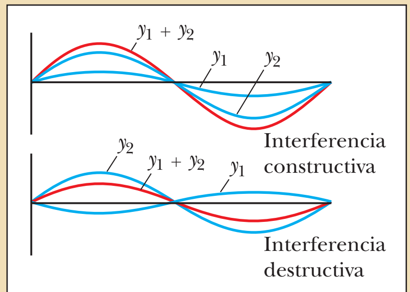
El fenómeno de **batimiento** es la variación periódica en intensidad en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

Las **ondas estacionarias** se forman a partir de la combinación de dos ondas sinusoidales que tienen la misma frecuencia, amplitud y longitud de onda, pero que viajan en direcciones opuestas. La onda estacionaria resultante se describe mediante la función de onda

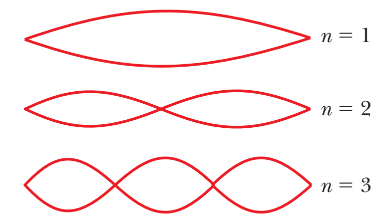
$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t \quad \textbf{(18.1)}$$

Por tanto, la amplitud de la onda estacionaria es $2A$, y la amplitud del movimiento armónico simple de cualquier partícula del medio varía de acuerdo con su posición como $2A$ sen kx. Los puntos de amplitud cero (llamados **nodos**) ocurren en $x = n\lambda/2$ $(n = 0, 1, 2, 3,...)$. Los puntos de amplitud máxima (llamados **antinodos**) ocurren en $x = n\lambda/4$ $(n = 1, 3, 5,...)$. Los antinodos adyacentes están separados por una distancia $\lambda/2$. Los nodos adyacentes también están separados por una distancia $\lambda/2$.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Ondas en interferencia. Cuando se sobreponen dos ondas viajeras que tienen igual frecuencia, la onda resultante tiene una amplitud que depende del ángulo de fase ϕ entre las dos ondas. La **interferencia constructiva** ocurre cuando las dos ondas están en fase, lo que corresponde a $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ rad. La **interferencia destructiva** se presenta cuando las dos ondas están 180° fuera de fase, lo que corresponde a $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ rad.



Ondas bajo condiciones frontera. Cuando una onda está sujeta a condiciones frontera, sólo se permiten ciertas frecuencias naturales; se dice que las frecuencias están cuantizadas.

Para ondas sobre una cuerda fija en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(18.6)}$$

donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal.

Para ondas sonoras en una columna de aire abierta en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(18.8)}$$

Si una columna de aire está abierta en un extremo y cerrada en el otro, sólo están presentes armónicos impares y las frecuencias naturales son

$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \quad \textbf{(18.9)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿El fenómeno de interferencia de onda se aplica sólo a ondas sinusoidales?

2. **O** Una serie de pulsos, cada uno de 0.1 m de amplitud, se envían por una cuerda que está unida a un poste en un extremo. Los pulsos se reflejan en el poste y viajan de regreso a lo largo de la cuerda sin perder amplitud. ¿Cuál es el desplazamiento neto en un punto sobre la cuerda donde dos pulsos se cruzan? **i)** Primero responda la pregunta bajo el supuesto de que la cuerda está firmemente unida al poste. a) 0.4 m, b) 0.2 m, c) 0.1 m, d) 0. **ii)** A continuación suponga que el extremo en el que se presenta la reflexión es libre de deslizarse hacia arriba y hacia abajo. Elija su respuesta entre las mismas posibilidades.

3. **O** En la figura 18.4, una onda sonora de 0.8 m de longitud de onda se divide en dos partes iguales que se recombinan para interferir constructivamente, la diferencia original entre sus longitudes de trayectoria es $|r_2 - r_1| = 0.8$ m. Clasifique las siguientes situaciones de acuerdo con la intensidad del sonido en el receptor, de mayor a menor. Suponga que las paredes del tubo no absorben energía sonora. Asigne clasificaciones idénticas a las situaciones en que la intensidad sea igual. a) Desde su posición original, la sección que se desliza se mueve 0.1 m. b) A continuación se desliza 0.1 m adicionales. c) Se desliza todavía otros 0.1 m. d) Se desliza 0.1 m más.

4. Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente, ¿hay alguna ganancia o pérdida en energía? Explique.

5. **O** En el ejemplo 18.1, se investigó un oscilador a 1.3 kHz que alimentaba dos bocinas idénticas lado a lado. Se encontró que un escucha en el punto *O* percibe el sonido con intensidad máxima, mientras que otro en el punto *P* percibe un mínimo. ¿Cuál es la intensidad en *P*? a) Menor pero cercana a la intensidad en *O*, b) la mitad de la intensidad en *O*, c) muy baja pero no cero, d) cero.

6. ¿Qué limita la amplitud de movimiento de un sistema oscilante real que es activado a una de sus frecuencias de resonancia?

7. **O** Suponga que las seis cuerdas de una guitarra acústica se tocan sin pulsar, es decir, sin presionarlas contra los trastes. ¿Qué cantidades son iguales para las seis cuerdas? Elija toda repuesta correcta. a) La frecuencia fundamental, b) la longitud de onda fundamental de la onda de la cuerda, c) la longitud de onda fundamental del sonido emitido, d) la rapidez de la onda en la cuerda, e) la rapidez del sonido emitido.

8. **O** Una cuerda de longitud *L*, masa por unidad de longitud μ y tensión *T* oscilante a su frecuencia fundamental. **i)** Si la longitud de la cuerda se duplica, y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? a) Se vuelve cuatro veces mayor. b) Se vuelve dos veces mayor. c) Se vuelve $\sqrt{2}$ veces mayor. d) No cambia. e) Se convierte en $1/\sqrt{2}$. f) Se convierte en la mitad. g) Se convierte en un cuarto. **ii)** Si la masa por unidad de longitud se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** Si la tensión se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? Elija entre las mismas posibilidades.

9. **O** A medida que los pulsos de la misma forma (uno hacia arriba, el otro hacia abajo) móviles en direcciones opuestas sobre una cuerda pasan uno sobre el otro, en un instante particular la cuerda no muestra desplazamiento de la posición de equilibrio en algún punto. ¿Qué ocurrió con la energía que portaban los pulsos en ese instante de tiempo? a) Se usó para producir el movimiento previo. b) Toda es energía potencial. c) Toda es energía interna. d) Toda es energía cinética. e) Es cantidad de movimiento. f) La energía positiva del pulso suma cero con la energía negativa del otro pulso. g) Cada pulso por separado tiene energía total cero.

10. **O** Suponga que dos ondas sinusoidales idénticas se mueven a través del mismo medio en la misma dirección. ¿Bajo qué condición la amplitud de la onda resultante será mayor que cualquiera de las dos ondas originales? a) En todos los casos, b) sólo si las ondas no tienen diferencia en fase, c) sólo si la diferencia de fase es menor que 90°, d) sólo si la diferencia de fase es menor que 120°, e) sólo si la diferencia de fase es menor que 180°.

11. Explique cómo un instrumento musical, un piano, se puede afinar a partir del fenómeno de los batimientos.

12. **O** Un arquero dispara una flecha horizontalmente desde el centro de la cuerda de un arco que se mantiene vertical. Después de que la flecha la deja, la cuerda del arco oscila como una sobreposición, ¿de qué armónicos de onda estacionaria? a) Sólo oscila en el armónico número 1, el fundamental. b) Sólo oscila en el segundo armónico. c) Sólo oscila en los armónicos de número impar 1, 3, 5, 7,.... d) Sólo oscila en los armónicos de número par 2, 4, 6, 8,.... e) Oscila en todos los armónicos. f) Ninguno; oscila como una onda viajera en lugar de hacerlo como una onda estacionaria. g) Ninguno; no oscila si la flecha la deja con la simetría perfecta que se describe.

13. Un diapasón por sí mismo produce un sonido débil. Intente cada uno de los siguientes cuatro métodos para obtener un sonido más fuerte de él. Explique cómo funciona cada método. Exprese también cualquier efecto en el intervalo de tiempo para el que el diapasón vibra de manera audible. a) Sostenga el borde de una hoja de papel contra un diente en vibración. b) Presione el mango del diapasón contra un pizarrón o mesa. c) Sostenga el diapasón sobre una columna de aire de longitud adecuada, como en el ejemplo 18.6. d) Sostenga el diapasón cerca de una rendija abierta cortada en una hoja de *foamy* o cartón, como se muestra en la figura P18.13. La rendija debe ser similar en tamaño y forma a un diente del diapasón. El movimiento de los dientes debe ser perpendicular a la hoja.



Figura P18.13

14. A pesar de una mano razonablemente estable, con frecuencia una persona derrama su café cuando lo lleva a su asiento. Explique la resonancia como una posible causa de esta dificultad e imagine medios para evitar los derrames.

15. **O** Se sabe que un diapasón oscila con 262 Hz de frecuencia. Cuando se hace sonar junto con una cuerda de mandolina, se escuchan cuatro batimientos cada segundo. A continuación, en cada diente del diapasón se pone un trozo de cinta adhesiva y ahora el diapasón produce cinco batimientos por segundo, con la misma cuerda de mandolina. ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda? a) 257 Hz, b) 258 Hz, c) 262 Hz, d) 266 Hz, e) 267 Hz. f) Esta secuencia de eventos no puede ocurrir.

16. Un mecánico de aviación nota que el sonido de una aeronave de dos motores varía rápidamente en sonoridad cuando ambos motores están en marcha. ¿Qué podría causar esta vibración de fuerte a suave?

Problemas

Sección 18.1 Sobreposición e interferencia

1. Dos ondas en una cuerda se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = (3.0 \text{ cm}) \cos (4.0x - 1.6t)$$

$$y_2 = (4.0 \text{ cm}) \text{ sen } (5.0x - 2.0t)$$

donde y y x están en centímetros y t en segundos. Encuentre la sobreposición de las ondas $y_1 + y_2$ en los puntos a) $x = 1.00$, $t = 1.00$; b) $x = 1.00$, $t = 0.500$; y c) $x = 0.500$, $t = 0$. (Recuerde que los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.)

2. Dos pulsos A y B se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensa con una rapidez de 2.00 cm/s. La amplitud de A es el doble de la amplitud de B. Los pulsos se muestran en la figura P18.2 en $t = 0$. Bosqueje la forma de la cuerda en $t = 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3 s.

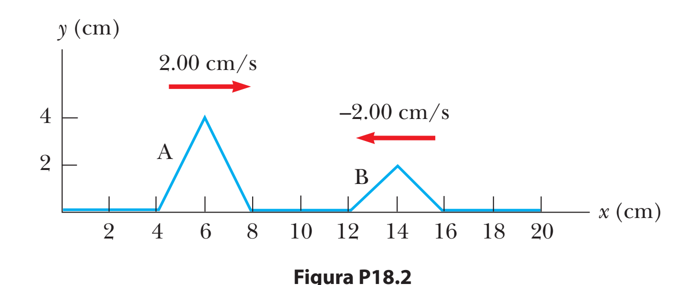


Figura P18.2

3. Dos pulsos que viajan sobre la misma cuerda se describen mediante

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \qquad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

a) ¿En qué dirección viaja cada pulso? b) ¿En qué instante los dos se cancelan en todas partes? c) ¿En qué punto los pulsos siempre se cancelan?

4. Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Las ondas están 90.0° fuera de fase. Cada onda tiene una amplitud de 4.00 cm. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

5. Dos ondas sinusoidales viajeras se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = (5.00 \text{ m}) \text{ sen } [\pi(4.00x - 1\,200t)]$$

$$y_2 = (5.00 \text{ m}) \text{ sen } [\pi(4.00x - 1\,200t - 0.250)]$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y t en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante? b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante?

6. Dos bocinas idénticas se colocan en una pared separadas 2.00 m. Un escucha está de pie a 3.00 m de la pared, directamente enfrente de una de las bocinas. Un solo oscilador activa las bocinas a una frecuencia de 300 Hz. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la cual el oscilador se ajusta de tal modo que el observador escuche sonido mínimo?

7. Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de 200 Hz de frecuencia. Las bocinas se ubican en un poste vertical a una distancia de 4.00 m una de otra. Un hombre camina directo hacia la bocina inferior en una dirección perpendicular al poste, como se muestra en la figura P18.7. a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad sonora? b) ¿A qué distancia está del poste en estos momentos? Considere que la rapidez del sonido es de 330 m/s e ignore cualquier reflexión de sonido producida por el suelo.

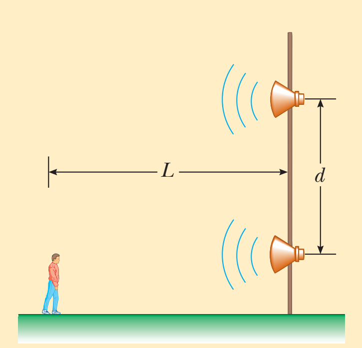


Figura P18.7 Problemas 7 y 8.

8. Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de frecuencia f. Las bocinas se ubican a una distancia d una de otra sobre un poste vertical. Un hombre camina directo hacia la bocina inferior en una dirección perpendicular al poste, como se muestra en la figura P18.7. a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad del sonido? b) ¿A qué distancia está del poste en estos momentos? Sea v la rapidez del sonido y suponga que el suelo no refleja sonido.

9. Dos ondas sinusoidales en una cuerda se definen mediante las funciones

$$y_1 = (2.00 \text{ cm}) \text{ sen } (20.0x - 32.0t)$$
$$y_2 = (2.00 \text{ cm}) \text{ sen } (25.0x - 40.0t)$$

donde y_1, y_2 y x están en centímetros y t en segundos. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto $x = 5.00$ cm en $t = 2.00$ s? b) ¿Cuál es el valor x positivo más cercano al origen para el que las dos fases difieren por $\pm\pi$ en $t = 2.00$ s? (Esta es una posición donde las dos ondas suman cero.)

10. ● En el aire, donde la rapidez del sonido es de 344 m/s, dos bocinas idénticas, separadas 10.0 m, se activan mediante el mismo oscilador con una frecuencia $f = 21.5$ Hz (figura P18.10). a) Explique por qué un receptor en el punto A registra un mínimo en intensidad del sonido de las dos bocinas. b) Si el receptor se mueve en el plano de las bocinas, ¿qué trayectoria debe tomar de modo que la intensidad permanezca en un mínimo? Es decir: determine la relación entre x y y (las coordenadas del receptor) que hacen que el receptor registre un mínimo en intensidad del sonido. c) ¿El receptor puede permanecer en un mínimo y alejarse de las dos fuentes? Si es así, determine la forma limitante de la trayectoria que debe tomar. Si no, explique a qué distancia puede ir.

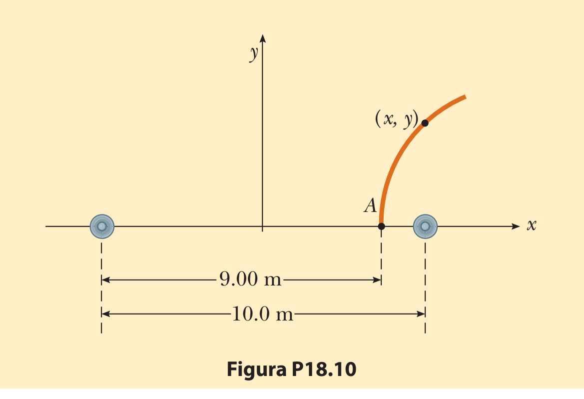


Figura P18.10

Sección 18.2 Ondas estacionarias

11. Dos ondas sinusoidales que viajan en direcciones opuestas interfieren para producir una onda estacionaria con la función de onda

$$y = (1.50 \text{ m}) \text{ sen } (0.400x) \cos (200t)$$

donde x está en metros y t en segundos. Determine la longitud de onda, frecuencia y rapidez de las ondas que interfieren.

12. Verifique por sustitución directa que la función de onda para una onda estacionaria dada en la ecuación 18.1,

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t$$

es una solución de la ecuación de onda lineal general, la ecuación 16.27:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

13. Dos bocinas idénticas se activan en fase mediante un oscilador común a 800 Hz y se enfrentan mutuamente a una distancia de 1.25 m. Ubique los puntos a lo largo de la línea que une las dos bocinas donde se esperarían mínimos relativos de amplitud de presión sonora. (Use $v = 343$ m/s.)

14. ● Una onda estacionaria se describe mediante la función

$$y = 6 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos (100\pi t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. a) Prepare una gráfica que muestre y como función de x para $t = 0$, para $t = 5$ ms, para $t = 10$ ms, para $t = 15$ ms y para $t = 20$ ms. b) A partir de la gráfica, identifique la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. c) A partir de la gráfica, identifique la frecuencia de la onda y explique cómo lo hizo. d) A partir de la ecuación, identifique directamente la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. e) A partir de la ecuación, identifique directamente la frecuencia y explique cómo lo hizo.

15. Dos ondas sinusoidales que se combinan en un medio se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = (3.0 \text{ cm}) \text{ sen } \pi(x + 0.60t)$$
$$y_2 = (3.0 \text{ cm}) \text{ sen } \pi(x - 0.60t)$$

donde x está en centímetros y t en segundos. Determine la máxima posición transversal de un elemento del medio en a) $x = 0.250$ cm, b) $x = 0.500$ cm y c) $x = 1.50$ cm. d) Encuentre los tres valores más pequeños de x que correspondan a antinodos.

16. ● Dos ondas que se presentan simultáneamente en una cuerda larga se conocen por las funciones de onda

$$y_1 = A \text{ sen } (kx - \omega t + \phi) \qquad y_2 = A \text{ sen } (kx + \omega t)$$

a) ¿Las dos ondas viajeras se suman para dar una onda estacionaria? Explique. b) ¿Todavía es cierto que los nodos están separados una media longitud de onda? Argumente su respuesta. c) ¿Los nodos son diferentes en cualquier forma de la manera en que serían si ϕ fuese cero? Explique.

Sección 18.3 Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos

17. Encuentre la frecuencia fundamental y las siguientes tres frecuencias que podrían causar patrones de onda estacionaria en una cuerda que tiene 30.0 m de largo, masa por unidad de longitud de 9.00×10^{-3} kg/m y se estira a una tensión de 20.0 N.

18. Una cuerda con una masa de 8.00 g y 5.00 m de longitud tiene un extremo unido a una pared; el otro extremo pasa sobre una pequeña polea fija y se amarra a un objeto colgante con una masa de 4.00 kg. Si la cuerda se pulsa, ¿cuál es la frecuencia fundamental de su vibración?

19. En el arreglo que se muestra en la figura P18.19, un objeto se puede colgar de una cuerda (con densidad de masa lineal $\mu = 0.002\ 00$ kg/m) que pasa sobre una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante f) y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es $L = 2.00$ m. Cuando la masa m del objeto es 16.0 kg o 25.0 kg, se observan ondas estacionarias; sin embargo, no se observan ondas estacionarias con alguna masa entre estos valores. a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? *Nota:* Mientras mayor es la tensión en la cuerda, menor es el número de nodos en la onda estacionaria. b) ¿Cuál es la masa de objeto más grande para la que se podrían observar ondas estacionarias?

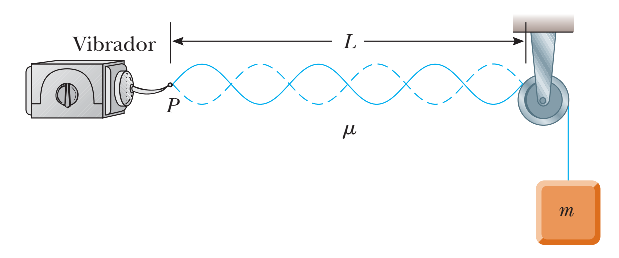


Figura P18.19

20. La cuerda superior de una guitarra tiene una frecuencia fundamental de 330 Hz cuando se le permite vibrar como un todo, a lo largo de su longitud de 64.0 cm desde el cuello al puente. Un traste se proporciona para limitar la vibración sólo a los dos tercios inferiores de la cuerda. Si la cuerda se presiona en este traste y se pulsa, ¿cuál es la nueva frecuencia fundamental? b) **¿Qué pasaría si?** El guitarrista puede pulsar un "armónico natural" al tocar gentilmente la cuerda en la posición de este traste y pulsar la cuerda a aproximadamente un sexto del camino a lo largo de su longitud desde el puente. ¿Qué frecuencia se escuchará entonces?

21. La cuerda La en un chelo vibra en su primer modo normal con una frecuencia de 220 Hz. El segmento oscilante tiene 70.0 cm de largo y una masa de 1.20 g. a) Encuentre la tensión en la cuerda. b) Determine la frecuencia de vibración cuando la cuerda oscila en tres segmentos.

22. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y se afina en Sol concierto, con f_G = 392 Hz. ¿Dónde debe colocar su dedo el violinista para tocar La concierto, con f_A = 440 Hz? Si esta posición permanece correcta a un medio del ancho de un dedo (es decir, dentro de 0.600 cm), ¿cuál es el máximo cambio porcentual permisible en la tensión de la cuerda?

23. **Problema de repaso.** Una esfera de masa M se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una barra horizontal ligera de longitud L (figura P18.23). Se conoce que el ángulo es θ y que f representa la frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra, determine la masa de esta porción de la cuerda.

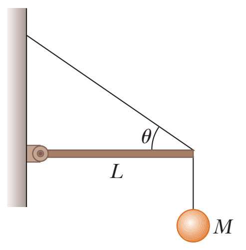


Figura P18.23

24. **Problema de repaso.** Un cilindro de cobre cuelga en la parte baja de un alambre de acero de masa despreciable. El extremo superior del alambre está fijo. Cuando el alambre se golpea, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Después el cilindro de cobre se sumerge en agua de modo que la mitad de su volumen está abajo de la línea del agua. Determine la nueva frecuencia fundamental.

25. Se observa un patrón de onda estacionaria en un alambre delgado con una longitud de 3.00 m. La función de onda es

$$y = (0.002\text{ m})\text{ sen }(\pi x)\cos(100\pi t)$$

donde x está en metros y t en segundos. a) ¿Cuántos bucles muestra este patrón? b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de vibración del alambre? c) **¿Qué pasaría si?** Si la frecuencia original se mantiene constante y la tensión en el alambre aumenta en un factor de 9, ¿cuántos bucles se presentan en el nuevo patrón?

Sección 18.4 Resonancia

26. ● La Bahía de Fundy, en Nueva Escocia, tiene las mareas más altas del mundo. Suponga que en medio del océano y en la boca de la bahía el gradiente de gravedad de la Luna y la rotación de la Tierra hacen que la superficie del agua oscile con una amplitud de unos cuantos centímetros y un periodo de 12 h 24 min. En el nacimiento de la bahía, la amplitud es de muchos metros. Argumente a favor o en contra de la proposición de que la marea se amplifica por resonancia de ondas estacionarias. Suponga que la bahía tiene una longitud de 210 km y una profundidad uniforme de 36.1 m. La rapidez de las ondas acuáticas de longitud de onda larga se conoce por $\sqrt{gd}$, donde d es la profundidad del agua.

27. Un terremoto puede producir un *seiche* (oscilación de un cuerpo fluido) en un lago en el que el agua se derrama de ida y vuelta de un extremo al otro con amplitud notablemente grande y periodo largo. Considere un *seiche* producido en el estanque rectangular de una granja, como se muestra en la figura P18.27. (La figura no se dibuja a escala.) Suponga que el estanque tiene 9.15 m de largo con ancho y profundidad uniformes. Usted mide que un pulso producido en un extremo llega al otro extremo en 2.50 s. a) ¿Cuál es la rapidez de la onda? b) Para producir el *seiche*, muchas personas están de pie en el banco en un extremo y "reman" con palas de nieve en movimiento armónico simple. ¿Cuál sería la frecuencia de este movimiento?

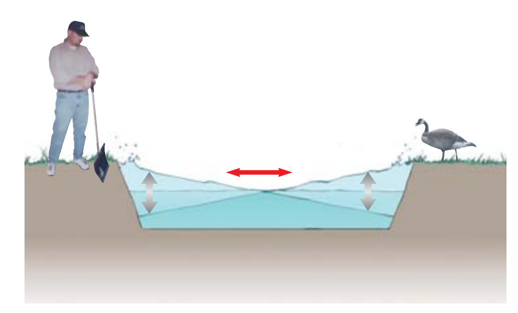


Figura P18.27

28. La figura P18.28a es una fotografía de una copa de vino en oscilante. Una técnica especial hace que tiras negras y blancas aparezcan donde el vidrio se mueve, con espaciamientos más

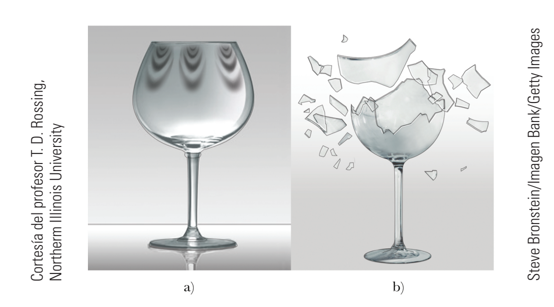


Figura P18.28

cercanos donde la amplitud es mayor. Seis nodos y seis antinodos alternan alrededor del borde de la copa en la vibración fotografiada, pero en vez de ello considere el caso de una vibración de onda estacionaria con cuatro nodos y cuatro antinodos igualmente espaciados alrededor de la circunferencia de 20.0 cm del borde de una copa. Si ondas transversales se mueven alrededor de la copa a 900 m/s, ¿con qué frecuencia una cantante de ópera tendría que producir un armónico alto para romper la copa con una vibración resonante como se muestra en la figura P18.28b?

Sección 18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

Nota: A menos que se especifique de otro modo, suponga que la rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s a 20°C y se describe mediante

$$v = (331\ \text{m/s})\sqrt{1 + \frac{T_C}{273°}}$$

a cualquier temperatura Celsius T_C.

29. Calcule la longitud de un tubo que tiene una frecuencia fundamental de 240 Hz, si supone que el tubo está a) cerrado en un extremo y b) abierto en ambos extremos.

30. La longitud global de un flautín es de 32.0 cm. La columna de aire resonante vibra como en un tubo abierto en ambos extremos. a) Encuentre la frecuencia de la nota más baja que puede producir un flautín, si supone que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s. b) Abrir los orificios en el lado acorta efectivamente la longitud de la columna resonante. Suponga que la nota más alta que un flautín puede producir es de 4 000 Hz. Encuentre la distancia entre antinodos adyacentes para este modo de vibración.

31. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano abierto corresponde al Do medio (261.6 Hz en la escala cromática musical). La tercera resonancia de un tubo de órgano cerrado tiene la misma frecuencia. ¿Cuál es la longitud de cada tubo?

32. ● ¡No pegue nada en su oído! Estime la longitud de su conducto auditivo desde su abertura en el oído externo hasta el tímpano. Si considera al conducto como un tubo estrecho que está abierto en un extremo y cerrado en el otro, ¿alrededor de qué frecuencia fundamental esperaría que su audición sea más sensible? Explique por qué puede oír especialmente sonidos débiles justo alrededor de esta frecuencia.

33. El casillero de una ducha tiene dimensiones de 86.0 cm × 86.0 cm × 210 cm. Si usted cantara en esta ducha, ¿cuáles frecuencias sonarían más ricas (debido a resonancia)? Suponga que el casillero actúa como un tubo cerrado en ambos extremos, con nodos en lados opuestos. Suponga que las voces de diferentes cantantes varían de 130 Hz a 2 000 Hz. Sea 355 m/s la rapidez del sonido en el aire caliente.

34. Como se muestra en la figura P18.34, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico R. El radio del cilindro es r, y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia f. A medida que el agua asciende, ¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

35. Dos frecuencias naturales adyacentes de un tubo de órgano se determinan en 550 Hz y 650 Hz. Calcule la frecuencia fundamental y longitud de este tubo. (Use $v = 340$ m/s.)

36. ● Un túnel bajo un río tiene 2.00 km de largo. a) ¿A qué frecuencia puede resonar el aire en el túnel? b) Explique si sería bueno hacer una regla que prohíba sonar el claxon de los autos mientras están en el túnel.

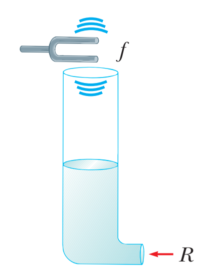


Figura P18.34

37. Una columna de aire en un tubo de vidrio está abierta en un extremo y cerrada en el otro mediante un pistón móvil. El aire en el tubo se caliente sobre temperatura ambiente y un diapasón de 384 Hz se mantiene en el extremo abierto. Cuando el pistón está a 22.8 cm del extremo abierto se escucha resonancia y, una vez más, cuando está a 68.3 cm del extremo abierto. a) ¿Qué rapidez de sonido se implica con estos datos? b) ¿A qué distancia del extremo abierto estará el pistón cuando se escuche la siguiente resonancia?

38. Un diapasón con una frecuencia de 512 Hz se coloca cerca de lo alto del tubo que se muestra en la figura 18.14a. El nivel del agua se baja de modo que la longitud L aumenta lentamente desde un valor inicial de 20.0 cm. Determine los siguientes dos valores de L que correspondan a modos resonantes.

39. ● Un estudiante usa un oscilador de audio de frecuencia ajustable para medir la profundidad de un pozo de agua. El estudiante reporta que escucha dos resonancias sucesivas a 51.5 Hz y 60.0 Hz. ¿Qué tan profundo es el pozo? Explique la precisión que puede asignar a su respuesta.

40. Con un pulsado particular, una flauta produce una nota con frecuencia de 880 Hz a 20.0°C. La flauta está abierta en ambos extremos. a) Encuentre la longitud de la columna de aire. b) Encuentre la frecuencia que produce la flauta al inicio del espectáculo de medio tiempo en un juego de futbol americano de final de temporada, cuando la temperatura ambiente es de −5.00°C y los músicos no tienen oportunidad de calentar la flauta.

Sección 18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

41. Una barra de aluminio de 1.60 m de largo se mantiene en su centro. Se golpea con un paño recubierto con resina para establecer una vibración longitudinal. La rapidez del sonido en una delgada barra de aluminio es de 5 100 m/s. a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de las ondas establecidas en la barra? b) ¿Qué armónicos se establecen en la barra sostenida de esta forma? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si la barra fuese de cobre, material en el que la rapidez del sonido es de 3 560 m/s?

42. Una barra de aluminio se sujeta a un cuarto a lo largo de su longitud y se pone en vibración longitudinal mediante una fuente impulsora de frecuencia variable. La frecuencia más baja que produce resonancia es 4 400 Hz. La rapidez del sonido en una barra de aluminio es 5 100 m/s. Determine la longitud de la barra.

Sección 18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

43. En ciertos intervalos de un teclado de piano, más de una cuerda se afina a la misma nota para proporcionar sonoridad

adicional. Por ejemplo, la nota a 110 Hz tiene dos cuerdas a esta frecuencia. Si una cuerda se desliza de su tensión normal de 600 N a 540 N, ¿qué frecuencia de batimiento se escucha cuando el martillo golpea las dos cuerdas simultáneamente?

44. Mientras intenta afinar la nota Do a 523 Hz, un afinador de pianos escucha 2.00 batimientos/s entre un oscilador de referencia y la cuerda. a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda? b) Cuando aprieta la cuerda ligeramente, escucha 3.00 batimientos/s. ¿Ahora cuál es la frecuencia de la cuerda? c) ¿En qué porcentaje el afinador debe cambiar la tensión en la cuerda para que quede afinada?

45. Un estudiante sostiene un diapasón que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared con una rapidez constante de 1.33 m/s. a) ¿Qué frecuencia de batimiento observa entre el diapasón y su eco? b) ¿Qué tan rápido debe caminar alejándose de la pared para observar una frecuencia de batimiento de 5.00 Hz?

46. Cuando se presentan batimientos en una relación mayor de casi 20 por segundo, no se escuchan cada uno sino como un murmullo estable, llamado *tono de combinación*. El intérprete de un órgano de tubos puede presionar una sola tecla y hacer que el órgano produzca sonido con diferentes frecuencias fundamentales. Puede seleccionar y jalar diferentes altos para hacer que la misma tecla para la nota Do produzca sonido a las siguientes frecuencias: 65.4 Hz de un tubo de 8 pies; $2 \times 65.4 = 131$ Hz de un tubo de 4 pies; $3 \times 65.4 = 196$ Hz de un tubo de $2\frac{2}{3}$ pies; $4 \times 65.4 = 262$ Hz de un tubo de 2 pies, o cualquier combinación de estos sonidos. Con notas a frecuencias bajas obtiene sonidos con la calidad más placentera al jalar todos los altos. Cuando en uno de los tubos se desarrolla una fuga, dicho tubo no se puede usar. Si una fuga se presenta en un tubo de 8 pies, tocar una combinación de otros tubos puede crear la sensación de sonido a la frecuencia que produciría el tubo de 8 pies. ¿Qué conjuntos de altos, entre los mencionados, podría jalar para hacer esto?

Sección 18.8 Patrones de ondas no sinusoidales

47. Un acorde La mayor consiste de las notas llamadas La, Do bemol y Mi. Se puede ejecutar en un piano al golpear simultáneamente las cuerdas con frecuencias fundamentales de 440.00 Hz, 554.37 Hz y 659.26 Hz. La magnífica consonancia del acorde se asocia con igualdad cercana de las frecuencias de algunos de los armónicos más altos de los tres tonos. Considere los primeros cinco armónicos de cada cuerda y determine cuáles armónicos muestran casi igualdad.

48. Suponga que un flautista ejecuta una nota Do de 523 Hz con amplitud de desplazamiento de primer armónico $A_1 = 100$ nm. A partir de la figura 18.19b, lea, por proporción, las amplitudes de desplazamiento de los armónicos del 2 al 7. Considérelos como los valores del A_2 al A_7 en el análisis de Fourier del sonido y suponga $B_1 = B_2 = ... = B_7 = 0$. Construya una gráfica de la forma de onda del sonido. Su forma de onda no se parecerá exactamente a la forma de onda de flauta de la figura 18.18b porque usted simplifica al ignorar los términos coseno; no obstante, produce la misma sensación a la audición humana.

Problemas adicionales

49. ● **Problema de repaso.** El extremo superior de una cuerda de un yo–yo se mantiene en reposo. De hecho el yo–yo es más pesado que la cuerda. Parte del reposo y se mueve hacia abajo con aceleración constante de 0.800 m/s^2 mientras se desenrolla de la cuerda. El roce de la cuerda contra el borde del yo–yo excita vibraciones de onda estacionaria transversales en la cuerda. Ambos extremos de la cuerda son nodos incluso cuando la longitud de la cuerda aumenta. Considere el instante 1.20 s después de que comienza el movimiento. a) Demuestre que la relación de cambio con el tiempo de la longitud de onda del modo fundamental de oscilación es 1.92 m/s. b) **¿Qué pasaría si?** ¿La relación de cambio de la longitud de onda del segundo armónico también es 1.92 m/s en este momento? Explique su respuesta. c) **¿Qué pasaría si?** El experimento se repite después de agregar más masa al cuerpo del yo–yo. La distribución de masa se mantiene igual de modo que el yo–yo todavía se mueve con aceleración hacia abajo de 0.800 m/s^2. En el punto 1.20 s, ¿la relación de cambio de la longitud de onda fundamental de la cuerda en vibración aún es igual a 1.92 m/s? Explique. ¿La relación de cambio de la longitud de onda del segundo armónico es la misma que en el inciso b)? Explique.

50. ● Una bocina enfrente de una habitación y una bocina idéntica en la parte trasera de la habitación se activan mediante el mismo oscilador a 456 Hz. Una estudiante camina con una relación uniforme de 1.50 m/s a lo largo de la longitud de la habitación. Escucha un solo tono, que alternativamente es más fuerte y más débil. a) Modele estas variaciones como batimientos entre los sonidos con el corrimiento Doppler que la estudiante recibe. Calcule el número de batimientos que escucha la estudiante cada segundo. b) **¿Qué pasaría si?** Modele las dos bocinas como productoras de una onda estacionaria en la habitación y a la estudiante como si caminara entre antinodos. Calcule el número de máximos de intensidad que la estudiante escucha cada segundo. c) Explique cómo se comparan mutuamente las respuestas a los incisos a) y b).

51. Cuando se golpea la barra de madera que reproduce un tono, en una marimba (figura P18.51), vibra en una onda estacionaria transversal que tiene tres antinodos y dos nodos. La nota de frecuencia más baja es 87.0 Hz, producida por la barra de 40.0 cm de largo. a) Encuentre la rapidez de las ondas transversales sobre la barra. b) Un tubo resonante suspendido verticalmente bajo el centro de la barra aumenta la sonoridad del sonido emitido. Si el tubo está abierto sólo en el extremo superior y la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es la longitud del tubo requerida para resonar con la barra en el inciso a)?



Figura P18.51 Intérpretes de marimba en la ciudad de México.

52. Una cuerda de nylon tiene 5.50 g de masa y 86.0 cm de longitud. Un extremo se amarra al suelo y el otro a un pequeño imán, con una masa despreciable comparada con la cuerda. Un campo magnético (que se estudiará en el capítulo 29) ejerce una fuerza hacia arriba de 1.30 N en el imán en cualquier parte donde se ubique éste. En equilibrio, la cuerda es vertical y sin movimiento, con el imán en la parte superior. Cuando transporta una onda de amplitud pequeña, puede suponer que la cuerda siempre está bajo tensión uniforme de 1.30 N.

a) Hallar la rapidez de las ondas transversales en la cuerda. b) Las posibilidades de vibración de la cuerda son un conjunto de estados de onda estacionaria, cada uno con un nodo en el extremo inferior fijo y un antinodo en el extremo superior libre. Encuentre las distancias nodo–antinodo para cada uno de los tres estados más simples. c) Encuentre la frecuencia de cada uno de estos estados.

53. Dos silbatos de tren tienen frecuencias idénticas de 180 Hz. Cuando un tren está en reposo en la estación y el otro se mueve cerca, un viajante que está de pie en la plataforma de la estación escucha batimientos con una frecuencia de 2.00 batimientos/s, cuando los silbatos funcionan juntos. ¿Cuáles son las dos posibles magnitudes de velocidad y direcciones que puede tener el tren en movimiento?

54. Una cuerda fija en ambos extremos y que tiene una masa de 4.80 g, una longitud de 2.00 m y una tensión de 48.0 N, vibra en su segundo modo normal ($n = 2$). ¿Cuál es la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda oscilante?

55. Dos alambres se sueldan juntos por los extremos. Los alambres están hechos del mismo material, pero el diámetro de uno tiene el doble del otro. Ambos están sujetos a una tensión de 4.60 N. El alambre delgado tiene una longitud de 40.0 cm y una densidad de masa lineal de 2.00 g/m. La combinación está fija en ambos extremos y vibra en tal forma que los dos antinodos están presentes, con el nodo entre ellos precisamente en la soldadura. a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración? b) ¿Cuál es la longitud del alambre grueso?

56. Una cuerda con 1.60 g/m de densidad lineal se estira entre dos tornillos de banco separados 48.0 cm. La cuerda no se estira apreciablemente mientras la tensión en él se eleva de manera estable de 15.0 N en $t = 0$ a 25.0 N en $t = 3.50$ s. Por lo tanto, la tensión como función del tiempo se conoce por la expresión $T = 15.0\ \text{N} + (10.0\ \text{N})t/3.50\ \text{s}$. La cuerda vibra en su modo fundamental a lo largo de este proceso. Encuentre el número de oscilaciones que completa durante el intervalo de 3.50 s.

57. Se establece una onda estacionaria en una cuerda de longitud y tensión variables por medio de un vibrador de frecuencia variable. Ambos extremos de la cuerda están fijos. Cuando el vibrador tiene una frecuencia f, en una cuerda de longitud L y bajo tensión T, se establecen n antinodos en la cuerda. a) Si la longitud de la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambiará la frecuencia de modo que se produzca el mismo número de antinodos? b) Si la frecuencia y longitud se mantienen constantes, ¿qué tensión producirá $n + 1$ antinodos? c) Si la frecuencia se triplica y la longitud de la cuerda se acorta a la mitad, ¿en qué factor cambiará la tensión de modo que se produzca el doble de antinodos?

58. **Problema de repaso.** Para el arreglo que se muestra en la figura P18.58, $\theta = 30.0°$, el plano inclinado y la pequeña polea no tienen fricción, la cuerda soporta el objeto de masa M en el fondo del plano y la cuerda tiene masa m que es pequeña comparada con M. El sistema está en equilibrio y la parte vertical de la cuerda tiene una longitud h. En la sección vertical de la cuerda se establecen ondas estacionarias. a) Encuentre la tensión en la cuerda. b) Modele la forma de la cuerda como un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud total de la cuerda. c) Localice la masa por unidad de longitud de la cuerda. d) Encuentre la rapidez de las ondas en la cuerda. e) Halle la frecuencia más baja para una onda estacionaria. f) Encuentre el periodo de la onda estacionaria que tiene tres nodos. g) Ubique la longitud de onda de la onda estacionaria que tiene tres nodos. h) Encuentre la frecuencia de los batimientos resultantes de la interferencia de la onda sonora de frecuencia más baja, generada por la cuerda, con otra onda sonora que tenga una frecuencia que es 2.00% mayor.

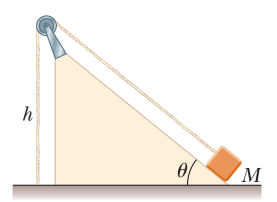


Figura P18.58

59. Dos ondas se describen mediante las funciones de onda

$$y_1(x, t) = (5.0\ \text{m})\ \text{sen}\ (2.0x - 10t)$$

$$y_2(x, t) = (10\ \text{m})\ \cos\ (2.0x - 10t)$$

donde y_1, y_2 y x están en metros y t en segundos. Demuestre que la onda resultante a partir de su sobreposición también es sinusoidal. Determine la amplitud y fase de esta onda sinusoidal.

60. Un reloj de cuarzo contiene un oscilador de cristal en forma de bloque de cuarzo que vibra mediante contracción y expansión. Dos caras opuestas del bloque, separadas 7.05 mm, son antinodos, y se mueven de manera alterna acercándose y alejándose mutuamente. El plano a la mitad entre estas dos caras es un nodo de la vibración. La rapidez del sonido en el cuarzo es de 3.70 km/s. Encuentre la frecuencia de la vibración. Un voltaje eléctrico oscilatorio acompaña la oscilación mecánica; el cuarzo se describe como *piezoeléctrico*. Un circuito eléctrico alimenta energía para mantener la oscilación y también cuenta los pulsos de voltaje para mantener el tiempo.

61. **Problema de repaso.** Un objeto de 12.0 kg cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total de $L = 5.00$ m y una densidad de masa lineal $\mu = 0.001\ 00$ kg/m. La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia $d = 2.00$ m (figura P18.61a). a) Determine la tensión en la cuerda. b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P18.61b?

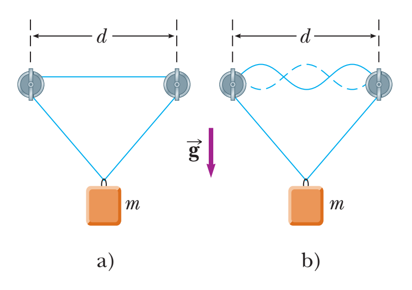


Figura P18.61

Respuestas a las preguntas rápidas

18.1 c). Los pulsos se cancelan mutuamente por completo en términos del desplazamiento de los elementos de la cuerda desde el equilibrio, pero la cuerda aún se mueve. Poco tiempo después, la cuerda se desplazará una vez más y los pulsos habrán pasado uno sobre el otro.

18.2 **i)**, a). El patrón que se muestra en la parte inferior de la figura 18.8a corresponde a la posición extrema de la cuerda. Todos los elementos de la cuerda momentáneamente llegan al reposo. **ii)**, d). Cerca de un punto nodal, los elementos en un lado del punto se mueven hacia arriba en este instante y los elementos en el otro lado se mueven hacia abajo.

18.3 d). La opción a) es incorrecta porque el número de nodos es uno más que el número de antinodos. La opción b) sólo es verdadera para la mitad de los modos; no es verdadera para cualquier modo de número impar. La opción c) sería correcta si se sustituye la palabra *nodos* por *antinodos*.

18.4 b). Con ambos extremos abiertos, el tubo tiene una frecuencia fundamental conocida por la ecuación 18.8: $f_{\text{abierto}} = v/2L$. Con un extremo cerrado, el tubo tiene una frecuencia fundamental conocida por la ecuación 18.9:

$$f_{\text{cerrado}} = \frac{v}{4L} = \frac{1}{2}\frac{v}{2L} = \frac{1}{2}f_{\text{abierto}}$$

18.5 c). El aumento en la temperatura hace que la rapidez del sonido suba. De acuerdo con la ecuación 18.8, el resultado es un aumento en la frecuencia fundamental de un tubo del órgano.

Termodinámica

Ahora conviene dirigir la atención al estudio de la termodinámica, que abarca situaciones en que la temperatura o el estado (sólido, líquido o gas) de un sistema cambian debido a transferencias de energía. Como aprenderá, la termodinámica es muy conveniente para explicar las propiedades volumétricas de la materia y la correlación entre estas propiedades y los mecanismos de átomos y moléculas.

El desarrollo histórico de la termodinámica fue paralelo al de la teoría atómica de la materia. Hacia 1820 los experimentos químicos habían proporcionado evidencia contundente de la existencia de los átomos. En aquella época, los científicos reconocieron que entre la termodinámica y la estructura de la materia debía existir una conexión. En 1827, el botánico Robert Brown reportó que granos de polen suspendidos en un líquido se movían erráticamente de un lugar a otro como si estuvieran bajo agitación constante. En 1905, Albert Einstein usó la teoría cinética para explicar la causa de este movimiento errático, conocido en la actualidad como *movimiento browniano*. Einstein explicó este fenómeno al suponer que los granos están bajo bombardeo constante de moléculas "invisibles" en el líquido, y que son éstas las que se mueven erráticamente. Esta explicación dio luz a los científicos acerca del concepto de movimiento molecular y proporcionó credibilidad a la idea de que la materia está hecha de átomos. En estos términos se forjó una conexión entre el mundo cotidiano y los bloques constructores invisibles que conforman este mundo.

La termodinámica también aborda cuestiones más prácticas. ¿Alguna vez se ha preguntado cómo un refrigerador es capaz de enfriar su contenido, o qué tipos de transformaciones se presentan en una planta eléctrica o en el motor de su automóvil, o qué ocurre con la energía cinética de un objeto en movimiento cuando llega al reposo? Es posible aplicar las leyes de la termodinámica para proporcionar explicaciones de éstos y otros fenómenos.



Una vista del oleoducto Alyeska, cerca del río Tazlina, en Alaska. El petróleo en la tubería está caliente y la energía que se transfiere de la tubería podría fundir el permafrost que es ambientalmente delicado en la tierra. Las estructuras con aletas en la parte superior de los postes de soporte son radiadores térmicos que transfieren la energía al aire para proteger el permafrost. (Topham Picturepoint/The Image Works.)



¿Por qué alguien diseñaría una tubería que incluyera estos extraños bucles? Casi todas las tuberías que transportan líquidos contienen dichos bucles para permitir la expansión y contracción a medida que cambia la temperatura. En este capítulo se estudiará la expansión térmica.

19 Temperatura

En el estudio de la mecánica se definieron cuidadosamente conceptos como *masa*, *fuerza* y *energía cinética* para facilitar el planteamiento cuantitativo. Del mismo modo, se requiere una descripción cuantitativa de los fenómenos térmicos y definiciones precisas de términos tan importantes como *temperatura*, *calor* y *energía interna*. Este capítulo inicia con una discusión de la temperatura.

A continuación se considera la importancia de la sustancia que se investiga cuando se estudian fenómenos térmicos. Por ejemplo, los gases se expanden con gran libertad cuando se calientan, mientras que los líquidos y los sólidos tienen una expansión ligera.

Este capítulo concluye con un estudio de los gases ideales en la escala macroscópica. En este caso, la preocupación son las correspondencias entre cantidades tales como presión, volumen y temperatura de un gas. En el capítulo 21 se examinarán los gases en una escala microscópica, a partir de un modelo que representa los componentes de un gas como partículas pequeñas.

19.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica

Con frecuencia el concepto de temperatura se asocia con qué tan caliente o frío se siente un objeto cuando se toca. De esta forma, los sentidos proporcionan una indicación cualitativa de la temperatura. Sin embargo, los sentidos no son confiables y con frecuencia

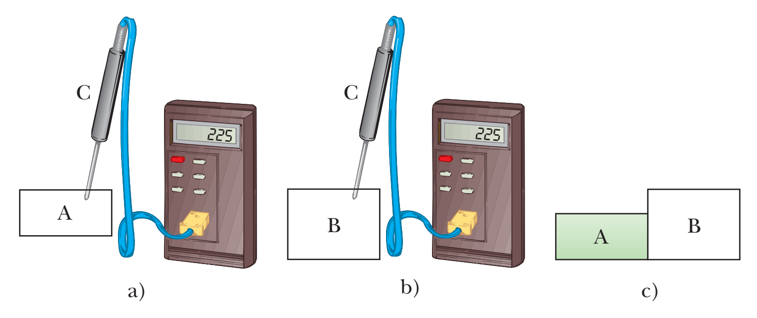


Figura 19.1 Ley cero de la termodinámica (a, b). Si las temperaturas de A y B se miden como iguales al colocarlas en contacto térmico con un termómetro (objeto c), no se intercambiará energía entre ellos cuando se coloquen en contacto térmico mutuo c).

hacen que uno se equivoque. Por ejemplo, si retira del refrigerador una charola metálica de hielos y una caja de cartón de vegetales congelados, la charola de hielos se siente más fría que la caja, *aun cuando ambas estén a la misma temperatura.* Los dos objetos se sienten diferentes porque el metal transfiere energía por calor a una proporción mayor que el cartón. Lo que se necesita es un método confiable y reproducible para medir lo caliente o lo frío relativo de los objetos en lugar de la rapidez de transferencia de energía. Los científicos han elaborado una diversidad de termómetros para hacer tales mediciones cuantitativas.

Con el tiempo dos objetos a diferentes temperaturas iniciales llegan a alguna temperatura intermedia cuando se colocan en contacto mutuo. Por ejemplo, cuando en una tina de baño se mezclan agua caliente y agua fría, la temperatura final de la mezcla está en algún punto entre las temperaturas caliente y fría iniciales. Del mismo modo, cuando un cubo de hielo se deja caer en una taza de café caliente, el cubo de hielo se funde y la temperatura del café disminuye.

Piense que dos objetos se colocan en un contenedor aislado tal que interactúan uno con otro pero no con el ambiente. Si los objetos están a diferentes temperaturas, entre ellos se transfiere energía, incluso si al inicio no están en contacto físico mutuo. Los mecanismos de transferencia de energía del capítulo 8, en los que se enfocará este capítulo, son el calor y la radiación electromagnética. Para propósitos de esta exposición, considere que dos objetos están en **contacto térmico** mutuo si entre ellos pueden intercambiar energía mediante dichos procesos debido a una diferencia de temperatura. El **equilibrio térmico** es una situación en la que dos objetos no intercambiarían energía, sea por calor o radiación electromagnética, si entran en contacto térmico.

Considere dos objetos, A y B, que no están en contacto térmico, y un tercer objeto C, que es un termómetro. Se quiere determinar si A y B están en equilibrio térmico uno con otro. El termómetro (objeto C) primero se coloca en contacto térmico con el objeto A hasta que llega a equilibrio térmico,[1] como se muestra en la figura 19.1a. A partir de ese momento, la lectura del termómetro permanece constante y se registra. Luego el termómetro se retira del objeto A y se pone en contacto térmico con el objeto B, como se muestra en la figura 19.1b. De nuevo se registra la lectura, después de llegar al equilibrio térmico. Si las dos lecturas son iguales, el objeto A y el objeto B están en equilibrio térmico uno con otro. Si se colocan en contacto mutuo, como en la figura 19.1c, no hay intercambio de energía entre ellos.

Estos resultados se resumen en un enunciado conocido como **ley cero de la termodinámica** (ley de equilibrio):

◀ Ley cero de la termodinámica

> Si los objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, en tal caso A y B están en equilibrio térmico entre sí.

[1] Se supone una cantidad despreciable de transferencia de energía entre el termómetro y el objeto A durante el proceso de equilibrio. Sin esta suposición, que también se hace para el termómetro y el objeto B, la medición de la temperatura de un objeto perturba al sistema de modo que la temperatura medida es diferente de la temperatura inicial del objeto. En la práctica, siempre que mida una temperatura con un termómetro, usted mide el sistema perturbado, no el sistema original.

Este enunciado se prueba fácilmente de manera experimental y es muy importante porque permite definir la temperatura. Se puede considerar a la **temperatura** como la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. **Dos objetos en equilibrio térmico, uno con otro, están a la misma temperatura**. En sentido inverso, si dos objetos tienen diferentes temperaturas, no están en equilibrio térmico uno con otro.

Pregunta rápida 19.1 Dos objetos, con diferentes tamaños, masas y temperaturas, se ponen en contacto térmico. ¿En qué dirección viaja la energía? a) La energía viaja del objeto más grande al objeto más pequeño. b) La energía viaja del objeto con más masa al que tiene menos masa. c) La energía viaja del objeto con mayor temperatura al objeto con menor temperatura.

19.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

Los termómetros son dispositivos que sirven para medir la temperatura de un sistema. Todos los termómetros se basan en el principio de que alguna propiedad física de un sistema cambia a medida que varía la temperatura del sistema. Algunas propiedades físicas que cambian con la temperatura son 1) el volumen de un líquido, 2) las dimensiones de un sólido, 3) la presión de un gas a volumen constante, 4) el volumen de un gas a presión constante, 5) la resistencia eléctrica de un conductor y 6) el color de un objeto.

Un termómetro de uso cotidiano consiste de una masa de líquido, por lo general mercurio o alcohol, que se expande en un tubo capilar de vidrio cuando se calienta (figura 19.2). En este caso, la propiedad física que cambia es el volumen del líquido. Cualquier cambio de temperatura en el intervalo del termómetro se define como proporcional al cambio en longitud de la columna de líquido. El termómetro se calibra al colocarlo en contacto térmico con un sistema natural que permanezca a temperatura constante. Uno de dichos sistemas es una mezcla de agua y hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. En la **escala de temperatura Celsius**, esta mezcla se define como una temperatura de cero grados Celsius, que se escribe como 0°C; esta temperatura se llama *punto de hielo* del agua. Otro sistema usado comúnmente es una mezcla de agua y vapor en equilibrio térmico a presión atmosférica; su temperatura se define como 100°C, que es el *punto de vapor* del agua. Una vez que los niveles del líquido en el termómetro se establecen en



Figura 19.2 Como resultado de expansión térmica, el nivel del mercurio en el termómetro se eleva a medida que el termómetro se calienta debido al agua en el tubo de ensayo.

estos dos puntos, la longitud de la columna de líquido entre los dos puntos se divide en 100 segmentos iguales para crear la escala Celsius. Por lo tanto, cada segmento indica un cambio en temperatura de un grado Celsius.

Los termómetros calibrados de esta manera presentan problemas cuando se necesitan lecturas de extrema precisión. Por ejemplo, las lecturas proporcionadas por un termómetro de alcohol calibrado en los puntos de hielo y de vapor de agua quizá concuerden, sólo en los puntos de calibración, con las lecturas que da un termómetro de mercurio. Porque el mercurio y el alcohol tienen diferentes propiedades de expansión térmica, cuando un termómetro lee una temperatura de, por ejemplo 50°C, el otro tal vez indique un valor un poco diferente. Las discrepancias entre termómetros son especialmente grandes cuando las temperaturas a medir están lejos de los puntos de calibración.[2]

Un problema adicional, que es práctico, de cualquier termómetro, es el intervalo limitado de temperaturas en las que se puede usar. Un termómetro de mercurio, por ejemplo, no se puede usar por abajo del punto de congelación del mercurio, que es −39°C, y un termómetro de alcohol no es útil para medir temperaturas superiores a 85°C, el punto de ebullición del alcohol. Para superar este problema, es necesario un termómetro universal cuyas lecturas sean independientes de la sustancia que se use. El termómetro de gas, que se estudia en la siguiente sección, plantea este requerimiento.

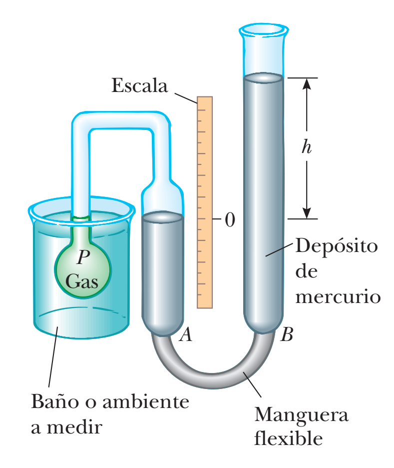


Figura 19.3 Un termómetro de gas a volumen constante mide la presión del gas contenido en la ampolleta sumergida en un baño. El volumen del gas en la celda se mantiene constante al elevar o bajar el depósito *B* para mantener constante el nivel de mercurio en la columna *A*.

19.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

Una versión de un termómetro de gas es el aparato de volumen constante que se muestra en la figura 19.3. El cambio físico que se aprovecha en este dispositivo es la variación de la presión de un volumen de gas fijo debida a la temperatura. La celda se sumerge en un baño de hielo–agua y el depósito de mercurio *B* se eleva o baja hasta que la parte superior del mercurio en la columna *A* está en el punto cero de la escala. La altura *h*, la diferencia entre los niveles de mercurio en el depósito *B* y la columna *A*, indica la presión en la celda a 0°C.

Enseguida la celda se sumerge en agua al punto de vapor. El depósito *B* se reajusta hasta que la parte superior del mercurio en la columna *A* de nuevo está en cero en la escala, así se asegura de que el volumen del gas es el mismo que era cuando la celda estaba en el baño de hielo (de ahí la designación de “volumen constante”). Este ajuste del depósito *B* da un valor para la presión de gas a 100°C. Después estos dos valores de presión y temperatura se grafican como se muestra en la figura 19.4. La línea que une los dos puntos sirve como una curva de calibración para temperaturas desconocidas. (Otros experimentos demuestran que una correspondencia lineal entre presión y temperatura es una muy buena suposición.) Para medir la temperatura de una sustancia, la celda de gas de la figura 19.3 se coloca en contacto térmico con la sustancia y la altura del depósito *B* se ajusta hasta que la parte superior de la columna de mercurio en *A* esté en cero en la escala. La altura de la columna de mercurio en *B* indica la presión del gas; al conocer la presión, la temperatura de la sustancia se encuentra mediante la gráfica de la figura 19.4.

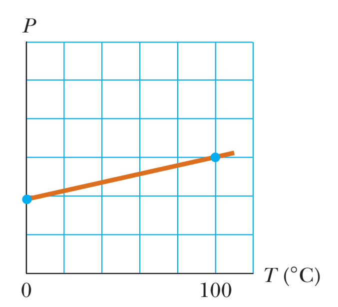


Figura 19.4 Una gráfica representativa de presión con temperatura tomada con un termómetro de gas a volumen constante. Los dos puntos representan temperaturas de referencia conocidas (los puntos de hielo y vapor del agua).

Ahora suponga que usa termómetros de gas para medir las temperaturas de varios gases a diferentes presiones iniciales. Los experimentos demuestran que las lecturas del termómetro son casi independientes del tipo de gas usado, en tanto la presión del gas sea baja y la temperatura esté arriba del punto en el que el gas se licua (figura 19.5). La concordancia entre termómetros que usan varios gases mejora a medida que se reduce la presión.

Si las líneas rectas de la figura 19.5 se extienden hacia temperaturas negativas, se encuentra un resultado notable: **¡en cada caso, la presión es cero cuando la temperatura es −273.15°C!** Este hallazgo sugiere algún papel especial que dicha temperatura particular debe jugar. Se usa como la base para la **escala absoluta de temperatura**, que establece

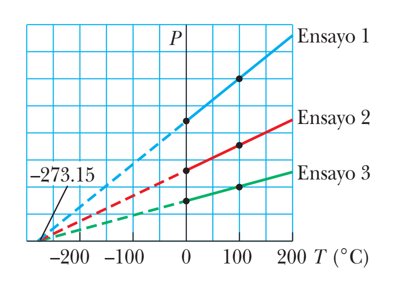


Figura 19.5 Presión con temperatura para ensayos experimentales en gases que tienen diferentes presiones en un termómetro de gas a volumen constante. Note que, para los tres ensayos, la presión se extrapola a cero en la temperatura −273.15°C.

[2] Dos termómetros que usan el mismo líquido también pueden dar lecturas diferentes, debido en parte a las dificultades en la construcción de tubos capilares de vidrio uniformes.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.1
Cuestión de grado

Las notaciones para temperaturas en la escala Kelvin no usan el signo de grado. La unidad para una temperatura Kelvin es simplemente "kelvin" y no "grados Kelvin".

−273.15°C como su punto cero. A esta temperatura usualmente se le refiere como **cero absoluto**. Su indicación es cero porque a temperatura muy baja la presión del gas se hace negativa, lo que no tiene sentido. El tamaño de un grado en la escala absoluta de temperatura se elige como idéntica al tamaño de un grado en la escala Celsius. Debido a eso, la conversión entre dichas temperaturas es

$$T_C = T - 273.15 \quad \textbf{(19.1)}$$

donde T_C es la temperatura Celsius y T es la temperatura absoluta.

Ya que los puntos de hielo y vapor son experimentalmente difíciles de duplicar y dependen de la presión atmosférica, en 1954 el Comité Internacional de Pesos y Medidas adoptó una escala absoluta de temperatura en función de dos nuevos puntos fijos. El primer punto es el cero absoluto. La segunda temperatura para esta nueva escala se eligió como el **punto triple del agua**, que es la combinación única de temperatura y presión en la que el agua líquida, gaseosa y sólida (hielo) coexisten en equilibrio. Este punto triple se presenta una temperatura de 0.01°C y una presión de 4.58 mm de mercurio. En la escala nueva, que usa la unidad *kelvin*, la temperatura del agua en el punto triple se estableció en 273.16 kelvins, abreviada 273.16 K. Esta elección se hizo de modo que la antigua escala absoluta de temperatura de acuerdo en los puntos de hielo y vapor concordaría de modo cercano con la nueva escala en función del punto triple. Esta escala de temperatura absoluta nueva (también llamada **escala Kelvin**) emplea la unidad del SI de temperatura absoluta, el **kelvin**, que se define como **1/273.16 de la diferencia entre el cero absoluto y la temperatura del punto triple del agua**.

La figura 19.6 da la temperatura absoluta de varios procesos y estructuras físicos. La temperatura del cero absoluto (0 K) no se puede lograr, aunque experimentos de laboratorio han estado muy cerca de lograrlo, han llegado a temperaturas de menos de un nanokelvin.

Las escalas de temperatura Celsius, Fahrenheit y Kelvin[3]

La ecuación 19.1 muestra que la temperatura Celsius T_C se desplaza de la temperatura absoluta (Kelvin) T en 273.15°. Ya que el tamaño de un grado es el mismo en las dos escalas, una diferencia de temperatura de 5°C es igual a una diferencia de temperatura de 5 K. Las dos escalas difieren sólo en la elección del punto cero. Por lo tanto, la temperatura del punto de hielo en la escala Kelvin, 273.15 K, corresponde a 0.00°C, y el punto de vapor en la escala Kelvin, 373.15 K, es equivalente a 100.00°C.

Una escala de temperatura común y de uso actual en Estados Unidos es la **escala Fahrenheit**. Dicha escala ubica la temperatura del punto de hielo en 32°F y la temperatura del punto de vapor en 212°F. La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit es

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32°\text{F} \quad \textbf{(19.2)}$$

A partir de las ecuaciones 19.1 y 19.2 se encuentra una correspondencia entre los cambios de temperatura en las escalas Celsius, Kelvin y Fahrenheit:

$$\Delta T_C = \Delta T = \tfrac{5}{9}\,\Delta T_F \quad \textbf{(19.3)}$$

De estas tres escalas de temperatura, sólo la escala Kelvin está en función de un verdadero valor de temperatura cero. Las escalas Celsius y Fahrenheit se basan en un cero arbitrario asociado con una sustancia particular, agua, en un planeta particular, la Tierra. En consecuencia, si usted encuentra una ecuación que pida una temperatura T o que involucre una relación de temperaturas, *debe* convertir todas las temperaturas a kelvins. Si la ecuación contiene un cambio en temperatura ΔT, usar las temperaturas Celsius le dará la respuesta correcta, a la luz de la ecuación 19.3, pero siempre es *más seguro* convertir las temperaturas a la escala Kelvin.

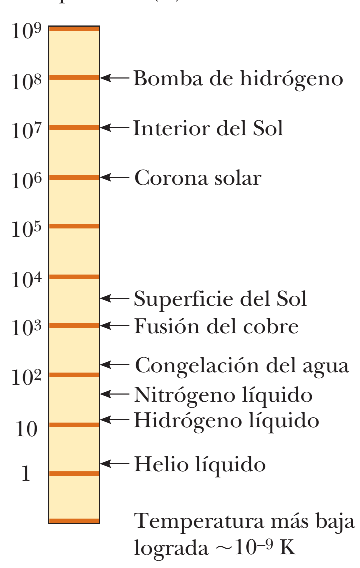


Figura 19.6 Temperaturas absolutas a las que ocurren varios procesos físicos. Note que la escala es logarítmica.

[3] Llamadas en honor de Anders Celsius (1701–1744), Daniel Gabriel Fahrenheit (1686–1736) y William Thomson, lord Kelvin (1824–1907), respectivamente.

Pregunta rápida 19.2 Considere los siguientes pares de materiales. ¿Cuál par representa dos materiales, uno de los cuales es el doble de caliente que el otro? a) agua en ebullición a 100°C, un vaso con agua a 50°C, b) agua en ebullición a 100°C, metano congelado a −50°C, c) un cubo de hielo a −20°C, flamas de un tragafuego de circo a 233°C, d) ninguno de estos pares.

EJEMPLO 19.1 **Conversión de temperaturas**

En un día la temperatura alcanza 50°F, ¿cuál es la temperatura en grados Celsius y en kelvins?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En Estados Unidos una temperatura de 50°F se entiende muy bien. Sin embargo, en muchas otras partes del mundo, esta temperatura puede no tener sentido porque las personas están familiarizadas con la escala de temperatura Celsius.

Categorizar Este ejemplo es un simple problema de sustitución.

Sustituya la temperatura dada en la ecuación 19.2:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = \frac{5}{9}(50 - 32) = \boxed{10°C}$$

Use la ecuación 19.1 para encontrar la temperatura Kelvin:

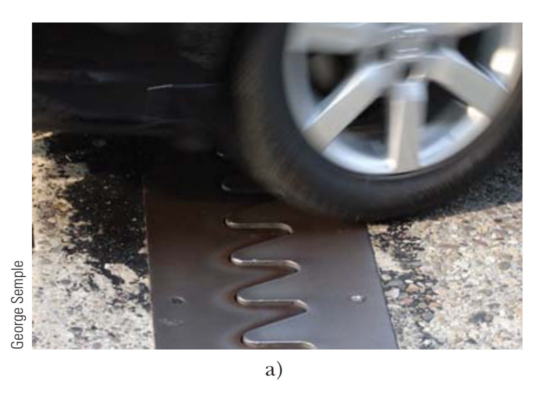
$$T = T_C + 273.15 = 10°C + 273.15 = \boxed{283\text{ K}}$$

Un conjunto de equivalentes de temperatura relacionados con el clima que conviene tener en mente es que 0°C es (literalmente) congelación a 32°F, 10°C es fresco a 50°F, 20°C es temperatura ambiente, 30°C es caliente a 86°F y 40°C es un día caluroso a 104°F.

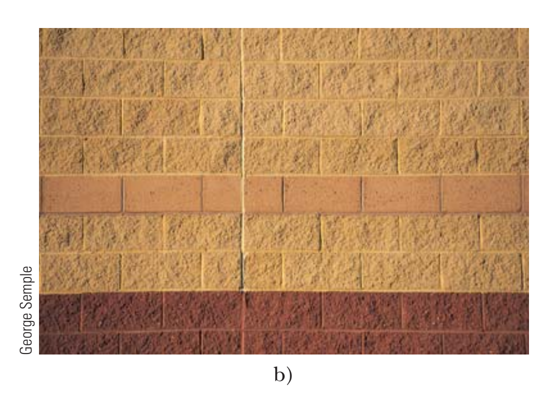
19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

El estudio del termómetro líquido utiliza uno de los cambios mejor conocidos en una sustancia: a medida que aumenta la temperatura, su volumen aumenta. Este fenómeno, conocido como **expansión térmica**, juega un papel importante en numerosas aplicaciones de ingeniería. Por ejemplo, las juntas de expansión térmica, como las que se muestran en la figura 19.7, se deben incluir en edificios, autopistas de concreto, vías ferroviarias, paredes de ladrillo y puentes, para compensar los cambios dimensionales que ocurren a medida que cambia la temperatura.

La expansión térmica es una consecuencia del cambio en la separación *promedio* entre los átomos en un objeto. Para entender este concepto, en su modelo conecte a los átomos mediante resortes rígidos, como se mostró en la sección 15.3 y que aparece en la figura


George Semple

a)


George Semple

b)

Figura 19.7 a) Las juntas de expansión térmica se usan para separar secciones de autopistas en los puentes. Sin estas juntas, las superficies se pandearían debido a expansión térmica en días muy calientes o se fracturarían debido a contracción en días muy fríos. b) La junta vertical larga se llena con un material suave para permitir que la pared se expanda y contraiga a medida que cambia la temperatura de los ladrillos.

15.11b. A temperatura ordinaria, los átomos en un sólido oscilan respecto a sus posiciones de equilibrio con una amplitud de casi 10^{-11} m y una frecuencia cercana a 10^{13} Hz. El espaciamiento promedio entre los átomos es de poco más o menos 10^{-10} m. A medida que la temperatura del sólido aumenta, los átomos oscilan con mayores amplitudes; como resultado, la separación promedio entre ellos aumenta.[4] En consecuencia, el objeto se expande.

Si la expansión térmica es suficientemente pequeña en relación con las dimensiones iniciales de un objeto, el cambio en cualquier dimensión es, hasta una buena aproximación, proporcional a la primera potencia del cambio de temperatura. Suponga que un objeto tiene una longitud inicial L_i a lo largo de alguna dirección en alguna temperatura y la longitud aumenta en una cantidad ΔL para un cambio en temperatura ΔT. Ya que es conveniente considerar el cambio fraccionario en longitud por cada grado de cambio de temperatura, el **coeficiente de expansión lineal promedio** se define como

$$\alpha \equiv \frac{\Delta L/L_i}{\Delta T}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.2

¿Los hoyos se vuelven más grandes o más pequeños?

Cuando la temperatura de un objeto se eleva, cada dimensión lineal aumenta en tamaño. Esto incluye cualquier hoyo en el material, que se expande en la misma forma como si el hoyo estuviera lleno con el material, como se muestra en la figura 19.8. Tenga en mente que la noción de expansión térmica es similar a una amplificación fotográfica.

Los experimentos demuestran que α es constante para pequeños cambios de temperatura. Para propósitos de cálculo, esta ecuación por lo general se reescribe como

$$\Delta L = \alpha L_i\, \Delta T \tag{19.4}$$

o como

$$L_f - L_i = \alpha L_i(T_f - T_i) \tag{19.5}$$

donde L_f es la longitud final, T_i y T_f son las temperaturas inicial y final, respectivamente, y la constante de proporcionalidad α es el coeficiente promedio de expansión lineal para un material determinado y tiene unidades de $(°C)^{-1}$.

Es útil pensar en la expansión térmica como un aumento efectivo o como una ampliación fotográfica de un objeto. Por ejemplo, a medida que una rondana metálica se calienta (figura 19.8), todas las dimensiones, incluido el radio del orificio, aumentan de acuerdo con la ecuación 19.4. **Una cavidad en un trozo de material se expande en la misma forma como si la cavidad estuviese llena con el material.**

La tabla 19.1 menciona los coeficientes de expansión lineal promedio de diferentes materiales. Para dichos materiales, α es positiva, lo que indica un aumento en longitud a temperatura creciente. Sin embargo, éste no siempre es el caso. Algunas sustancias, la calcita ($CaCO_3$) es un ejemplo, se expanden a lo largo de una dimensión (α positiva) y se contraen en otra (α negativa) a medida que sus temperaturas aumentan.

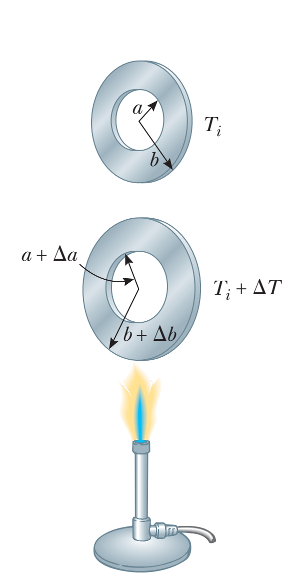


Figura 19.8 Expansión térmica de una rondana metálica homogénea. A medida que la rondana se calienta, todas las dimensiones aumentan. (La expansión está exagerada en esta figura.)

Ya que las dimensiones lineales de un objeto cambian con la temperatura, se sigue que el área superficial y el volumen también cambian. El cambio en volumen es proporcional al volumen inicial V_i y al cambio en temperatura de acuerdo con la relación

$$\Delta V = \beta V_i\, \Delta T \tag{19.6}$$

donde β es el **coeficiente de expansión volumétrica promedio**. Para encontrar la correspondencia entre β y α, suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio del sólido es el mismo en todas direcciones; es decir: suponga que el material es *isotrópico*. Considere una caja sólida de dimensiones ℓ, w y h. Su volumen a cierta temperatura T_i es $V_i = \ell wh$. Si la temperatura cambia a $T_i + \Delta T$, su volumen cambia a $V_i + \Delta V$, donde cada dimensión cambia de acuerdo con la ecuación 19.4. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_i + \Delta V &= (\ell + \Delta\ell)(w + \Delta w)(h + \Delta h) \\ &= (\ell + \alpha\ell\, \Delta T)(w + \alpha w\, \Delta T)(h + \alpha h\, \Delta T) \\ &= \ell wh(1 + \alpha\, \Delta T)^3 \\ &= V_i[1 + 3\alpha\, \Delta T + 3(\alpha\, \Delta T)^2 + (\alpha\, \Delta T)^3] \end{aligned}$$

[4] Para mayor exactitud, la expansión térmica surge de la naturaleza *asimétrica* de la curva de energía potencial para los átomos en un sólido, como se muestra en la figura 15.11a. Si en realidad los osciladores fueran armónicos, las separaciones atómicas promedio no cambiarían sin importar la amplitud de la vibración.

TABLA 19.1

Coeficientes de expansión promedio para algunos materiales cerca de temperatura ambiente

Material	Coeficiente de expansión lineal promedio (α) (°C)$^{-1}$	Material	Coeficiente de expansión volumétrica promedio (β) (°C)$^{-1}$
Aluminio	24×10^{-6}	Alcohol, etílico	1.12×10^{-4}
Latón y bronce	19×10^{-6}	Benceno	1.24×10^{-4}
Cobre	17×10^{-6}	Acetona	1.5×10^{-4}
Vidrio (ordinario)	9×10^{-6}	Glicerina	4.85×10^{-4}
Vidrio (Pyrex)	3.2×10^{-6}	Mercurio	1.82×10^{-4}
Plomo	29×10^{-6}	Trementina	9.0×10^{-4}
Acero	11×10^{-6}	Gasolina	9.6×10^{-4}
Invar (aleación Ni–Fe)	0.9×10^{-6}	Aire[a] a 0°C	3.67×10^{-3}
Concreto	12×10^{-6}	Helio[a]	3.665×10^{-3}

[a] Los gases no tienen un valor específico para el coeficiente de expansión volumétrica porque la cantidad de expansión depende del tipo de proceso por el que pasa el gas. Los valores que se proporcionan aquí suponen que el gas experimenta una expansión a presión constante.

Al dividir ambos lados por V_i y aislar el término $\Delta V/V_i$, se obtiene el cambio fraccionario en volumen:

$$\frac{\Delta V}{V_i} = 3\alpha\ \Delta T + 3(\alpha\ \Delta T)^2 + (\alpha\ \Delta T)^3$$

Puesto que $\alpha\,\Delta T << 1$ para valores representativos de ΔT ($< \sim 100$°C), se desprecian los términos $3(\alpha\ \Delta T)^2$ y $(\alpha\ \Delta T)^3$. Al hacer esta aproximación, es claro que

$$\frac{\Delta V}{V_i} = 3\alpha\ \Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta V = (3\alpha) V_i\ \Delta T$$

Al comparar esta expresión con la ecuación 19.6 se demuestra que

$$\beta = 3\alpha$$

En forma similar, puede demostrar que el cambio en área de una placa rectangular está dada por $\Delta A = 2\alpha A_i\ \Delta T$ (consulte el problema 41).

Como indica la tabla 19.1, cada sustancia tiene su propio coeficiente de expansión promedio. Un mecanismo simple, llamado *tira bimetálica*, que se encuentra en dispositivos prácticos como termostatos, usa la diferencia en coeficientes de expansión para diferentes materiales. Consiste de dos tiras delgadas de metales distintos enlazados juntos. A medida que la temperatura de la tira aumenta, los dos metales se expanden por cantidades diferentes y la tira se dobla como se muestra en la figura 19.9.

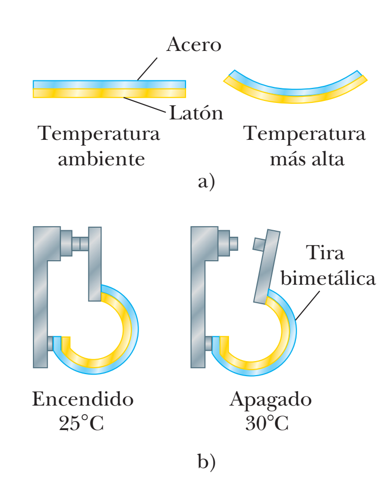


Figura 19.9 a) Una tira bimetálica se dobla a medida que la temperatura cambia, porque los dos metales tienen diferentes coeficientes de expansión. b) Una tira bimetálica usada en un termostato para interrumpir o hacer contacto eléctrico.

Pregunta rápida 19.3 Si se le pide hacer un termómetro de vidrio muy sensible, ¿cuál de los siguientes líquidos de trabajo elegiría? a) mercurio, b) alcohol, c) gasolina, d) glicerina.

Pregunta rápida 19.4 Dos esferas se hacen del mismo metal y tienen el mismo radio, pero una es hueca y la otra sólida. Las esferas se someten al mismo aumento de temperatura. ¿Cuál esfera se expande más? a) La esfera sólida se expande más. b) La esfera hueca se expande más. c) Ambas se expanden en la misma cantidad. d) No hay suficiente información para decirlo.

EJEMPLO 19.2 Expansión de una vía de ferrocarril

Un segmento de vía de ferrocarril de acero tiene una longitud de 30.000 m cuando la temperatura es de 0.0°C.

A) ¿Cuál es su longitud cuando la temperatura es de 40.0°C?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la vía es relativamente larga, se espera obtener un aumento mensurable de longitud para un aumento de temperatura de 40°C.

Categorizar Se evaluará un aumento en longitud a partir de la discusión de esta sección, así que este ejemplo es un problema de sustitución.

Use la ecuación 19.4 y el valor del coeficiente de expansión lineal de la tabla 19.1:

$$\Delta L = \alpha L_i \, \Delta T = [11 \times 10^{-6} (°C)^{-1}](30.000 \text{ m})(40.0°C) = 0.013 \text{ m}$$

Encuentre la nueva longitud de la vía:

$$L_f = 30.000 \text{ m} + 0.013 \text{ m} = \boxed{30.013 \text{ m}}$$

B) Suponga que los extremos de la vía están rígidamente sujetos a 0.0°C de modo que se evita la expansión. ¿Cuál es el esfuerzo térmico que se establece en la vía si su temperatura se eleva a 40.0°C?

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del ejemplo es un problema de análisis porque es necesario usar conceptos de otro capítulo.

Analizar El esfuerzo térmico es el mismo que el esfuerzo de tensión en la situación en que la vía se expande libremente y después se comprime con una fuerza mecánica F de regreso a su longitud original.

Encuentre el esfuerzo de tensión de la ecuación 12.6 y use el módulo de Young para el acero de la tabla 12.1:

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L_i}$$

$$\frac{F}{A} = (20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)\left(\frac{0.013 \text{ m}}{30.000 \text{ m}}\right) = \boxed{8.7 \times 10^7 \text{ N/m}^2}$$

Finalizar La expansión en el inciso A) es de 1.3 cm. Esta expansión de hecho es mensurable, como se predijo al conceptualizar. El esfuerzo térmico en el inciso B) se evita al dejar pequeñas aberturas de dilatación entre las vías.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la temperatura cae a −40.0°C? ¿Cuál es la longitud del segmento que no está sujeto?

Respuesta La expresión para el cambio de longitud en la ecuación 19.4 es el mismo, ya sea que la temperatura aumente o disminuya. Por lo tanto, si hay un aumento en longitud de 0.013 m cuando la temperatura aumenta en 40°C, hay una disminución en longitud de 0.013 m cuando la temperatura disminuye en 40°C. (Se supone que α es constante sobre todo el intervalo de temperaturas.) La nueva longitud a la temperatura más fría es 30.000 m − 0.013 m = 29.987 m.

EJEMPLO 19.3 El corto electrotérmico

Un dispositivo electrónico con diseño pobre tiene dos tornillos unidos a diferentes partes del dispositivo que casi se tocan uno con otro en su interior, como en la figura 19.10. Los tornillos de acero y latón están a diferentes potenciales eléctricos y, si se tocan, se desarrollará un cortocircuito que dañará al dispositivo. (El potencial eléctrico se estudiará en el capítulo 25.) La separación inicial entre los extremos de los tornillos es de 5.0 μm a 27°C. ¿A qué temperatura se tocarán los tornillos? Suponga que la distancia entre las paredes del dispositivo no es afectada por el cambio de temperatura.

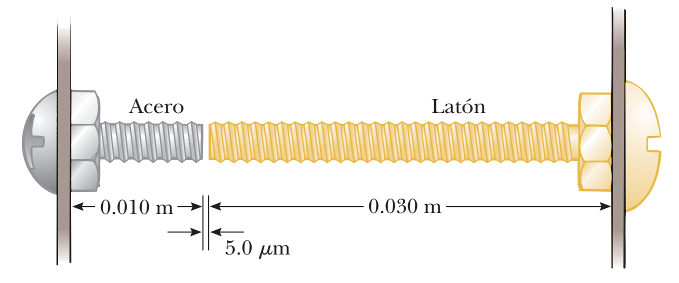


Figura 19.10 (Ejemplo 19.3) Dos tornillos unidos a diferentes partes de un dispositivo eléctrico casi se tocan cuando la temperatura es de 27°C. A medida que la temperatura aumenta, los extremos de los tornillos se mueven uno hacia el otro.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los extremos de ambos tornillos se expanden en el espacio que hay entre ellos a medida que aumenta la temperatura.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de expansión térmica en el que la *suma* de los cambios en longitud de los dos tornillos debe ser igual a la longitud de la separación inicial entre los extremos.

Analizar Establezca la suma de los cambios de longitud igual al ancho de la separación:

$$\Delta L_{\text{lat}} + \Delta L_{\text{ac}} = \alpha_{\text{lat}} L_{i,\text{lat}} \, \Delta T + \alpha_{\text{ac}} L_{i,\text{ac}} \, \Delta T = 5.0 \times 10^{-6}\text{ m}$$

Resuelva para ΔT:

$$\Delta T = \frac{5.0 \times 10^{-6}\text{ m}}{\alpha_{\text{lat}} L_{i,\text{lat}} + \alpha_{\text{ac}} L_{i,\text{ac}}}$$

$$= \frac{5.0 \times 10^{-6}\text{ m}}{[19 \times 10^{-6}(°\text{C})^{-1}](0.030\text{ m}) + [11 \times 10^{-6}(°\text{C})^{-1}](0.010\text{ m})} = 7.4°\text{C}$$

Encuentre la temperatura a la que se tocan los tornillos:

$$T = 27°\text{C} + 7.4°\text{C} = 34°\text{C}$$

Finalizar Esta temperatura es posible si el acondicionamiento de aire en el alojamiento del dispositivo falla durante un largo periodo de tiempo en un día de verano muy caliente.

El inusual comportamiento del agua

Por lo general los líquidos aumentan en volumen con temperatura creciente y tienen coeficientes de expansión volumétrica promedio alrededor de diez veces mayores que los sólidos. El agua fría es una excepción a esta regla, como puede ver en la curva de densidad con temperatura, que se muestra en la figura 19.11. A medida que la temperatura aumenta de 0°C a 4°C, el agua se contrae y por lo tanto su densidad aumenta. Arriba de 4°C, el agua se expande con temperatura creciente y así su densidad disminuye. En consecuencia, la densidad del agua alcanza un valor máximo de 1.000 g/cm^3 a 4°C.

Este inusual comportamiento de expansión térmica del agua sirve para explicar por qué un estanque empieza a congelarse en la superficie, en lugar de hacerlo en el fondo. Cuando la temperatura del aire cae de, por ejemplo, 7°C a 6°C, el agua superficial también se enfría y en consecuencia disminuye en volumen. Como resultado, el agua de la superficie se hunde y agua más caliente de abajo se fuerza a la superficie para enfriarse. Sin embargo, cuando la temperatura del aire está entre 4°C y 0°C, el agua de la superficie

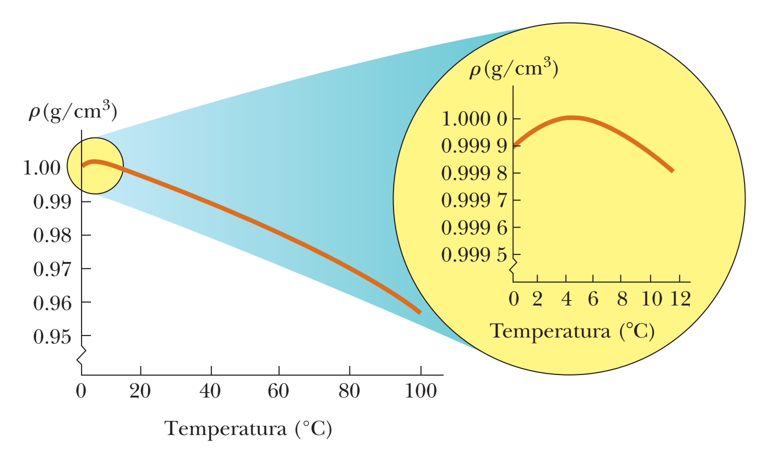


Figura 19.11 Variación de la densidad del agua a presión atmosférica con la temperatura. La inserción a la derecha muestra que la densidad máxima del agua se presenta a 4°C.

se expande mientras se enfría y se vuelve menos densa que el agua bajo ella. El proceso de mezcla se detiene y al final el agua de la superficie se congela. A medida que el agua se congela, el hielo permanece en la superficie porque el hielo es menos denso que el agua. El hielo continúa acumulándose en la superficie, mientras que el agua cercana al fondo permanece a 4°C. Si éste no fuese el caso, los peces y otras formas de vida marina no sobrevivirían.

19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

La ecuación de expansión volumétrica $\Delta V = \beta V_i \Delta T$ es de acuerdo con la suposición de que el material tiene un volumen inicial V_i antes de que se presente un cambio de temperatura. Tal es el caso para sólidos y líquidos porque tienen volumen fijo a una temperatura determinada.

El caso para gases es por completo diferente. Las fuerzas interatómicas dentro de los gases son muy débiles y, en muchos casos, se puede imaginar dichas fuerzas como inexistentes y aún así hacer muy buenas aproximaciones. Debido a eso, *no hay separación de equilibrio* para los átomos ni volumen "estándar" a una temperatura determinada; el volumen depende del tamaño del contenedor. Como resultado, con la ecuación 19.6 no es posible expresar cambios en volumen ΔV en un proceso sobre un gas porque no se definió el volumen V_i al comienzo del proceso. Las ecuaciones que involucran gasas contienen el volumen V, en lugar de un *cambio* en el volumen desde un valor inicial, como una variable.

Para un gas, es útil saber cómo se relacionan las cantidades volumen V, presión P y temperatura T para una muestra de gas de masa m. En general, la ecuación que interrelaciona estas cantidades, llamada *ecuación de estado*, es muy complicada. Sin embargo, si el gas se mantiene a una presión muy baja (o densidad baja), la ecuación de estado es muy simple y se encuentra experimentalmente. Tal gas de densidad baja se refiere como un **gas ideal**.[5] Conviene usar el **modelo de gas ideal** para hacer predicciones que sean adecuadas para describir el comportamiento de gases reales a bajas presiones.

Es provechoso expresar la cantidad de gas en un volumen determinado en términos del número de moles n. Un **mol** de cualquier sustancia es aquella cantidad de la sustancia que contiene un **número de Avogadro** $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ de partículas constituyentes (átomos o moléculas). El número de moles n de una sustancia se relaciona con su masa m a través de la expresión

$$n = \frac{m}{M} \tag{19.7}$$

donde M es la masa molar de la sustancia. La masa molar de cada elemento químico es la masa atómica (de la tabla periódica; consulte el apéndice C) expresada en gramos por cada mol. Por ejemplo, la masa de un átomo de He es 4.00 u (unidades de masa atómica), así que la masa molar del He es 4.00 g/mol.

Ahora suponga que un gas ideal está confinado a un contenedor cilíndrico cuyo volumen puede variar mediante un pistón móvil, como en la figura 19.12. Si supone que el cilindro no tiene fugas, la masa (o el número de moles) del gas permanece constante. Para tal sistema, los experimentos proporcionan la siguiente información:

- Cuando el gas se mantiene a una temperatura constante, su presión es inversamente proporcional al volumen. (Este comportamiento se describe como ley de Boyle.)
- Cuando la presión del gas se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a la temperatura. (Este comportamiento se describe como ley de Charles.)
- Cuando el volumen del gas se mantiene constante, la presión es directamente proporcional a la temperatura. (Este comportamiento se describe como ley de Gay–Lussac.)

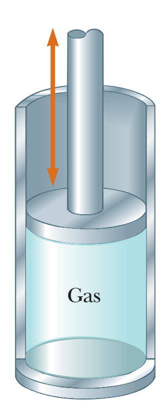


Figura 19.12 Un gas ideal confinado a un cilindro cuyo volumen puede variar mediante un pistón móvil.

[5] Para mayor especificidad, las suposiciones en este caso son que la temperatura del gas no debe ser muy baja (el gas no se debe condensar en un líquido) o muy altas y que la presión debe ser baja. El concepto de gas ideal implica que las moléculas de gas no interactúan, excepto en colisión, y que el volumen molecular es despreciable comparado con el volumen del contenedor. En realidad, un gas ideal no existe. Sin embargo, el concepto de un gas ideal es muy útil porque los gases reales a bajas presiones se comportan como los gases ideales.

Estas observaciones se resumen mediante la **ecuación de estado para un gas ideal:**

$$PV = nRT \qquad (19.8)$$

◀ Ecuación de estado para un gas ideal

En esta expresión, también conocida como **ley de gas ideal**, n es el número de moles de gas en la muestra y R es una constante. Los experimentos en numerosos gases demuestran que, conforme la presión tiende a cero, la cantidad PV/nT tiende al mismo valor R para todos los gases. Por esta razón, R se llama **constante universal de los gases**. En unidades del SI la presión se expresa en pascales ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) y el volumen en metros cúbicos, el producto PV tiene unidades de newton·metros, o joules, y R tiene el valor

$$R = 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \qquad (19.9)$$

Si la presión se expresa en atmósferas y el volumen en litros ($1 \text{ L} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$), por lo tanto R tiene el valor

$$R = 0.082\,06 \text{ L} \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$$

Al usar este valor de R y la ecuación 19.8 se demuestra que el volumen ocupado por 1 mol de cualquier gas a presión atmosférica y a 0°C (273 K) es de 22.4 L.

La ley de gas ideal afirma que, si el volumen y la temperatura de una cantidad fija de gas no cambian, la presión también permanece constante. Considere una botella de champaña que se agita y luego expulsa líquido cuando se abre, como muestra la figura 19.13. Una concepción equivocada común es que la presión dentro de la botella aumenta cuando la botella se agita. Por lo contrario, ya que la temperatura de la botella y su contenido permanecen constantes en tanto la botella está sellada, lo mismo pasa con la presión, como se puede demostrar al cambiar el corcho con un medidor de presión. La explicación correcta es que el gas dióxido de carbono reside en el volumen entre la superficie del líquido y el corcho. La presión del gas en este volumen se establece más alta que la presión atmosférica en el proceso de embotellado. Agitar la botella desplaza parte del dióxido de carbono en el líquido, donde forma burbujas, y estas burbujas quedan unidas en el interior de la botella. (No se genera nuevo gas al agitar.) Cuando la botella se abre, la presión se reduce a presión atmosférica, por lo que el volumen de las burbujas aumenta súbitamente. Si las burbujas se unen a la botella (detrás de la superficie del líquido), su rápida expansión expulsa líquido de la botella. Sin embargo, si los lados y el fondo de la botella se golpean primero hasta que no queden burbujas bajo la superficie, la caída en presión no fuerza al líquido de la botella cuando la champaña se abre.

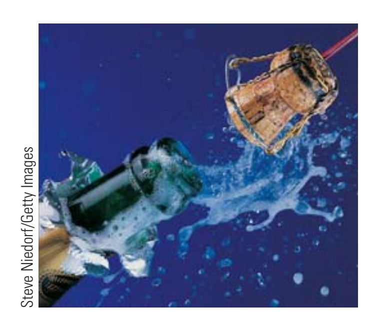


Figura 19.13 Una botella de champaña se agita y abre. El líquido se expulsa con fuerza de la abertura. Una idea equivocada común es que la presión dentro de la botella aumenta por la sacudida.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.3
Demasiadas *k*

Existen muchas cantidades físicas para las que se usa la letra k. Dos de las que se vieron anteriormente son la constante de fuerza para un resorte (capítulo 15) y el número de onda para una onda mecánica (capítulo 16). La constante de Boltzmann es otra k, y en el capítulo 20 se verá que la k se usa para conductividad térmica y para una constante eléctrica en el capítulo 23. Para encontrar sentido en este confuso estado de asuntos y ayudarlo a reconocer la constante de Boltzmann se usa un subíndice B. En este libro verá la constante de Boltzmann como k_B, pero en otras fuentes puede ver la constante de Boltzmann simplemente como k.

La ley de gas ideal con frecuencia se expresa en términos del número total de moléculas N. Puesto que el número de moles n es igual a la razón del número total de moléculas y el número de Avogadro N_A, la ecuación 19.8 se escribe como

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A} RT$$

$$PV = Nk_BT \qquad (19.10)$$

donde k_B es la **constante de Boltzmann**, que tiene el valor

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \qquad (19.11)$$

◀ Constante de Boltzmann

Es común llamar a cantidades tales como P, V y T **variables termodinámicas** de un gas ideal. Si la ecuación de estado se conoce, una de las variables siempre se expresa como alguna función de las otras dos.

Pregunta rápida 19.5 Un material común para acolchar objetos en los paquetes está hecho de burbujas de aire atrapadas entre hojas de plástico. Este material es más efectivo para evitar que los contenidos del paquete se muevan dentro del empaque en a) un día caliente, b) un día frío, c) días calientes o fríos.

Pregunta rápida 19.6 En un día de invierno enciende su horno y la temperatura del aire dentro de su casa aumenta. Suponga que su casa tiene la cantidad normal de fuga entre el aire interior y el aire exterior. ¿El número de moles de aire en su habitación a la temperatura más alta a) es mayor que antes, b) menor que antes o c) igual que antes?

EJEMPLO 19.4 Calentamiento de una lata de aerosol

Una lata de aerosol que contiene un gas propelente al doble de la presión atmosférica (202 kPa) y que tiene un volumen de 125.00 cm^3 está a 22°C. Después se lanza a un fuego abierto. Cuando la temperatura del gas en la lata alcanza 195°C, ¿cuál es la presión dentro de la lata? Suponga que cualquier cambio en el volumen de la lata es despreciable.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por intuición cabe esperar que la presión del gas en el contenedor aumente debido a la temperatura creciente.

Categorizar El gas en la lata se modela como ideal y se usa la ley del gas ideal para calcular la nueva presión.

Analizar Reordene la ecuación 19.8:

$$1)\quad \frac{PV}{T} = nR$$

No escapa aire durante la compresión, de modo que n, y por lo tanto nR, permanecen constantes. Por ende, establezca el valor inicial del lado izquierdo de la ecuación 1) igual al valor final:

$$2)\quad \frac{P_iV_i}{T_i} = \frac{P_fV_f}{T_f}$$

Ya que los volúmenes inicial y final del gas se suponen iguales, cancele los volúmenes:

$$3)\quad \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}$$

Resuelva para P_f:

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)P_i = \left(\frac{468\text{ K}}{295\text{ K}}\right)(202\text{ kPa}) = 320\text{ kPa}$$

Finalizar Mientras más alta sea la temperatura, mayor será la presión que ejerza el gas atrapado, como se esperaba. Si la presión aumenta lo suficiente, la lata puede explotar. Debido a esta posibilidad, nunca debe desechar las latas de aerosol en el fuego.

¿Qué pasaría si? Suponga que se incluye un cambio de volumen debido a expansión térmica de la lata de acero a medida que aumenta la temperatura. ¿Esto altera significativamente la respuesta para la presión final?

Respuesta Ya que el coeficiente de expansión térmica del acero es muy pequeño, no se espera un gran efecto en la respuesta final.

Encuentre el cambio en volumen de la lata mediante la ecuación 19.6 y el valor de α para el acero de la tabla 19.1:

$$\Delta V = \beta V_i\,\Delta T = 3\alpha V_i\,\Delta T$$
$$= 3[11 \times 10^{-6}(°\text{C})^{-1}](125.00\text{ cm}^3)(173°\text{C}) = 0.71\text{ cm}^3$$

Comience de nuevo con la ecuación 2) y encuentre una ecuación para la presión final:

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_i}{V_f}\right)P_i$$

Este resultado difiere de la ecuación 3) sólo en el factor V_i/V_f. Evalúe este factor:

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{125.00\text{ cm}^3}{(125.00\text{ cm}^3 + 0.71\text{ cm}^3)} = 0.994 = 99.4\%$$

Por lo tanto, la presión final diferirá sólo por 0.6% del valor calculado sin considerar la expansión térmica de la lata. Al tomar 99.4% de la presión final previa, la presión final que incluye expansión térmica es 318 kPa.

Resumen

DEFINICIONES

Dos objetos están en **equilibrio térmico** mutuo si no intercambian energía cuando están en contacto térmico.

La **temperatura** es la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. **Dos objetos en equilibrio térmico mutuo están a la misma temperatura.** La unidad del SI de temperatura absoluta es el **kelvin**, que se define como 1/273.16 de la diferencia entre cero absoluto y la temperatura del punto triple del agua.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **ley cero de la termodinámica** establece que si los objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, por lo tanto los objetos A y B están en equilibrio térmico mutuo.

Cuando la temperatura de un objeto se cambia por una cantidad ΔT, su longitud cambia por una cantidad ΔL que es proporcional a ΔT y a su longitud inicial L_i:

$$\Delta L = \alpha L_i \, \Delta T \qquad \textbf{(19.4)}$$

Donde la constante α es el **coeficiente de expansión lineal promedio**. El **coeficiente de expansión volumétrica promedio** β para un sólido es aproximadamente igual a 3α.

Un **gas ideal** es aquel para el cual PV/nT es constante. Un gas ideal se describe mediante la **ecuación de estado**,

$$PV = nRT \qquad \textbf{(19.8)}$$

donde n es igual al número de moles del gas, P es su presión, V su volumen, R la constante universal de los gases (8.314 J/mol·K) y T la temperatura absoluta del gas. Un gas real se comporta casi como un gas ideal si tiene una densidad baja.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Es posible que dos objetos estén en equilibrio térmico si no están en contacto mutuo? Explique.
2. Un trozo de cobre se deja caer en una cubeta con agua. Si la temperatura del agua se eleva, ¿qué ocurre con la temperatura del cobre? ¿Bajo qué condiciones el agua y el cobre están en equilibrio térmico?
3. Al describir su próximo viaje a la Luna y como lo presenta la película *Apolo 13* (Universal, 1995), el astronauta Jim Lovell dijo: "Caminaré en un lugar donde hay una diferencia de 400 grados entre la luz solar y la sombra." ¿Qué es eso que es caliente en la luz solar y frío en la sombra? Suponga que un astronauta que está de pie en la Luna sostiene un termómetro en su mano enguantada. ¿La lectura en el termómetro es la temperatura del vacío en la superficie de la Luna? ¿Lee alguna temperatura? Si es así, ¿qué objeto o sustancia tiene dicha temperatura?
4. **O** ¿Qué ocurriría si el vidrio de un termómetro se expande más al calentarse que el líquido en el tubo? a) El termómetro se rompería. b) No podía usarse para medir temperatura. c) Se podría usar para temperaturas sólo por abajo de temperatura ambiente. d) Tendría que sostenerlo con el bulbo en la parte superior. e) Los números más grandes se encontrarían más cerca del bulbo. f) Los números no estarían igualmente espaciados.
5. **O** Suponga que vacía una charola de cubos de hielo en un tazón casi lleno con agua y cubre el tazón. Después de media hora, los contenidos del tazón llegan a equilibrio térmico, con más agua líquida y menos hielo que al principio. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera? a) La temperatura del agua líquida es mayor que la temperatura del hielo restante. b) La temperatura del agua líquida es la misma que la del hielo. c) La temperatura del agua líquida es menor que la del hielo. d) Las temperaturas comparativas del agua líquida y el hielo dependen de las cantidades presentes.
6. **O** El coeficiente de expansión lineal del cobre es 17×10^{-6} $(°C)^{-1}$. La Estatua de la Libertad mide 93 m de alto una mañana de verano cuando la temperatura es de 25°C. Suponga que las placas de cobre que cubren la estatua se montan borde con borde sin juntas de dilatación y no se doblan ni se empalman en el marco que las soporta a medida que el día se vuelve más caliente. ¿Cuál es el orden de magnitud del aumento de altura de la estatua? a) 0.1 mm, b) 1 mm, c) 1 cm, d) 10 cm, e) 1 m, f) 10 m, g) ninguna de estas respuestas.

7. En una habitación que tiene una temperatura de 22°C a una cinta de acero se le colocan marcas para indicar la longitud. ¿Las mediciones hechas con la cinta en un día en que la temperatura es de 27°C son muy largas, muy cortas o precisas? Defienda su respuesta.

8. Use una tabla periódica de los elementos (véase el apéndice C) para determinar el número de gramos en un mol de a) hidrógeno, que tiene moléculas diatómicas; b) helio; y c) monóxido de carbono.

9. ¿Qué predice la ley del gas ideal acerca del volumen de una muestra de gas a cero absoluto? ¿Por qué esta predicción es incorrecta?

10. **O** Un globo de caucho se llena con 1 L de aire a 1 atm y 300 K y luego se pone en un refrigerador criogénico a 100 K. El caucho permanece flexible mientras se enfría. **i)** ¿Qué ocurre con el volumen del globo? a) Disminuye a $\frac{1}{6}$ L. b) Disminuye a $\frac{1}{3}$ L. c) Disminuye a $1/\sqrt{3}$ L. d) Es constante. e) Aumenta. **ii)** ¿Qué ocurre con la presión del aire en el globo? a) Disminuye a $\frac{1}{6}$ atm. b) Disminuye a $\frac{1}{3}$ atm. c) Disminuye a $1/\sqrt{3}$ atm. d) Es constante. e) Aumenta.

11. **O** Dos cilindros a la misma temperatura contienen igual cantidad de un tipo de gas. ¿Es posible que el cilindro A tenga tres veces el volumen del cilindro B? Si es así, ¿qué puede concluir acerca de las presiones que ejercen los gases? a) La situación no es posible. b) Es posible, pero no se puede concluir nada acerca de las presiones. c) Es posible sólo si la presión en A es tres veces la presión en B. d) Las presiones deben ser iguales. e) La presión en A debe ser un tercio que la presión de B.

12. **O** Elija cada respuesta correcta. La gráfica de presión con temperatura en la figura 19.5 exhibe, ¿que para cada muestra de gas? a) La presión es proporcional a la temperatura Celsius. b) La presión es una función lineal de la temperatura. c) La presión aumenta a la misma proporción que la temperatura. d) La presión aumenta con la temperatura con una proporción constante.

13. **O** Un cilindro con un pistón contiene una muestra de un gas ligero. El tipo de gas y el tamaño de la muestra pueden cambiar. El cilindro se coloca en diferentes baños de temperatura constante y el pistón se mantiene en diferentes posiciones. Clasifique los siguientes casos de mayor a menor de acuerdo con la presión del gas, y muestre cualquier caso de igualdad. a) Una muestra de 2 mmoles de oxígeno se mantiene a 300 K en un contenedor de 100 cm^3. b) Una muestra de 2 mmoles de oxígeno se mantiene a 600 K en un contenedor de 200 cm^3. c) Una muestra de oxígeno de 2 mmoles se mantiene a 600 K en un contenedor de 300 cm^3. d) Una muestra de 4 mmoles de helio se mantiene a 300 K en un contenedor de 200 cm^3. e) Una muestra de 4 mmoles de helio se mantiene a 250 K en un contenedor de 200 cm^3.

14. El péndulo de cierto reloj se fabrica de latón. Cuando la temperatura aumenta, ¿el periodo del reloj aumenta, disminuye o permanece igual? Explique.

15. Un radiador de automóvil se llena hasta el borde con agua cuando el motor está frío. ¿Qué ocurre con el agua cuando el motor está en operación y el agua se lleva a temperatura alta? ¿Qué tienen los automóviles modernos en sus sistemas de enfriamiento para evitar la pérdida de refrigerante?

16. Las tapas metálicas en los frascos de vidrio con frecuencia se aflojan al pasar agua caliente sobre ellas. ¿Por qué funciona esto?

17. Cuando el anillo metálico y la esfera de metal de la figura P19.17 están a temperatura ambiente, la esfera apenas puede pasar por el anillo. Después de que la esfera se calienta en una flama, no puede pasar por el anillo. Explique. **¿Qué pasaría si?** ¿Y si el anillo se caliente y la esfera se deja a temperatura ambiente? ¿La esfera pasa a través del anillo?

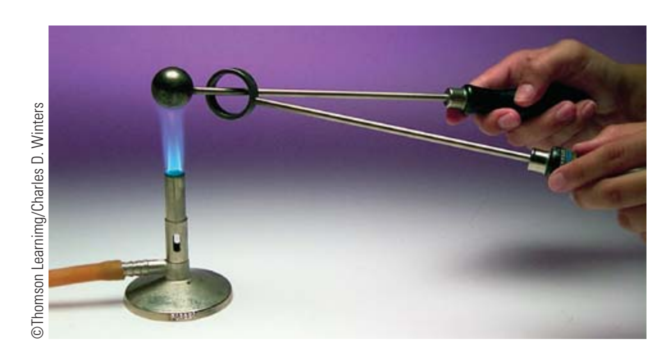


Figura P19.17

Problemas

Sección 19.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

Sección 19.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

1. Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (dióxido de carbono en evaporación en el estado sólido, con una temperatura de −80.0°C) y en alcohol etílico en ebullición (78.0°C). Las dos presiones son 0.900 atm y 1.635 atm. a) ¿Qué valor Celsius de cero absoluto produce la calibración? ¿Cuál es la presión en b) el punto de congelación del agua y c) el punto de ebullición del agua?

2. La diferencia de temperatura entre el interior y el exterior de un motor de automóvil es de 450°C. Exprese esta diferencia de temperatura en a) la escala Fahrenheit y b) la escala Kelvin.

3. El nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de −195.81°C a presión atmosférica. Exprese esta temperatura a) en grados Fahrenheit y b) en kelvins.

4. El punto de fusión del oro es 1 064°C, y su punto de ebullición es 2 660°C. a) Exprese estas temperaturas en kelvins. b) Calcule la diferencia entre estas temperaturas en grados Celsius y en kelvins.

Sección 19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

Nota: La tabla 19.1 está disponible para usarla en la resolución de problemas en esta sección.

5. Un alambre telefónico de cobre en esencia no tiene comba entre postes separados 35.0 m en un día de invierno cuando la

temperatura es de −20.0°C. ¿Cuánto más largo es el alambre en un día de verano, cuando $T_C = 35.0°C$?

6. Las secciones de concreto de cierta superautopista están diseñadas para tener una longitud de 25.0 m. Las secciones se vierten y curan a 10.0°C. ¿Qué espaciamiento mínimo debe dejar el ingeniero entre las secciones para eliminar el pandeo si el concreto alcanzará una temperatura de 50.0°C?

7. El elemento activo de cierto láser se fabrica de una barra de vidrio de 30.0 cm de largo y 1.50 cm de diámetro. Si la temperatura de la barra aumenta en 65.0°C, ¿cuál es el aumento en a) su longitud, b) su diámetro y c) su volumen? Suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio del vidrio es 9.00×10^{-6} (°C)$^{-1}$.

8. **Problema de repaso.** Dentro de la pared de una casa, una sección de tubería de agua caliente en forma de L consiste en una pieza recta horizontal de 28.0 cm de largo, un codo y una pieza recta vertical de 134 cm de largo (figura P19.8). Una trabe y un castillo mantienen fijos los extremos de esta sección de tubería de cobre. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento del codo cuando hay flujo de agua, lo que eleva la temperatura de la tubería de 18.0°C a 46.5°C.

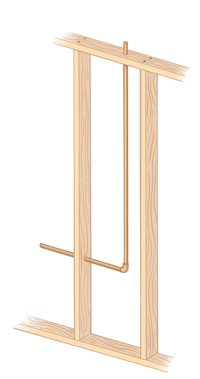


Figura P19.8

9. ● Un delgado anillo de latón con diámetro interno de 10.00 cm a 20.0°C se calienta y desliza sobre una barra de aluminio de 10.01 cm de diámetro a 20.0°C. Si supone que los coeficientes de expansión lineal promedio son constantes, a) ¿a qué temperatura se debe enfriar esta combinación para separar las partes? Explique si esta separación es posible. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Y si la barra de aluminio tuviera 10.02 cm de diámetro?

10. ● A 20.0°C, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5.000 0 cm y una barra de latón tiene un diámetro de 5.050 0 cm. a) Si sólo se calienta el anillo, ¿qué temperatura debe alcanzar de modo que apenas se deslice por la barra? b) **¿Qué pasaría si?** Si tanto el anillo como la barra se calientan juntos, ¿qué temperatura deben alcanzar para que el anillo apenas se deslice sobre la barra? ¿Funcionaría este último proceso? Explique.

11. ● Un matraz aforado fabricado de Pyrex se calibra en 20.0°C. Se llena hasta la marca de 100 mL con acetona a 35.0°C. a) ¿Cuál es el volumen de la acetona cuando se enfría a 20.0°C? b) ¿Qué tan significativo es el cambio en volumen del matraz?

12. En un día en que la temperatura es de 20.0°C, un sendero de concreto se vierte en tal forma que los extremos del sendero son incapaces de moverse. a) ¿Cuál es el esfuerzo en el cemento en un día caliente de 50.0°C? b) ¿El concreto se fractura? Considere que el módulo de Young para el concreto es 7.00×10^9 N/m^2 y la resistencia a la compresión es de 2.00×10^9 N/m^2.

13. Un cilindro hueco de aluminio de 20.0 cm de profundidad tiene una capacidad interna de 2.000 L a 20.0°C. Se llena por completo con trementina y luego se calienta a fuego lento a 80.0°C. a) ¿Cuánta trementina se desborda? b) Si después el cilindro se enfría otra vez a 20.0°C, ¿A qué distancia del borde del cilindro retrocede la superficie de la trementina?

14. ● El puente Golden Gate en San Francisco tiene un tramo principal de 1.28 km de largo, uno de los más largos del mundo. Imagine que un alambre de acero tenso con esta longitud y área de sección transversal de 4.00×10^{-6} m^2 se tiende en la losa, con sus extremos unidos a las torres del puente, y que en este día de verano la temperatura del alambre es de 35.0°C. a) Cuando llega el invierno, las torres permanecen a la misma distancia de separación y la losa del puente mantiene la misma forma mientras se abren las juntas de dilatación. Cuando la temperatura cae a −10.0°C, ¿cuál es la tensión en el alambre? Considere que el módulo de Young para el acero es de 20.0×10^{10} N/m^2. b) Si el esfuerzo en el acero supera su límite elástico de 3.00×10^8 N/m^2, ocurre deformación permanente. ¿A qué temperatura el alambre alcanzaría su límite elástico? c) **¿Qué pasaría si?** Explique cómo cambiarían sus respuestas a los incisos a) y b) si el puente Golden Gate tuviera el doble de largo.

15. Cierto telescopio forma una imagen de parte de un cúmulo de estrellas en un chip detector de carga acoplada de silicio cuadrado de 2.00 cm por lado. Cuando se enciende, en el chip se enfoca un campo estelar y su temperatura es de 20.0°C. El campo estelar contiene 5 342 estrellas dispersas de manera uniforme. Para hacer al detector más sensible, se enfría a −100°C. ¿En tal caso cuántas imágenes de estrellas encajan en el chip? El coeficiente de expansión lineal promedio del silicio es 4.68×10^{-6} (°C)$^{-1}$.

Sección 19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

16. En su día de bodas, su prometida le da un anillo de oro de 3.80 g de masa. Cincuenta años después, su masa es de 3.35 g. En promedio, ¿cuántos átomos del anillo se erosionaron durante cada segundo de su matrimonio? La masa molar del oro es de 197 g/mol.

17. La llanta de un automóvil se infla con aire originalmente a 10.0°C y presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28.0% de su volumen original y la temperatura aumenta a 40.0°C. a) ¿Cuál es la presión de la llanta? b) Después de que el automóvil se maneja con gran rapidez, la temperatura en el aire de la llanta se eleva a 85.0°C y el volumen interior de la llanta aumenta en 2.00%. ¿Cuál es la nueva presión de la llanta (absoluta) en pascales?

18. Un recipiente de 8.00 L contiene gas a una temperatura de 20.0°C y una presión de 9.00 atm. a) Determine el número de moles de gas en el recipiente. b) ¿Cuántas moléculas hay en el recipiente?

19. Un auditorio tiene dimensiones de 10.0 m × 20.0 m × 30.0 m. ¿Cuántas moléculas de aire llenan el auditorio a 20.0°C y una presión de 101 kPa?

20. Un cocinero pone 9.00 g de agua en una olla de presión de 2.00 L y la calienta a 500°C. ¿Cuál es la presión dentro del contenedor?

21. La masa de un globo de aire caliente y su carga (no incluido el aire interior) es de 200 kg. El aire exterior está a 10.0°C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m^3. ¿A qué temperatura se debe calentar el aire en el globo antes de que éste se eleve? (La densidad del aire a 10.0°C es de 1.25 kg/m^3.)

22. ● *Tontería estilo masculino.* Su padre y su hermano menor se enfrentan al mismo problema. El rociador de jardín de su padre y el cañón de agua de su hermano tienen tanques con una capacidad de 5.00 L (figura P19.22). Su padre pone una cantidad despreciable de fertilizante concentrado en su tanque. Ambos vierten 4.00 L de agua y sellan sus tanques, de modo que los tanques también contienen aire a presión atmosférica. A continuación, cada uno usa una bomba de pistón operada a mano para inyectar más aire hasta que la presión absoluta en el tanque alcanza 2.40 atm y se vuelve muy difícil mover el manubrio de la bomba. Ahora cada quien usa su dispositivo para rociar agua, no aire, hasta que el chorro se vuelve débil, cuando la presión en el tanque llega a 1.20 atm. En tal caso cada uno debe bombear de nuevo, rociar de nuevo, etcétera. Para lograr rociar toda el agua, cada uno encuentra que debe bombear el tanque tres veces. He aquí el problema: la mayor parte del agua se rocía como resultado del segundo bombeo. El primer y tercer bombeo parecen tan difíciles como el segundo, pero resultan en una cantidad decepcionantemente pequeña de agua rociada. Explique este fenómeno.



Figura P19.22

23. ● a) Encuentre el número de moles en un metro cúbico de un gas ideal a 20.0°C y presión atmosférica. b) Para aire, el número de Avogadro de moléculas tiene 28.9 g de masa. Calcule la masa de un metro cúbico de aire. Establezca cómo contrasta el resultado con la densidad de aire tabulada.

24. A 25.0 m bajo la superficie del mar (densidad = 1 025 kg/m^3), donde la temperatura es de 5.00°C, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen de 1.00 cm^3. Si la temperatura de la superficie del mar es de 20.0°C, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de romper en la superficie?

25. ● Un cubo de 10.0 cm por lado contiene aire (con masa molar equivalente de 28.9 g/mol) a presión atmosférica y 300 K de temperatura. Encuentre: a) la masa del gas, b) la fuerza gravitacional que se ejerce sobre él y c) la fuerza que ejerce sobre cada cara del cubo. d) Comente acerca de la explicación física por la que tan pequeña muestra ejerce una fuerza tan grande.

26. Estime la masa del aire en su recámara. Establezca las cantidades que toma como datos y el valor que mide o estima para cada una.

27. Un medidor de presión en un tanque registra la presión manométrica, que es la diferencia entre las presiones interior y exterior. Cuando el tanque está lleno de oxígeno (O_2), contiene 12.0 kg del gas a una presión manométrica de 40.0 atm. Determine la masa de oxígeno que se extrajo del tanque cuando la lectura de la presión es de 25.0 atm. Suponga que la temperatura del tanque permanece constante.

28. En sistemas de vacío avanzados, se han logrado presiones tan bajas como 10^{-9} Pa. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1.00 m^3 a esta presión y una temperatura de 27.0°C.

29. ● *¿Cuánta agua separa una pardela?* Para medir qué tan abajo de la superficie del océano bucea un ave para capturar un pez, Will Mackin usó un método originado por lord Kelvin para sondeos realizados por la marina británica. Mackin espolvoreó los interiores de delgados tubos de plástico con azúcar y luego selló un extremo de cada tubo. Al husmear en una playa rocosa en la noche con una lámpara de minero en la cabeza, agarró a una pardela de Audubon en su nido y le amarró un tubo a la espalda. Luego capturaría a la misma ave la noche siguiente y removería el tubo. Después de cientos de capturas, las aves estaban sumamente molestas con él pero no se asustaron demasiado para alejarse de las colonias. Suponga que en un ensayo, con un tubo de 6.50 cm de largo, él encontró que el agua entró al tubo para lavar el azúcar hasta una distancia de 2.70 cm desde el extremo abierto. a) Encuentre la mayor profundidad a la que bucea la pardela, si supone que el aire en el tubo permanecía a temperatura constante. b) ¿El tubo se debe amarrar al ave en alguna orientación particular para que funcione este método? (La pardela de Audubon bucea a más del doble de la profundidad que calcule, y especies más grandes lo hacen casi diez veces más profundo.)

30. Una habitación de volumen V contiene aire con masa molar equivalente M (en gramos por mol). Si la temperatura de la habitación se eleva de T_1 a T_2, ¿qué masa de aire dejará la habitación? Suponga que la presión del aire en la habitación se mantiene a P_0.

Problemas adicionales

31. Un estudiante mide la longitud de una barra de latón con una cinta de acero a 20.0°C. La lectura es de 95.00 cm. ¿Qué indicará la cinta para la longitud de la barra cuando la barra y la cinta estén a a) −15.0°C y b) 55.0°C?

32. La densidad de la gasolina es de 730 kg/m^3 a 0°C. Su coeficiente de expansión volumétrica promedio es de 9.60×10^{-4} $(°C)^{-1}$. Suponga que 1.00 galones de gasolina ocupan 0.003 80 m^3. ¿Cuántos kilogramos adicionales de gasolina obtendría si compra 10.0 galones de gasolina a 0°C en lugar de a 20.0°C, de una bomba que no tiene compensación de temperatura?

33. Un termómetro de mercurio se construye como se muestra en la figura P19.33. El tubo capilar tiene un diámetro de 0.004 00 cm y el bulbo un diámetro de 0.250 cm. Si ignora la expansión del vidrio, encuentre el cambio en altura de la columna de mercurio que ocurre con un cambio en temperatura de 30.0°C.

34. ● Un líquido con un coeficiente de expansión volumétrica β justo llena un matraz esférico de volumen V_i a una temperatura de T_i (figura P19.33). El matraz está fabricado de un material con un coeficiente de expansión lineal promedio α. El líquido es libre de expandirse en un capilar abierto de área A que se proyecta desde lo alto de la esfera. a) Si supone que

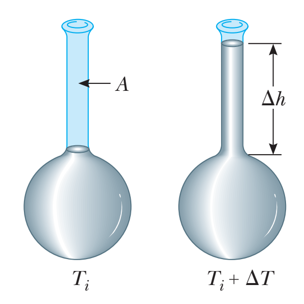


Figura P19.33 Problemas 33 y 34.

la temperatura aumenta en ΔT, demuestre que el líquido se eleva en el capilar en la cantidad Δh conocida por la ecuación $\Delta h = (V_i/A)(\beta - 3\alpha)\Delta T$. b) Para un sistema típico, como un termómetro de mercurio, ¿por qué es una buena aproximación ignorar la expansión del bulbo?

35. **Problema de repaso.** Un tubo de aluminio, de 0.655 m de largo a 20.0°C y abierto en ambos extremos, se usa como flauta. El tubo enfría a una temperatura baja, pero luego se llena con aire a 20.0°C tan pronto como comienza a tocarla. Después de eso, ¿en cuánto cambia su frecuencia fundamental a medida que el metal eleva su temperatura de 5.00°C a 20.0°C?

36. Dos barras metálicas se fabrican, una de invar y otra de aluminio. A 0°C, cada una de las tres barras se taladra con dos orificios separados 40.0 cm. A través de los orificios se ponen clavijas para ensamblar las barras en un triángulo equilátero. a) Primero ignore la expansión del invar. Encuentre el ángulo entre las barras de invar como función de la temperatura Celsius. b) ¿Su respuesta es precisa tanto para temperaturas negativas como para positivas? ¿Es precisa para 0°C? c) Resuelva el problema de nuevo e incluya la expansión del invar. d) El aluminio se funde a 660°C y el invar a 1 427°C. Suponga que los coeficientes de expansión tabulados son constantes. ¿Cuáles son los ángulos mayor y menor que se alcanzan entre las barras de invar?

37. ● Un líquido tiene una densidad ρ. a) Demuestre que el cambio fraccionario en densidad para un cambio en temperatura ΔT es $\Delta\rho/\rho = -\beta\,\Delta T$. ¿Qué implica el signo negativo? b) El agua pura tiene una densidad máxima de 1.000 0 g/cm^3 a 4.0°C. A 10.0°C, su densidad es 0.999 7 g/cm^3. ¿Cuál es β para el agua en este intervalo de temperatura?

38. Se cierra un cilindro mediante un pistón conectado a un resorte con constante de 2.00×10^3 N/m (figura P19.38). Con el resorte relajado, el cilindro está lleno con 5.00 L de gas a una presión de 1.00 atm y una temperatura de 20.0°C. a) Si el pistón tiene un área de sección transversal de 0.010 0 m^2 y masa despreciable, ¿a qué altura subirá cuando la temperatura se eleve a 250°C? b) ¿Cuál es la presión del gas a 250°C?

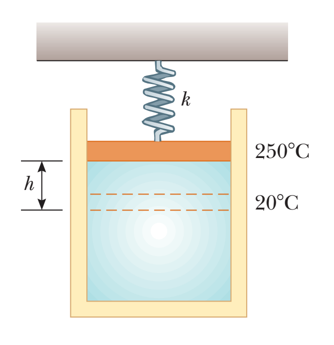


Figura P19.38

39. Un cilindro vertical de área de sección transversal A se sella con un pistón sin fricción de gran ajuste de masa m (figura P19.39). a) Si n moles de un gas ideal están en el cilindro a una temperatura T, ¿cuál es la altura h a la que el pistón está en equilibrio bajo su propio peso? b) ¿Cuál es el valor para h si $n = 0.200$ mol, $T = 400$ K, $A = 0.008\,00$ m^2 y $m = 20.0$ kg?

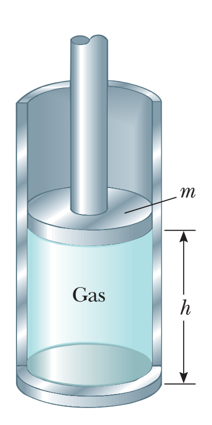


Figura P19.39

40. Suponga una tira bimetálica hecha de dos listones de diferentes metales enlazados. a) La tira originalmente es recta. A medida que la tira se calienta, el metal con el mayor coeficiente de expansión promedio se expande más que el otro, lo que fuerza a la tira en un arco con el radio exterior que tiene mayor circunferencia (figura P19.40a). Genere una expresión para el ángulo de doblado θ como función de la longitud inicial de las tiras, su coeficiente de expansión lineal promedio, el cambio en temperatura y la separación de los centros de las tiras ($\Delta r = r_2 - r_1$). b) Demuestre que el ángulo de doblado disminuye a cero cuando ΔT disminuye a cero y también cuando los dos coeficientes de expansión promedio se vuelven iguales. c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué ocurre si la tira se enfría? d) La figura P19.40b muestra una compacta tira bimetálica en espiral en un termostato casero. Si θ se interpreta como el ángulo de doblado adicional causado por un cambio en temperatura, la ecuación del inciso a) se aplica a ella también. El

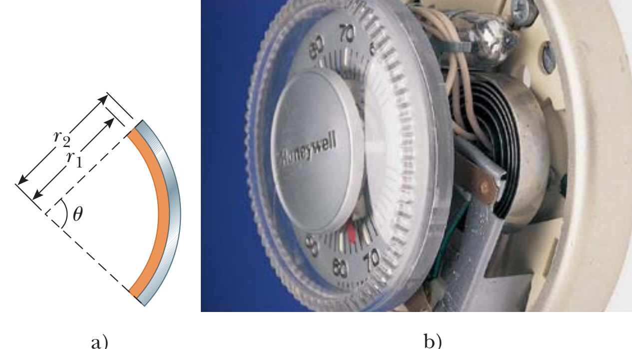


Figura P19.40

extremo interior de la tira espiral está fijo, y el extremo exterior es libre de moverse. Suponga que los metales son bronce e invar, el grosor de la tira es $2\,\Delta r = 0.500$ mm y la longitud global de la tira espiral es 20.0 cm. Encuentre el ángulo al que gira el extremo libre de la tira cuando la temperatura cambia en 1°C. El extremo libre de la tira soporta una cápsula parcialmente llena con mercurio, visible sobre la tira en la figura P19.40b. Cuando la cápsula se inclina, el mercurio cambia de un extremo al otro para hacer o romper un contacto eléctrico que enciende o apaga el horno.

41. ● La placa rectangular que se muestra en la figura P19.41 tiene un área A_i igual a ℓw. Si la temperatura aumenta en ΔT, cada dimensión aumenta de acuerdo con la ecuación $\Delta L = \alpha L_i \Delta T$, donde α es el coeficiente de expansión lineal promedio. Demuestre que el aumento en área es $\Delta A = 2\alpha A_i\,\Delta T$. ¿Qué aproximación supone esta expresión?

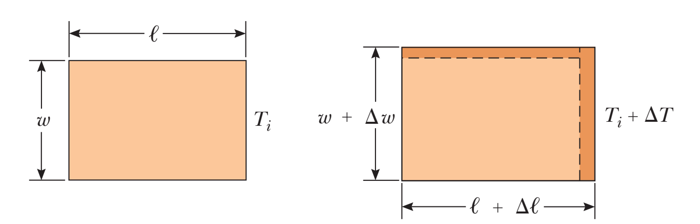


Figura P19.41

42. ● La medición del coeficiente de expansión volumétrica promedio para un líquido es complicada, porque el contenedor también cambia de tamaño con la temperatura. La figura P19.42 muestra un medio simple para superar esta dificultad. Con este aparato, un brazo de un tubo en U, se mantiene a 0°C en un baño de agua–hielo, y el otro brazo se mantiene a una temperatura diferente T_C en un baño a temperatura constante. El tubo conector es horizontal. a) Explique cómo el uso de este equipo permite determinar β para el líquido a partir de mediciones de las alturas de las columnas h_0 y h_t de las columnas de líquido en el tubo en U, sin tener que corregir para expansión del aparato. b) Genere la expresión para β en términos de h_0, h_t y T_C.

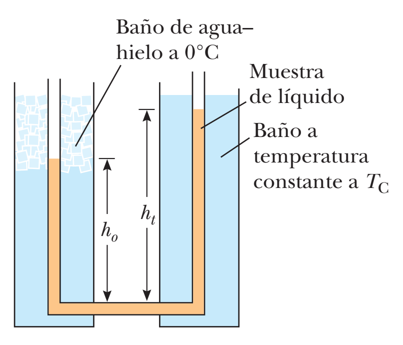


Figura P19.42

43. ● Una barra de cobre y una barra de acero varían en longitud en 5.00 cm a 0°C. Las barras se calientan y enfrían juntas. ¿Es posible que la diferencia en longitud permanezca constante a todas las temperaturas? Explique. Describa las longitudes a 0°C tan exactas como pueda. ¿Puede decir cuál barra es más larga y decir las longitudes de las barras?

44. **Problema de repaso.** Un reloj con un péndulo de latón tiene un periodo de 1.000 s a 20.0°C. Si la temperatura aumenta a 30.0°C, a) ¿en cuánto cambia el periodo y b) cuánto tiempo gana o pierde el reloj en una semana?

45. **Problema de repaso.** Considere un objeto con cualquiera de las formas que se muestran en la tabla 10.2. ¿Cuál es el aumento porcentual en el momento de inercia del objeto cuando se calienta de 0°C a 100°C, si está compuesto de a) cobre o b) aluminio? Suponga que los coeficientes de expansión lineal promedio que se muestran en la tabla 19.1 no varían entre 0°C y 100°C.

46. **Problema de repaso.** a) Genere una expresión para la fuerza de flotación sobre un globo esférico, sumergido en agua, como función de la profundidad bajo la superficie, el volumen del globo en la superficie, la presión en la superficie y la densidad del agua. (Suponga que la temperatura del agua no cambia con la profundidad.) b) ¿La fuerza de flotación aumenta o disminuye a medida que el globo se sumerge? c) ¿A qué profundidad la fuerza de flotación es la mitad del valor en la superficie?

47. Dos losas de concreto de un puente de 250 m de largo se colocan justo en sus extremos, de modo que no se permite espacio para expansión (figura P19.47a). Si ocurre un aumento de temperatura de 20.0°C, ¿cuál es la altura y a la cual las losas se elevan cuando se pandean (figura P19.47b)?

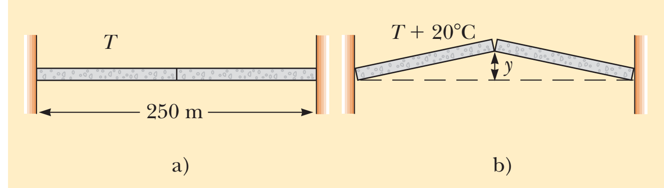


Figura P19.47 Problemas 47 y 48.

48. Dos losas de concreto que forman un puente de longitud L se colocan justo en sus extremos, de modo que no se permite espacio para expansión (figura P19.47a). Si ocurre un aumento de temperatura de ΔT, ¿cuál es la altura y a la cual las losas se elevan cuando se pandean (figura P19.47b)?

49. a) Demuestre que la densidad de un gas ideal que ocupa un volumen V está dada por $\rho = PM/RT$, donde M es la masa molar. b) Determine la densidad del oxígeno gaseoso a presión atmosférica y 20.0°C.

50. ● a) Considere que la definición del coeficiente de expansión volumétrica es

$$\beta = \frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dT}\right|_{P=\text{constante}} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}$$

Use la ecuación de estado de un gas ideal para demostrar que el coeficiente de expansión volumétrica de un gas ideal a presión constante está dado por $\beta = 1/T$, donde T es la tempe-

ratura absoluta. b) ¿Qué valor predice esta expresión para β a 0°C? Establezca cómo contrasta este resultado con los valores experimentales para helio y aire en la tabla 19.1. Note que estos valores son mucho mayores que los coeficientes de expansión volumétrica para la mayoría de los líquidos y sólidos.

51. Comience con la ecuación 19.10 y demuestre que la presión total P en un contenedor lleno con una mezcla de varios gases ideales es $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, donde $P_1, P_2, \ldots$, son las presiones que cada gas ejercería si llenara sólo el contenedor. (Estas presiones individuales se llaman *presiones parciales* de los gases respectivos.) Este resultado se conoce como *ley de Dalton de presiones parciales.*

52. ● **Problema de repaso.** Después de una colisión en el espacio exterior, un disco de cobre a 850°C gira en torno a su eje con una rapidez angular de 25.0 rad/s. A medida que el disco radia luz infrarroja, su temperatura cae a 20.0°C. Ningún momento de torsión externo actúa en el disco. a) ¿La rapidez angular cambia a medida que el disco se enfría? Explique cómo cambia o por qué no lo hace. b) ¿Cuál es su rapidez angular a la temperatura más baja?

53. ● El helio gaseoso se vende en tanques de acero. Si el helio se usa para inflar un globo, ¿éste podría elevar el tanque esférico donde viene el helio? Justifique su respuesta. El acero se romperá si se sujeta a un esfuerzo de tensión mayor que su límite elástico de 5×10^8 N/m^2. *Sugerencia:* considere un cascarón de acero de radio r, grosor t, densidad igual al hierro y contenga helio a presión alta y a punto de romperse en dos hemisferios.

54. Un cilindro que tiene un radio de 40.0 cm y 50.0 cm de profundidad se llena con aire a 20.0°C y 1.00 atm (figura P19.54a). Ahora en el cilindro baja un pistón de 20.0 kg, y comprime el aire atrapado en el interior mientras llega a una altura de equilibrio h_i (figura P19.54b). Para finalizar, un perro de 75.0 kg de pie sobre el pistón, comprime más el aire, que permanece a 20°C (figura P19.54c). a) ¿A qué distancia por abajo (Δh) se mueve el pistón cuando el perro se para en él? b) ¿A qué temperatura se calienta el gas para elevar el pistón y al perro de regreso a h_i?

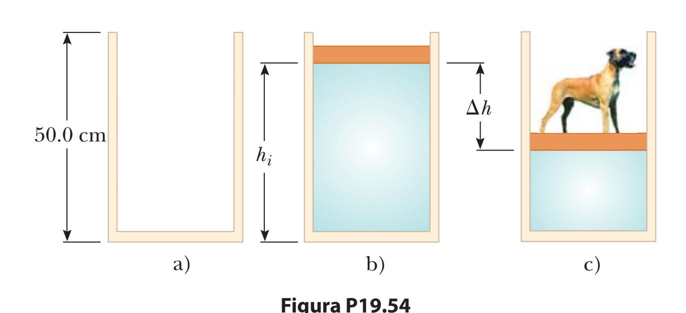


Figura P19.54

55. La correspondencia $L_f = L_i(1 + \alpha\,\Delta T)$ es una aproximación válida cuando el coeficiente de expansión promedio es pequeño. Si α es grande, debe integrar la relación $dL/dT = \alpha L$ para determinar la longitud final. a) Si supone que el coeficiente de expansión lineal es constante a medida que L varía, determine una expresión general para la longitud final. b) Dada una barra de 1.00 m de longitud y un cambio de temperatura de 100.0°C, determine el error causado por la aproximación cuando $\alpha = 2.00 \times 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$ (un valor típico para un metal) y cuando $\alpha = 0.020\,0$ (°C)$^{-1}$ (un valor grande poco práctico para comparar).

56. Un alambre de acero y uno de cobre, cada uno de 2.000 mm de diámetro, se unen por los extremos. A 40.0°C, cada uno tiene una longitud no estirada de 2.000 m. Los alambres se conectan entre dos soportes fijos separados 4.000 m sobre una mesa. El alambre de acero se extiende desde $x = -2.000$ m hasta $x = 0$, el alambre de cobre se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 2.000$ m, y la tensión es despreciable. Después la temperatura baja a 20.0°C. A esta temperatura más baja, encuentre la tensión en el alambre y la coordenada x de la unión entre los alambres. (Consulte las tablas 12.1 y 19.1.)

57. **Problema de repaso.** Una cuerda de guitarra hecha de acero, con un diámetro de 1.00 mm, se estira entre soportes separados 80.0 cm. La temperatura es de 0.0°C. a) Encuentre la masa por unidad de longitud de esta cuerda. (Use el valor 7.86×10^3 kg/m^3 para la densidad.) b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda? c) La temperatura se eleva a 30.0°C. Encuentre los valores resultantes de la tensión y la frecuencia fundamental. Suponga que tanto el módulo de Young (tabla 12.1) como el coeficiente de expansión promedio (tabla 19.1) tienen valores constantes entre 0.0° y 30.0°C.

58. En una planta de procesamiento químico, una cámara de reacción de volumen fijo V_0 se conecta a una cámara de depósito de volumen fijo $4V_0$ mediante un pasillo que contiene un tapón poroso térmicamente aislante. El tapón permite que las cámaras estén a diferentes temperaturas y que el gas pase de una cámara a la otra, además de asegurar que la presión sea la misma en ambas. En un punto del procesamiento, ambas cámaras contienen gas a una presión de 1.00 atm y una temperatura de 27.0°C. Las válvulas de admisión y escape hacia el par de cámaras están cerradas. El depósito se mantiene a 27.0°C mientras la cámara de reacción se calienta a 400°C. ¿Cuál es la presión en ambas cámaras después de que se logran estas temperaturas?

59. Un riel de acero de 1.00 km firmemente sujeto a ambos extremos cuando la temperatura es de 20.0°C. A medida que la temperatura aumenta, el riel se pandea y toma la forma de un arco de círculo vertical. Encuentre la altura h del centro del riel cuando la temperatura es de 25.0°C. Necesitará resolver una ecuación trascendental.

60. ● **Problema de repaso.** El techo perfectamente plano de una casa forma un ángulo θ con la horizontal. Cuando cada día su temperatura cambia, entre T_c antes del amanecer y T_h a media tarde, el techo se expande y contrae uniformemente con un coeficiente de expansión térmica α_1. Sobre el techo hay una placa metálica rectangular plana con coeficiente de expansión α_2 mayor que α_1. La longitud de la placa es L, medida a lo largo de la pendiente del techo. La componente del peso de la placa perpendicular al techo se soporta mediante una fuerza normal distribuida uniformemente sobre el área de la placa. El coeficiente de fricción cinética entre la placa y el techo es μ_k. La placa siempre está a la misma temperatura que el techo, así, suponga que su temperatura cambia de manera continua. Debido a la diferencia en coeficientes de expansión, cada trozo de la placa se mueve en relación con el techo bajo ella, excepto por puntos a lo largo de cierta línea horizontal que corre a través de la placa llamada línea inmóvil. Si la temperatura se eleva, partes de la placa bajo la línea fija se mueven abajo en relación con el techo y sienten una fuerza de fricción cinética que actúa hacia arriba en el techo. Elementos de área

arriba de la línea fija se deslizan hacia arriba del techo y sobre ellos la fricción cinética actúa hacia abajo, paralela al techo. La línea fija no ocupa área, así, suponga que sobre la placa no actúa fuerza de fricción estática mientras la temperatura cambia. La placa como un todo casi está en equilibrio, así que la fuerza de fricción neta sobre ella debe ser igual a la componente de su peso que actúa hacia abajo del plano inclinado. a) Pruebe que la línea fija está a una distancia de

$$\frac{L}{2}\left(1 - \frac{\tan\theta}{\mu_k}\right)$$

abajo del borde superior de la placa. b) Analice las fuerzas que actúan en la placa cuando la temperatura cae y pruebe que la línea estacionaria está a esa misma distancia sobre el borde inferior de la placa. c) Demuestre que la placa baja del techo como un gusano moviéndose cada día una distancia

$$\frac{L}{\mu_k}(\alpha_2 - \alpha_1)(T_h - T_c)\tan\theta$$

d) Evalúe la distancia que una placa de aluminio se mueve cada día si su longitud es de 1.20 m, la temperatura va en ciclos entre 4.00°C y 36.0°C, y el techo tiene una pendiente de 18.5°, 1.50×10^{-5} $(°C)^{-1}$ de coeficiente de expansión lineal, y 0.420 de coeficiente de fricción con la placa. e) **¿Qué pasaría si?** ¿Y si el coeficiente de expansión de la placa es menor que el del techo? ¿La placa sube lentamente por el techo?

Respuestas a las preguntas rápidas

19.1 c). La dirección de la transferencia de energía sólo depende de la temperatura y no del tamaño del objeto o de cuál objeto tenga más masa.

19.2 c). La frase "doble de caliente" se refiere a una relación de temperaturas. Cuando ciertas temperaturas se convierten a kelvins, sólo los del inciso c) están en la proporción correcta.

19.3 c). La gasolina tiene el coeficiente de expansión volumétrica promedio más grande.

19.4 c). Una cavidad en un material se expande en la misma forma que si estuviese lleno con dicho material.

19.5 a). En un día frío, el aire atrapado en las burbujas se reduce en presión de acuerdo con la ley de gas ideal. Por lo tanto, el volumen de las burbujas puede ser menor que en un día cálido y los contenidos del paquete se pueden mover más.

19.6 b). Debido al aumento de temperatura, el aire se expande. En consecuencia, parte del aire se fuga hacia el exterior, lo que deja menos aire en la casa.



En esta fotografía del lago Bow, en el Banff National Park, en Alberta, Canadá, se distingue al agua en sus tres fases. En el lago es agua líquida y en el suelo aparece agua sólida en forma de nieve. Las nubes en el cielo consisten en gotitas de agua líquida que se condensaron del vapor de agua en el aire. Los cambios que tiene una sustancia de una fase a otra son resultado de la transferencia de energía. (Jacob Taposchaner/Getty Images)

20 Primera ley de la termodinámica

Hasta alrededor de 1850, los campos de la termodinámica y la mecánica se consideraban como dos ramas distintas de la ciencia. La ley de conservación de la energía parecía describir únicamente ciertos tipos de sistemas mecánicos. Sin embargo, los experimentos de mediados del siglo XIX, realizados por el inglés James Joule y otros, demostraron una fuerte conexión entre la transferencia de energía mediante calor en los procesos térmicos y la transferencia de energía por trabajo en los procesos mecánicos. En la actualidad se sabe que la energía mecánica se transforma en energía interna, la cual encuentra su definición formal en este capítulo. Una vez que el concepto de energía se generalizó, a partir de la mecánica, para incluir la energía interna, la ley de conservación de la energía surgió como una ley universal de la naturaleza.

Este capítulo se concentra en el concepto de energía interna, la primera ley de la termodinámica y algunas importantes aplicaciones de dicha ley. La primera ley de la termodinámica describe sistemas para los que el único cambio de energía es el de la energía interna y las transferencias de energía son mediante calor y trabajo. Una diferencia principal en la discusión del trabajo en este capítulo, en relación con la de la mayoría de los capítulos acerca de mecánica, es que se considerará el trabajo invertido en sistemas *deformables*.

20.1 Calor y energía interna

Para comenzar es importante hacer una gran distinción entre energía interna y calor, términos que en el lenguaje popular con frecuencia se usan incorrectamente y de manera intercambiable. **La energía interna es toda la energía de un sistema que se asocia con sus componentes microscópicos, átomos y moléculas, cuando se ve desde un marco de referencia en reposo respecto del centro de masa del sistema.** La última parte de esta oración asegura que cualquier energía cinética volumétrica del sistema resultante de su movimiento a través del espacio no se incluye en la energía interna. La energía interna incluye la energía cinética del movimiento aleatorio traslacional, rotacional y vibratorio de las moléculas; la energía potencial vibratoria asociada con fuerzas entre los átomos en las moléculas; y la energía potencial eléctrica asociada con fuerzas entre moléculas. Es útil relacionar la energía interna con la temperatura de un objeto, pero esta correspondencia es limitada. En la sección 20.3 se demostrará que los cambios de energía interna también se presentan en ausencia de cambios de temperatura.

El calor es la transferencia de energía a través de la frontera de un sistema debida a una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. Cuando usted *calienta* una sustancia, transfiere energía hacia ella al colocarla en contacto con alrededores que tienen una mayor temperatura. Tal es el caso, por ejemplo, cuando coloca una sartén de agua fría en el quemador de una estufa. El quemador está a una temperatura mayor que el agua y, por lo tanto, el agua gana energía. También se usará el término *calor* para representar la cantidad de energía transferida por este método.

Como analogía a la distinción entre calor y energía interna, considere la distinción entre trabajo y energía mecánica discutida en el capítulo 7. El trabajo invertido en un sistema es una medida de la cantidad de energía transferida al sistema desde sus alrededores, mientras que la energía mecánica (energía cinética más energía potencial) de un sistema es una consecuencia del movimiento y configuración del sistema. Debido a eso, cuando una persona invierte trabajo en un sistema, la energía se transfiere de la persona al sistema. No tiene sentido hablar acerca del trabajo *de* un sistema; sólo es posible referirse al trabajo consumido *en* o *por* el sistema cuando se presentó algún proceso en el que la energía se transfirió hacia o desde el sistema. Del mismo modo, carece de sentido hablar del calor *de* un sistema; es válido referirse al calor sólo cuando se transfirió energía como resultado de una diferencia de temperatura. Tanto el calor como el trabajo son formas de cambiar la energía de un sistema.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.1

Energía interna, energía térmica y energía de enlace

Cuando lea otros libros de física, es posible ver términos como *energía térmica* y *energía de enlace*. La energía térmica se interpreta como aquella parte de la energía interna asociada con el movimiento aleatorio de las moléculas y, por lo tanto, relacionada con la temperatura. La energía de enlace es la energía potencial intermolecular. En consecuencia,

$$\text{Energía interna} = \text{energía térmica} + \text{energía de enlace}$$

Aunque esta separación se presenta sólo aquí para aclarar en cuanto a otros libros, no se usarán estos términos; no hay necesidad de ellos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.2

Calor, temperatura y energía interna son diferentes

Mientras lea el periódico o escuche la radio, esté alerta de las frases usadas de manera incorrecta que incluyan la palabra *calor* y piense en la palabra adecuada para sustituir en lugar de *calor*. Los ejemplos incorrectos incluyen "A medida que el camión frenó hasta detenerse, se generó una gran cantidad de calor por fricción" y "El calor de un día de verano...".

Unidades de calor

Los primeros estudios acerca del calor se enfocaron en el resultante aumento en temperatura de una sustancia, que con frecuencia era agua. Las nociones iniciales de calor se basaron en un fluido llamado *calórico* que fluía de una sustancia a otra y causaba cambios en la temperatura. A partir del nombre de este fluido mítico salió una unidad de energía relacionada con los procesos térmicos, la **caloría (cal)**, que se define como **la cantidad de transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5°C a 15.5°C.**[1] (La "Caloría", escrita con C mayúscula y que se usa para describir el contenido energético de los alimentos, es en realidad una kilocaloría.) La unidad de energía en el sistema estadounidense es la **unidad térmica británica (Btu), que es la cantidad de transferencia de energía que se requiere para elevar la temperatura de 1 lb de agua de 63°F a 64°F**.

Una vez que la correspondencia entre energía y procesos térmicos y mecánicos quedó evidente, no hubo necesidad de una unidad separada para los procesos térmicos. El *joule* ya se definió como una unidad de energía respecto a los procesos mecánicos. Los científicos cada vez más se alejan de la caloría y el Btu y usan el joule cuando describen procesos térmicos. En este texto, calor, trabajo y energía interna por lo general se miden en joules.

[1] La definición original de caloría era la transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1°C. Sin embargo, mediciones cuidadosas demostraron que la cantidad de energía requerida para producir un cambio de 1°C depende un poco de la temperatura inicial; por tanto, evolucionó una definición más precisa.

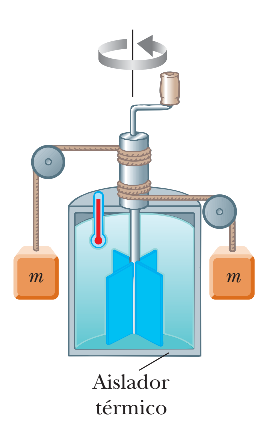


Figura 20.1 Experimento de Joule para determinar el equivalente mecánico del calor. Los bloques que caen hacen girar la rueda de paletas, lo que a su vez causa el aumento de temperatura del agua.

El equivalente mecánico del calor

En los capítulos 7 y 8 se encontró que, siempre que la fricción esté presente en un sistema mecánico, la energía mecánica en el sistema disminuye; en otras palabras, la energía mecánica no se conserva en presencia de fuerzas no conservativas. Varios experimentos demuestran que esta energía mecánica simplemente no desaparece sino que se transforma en energía interna. Puede realizar tal experimento en casa al martillar un clavo en un trozo de madera. ¿Qué sucede a toda la energía cinética del martillo una vez que haya terminado? Parte de ella ahora está en el martillo como energía interna, como se demuestra por el clavo mensurablemente más caliente. Aunque esta conexión entre energía mecánica e interna la sugirió por primera vez Benjamin Thompson, fue James Prescott Joule quien estableció la equivalencia de la reducción en energía mecánica y el aumento de energía interna.

En la figura 20.1 se muestra un diagrama esquemático del experimento más famoso de Joule. El sistema de interés es el agua en un contenedor térmicamente aislado. Sobre el agua se invierte trabajo mediante una rueda de paletas giratoria, que se impulsa mediante pesados bloques que caen con una rapidez constante. Si la pérdida de energía en los cojinetes y a través de las paredes es despreciable, la pérdida en energía potencial del sistema bloques–Tierra mientras los bloques caen es igual al trabajo invertido por la rueda de paletas sobre el agua. Si los dos bloques caen una distancia h, la pérdida de energía potencial es $2mgh$, donde m es la masa de un bloque; esta energía hace que la temperatura del agua aumente debido a la fricción entre las paletas y el agua. Al variar las condiciones del experimento, Joule encontró que la pérdida en energía mecánica es proporcional al producto de la masa del agua y el aumento en la temperatura del agua. La constante de proporcionalidad que encontró era de aproximadamente 4.18 J/g · °C. Por lo tanto, 4.18 J de energía mecánica elevan la temperatura de 1 g de agua en 1°C. Mediciones más precisas tomadas más tarde demostraron que la proporcionalidad era de 4.186 J/g · °C cuando la temperatura del agua se elevaba de 14.5°C a 15.5°C. Aquí se adopta este valor de "caloría de 15 grados":

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \tag{20.1}$$

Esta igualdad se conoce, por razones meramente históricas, como el **equivalente mecánico del calor**.



JAMES PRESCOTT JOULE
Físico inglés (1818–1889)
Joule recibió cierta educación formal en matemáticas, filosofía y química de John Dalton, pero en gran parte fue autodidacta. La investigación de Joule condujo al establecimiento del principio de conservación de la energía. Su estudio de la correspondencia cuantitativa entre los efectos eléctrico, mecánico y químico del calor culminó con su anuncio, en 1843, de la cantidad de trabajo requerida para producir una unidad de energía, llamada el equivalente mecánico del calor.

EJEMPLO 20.1 **Pérdida de peso por el camino difícil**

Un estudiante ingiere alimentos calificados en 2 000 Calorías. Él quiere hacer una cantidad equivalente de trabajo en el gimnasio y levanta una barra de 50.0 kg. ¿Cuántas veces debe levantar la barra para gastar toda esta energía? Suponga que él levanta la barra 2.00 m cada vez que la eleva y no vuelve a ganar energía cuando baja la barra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine al estudiante al levantar la barra. Él hace trabajo sobre el sistema de la barra y la Tierra, de modo que de su cuerpo sale energía. La cantidad total de trabajo que debe hacer el estudiante es de 2 000 Calorías.

Categorizar Modele el sistema de la barra y la Tierra como un sistema no aislado.

Analizar Reduzca la ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, a la expresión adecuada para el sistema de la barra y la Tierra:

$$1)\quad \Delta U_{\text{total}} = W_{\text{total}}$$

Exprese el cambio en energía potencial gravitacional del sistema después de que la barra se eleva una vez:

$$\Delta U = mgh$$

Exprese la cantidad de energía total que debe transferirse al sistema mediante trabajo por levantar la barra n veces, si supone que no vuelve a ganar energía cuando la barra se baja:

$$2)\quad \Delta U_{\text{total}} = nmgh$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$nmgh = W_{\text{total}}$$

Resuelva para n:

$$n = \frac{W_{\text{total}}}{mgh}$$

$$= \frac{(2\,000 \text{ Cal})}{(50.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ m})}\left(\frac{1.00 \times 10^3 \text{ cal}}{\text{Caloría}}\right)\left(\frac{4.186 \text{ J}}{1 \text{ cal}}\right)$$

$$= 8.54 \times 10^3 \text{ veces}$$

Finalizar Si el estudiante está en buena forma y levanta la barra una vez cada 5 s, le tomará aproximadamente 12 h realizar esta proeza. Es claro, resulta mucho más fácil que el estudiante pierda peso mediante una dieta.

En realidad, el cuerpo humano no es 100% eficiente. Debido a eso, no toda la energía de la comida transformada dentro del cuerpo se transfiere afuera del cuerpo mediante trabajo consumido en la barra. Parte de esta energía se usa para bombear sangre y realizar otras funciones dentro del cuerpo. En consecuencia, las 2 000 Calorías se gastan en menos de 12 h cuando se incluyen estos otros requerimientos energéticos.

20.2 Calor específico y calorimetría

Cuando se le agrega energía a un sistema y no hay cambio en las energías cinética o potencial del sistema, por lo general la temperatura del sistema aumenta. (Una excepción a esta afirmación sucede cuando un sistema se somete a un cambio de estado, también llamado *transición de fase*, como se explica en la siguiente sección.) Si el sistema consiste en una muestra de una sustancia, se encuentra que la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de una masa determinada de la sustancia a cierta cantidad varía de una sustancia a otra. Por ejemplo, la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de 1 kg de agua en 1°C es 4 186 J, pero la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de 1 kg de cobre en 1°C sólo es de 387 J. En la explicación que sigue se usará el calor como ejemplo de transferencia de energía, pero tenga en mente que la temperatura del sistema podría cambiar mediante cualquier método de transferencia de energía.

La **capacidad térmica** C de una muestra particular se define como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de dicha muestra en 1°C. A partir de esta definición, se ve que, si la energía Q produce un cambio ΔT en la temperatura de una muestra, en tal caso

$$Q = C\,\Delta T \qquad \textbf{(20.2)}$$

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa. Por lo tanto, si a una muestra de una sustancia con masa m se le transfiere energía Q y la temperatura de la muestra cambia en ΔT, el calor específico de la sustancia es

TABLA 20.1

Calores específicos de algunas sustancias a 25°C y presión atmosférica

Sustancia	Calor específico *c* J/kg · °C	cal/g · °C	Sustancia	Calor específico *c* J/kg · °C	cal/g · °C
Sólidos elementales			*Otros sólidos*		
Aluminio	900	0.215	Latón	380	0.092
Berilio	1 830	0.436	Vidrio	837	0.200
Cadmio	230	0.055	Hielo (−5°C)	2 090	0.50
Cobre	387	0.092 4	Mármol	860	0.21
Germanio	322	0.077	Madera	1 700	0.41
Oro	129	0.030 8	*Líquidos*		
Hierro	448	0.107	Alcohol (etílico)	2 400	0.58
Plomo	128	0.030 5	Mercurio	140	0.033
Silicio	703	0.168	Agua (15°C)	4 186	1.00
Plata	234	0.56	*Gas*		
			Vapor (100°C)	2 010	0.48

$$c \equiv \frac{Q}{m\,\Delta T} \qquad (20.3)$$

◀ Calor específico

El calor específico es en esencia una medida de qué tan insensible térmicamente es una sustancia a la adición de energía. Mientras mayor sea el calor específico de un material, más energía se debe agregar a una masa determinada del material para causar un cambio particular de temperatura. La tabla 20.1 menciona calores específicos representativos.

A partir de esta definición, es factible relacionar la energía Q transferida entre una muestra de masa m de un material y sus alrededores con un cambio de temperatura ΔT como

$$Q = mc\,\Delta T \qquad (20.4)$$

Por ejemplo, la energía requerida para elevar la temperatura de 0.500 kg de agua en 3.00°C es Q = (0.500 kg)(4 186 J/kg · °C)(3.00°C) = 6.28 × 10³J. Note que, cuando la temperatura aumenta, Q y ΔT se consideran positivos y la energía se transfiere al sistema. Cuando la temperatura disminuye, Q y ΔT se consideran negativos y la energía se transfiere afuera del sistema.

El calor específico varía con la temperatura. Sin embargo, si los intervalos de temperatura no son muy grandes, la variación de temperatura se desprecia y c se trata como una constante.[2] Por ejemplo, el calor específico del agua varía sólo en aproximadamente 1% de 0°C a 100°C a presión atmosférica. A menos que se establezca de otro modo, se ignoran tales variaciones.

Pregunta rápida 20.1 Imagine que tiene hierro, vidrio y agua, 1 kg de cada uno, y que las tres muestras están a 10°C. a) Clasifique las muestras de menor a mayor temperatura después de agregar 100 J de energía a cada muestra. b) Clasifique las muestras de menor a mayor cantidad de energía transferida mediante calor si cada muestra aumenta en temperatura 20°C.

Note de la tabla 20.1 que el agua tiene el mayor calor específico de los materiales comunes. Este alto calor específico es responsable en parte de las temperaturas moderadas que se encuentran cerca de los grandes cuerpos de agua. A medida que la temperatura de un cuerpo de agua disminuye durante el invierno, la energía se transfiere del agua fría al aire mediante calor, lo que aumenta la energía interna del aire. Debido al alto calor específico

[2] La definición que proporciona la ecuación 20.4 supone que el calor específico no varía con la temperatura en el intervalo $\Delta T = T_f - T_i$. En general, si c varía con la temperatura en el intervalo, la expresión correcta para Q es $Q = m\int_{T_i}^{T_f} c\,dT$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.3

Una desafortunada elección de terminología

El nombre *calor específico* es un desafortunado vestigio de los días cuando la termodinámica y la mecánica se desarrollaron por separado. Un mejor nombre sería *transferencia específica de energía*, pero el término existente está demasiado arraigado como para sustituirlo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.4

La energía se puede transferir mediante cualquier método

El símbolo Q representa la cantidad de energía transferida, pero tenga en mente que la transferencia de energía en la ecuación 20.4 podría ser mediante *cualquiera* de los métodos introducidos en el capítulo 8; no tiene que ser calor. Por ejemplo, doblar repetidamente un colgador de alambre para ropa eleva la temperatura en el punto de doblez mediante *trabajo*.

del agua, una cantidad de energía relativamente grande se transfiere al aire incluso para cambios mesurados de temperatura del agua. Los vientos predominantes en la costa oeste de Estados Unidos son hacia la tierra (hacia el este). Por tanto, la energía liberada por el océano Pacífico mientras se enfría mantiene las áreas costeras mucho más calientes de lo que serían de otro modo. Como resultado, los estados de la Costa Oeste por lo general tienen clima invernal más favorable que los estados de la Costa Este, donde los vientos predominantes no tienden a transportar la energía hacia tierra.

Calorimetría

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.5

Recuerde el signo negativo

Es *crucial* incluir el signo negativo en la ecuación 20.5. Es necesario el signo negativo en la ecuación por consistencia con la convención de signos para la transferencia de energía. La transferencia de energía Q_{caliente} tiene un valor negativo porque la energía sale de la sustancia caliente. El signo negativo en la ecuación garantiza que el lado derecho sea un número positivo, consistente con el lado izquierdo, que es positivo porque la energía entra al agua fría.

Una técnica para medir calor específico involucra el calentamiento de una muestra en alguna temperatura conocida T_x, al colocarla en un recipiente que contenga agua de masa conocida y temperatura $T_w < T_x$, y medir la temperatura del agua después de que se logra el equilibrio. Esta técnica se llama **calorimetría**, y los dispositivos donde se presenta esta transferencia de energía se llaman **calorímetros**. Si el sistema de la muestra y el agua está aislado, el principio de conservación de energía requiere que la cantidad de energía que sale de la muestra (de calor específico desconocido) sea igual a la cantidad de energía que entra al agua.[3] La conservación de energía permite escribir la representación matemática de este enunciado energético como

$$Q_{\text{frío}} = -Q_{\text{caliente}} \qquad \textbf{(20.5)}$$

Suponga que m_x es la masa de una muestra de alguna sustancia cuyo calor específico quiere determinar. Sean c_x su calor específico y T_x su temperatura inicial. Del mismo modo, sean m_w, x_w y T_w los valores correspondientes para el agua. Si T_f es la temperatura de equilibrio final después de mezclar todo, la ecuación 20.4 muestra que la transferencia de energía para el agua es $m_wc_w(T_f - T_w)$, que es positivo porque $T_f > T_w$, y que la transferencia de energía para la muestra de calor específico desconocido es $m_xc_x(T_f - T_x)$, que es negativa. Al sustituir estas expresiones en la ecuación 20.5 se obtiene

$$m_wc_w(T_f - T_w) = -m_xc_x(T_f - T_x)$$

Al resolver para c_x se obtiene

$$c_x = \frac{m_wc_w(T_f - T_w)}{m_x(T_x - T_f)}$$

EJEMPLO 20.2 Enfriamiento de un lingote caliente

Un lingote de 0.050 0 kg de metal se calienta a 200.0°C y después se deja caer en un calorímetro que contiene 0.400 kg de agua inicialmente a 20.0°C. La temperatura de equilibrio final del sistema mezclado es 22.4°C. Encuentre el calor específico del metal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el proceso que ocurre en el sistema. Del lingote caliente sale energía que va al agua fría, así que el lingote se enfría y el agua se calienta. Una vez que ambos están a la misma temperatura, se detiene la transferencia de energía.

Categorizar Se usa una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 20.4 para evaluar cada lado de la ecuación 20.5:

$$m_wc_w(T_f - T_w) = -m_xc_x(T_f - T_x)$$

$$(0.400\text{ kg})(4\,186\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(22.4^\circ\text{C} - 20.0^\circ\text{C})$$
$$= -(0.050\,0\text{ kg})(c_x)(22.4^\circ\text{C} - 200.0^\circ\text{C})$$

[3] Para mediciones precisas, debe incluir el contenedor de agua en los cálculos porque también intercambia energía con la muestra. No obstante, hacerlo requerirá conocer la masa y composición del contenedor. Si la masa del agua es mucho mayor que la del contenedor, se desprecian los efectos del contenedor.

Resuelva para el calor específico del metal: $c_x = \boxed{453 \text{ J/kg} \cdot °\text{C}}$

Probablemente el lingote es parecido al hierro, como puede ver al comparar este resultado con la información mostrada en la tabla 20.1. La temperatura del lingote inicialmente está arriba del punto de vapor. Por lo tanto, parte del agua se puede vaporizar cuando el lingote se deje caer en el agua. Se supone que el sistema está sellado y este vapor no escapa. Ya que la temperatura de equilibrio final es menor que el punto de vapor, cualquier vapor que resulte se vuelve a condensar de regreso en agua.

¿Qué pasaría si? Suponga que realiza un experimento en el laboratorio que utiliza esta técnica para determinar el calor específico de una muestra y usted quiere reducir la incertidumbre global en su resultado final para c_x. De la información proporcionada en este ejemplo, ¿para reducir la incertidumbre cuál valor sería más efectivo cambiar ?

Respuesta La incertidumbre experimental más grande se asocia con la pequeña diferencia en temperatura de 2.4°C para el agua. Por ejemplo, al usar las reglas para propagación de incertidumbre del apéndice de la sección B.8, una incertidumbre de 0.1°C en T_f y T_w conduce a una incertidumbre de 8% en su diferencia. Para que esta diferencia de temperatura sea experimentalmente más grande, el cambio más efectivo es *reducir la cantidad de agua.*

EJEMPLO 20.3 Momento de diversión para un vaquero

Un vaquero dispara una bala de plata con una rapidez de boquilla de 200 m/s en la pared de pino de una cantina. Suponga que toda la energía interna generada por el impacto permanece con la bala. ¿Cuál es el cambio de temperatura de la bala?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en experiencias similares que haya tenido en las que la energía mecánica se transforma en energía interna cuando se detiene un objeto en movimiento. Por ejemplo, como se mencionó en la sección 20.1, un clavo queda caliente después de que lo golpea algunas veces con un martillo.

Categorizar La bala se modela como un sistema aislado. Sobre el sistema no se invierte trabajo porque la fuerza de la pared no tiene desplazamiento alguno. Este ejemplo es similar al patinador que empuja una pared en la sección 9.7. Ahí, la pared no invierte trabajo sobre el patinador y la energía potencial almacenada en el cuerpo, debida a comidas anteriores, se transforma en energía cinética. En este caso, la pared no invierte trabajo en la bala y la energía cinética se transforma en energía interna.

Analizar Reduzca la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2, a la expresión adecuada para el sistema de la bala:

$$1)\quad \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

El cambio en la energía interna de la bala es idéntico al que ocurriría si la energía se transfiriera por calor de una estufa a la bala. Con este concepto, evalúe el cambio en energía interna de la bala:

$$2)\quad \Delta E_{\text{int}} = Q = mc\,\Delta T$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$(0 - \tfrac{1}{2}mv^2) + mc\,\Delta T = 0$$

Resuelva para ΔT, con 234 J/kg · °C como el calor específico de la plata (véase la tabla 20.1):

$$3)\quad \Delta T = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mc} = \frac{v^2}{2c} = \frac{(200 \text{ m/s})^2}{2(234 \text{ J/kg} \cdot °\text{C})} = \boxed{85.5°\text{C}}$$

Finalizar Note que el resultado no depende de la masa de la bala.

¿Qué pasaría si? Suponga que al vaquero se le agotan las balas de plata y dispara una bala de plomo con la misma rapidez hacia la pared. ¿El cambio de temperatura de la bala será mayor o menor?

Respuesta La tabla 20.1 muestra que el calor específico del plomo es 128 J/kg · °C, menor que el de la plata. Por lo tanto, una cantidad determinada de entrada o transformación de energía eleva el plomo a una temperatura más alta que la plata y la temperatura final de la bala de plomo será mayor. En la ecuación 3), sustituya el nuevo valor para el calor específico:

$$\Delta T = \frac{v^2}{2c} = \frac{(200 \text{ m/s})^2}{2(128 \text{ J/kg} \cdot {}^\circ\text{C})} = 156^\circ\text{C}$$

No es requisito que las balas de plata y plomo tengan la misma masa para determinar este cambio en temperatura. El único requisito es que tengan la misma rapidez.

20.3 Calor latente

Como se vio en secciones anteriores, una sustancia se somete a un cambio de temperatura cuando la energía se transfiere entre ella y sus alrededores. No obstante, en algunas ocasiones, la transferencia de energía no resulta en un cambio de temperatura. Este es el caso siempre que las características físicas de la sustancia cambian de una forma a otra; tal cambio se conoce comúnmente como **cambio de fase**. Dos cambios de fase comunes son de sólido a líquido (fusión) y de líquido a gas (ebullición); otro es un cambio en la estructura cristalina de un sólido. Todos esos cambios de fase incluyen un cambio en la energía interna del sistema pero no un cambio en su temperatura. Por ejemplo, en la ebullición el aumento en la energía interna se representa mediante el rompimiento de los enlaces entre moléculas en el estado líquido; este rompimiento de enlaces permite a las moléculas alejarse más en el estado gaseoso, con un aumento correspondiente en la energía potencial intermolecular.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.6

Los signos son cruciales

Los errores de signo se presentan con mucha frecuencia cuando los estudiantes aplican ecuaciones de calorimetría. Para cambios de fase, use el signo explícito correcto en la ecuación 20.7, dependiendo de si usted agrega o retira energía de la sustancia. En la ecuación 20.4, no hay signo explícito a considerar, pero asegúrese de que su ΔT *siempre* sea la temperatura final menos la temperatura inicial. Además, *siempre* debe incluir el signo negativo en el lado derecho de la ecuación 20.5.

Como es de esperar, diferentes sustancias responden de modo distinto a la agregación o eliminación de energía mientras cambian de fase, porque varían sus ordenamientos moleculares internos. Además, la cantidad de energía transferida durante un cambio de fase depende de la cantidad de sustancia de que se trate. (Toma menos energía fundir un cubo de hielo que descongelar un lago congelado.) Si se requiere transferir una cantidad Q de energía para cambiar la fase de una masa m de una sustancia, el **calor latente** de la sustancia se define como

$$L \equiv \frac{Q}{m} \qquad \textbf{(20.6)}$$

Este parámetro se llama calor latente (literalmente, el calor "oculto") porque esta energía agregada o retirada no resulta en un cambio de temperatura. El valor de L para una sustancia depende de la naturaleza del cambio de fase, así como de las propiedades de la sustancia.

A partir de la definición de calor latente, y de nuevo al elegir el calor como el mecanismo de transferencia de energía, la energía requerida para cambiar la fase de una masa dada m de una sustancia pura es

Calor latente ▶

$$Q = \pm mL \qquad \textbf{(20.7)}$$

Calor latente de fusión L_f es el término que se aplica cuando el cambio de fase es de sólido a líquido (*derretir* significa "combinar mediante fusión"), y **calor latente de vaporización** L_v es el término que se usa cuando el cambio de fase es de líquido a gas (el líquido se "vaporiza").[4] Los calores latentes de diferentes sustancias varían considerablemente, como muestran los datos en la tabla 20.2. El signo positivo en la ecuación 20.7 se usa cuando la energía entra al sistema, lo que causa fusión o vaporización. El signo negativo corresponde a energía que sale de un sistema, de modo que el sistema se congela o condensa.

[4] Cuando un gas se enfría, al final se *condensa*; es decir, regresa a la fase líquida. La energía proporcionada por unidad de masa se llama *calor latente de condensación* y es, en números, igual al calor latente de vaporización. Del mismo modo, cuando un líquido se enfría, al final se solidifica, y el *calor latente de solidificación* es numéricamente igual al calor latente de fusión.

TABLA 20.2

Calores latentes de fusión y vaporización

Sustancia	**Punto de fusión (°C)**	**Calor latente de fusión (J/kg)**	**Punto de ebullición (°C)**	**Calor latente de vaporización (J/kg)**
Helio	−269.65	5.23×10^3	−268.93	2.09×10^4
Nitrógeno	−209.97	2.55×10^4	−195.81	2.01×10^5
Oxígeno	−218.79	1.38×10^4	−182.97	2.13×10^5
Alcohol etílico	−114	1.04×10^5	78	8.54×10^5
Agua	0.00	3.33×10^5	100.00	2.26×10^6
Azufre	119	3.81×10^4	444.60	3.26×10^5
Plomo	327.3	2.45×10^4	1 750	8.70×10^5
Aluminio	660	3.97×10^5	2 450	1.14×10^7
Plata	960.80	8.82×10^4	2 193	2.33×10^6
Oro	1 063.00	6.44×10^4	2 660	1.58×10^6
Cobre	1 083	1.34×10^5	1 187	5.06×10^6

Para entender el papel del calor latente en los cambios de fase, considere la energía requerida para convertir un cubo de hielo de 1.00 g de −30.0°C a vapor a 120.0°C. La figura 20.2 indica los resultados experimentales obtenidos cuando al cubo se le agrega gradualmente energía. Los resultados se presentan como una gráfica de temperatura del sistema del cubo de hielo con la energía agregada al sistema. Examine cada porción de la curva roja.

Parte A. En esta porción de la curva la temperatura del hielo cambia de −30.0°C a 0.0°C. La ecuación 20.4 indica que la temperatura varía linealmente con la energía agregada, así que el resultado experimental es una línea recta sobre la gráfica. Ya que el calor específico del hielo es 2 090 J/kg · °C, se puede calcular la cantidad de energía agregada al aplicar la ecuación 20.4:

$$Q = m_i c_i \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2\,090\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C}) = 62.7\ \text{J}$$

Parte B. Cuando la temperatura del hielo alcanza 0.0°C, la mezcla hielo–agua permanece a esta temperatura, aun cuando se agregue energía, hasta que todo el hielo se funda. La energía requerida para fundir 1.00 g de hielo a 0.0°C es, de la ecuación 20.7,

$$Q = m_i L_f = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(3.33 \times 10^5\ \text{J/kg}) = 333\ \text{J}$$

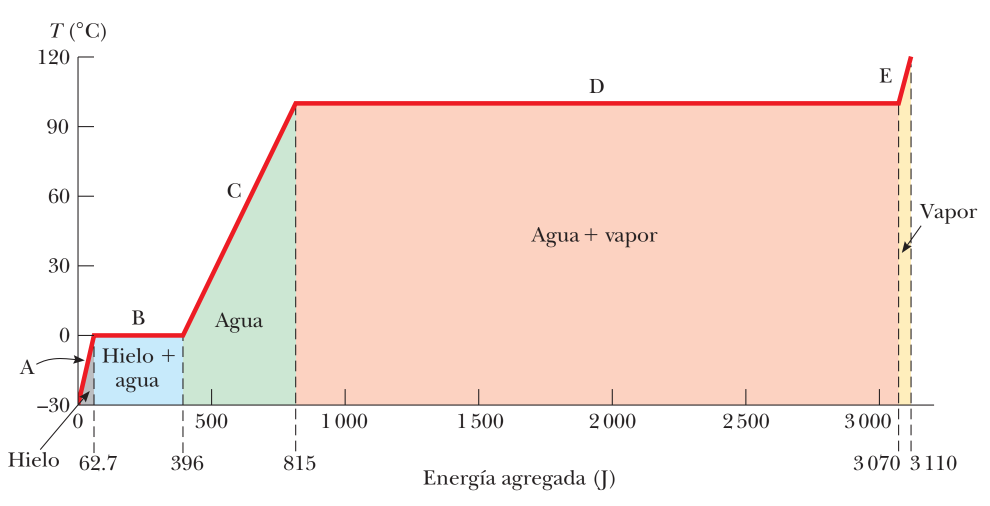


Figura 20.2 Gráfica de temperatura con energía agregada cuando 1.00 g de hielo, inicialmente a −30.0°C, se convierte a vapor a 120.0°C.

En este punto, se mueve a la marca de 396 J (= 62.7 J + 333 J) en el eje de energía de la figura 20.2.

Parte C. Entre 0.0°C y 100.0°C, no se presenta nada sorprendente. No hay cambio de fase y de este modo toda la energía agregada al agua se usa para incrementar su temperatura. La cantidad de energía necesaria para aumentar la temperatura de 0.0°C a 100.0°C es

$$Q = m_w c_w \, \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\text{ kg})(4.19 \times 10^3\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(100.0^\circ\text{C}) = 419\text{ J}$$

Parte D. A 100.0°C se presenta otro cambio de fase, a medida que el agua cambia de agua a 100.0°C a vapor a 100.0°C. Similar a la mezcla hielo–agua en la parte B, la mezcla agua–vapor permanece a 100.0°C, aun cuando se agregue energía, hasta que todo el líquido se convierte a vapor. La energía requerida para convertir 1.00 g de agua a vapor a 100.0°C es

$$Q = m_w L_v = (1.00 \times 10^{-3}\text{ kg})(2.26 \times 10^6\text{ J/kg}) = 2.26 \times 10^3\text{ J}$$

Parte E. En esta porción de la curva, como en las partes A y C, no se presenta cambio de fase; por lo tanto, toda la energía agregada se usa para aumentar la temperatura del vapor. La energía que se debe agregar para elevar la temperatura del vapor de 100.0°C a 120.0°C es

$$Q = m_s c_s \, \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\text{ kg})(2.01 \times 10^3\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(20.0^\circ\text{C}) = 40.2\text{ J}$$

La cantidad total de energía que se debe agregar para cambiar 1 g de hielo a −30.0°C a vapor a 120.0°C es la suma de los resultados de las cinco partes de la curva, que es 3.11×10^3 J. Por el contrario, para enfriar 1 g de vapor a 120.0°C a hielo a −30.0°C, debe remover 3.11×10^3 J de energía.

Note en la figura 20.2 la cantidad de energía relativamente grande que se transfiere al agua para vaporizarla a vapor. Imagine invertir este proceso, con una gran cantidad de energía transferida del vapor para condensarlo en agua líquida. Es por esto que una quemada de piel por vapor a 100°C es mucho más dañina que la exposición de su piel a agua a 100°C. Una gran cantidad de energía entra a su piel desde el vapor, y el vapor permanece a 100°C durante mucho tiempo mientras se condensa. Por lo contrario, cuando su piel entra en contacto con agua a 100°C, el agua de inmediato comienza a bajar de temperatura a medida que transfiere energía del agua a su piel.

Si el agua líquida se mantiene perfectamente inmóvil en un contenedor muy limpio, es posible que el agua descienda por abajo de 0°C sin congelarla en hielo. Este fenómeno, llamado **subenfriamiento**, surge porque el agua requiere una perturbación de cierto tipo para que las moléculas se separen y comiencen a formar la gran estructura abierta del hielo por la cual la densidad del hielo es más baja que la del agua, como se explicó en la sección 19.4. Si el agua subenfriada se perturba, súbitamente se congela. El sistema desciende a la configuración de energía más baja de las moléculas enlazadas de la estructura del hielo, y la energía liberada eleva la temperatura de regreso a 0°C.

Los calentadores de manos comerciales consisten en acetato de sodio líquido en una bolsa plástica sellada. La solución en la bolsa está en un estado subenfriado estable. Cuando sus dedos presionan un disco en la bolsa, el líquido se solidifica y la temperatura aumenta, tal como el agua subenfriada recién mencionada. Sin embargo, en este caso, el punto de congelación del líquido es mayor que la temperatura corporal, así que la bolsa se siente caliente al tacto. Para reutilizar el calentador de manos, la bolsa se debe hervir hasta que el sólido se licue. En tal caso, a medida que se enfría, pasa por abajo de su punto de congelación hacia el estado subenfriado.

También es posible crear **sobrecalentamiento**. Por ejemplo, agua limpia en una taza muy limpia colocada en un horno de microondas a veces puede elevar su temperatura más allá de 100°C sin hervir, porque la formación de una burbuja de vapor en el agua requiere raspones en la taza o algún tipo de impureza en el agua para servir como sitio de nucleación. Cuando la taza se saca del horno de microondas, el agua sobrecalentada se

vuelve explosiva pues de inmediato se forman burbujas y el agua caliente se obliga hacia arriba fuera de la taza.

Pregunta rápida 20.2 Suponga que se realiza el mismo proceso de agregar energía al cubo de hielo como se señaló con anterioridad, pero en vez de ello se grafica la energía interna del sistema como función de la entrada de energía. ¿Cómo sería esta gráfica?

EJEMPLO 20.4 Enfriamiento de vapor

¿Qué masa de vapor, inicialmente a 130°C, se necesita para calentar 200 g de agua en un contenedor de vidrio de 100 g, de 20.0°C a 50.0°C?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine colocar agua y vapor en un contenedor aislado y cerrado. Con el tiempo el sistema alcanza un estado uniforme de agua con una temperatura final de 50.0°C.

Categorizar Respecto a la conceptualización de esta situación, dicho ejemplo involucra calorimetría en la que se presenta un cambio de fase.

Analizar Escriba la ecuación 20.5 para describir el proceso de calorimetría:

$$1)\quad Q_{\text{frío}} = -Q_{\text{caliente}}$$

El vapor experimenta tres procesos: una disminución en temperatura a 100°C, condensación en agua líquida y finalmente una disminución en temperatura del agua a 50.0°C. Encuentre la transferencia de energía en el primer proceso, use la masa desconocida m_s del vapor:

$$Q_1 = m_s c_s\,\Delta T = m_s(2.01 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(-30.0^\circ\text{C})$$
$$= -m_s(6.03 \times 10^4\ \text{J/kg})$$

(*Nota:* Los subíndices *s* corresponden al *vapor*; los subíndices *w*, al agua líquida.)

Encuentre la transferencia de energía en el segundo proceso, asegúrese de usar un signo negativo en la ecuación 20.7, porque la energía sale del vapor:

$$Q_2 = -m_s(2.26 \times 10^6\ \text{J/kg})$$

Encuentre la transferencia de energía en el tercer proceso:

$$Q_3 = m_s c_w\,\Delta T = m_s(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})\ (-50.0^\circ\text{C})$$
$$= -m_s(2.09 \times 10^5\ \text{J/kg})$$

Sume las transferencias de energía en estas tres etapas:

$$Q_{\text{caliente}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$Q_{\text{caliente}} = -m_s[6.03 \times 10^4\ \text{J/kg} + 2.26 \times 10^6\ \text{J/kg} + 2.09 \times 10^5\ \text{J/kg}]$$
$$2)\quad Q_{\text{caliente}} = -m_s(2.53 \times 10^6\ \text{J/kg})$$

El agua a 20.0°C y el vidrio sólo se someten a un proceso, un aumento en temperatura a 50.0°C. Encuentre la transferencia de energía en este proceso:

$$Q_{\text{frío}} = (0.200\ \text{kg})(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C})$$
$$+ (0.100\ \text{kg})(837\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C})$$
$$3)\quad Q_{\text{frío}} = 2.77 \times 10^4\ \text{J}$$

Sustituya las ecuaciones 2) y 3) en la ecuación 1) y resuelva para m_s:

$$2.77 \times 10^4\ \text{J} = -[-m_s(2.53 \times 10^6\ \text{J/kg})]$$
$$m_s = 1.09 \times 10^{-2}\ \text{kg} = 10.9\ \text{g}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si el estado final del sistema es agua a 100°C? ¿Necesitaría más o menos vapor? ¿Cómo cambiaría el análisis anterior?

Respuesta Necesitaría más vapor para elevar la temperatura del agua y el vidrio a 100°C en lugar de a 50.0°C. Habría dos cambios principales en el análisis. Primero, no tendría un término Q_3 para el vapor, porque el agua que se condensa del vapor no se enfría por abajo de 100°C. Segundo, en $Q_{\text{frío}}$, el cambio de temperatura sería 80.0°C en lugar de 30.0°C. Para practicar, demuestre que el resultado es una masa de vapor requerida de 31.8 g.

20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

En termodinámica el *estado* de un sistema se describe con variables tales como presión, volumen, temperatura y energía interna. Como resultado, estas cantidades pertenecen a una categoría llamada **variables de estado**. Para cualquier configuración dada del sistema, es posible identificar valores de las variables de estado. (Para sistemas mecánicos, las variables de estado incluyen energía cinética K y energía potencial U.) Un estado de un sistema se especifica sólo si el sistema está en equilibrio térmico interno. En el caso de un gas en un contenedor, requiere el equilibrio térmico interno que cada parte del gas esté a la misma presión y temperatura.

Una segunda categoría de variables en situación que involucran energía es la de **variables de transferencia**. Estas variables son las que aparecen en el lado derecho de la ecuación de conservación de la energía, la ecuación 8.2. Una variable tal tiene un valor distinto de cero si ocurre un proceso en el que la energía se transfiera a través de las fronteras del sistema. La variable de transferencia es positiva o negativa, depende de si la energía entra o sale del sistema. Ya que una transferencia de energía a través de la frontera representa un cambio en el sistema, las variables de transferencia no se asocian con un estado determinado del sistema sino, más bien, con un *cambio* en el estado del sistema.

En las secciones previas se explicó el calor como una variable de transferencia. En esta sección se estudia otra importante variable de transferencia para sistemas termodinámicos, el trabajo. El trabajo realizado sobre las partículas se ilustró con amplitud en el capítulo 7, y en este caso se investiga el trabajo realizado sobre un sistema deformable, un gas. Considere un gas contenido en un cilindro ajustado con un pistón móvil (figura 20.3). En equilibrio, el gas ocupa un volumen V y ejerce una presión uniforme P sobre las paredes del cilindro y sobre el pistón. Si el pistón tiene un área de sección transversal A, la fuerza ejercida por el gas sobre el pistón es $F = PA$. Ahora suponga que el pistón se empuja hacia adentro y comprime el gas **cuasi estáticamente**, es decir, con la suficiente lentitud que le permita al sistema permanecer, en esencia, en equilibrio térmico interno en todo momento. A medida que el pistón se empuja hacia abajo por una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}} = -F\hat{\mathbf{j}}$ a través de un desplazamiento de $d\vec{\mathbf{r}} = dy\,\hat{\mathbf{j}}$ (figura 20.3b), el trabajo invertido en el gas es, de acuerdo con la definición de trabajo en el capítulo 7,

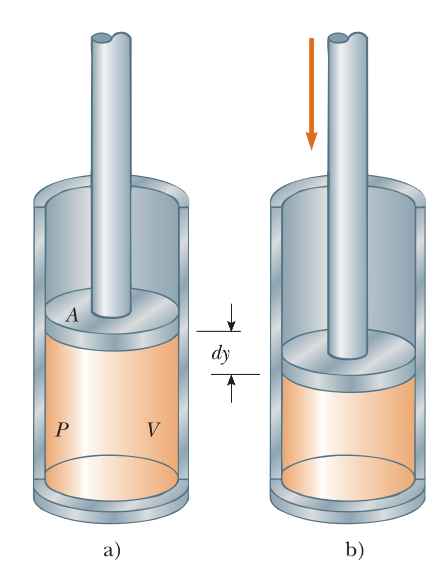


Figura 20.3 En un gas contenido en un cilindro a una presión P se realiza trabajo a medida que el pistón empuja hacia abajo de modo que el gas se comprime.

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -F\hat{\mathbf{j}} \cdot dy\hat{\mathbf{j}} = -F\,dy = -PA\,dy$$

donde la magnitud F de la fuerza externa es igual a PA porque el pistón siempre está en equilibrio entre la fuerza externa y la fuerza del gas. Se supone que la masa del pistón es despreciable en esta explicación. Dado que $A\,dy$ es el cambio en volumen del gas dV, el trabajo realizado sobre el gas se expresa como

$$dW = -P\,dV \quad \textbf{(20.8)}$$

Si el gas se comprime, dV es negativo y el trabajo invertido en el gas es positivo. Si el gas se expande, dV es positivo y el trabajo invertido en el gas es negativo. Si el volumen permanece al máximo, el trabajo invertido en el gas es cero. El trabajo total invertido en el gas a medida que su volumen cambia de V_i a V_f se conoce por la integral de la ecuación 20.8:

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV \quad \textbf{(20.9)}$$

◀ Trabajo invertido en un gas

Para evaluar esta integral, debe conocer cómo varía la presión con el volumen durante el proceso.

En general, la presión no es constante durante un proceso seguido por un gas, pero depende del volumen y la temperatura. Si se conocen la presión y el volumen en cada paso del proceso, el estado del gas en cada momento se puede graficar sobre una representación gráfica llamada **diagrama *PV***, como en la figura 20.4. Esta clase de diagrama permite visualizar un proceso a través del cual avanza un gas. La curva en un diagrama PV se llama *trayectoria* entre los estados inicial y final.

Note que la integral en la ecuación 20.9 es igual al área bajo una curva en un diagrama PV. Por lo tanto, se identifica un uso importante para los diagramas PV:

El trabajo invertido en un gas en un proceso cuasi estático que lleva al gas de un estado inicial a un estado final, es el negativo del área bajo la curva en un diagrama PV, evaluada entre los estados inicial y final.

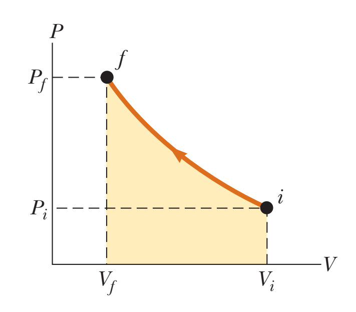


Figura 20.4 Se comprime un gas cuasi estáticamente (con lentitud) desde el estado i hasta el estado f. El trabajo invertido sobre el gas es igual al negativo del área bajo la curva PV. El volumen disminuye, así que esta área es negativa. Por lo tanto el trabajo invertido sobre el gas es positivo. Un agente externo debe hacer trabajo positivo sobre el gas para comprimirlo.

Para el proceso de comprimir un gas en un cilindro, el trabajo consumido depende de la trayectoria particular que toma entre los estados inicial y final, como sugiere la figura 20.4. Para ilustrar este importante punto, considere varias trayectorias diferentes que conectan i y f (figura 20.5). En el proceso que se exhibe en la figura 20.5a, el volumen del gas primero se reduce de V_i a V_f a presión constante P_i y la presión del gas después aumenta de P_i a P_f al calentar a volumen constante V_f. El trabajo invertido en el gas a lo largo de esta trayectoria es $-P_i(V_f - Vi)$. En la figura 20.5b, la presión del gas aumenta de P_i a P_f a volumen constante V_i y enseguida el volumen del gas se reduce de V_i a V_f a presión constante P_f. El trabajo invertido en el gas es $-P_f(V_f - V_i)$. Este valor es mayor que el del proceso

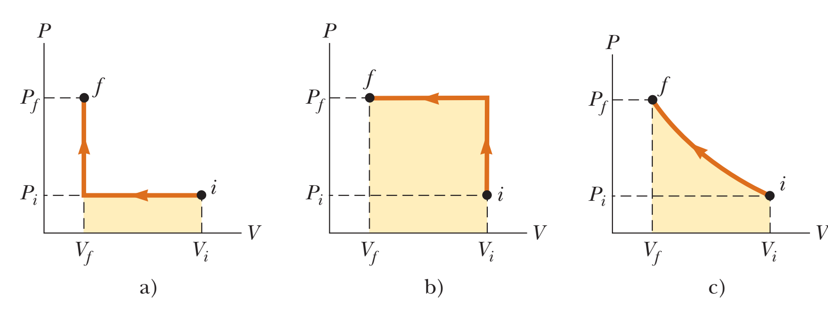


Figura 20.5 El trabajo invertido en un gas a medida que se lleva de un estado inicial a un estado final depende de la trayectoria entre dichos estados.

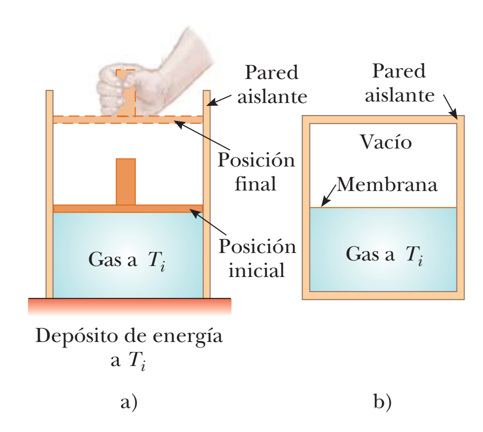


Figura 20.6 a) Un gas a temperatura T_i se expande lentamente mientras absorbe energía de un depósito para mantener una temperatura constante. b) Un gas se expande rápidamente en una región evacuada después de que se rompe una membrana.

descrito en la figura 20.5a, porque el pistón se movió a través del mismo desplazamiento mediante una fuerza considerable. Por último, para el proceso descrito en la figura 20.5c, donde tanto P como V cambian de manera continua, el trabajo invertido en el gas tiene algún valor entre los obtenidos en los primeros dos procesos. Para evaluar el trabajo en este caso, se debe conocer la función $P(V)$ de modo que pueda evaluar la integral en la ecuación 20.9.

La transferencia de energía Q adentro o afuera de un sistema mediante calor también depende del proceso. Considere las situaciones que se presentan en la figura 20.6. En cada caso, el gas tiene el mismo volumen, temperatura y presión iniciales, y se supone que es ideal. En la figura 20.6a, el gas se aísla térmicamente de sus alrededores, excepto en el fondo de la región llena por el gas, donde está en contacto térmico con un depósito de energía. Un *depósito de energía* es una fuente de energía que se considera tan grande que una transferencia de energía finita hacia o desde el depósito no cambia su temperatura. El pistón se mantiene en su posición inicial mediante un agente externo, como una mano. Cuando la fuerza que mantiene al pistón se reduce un poco, el pistón se eleva con lentitud a su posición final. Ya que el pistón se mueve hacia arriba, el gas hace trabajo sobre el pistón. Durante esta expansión al volumen final V_f, se transfiere la suficiente energía por calor del depósito al gas, para mantener una temperatura constante T_i.

Ahora considere el sistema por completo térmicamente aislado, que se muestra en la figura 20.6b. Cuando la membrana se rompe, el gas se expande rápidamente en el vacío hasta que ocupa un volumen V_f y está a una presión P_f. En este caso, el gas no realiza trabajo porque no aplica una fuerza; no se requiere fuerza para expandirlo en un vacío. Además, no se transfiere energía mediante calor a través de la pared aislante.

Los estados inicial y final del gas ideal en la figura 20.6a son idénticos a los estados inicial y final de la figura 20.6b, pero las trayectorias son diferentes. En el primer caso, el gas realiza trabajo sobre el pistón y se transfiere energía lentamente al gas mediante calor. En el segundo caso, no se transfiere energía mediante calor y el valor del trabajo invertido es cero. Por lo tanto, **la transferencia de energía por calor, como el trabajo invertido, depende de los estados inicial, final e intermedio del sistema**. En otras palabras, puesto que calor y trabajo dependen de la trayectoria, ninguna cantidad está determinada exclusivamente por los puntos finales de un proceso termodinámico.

20.5 Primera ley de la termodinámica

Cuando se introdujo la ley de conservación de energía en el capítulo 8, se afirmó que el cambio en la energía de un sistema es igual a la suma de todas las transferencias de energía a través de la frontera del sistema. La **primera ley de la termodinámica** es un caso especial

de la ley de conservación de energía que describe procesos que sólo cambian la energía interna[5] y las únicas transferencias de energía son mediante calor y trabajo:

$$\Delta E_{int} = Q + W \quad (20.10)$$

◀ Primera ley de la termodinámica

Una consecuencia importante de la primera ley de la termodinámica es que existe una cantidad conocida como energía interna cuyo valor está determinado por el estado del sistema. Por lo tanto, la energía interna es una variable de estado similar a la presión, volumen y temperatura.

Cuando un sistema se somete a un cambio infinitesimal de estado en el que una cantidad pequeña de energía dQ se transfiere mediante calor y una cantidad pequeña de trabajo dW se invierte, la energía interna cambia en una cantidad pequeña dE_{int}. Debido a eso para procesos infinitesimales es posible expresar la primera ley como[6]

$$dE_{int} = dQ + dW$$

A continuación se investigan algunos casos especiales en los que se aplica la primera ley. Primero, considere un *sistema aislado*, que no interactúa con sus alrededores. En este caso, no tiene lugar la transferencia de energía por calor y el trabajo consumido en el sistema es cero; por tanto, la energía interna permanece constante. Es decir, ya $Q = W = 0$, se sigue que $\Delta E_{int} = 0$; en consecuencia, $E_{int,i} = E_{int,f}$. Se concluye que **la energía interna E_{int} de un sistema aislado permanece constante**.

A continuación, considere el caso de un sistema que intercambia energía con sus alrededores y se lleva a través de un **proceso cíclico**, que comienza y termina en el mismo estado. En este caso, el cambio en la energía interna de nuevo debe ser cero porque E_{int} es una variable de estado; por lo tanto, la energía Q agregada al sistema debe ser igual al negativo del trabajo W consumido en el sistema durante el ciclo. Es decir, en un proceso cíclico,

$$\Delta E_{int} = 0 \text{ y } Q = -W \text{ (proceso cíclico)}$$

En un diagrama PV, un proceso cíclico aparece como una curva cerrada. (Los procesos descritos en la figura 20.5 se representan mediante curvas abiertas, porque los estados inicial y final difieren.) Se puede demostrar que, **en un proceso cíclico, el trabajo neto invertido en el sistema por cada ciclo es igual al área encerrada por la trayectoria que representa el proceso en un diagrama *PV*.**

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.7
Convención de signo dual

Algunos libros de física e ingeniería presentan la primera ley como $\Delta E_{int} = Q - W$, con un signo menos entre el calor y trabajo. La causa es que el trabajo se define en estos tratamientos como el trabajo invertido *por* el gas en lugar de *sobre* el gas, como en el tratamiento de este texto. La ecuación equivalente a la ecuación 20.9 en estos tratamientos define el trabajo como $W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$. Por lo tanto, si el gas realiza trabajo positivo, la energía sale del sistema, lo que conduce al signo negativo en la primera ley. En sus estudios en otros cursos de química o ingeniería, o al leer otros libros de física, asegúrese de notar cuál convención de signo se usa para la primera ley.

20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

En esta sección se consideran aplicaciones de la primera ley a procesos a través de los cuales se lleva un gas. Como modelo, considere la muestra de gas contenida en el mecanismo pistón–cilindro en la figura 20.7 (página 568). Esta figura muestra el trabajo que se invierte en el gas y la energía que se transfiere mediante calor, de modo que la energía interna del gas se eleva. En la siguiente explicación de diferentes procesos, consulte de nuevo esta figura y altere mentalmente las direcciones de la transferencia de energía para reflejar lo que sucede en el proceso.

Antes de aplicar la primera ley de la termodinámica a sistemas específicos, es útil definir primero algunos procesos termodinámicos idealizados. Un **proceso adiabático** es aquel durante el cual no entra ni sale energía del sistema por calor; $Q = 0$. Un proceso adiabático

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.8
La primera ley

Con la aproximación de energía de este libro, la primera ley de la termodinámica es un caso especial de la ecuación 8.2. Algunos físicos argumentan que la primera ley es la ecuación general para la conservación de la energía, equivalente a la ecuación 8.2. En este planteamiento, la primera ley se aplica a un sistema cerrado (de modo que no hay transferencia de materia), el calor se interpreta de modo que incluya radiación electromagnética y el trabajo de modo que incluya transmisión eléctrica ("trabajo eléctrico") y ondas mecánicas ("trabajo molecular"). Tengo esto presente cuando revise la primera ley en su lectura de otros libros de física.

[5] Es un accidente desafortunado de la historia que el símbolo tradicional para energía interna sea U, que también es el símbolo tradicional para energía potencial, como se presentó en el capítulo 7. Para evitar confusión entre energía potencial y energía interna, en este libro se usa el símbolo E_{int} para energía interna. Sin embargo, si usted toma un curso avanzado de termodinámica, esté preparado para ver U como el símbolo para la energía interna en la primera ley.

[6] Note que dQ y dW no son verdaderas cantidades diferenciales porque Q y W no son variables de estado, pero dE_{int} sí lo es. Puesto que dQ y dW son *diferenciales inexactas*, con frecuencia se representan mediante los símbolos $đQ$ y $đW$. Para mayores detalles en este punto, vea un texto avanzado en termodinámica.

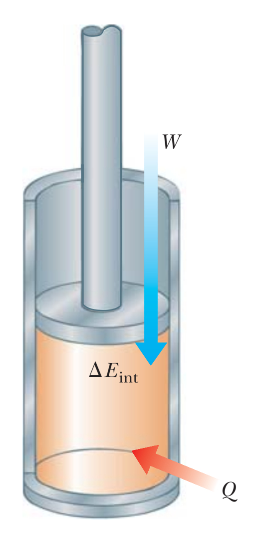


Figura 20.7 La primera ley de la termodinámica iguala el cambio en energía interna E_{int} en un sistema con la transferencia de energía neta al sistema mediante calor Q y trabajo W. En la situación que se muestra aquí, la energía interna del gas aumenta.

se puede lograr al aislar térmicamente las paredes del sistema o al realizar el proceso rápidamente de modo que haya un tiempo despreciable para que la energía se transfiera por calor. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a un proceso adiabático se obtiene

$$\Delta E_{\text{int}} = W \text{ (proceso adiabático)} \quad \textbf{(20.11)}$$

Este resultado muestra que si un gas se comprime adiabáticamente de modo que W sea positivo, en tal caso ΔE_{int} es positivo y la temperatura del gas aumenta. Por lo contrario, la temperatura de un gas disminuye cuando el gas se expande adiabáticamente.

Los procesos adiabáticos son muy importantes en la práctica ingenieril. Algunos ejemplos comunes son la expansión de los gases calientes en un motor de combustión interna, la licuefacción de los gases en un sistema de enfriamiento y la carrera de compresión en un motor diesel.

El proceso descrito en la figura 20.6b, llamado **expansión adiabática libre**, es único. El proceso es adiabático porque tiene lugar en un contenedor aislado. Ya que el gas se expande en un vacío, no aplica una fuerza sobre un pistón como se describió en la figura 20.6a, de modo que no se consume trabajo en o por el gas. En consecuencia, en este proceso adiabático, tanto $Q = 0$ como $W = 0$. Como resultado, $\Delta E_{\text{int}} = 0$ para este proceso, como se puede ver a partir de la primera ley. Es decir: **las energías internas inicial y final de un gas son iguales en una expansión adiabática libre**. Como se verá en el capítulo 21, la energía interna de un gas ideal depende sólo de su temperatura. Debido a eso, no se espera cambio en temperatura durante una expansión adiabática libre. Esta predicción está en concordancia con los resultados de los experimentos realizados a presiones bajas. (Los experimentos efectuados a presiones altas para gases reales exhiben un cambio ligero de temperatura después de la expansión debida a interacciones intermoleculares, lo que representa una desviación del modelo de un gas ideal.)

Un proceso que se presenta a presión constante se llama **proceso isobárico**. En la figura 20.7, se podría establecer un proceso isobárico al permitir al pistón moverse libremente de modo que siempre esté en equilibrio entre la fuerza neta del gas que empuja hacia arriba y el peso del pistón más la fuerza debida a la presión atmosférica que empujan hacia abajo. El primer proceso en la figura 20.5a y el segundo proceso en la figura 20.5b son isobáricos.

En tal proceso, los valores del calor y el trabajo por lo general son distintos de cero. El trabajo consumido en el gas en un proceso isobárico es simplemente

Proceso isobárico ►

$$W = -P(V_f - V_i) \text{ (proceso isobárico)} \quad \textbf{(20.12)}$$

donde P es la presión constante del gas durante el proceso.

Un proceso que tiene lugar a volumen constante se llama **proceso isovolumétrico**. En la figura 20.7, sujetar el pistón en una posición fija aseguraría un proceso isovolumétrico. El segundo proceso en la figura 20.5a y el primer proceso en la figura 20.5b son isovolumétricos.

Ya que el volumen del gas no cambia en tal proceso, el trabajo conocido por la ecuación 20.9 es cero. Por tanto, a partir de la primera ley se ve que, en un proceso isovolumétrico, porque $W = 0$,

Proceso isovolumétrico ►

$$\Delta E_{\text{int}} = Q \text{ (proceso isovolumétrico)} \quad \textbf{(20.13)}$$

Esta expresión especifica que **si se agrega energía mediante calor a un sistema que se mantiene a volumen constante, toda la energía transferida permanece en el sistema como un aumento en su energía interna**. Por ejemplo, cuando una lata de pintura en aerosol se lanza al fuego, la energía entra al sistema (el gas en la lata) mediante calor a través de las paredes metálicas de la lata. En consecuencia, la temperatura, y por lo tanto la presión en la lata, aumentan hasta que la lata posiblemente explote.

Proceso isotérmico ►

Un proceso que se presenta a temperatura constante se llama **proceso isotérmico**. Este proceso se establece al sumergir el cilindro de la figura 20.7 en un baño de hielo–agua líquida o al poner el cilindro en contacto con algún otro depósito a temperatura constante. Una gráfica de P con a V a temperatura constante para un gas ideal produce una curva hiperbólica llamada *isoterma*. La energía interna de un gas ideal sólo es una función de

la temperatura. En consecuencia, en un proceso isotérmico que involucra un gas ideal, $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Para un proceso isotérmico, se concluye de la primera ley que la transferencia de energía Q debe ser igual al negativo del trabajo consumido en el gas; es decir, $Q = -W$. Cualquier energía que entra al sistema por calor se transfiere afuera del sistema por trabajo; como resultado, en un proceso isotérmico no ocurre cambio en la energía interna del sistema.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.9

***Q* ≠ 0 en un proceso isotérmico**

No caiga en la trampa común de pensar que no debe haber transferencia de energía por calor si la temperatura no cambia, como es el caso en un proceso isotérmico. Ya que la causa del cambio de temperatura puede ser calor *o* trabajo, la temperatura puede permanecer constante incluso si entra energía al gas por calor, que sólo ocurriría si la energía que entra al gas por calor sale por trabajo.

Pregunta rápida 20.3 En las últimas tres columnas de la siguiente tabla, llene los recuadros con los signos correctos (−, + o 0) para Q, W y ΔE_{int}. Para cada situación, se identifica el sistema a considerar.

Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
a) Bombear rápidamente una llanta de bicicleta	Aire en la bomba			
b) Sartén con agua a temperatura ambiente en una estufa caliente	Agua en la sartén			
c) Aire que sale rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo			

Expansión isotérmica de un gas ideal

Suponga que le permite a un gas ideal expandirse cuasi estáticamente a temperatura constante. Este proceso se describe mediante el diagrama PV que se muestra en la figura 20.8. La curva es una hipérbola (véase el apéndice B, ecuación B.23), y la ley de gas ideal con T constante indica que la ecuación de esta curva es $PV =$ constante.

Calcule el trabajo consumido en el gas en la expansión desde el estado i al estado f. El trabajo consumido en el gas se conoce por la ecuación 20.9. Ya que el gas es ideal y el proceso es cuasi estático, la ley del gas ideal es válida para cada punto en la trayectoria. Debido a eso,

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV$$

Ya que T es constante en este caso, se puede retirar de la integral junto con n y R:

$$W = -nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \ln V\Big|_{V_i}^{V_f}$$

Para evaluar la integral, use $\int(dx/x) = \ln x$. (Véase el apéndice B.) Evaluar el resultado en los volúmenes inicial y final produce

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right) \quad \textbf{(20.14)}$$

En términos numéricos, este trabajo W es igual al negativo del área sombreada bajo la curva PV que se exhibe en la figura 20.8. Porque el gas se expande, $V_f > V_i$ y el valor para el trabajo consumido en el gas es negativo, como se esperaba. Si el gas se comprime, en tal caso $V_f < V_i$ y el trabajo consumido en el gas es positivo.

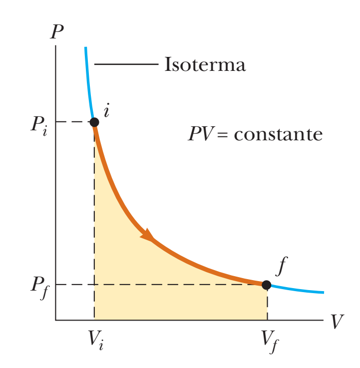


Figura 20.8 Diagrama PV para una expansión isotérmica de un gas ideal desde un estado inicial hasta un estado final. La curva es una hipérbola.

Pregunta rápida 20.4 Caracterice las trayectorias en la figura 20.9 como isobárica, isovolumétrica, isotérmica o adiabática. Para la trayectoria B, $Q = 0$.

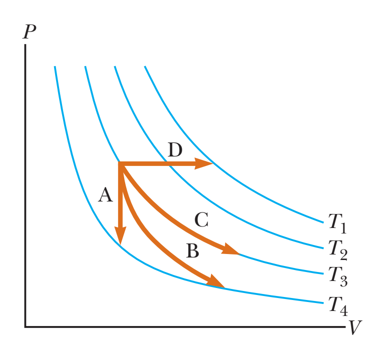


Figura 20.9 (Pregunta rápida 20.4) Identifique la naturaleza de las trayectorias A, B, C y D.

EJEMPLO 20.5 Una expansión isotérmica

Una muestra de 1.0 mol de un gas ideal se mantiene a 0.0°C durante una expansión de 3.0 L a 10.0 L.

A) ¿Cuánto trabajo se gasta en el gas durante la expansión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Represente el proceso en su mente: el cilindro en la figura 20.7 se sumerge en un baño de hielo–agua líquida, y el pistón se mueve hacia afuera de modo que el volumen del gas aumenta.

Categorizar Se evaluarán los parámetros con las ecuaciones desarrolladas en las secciones anteriores, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. Porque la temperatura del gas es fija, el proceso es isotérmico.

Sustituya los valores conocidos en la ecuación 20.14:

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right)$$

$$= (1.0 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(273 \text{ K}) \ln\left(\frac{3.0 \text{ L}}{10.0 \text{ L}}\right)$$

$$= -2.7 \times 10^3 \text{ J}$$

B) ¿Cuánta transferencia de energía por calor se presenta entre el gas y sus alrededores en este proceso?

SOLUCIÓN

Encuentre el calor a partir de la primera ley:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W$$

$$0 = Q + W$$

$$Q = -W = 2.7 \times 10^3 \text{ J}$$

C) Si el gas regresa al volumen original mediante un proceso isobárico, ¿cuánto trabajo se consume en el gas?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 20.12. La presión no se proporciona, así que incorpore la ley de gas ideal:

$$W = -P(V_f - V_i) = -\frac{nRT_i}{V_i}(V_f - V_i)$$

$$= -\frac{(1.0 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(273 \text{ K})}{10.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3}(3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 10.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)$$

$$= 1.6 \times 10^3 \text{ J}$$

La temperatura y volumen iniciales se usaron para calcular el trabajo comsumido porque la temperatura final es desconocida. El trabajo gastado en el gas es positivo porque el gas se comprimió.

EJEMPLO 20.6 Agua hirviendo

Suponga que 1.00 g de agua se vaporiza isobáricamente a presión atmosférica (1.013×10^5 Pa). Su volumen en el estado líquido es $V_i = V_{\text{líquido}} = 1.00 \text{ cm}^3$, y su volumen en el estado de vapor es $V_f = V_{\text{vapor}} = 1\,671 \text{ cm}^3$. Encuentre el trabajo invertido en la expansión y el cambio en energía interna del sistema. Ignore cualquier mezcla del vapor y el aire circundante; imagine que el vapor simplemente empuja al aire circundante fuera del camino.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note que la temperatura del sistema no cambia. Hay un cambio de fase que ocurre a medida que el agua líquida se convierte en vapor.

Categorizar Ya que la expansión tiene lugar a presión constante, el proceso se clasifica como isobárico. Las ecuaciones desarrolladas en las secciones precedentes se usarán, de modo que este ejemplo se categoriza como un problema de sustitución.

Use la ecuación 20.12 para encontrar el trabajo invertido en el sistema a medida que el aire se empuja afuera del camino:

$$W = -P(V_f - V_i)$$

$$= -(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(1\,671 \times 10^{-6} \text{ m}^3 - 1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3)$$

$$= -169 \text{ J}$$

Aplique la ecuación 20.7 y el calor latente de vaporización del agua para encontrar la energía transferida en el sistema por calor:

$$Q = mL_v = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2.26 \times 10^6\ \text{J/kg}) = 2\ 260\ \text{J}$$

Use la primera ley para encontrar el cambio en energía interna del sistema:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 2\ 260\ \text{J} + (-169\ \text{J}) = \boxed{2.09\ \text{kJ}}$$

El valor positivo para ΔE_{int} indica que la energía interna del sistema aumenta. La fracción más grande de la energía (2 090 J/2 260 J = 93%) transferida al líquido aumenta la energía interna del sistema. El restante 7% de la energía transferida sale del sistema mediante trabajo consumido por el vapor sobre la atmósfera circundante.

EJEMPLO 20.7 Calentamiento de un sólido

Una barra de cobre de 1.0 kg se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 20°C a 50°C.

A) ¿Cuál es el trabajo consumido en la barra de cobre por la atmósfera circundante?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo incluye un sólido, mientras que los dos ejemplos precedentes trataron líquidos y gases. Para un sólido, el cambio en volumen debido a expansión térmica es muy pequeño.

Categorizar Ya que la expansión tiene lugar a presión atmosférica constante, el proceso se clasifica como isobárico.

Analizar Calcule el cambio en volumen de la barra de cobre, use la ecuación 19.6, el coeficiente de expansión lineal promedio para el cobre conocido en la tabla 19.1, y que $\beta = 3\alpha$:

$$\Delta V = \beta V_i\,\Delta T = 3\alpha V_i\,\Delta T$$
$$= 3[1.7 \times 10^{-5}(°\text{C})^{-1}]V_i(50°\text{C} - 20°\text{C}) = 1.5 \times 10^{-3}\ V_i$$

Aplique la ecuación 1.1 para expresar el volumen inicial de la barra en términos de la masa de la barra y la densidad del cobre de la tabla 14.1:

$$\Delta V = (1.5 \times 10^{-3})\left(\frac{m}{\rho}\right) = (1.5 \times 10^{-3})\left(\frac{1.0\ \text{kg}}{8.92 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}\right)$$
$$= 1.7 \times 10^{-7}\ \text{m}^3$$

Encuentre el trabajo invertido en la barra de cobre, aplique la ecuación 20.12:

$$W = -P\,\Delta V = -(1.013 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(1.7 \times 10^{-7}\ \text{m}^3)$$
$$= \boxed{-1.7 \times 10^{-2}\ \text{J}}$$

Ya que este trabajo es negativo, el trabajo *lo realiza la barra de cobre* sobre la atmósfera.

B) ¿Cuánta energía se transfiere a la barra de cobre por calor?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 20.4 y el calor específico del cobre de la tabla 20.1:

$$Q = mc\,\Delta T = (1.0\ \text{kg})(387\ \text{J/kg}\cdot°\text{C})(50°\text{C} - 20°\text{C})$$
$$= \boxed{1.2 \times 10^4\ \text{J}}$$

C) ¿Cuál es el aumento en energía interna de la barra de cobre?

SOLUCIÓN

Use la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 1.2 \times 10^4\ \text{J} + (-1.7 \times 10^{-2}\ \text{J})$$
$$= \boxed{1.2 \times 10^4\ \text{J}}$$

Finalizar La mayor parte de la energía transferida al sistema por calor aumenta la energía interna de la barra de cobre. La fracción de energía usada para realizar trabajo sobre la atmósfera circundante sólo es de casi 10^{-6}. En consecuencia, cuando se analiza la expansión térmica de un sólido o un líquido, por lo general la cantidad pequeña de trabajo invertido en o por el sistema se ignora.

TABLA 20.3

Conductividades térmicas

Sustancia	Conductividad térmica (W/m · °C)
Metales (a 25°C)	
Aluminio	238
Cobre	397
Oro	314
Hierro	79.5
Plomo	34.7
Plata	427
No metales (valores aproximados)	
Asbesto	0.08
Concreto	0.8
Diamante	2 300
Vidrio	0.8
Hielo	2
Caucho	0.2
Agua	0.6
Madera	0.08
Gases (a 20°C)	
Aire	0.023 4
Helio	0.138
Hidrógeno	0.172
Nitrógeno	0.023 4
Oxígeno	0.023 8

20.7 Mecanismos de transferencia de energía

En el capítulo 8 se presentó un planteamiento global al análisis energético de los procesos físicos a través de la ecuación 8.1, $\Delta E_{\text{sistema}} = \Sigma T$, donde T representa transferencia de energía, que puede presentarse por varios mecanismos. Antes, en este capítulo, se explicaron dos de los términos en el lado derecho de esta ecuación, trabajo W y calor Q. En esta sección se exploran más detalles acerca del calor como medio de transferencia de energía y otros dos métodos de transferencia de energía relacionados a cambios de temperatura: convección (una forma de transferencia de materia T_{TM}) y la radiación electromagnética T_{RE}.

Conducción térmica

El proceso de transferencia de energía por calor también se llama **conducción** o **conducción térmica**. En este proceso, la transferencia se representa a escala atómica como un intercambio de energía cinética entre partículas microscópicas (moléculas, átomos y electrones libres) en el que las partículas menos energéticas ganan energía en colisiones con partículas más energéticas. Por ejemplo, si usted sostiene un extremo de una larga barra metálica e inserta el otro extremo en una flama, encontrará que la temperatura del metal en su mano aumenta pronto. La energía alcanza su mano mediante conducción. Al inicio, antes de que la barra se inserte en la flama, las partículas microscópicas en el metal vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. A medida que la flama aumenta la temperatura de la barra, las partículas cerca de la flama comienzan a vibrar con mayor y mayor amplitud. Estas partículas, a su vez, chocan con sus vecinas y transfieren algo de su energía en las colisiones. En forma lenta, las amplitudes de vibración de los átomos metálicos y electrones más alejados de la flama aumenta y al final los que están cerca de su mano resultan afectados. Esta vibración aumentada se detecta mediante un incremento en la temperatura del metal y de su mano potencialmente quemada.

La rapidez de conducción térmica depende de las propiedades de la sustancia a calentar. Por ejemplo, es posible sostener un trozo de asbesto en una flama de manera indefinida, lo que implica que muy poca energía se conduce a través del asbesto. En general, los metales son buenos conductores térmicos y los materiales como asbesto, corcho, papel y fibra de vidrio son conductores pobres. Los gases también son pobres conductores porque la distancia de separación entre las partículas es muy grande. Los metales son buenos conductores térmicos porque contienen gran cantidad de electrones que son comparativamente libres para moverse a través del metal y por tanto transportan energía a través de grandes distancias. En consecuencia, en un buen conductor como el cobre, la conducción tiene lugar mediante la vibración de los átomos y el movimiento de electrones libres.

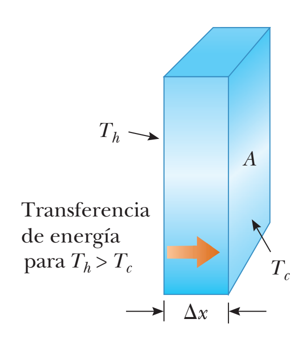


Figura 20.10 Transferencia de energía a través de una placa conductora con un área de sección transversal A y un grosor Δx. Las caras opuestas están a diferentes temperaturas T_c y T_h.

La conducción se presenta sólo si hay una diferencia en temperatura entre dos partes del medio de conducción. Considere una placa de material de grosor Δx y área de sección transversal A. Una cara de la placa está a una temperatura T_c, y la otra está a una temperatura $T_h > T_c$ (figura 20.10). Al experimentar, se encuentra que la energía Q se transfiere en un intervalo de tiempo Δt desde la cara más caliente hacia la más fría; la rapidez $\mathcal{P} = Q/\Delta t$ a la que se presenta esta transferencia es proporcional al área de sección transversal y la diferencia de temperatura $\Delta T = T_h - T_c$, e inversamente proporcional al grosor:

$$\mathcal{P} = \frac{Q}{\Delta t} \propto A\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Note que $\mathcal{P}$ tiene unidades de watts cuando Q está en joules y Δt en segundos. Es decir, no es de sorprenderse porque $\mathcal{P}$ es *potencia*, la rapidez de transferencia de energía por calor. Para una placa de grosor infinitesimal dx y diferencia de temperatura dT, se escribe la **ley de conducción térmica** como

Ley de conducción térmica ▶

$$\mathcal{P} = kA\left|\frac{dT}{dx}\right| \qquad \textbf{(20.15)}$$

donde la constante de proporcionalidad k es la **conductividad térmica** del material y $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura** (la relación a la que varía la temperatura con la posición).

Suponga que una larga barra uniforme de longitud L se aísla térmicamente de modo que la energía no puede escapar por calor de su superficie, excepto en los extremos, como se muestra en la figura 20.11. Un extremo está en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c, y el otro extremo está en contacto térmico con un depósito a temperatura $T_h > T_c$. Cuando se llega a un estado estable, la temperatura en cada punto a lo largo de la barra es constante en el tiempo. En este caso, si se supone que k no es una función de la temperatura, el gradiente de temperatura es el mismo en todas partes a lo largo de la barra y es

$$\left|\frac{dT}{dx}\right| = \frac{T_h - T_c}{L}$$

Debido a eso, la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la barra es

$$\mathcal{P} = kA\left(\frac{T_h - T_c}{L}\right) \qquad \textbf{(20.16)}$$

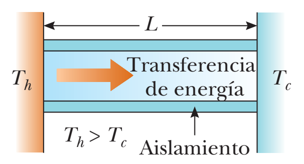


Figura 20.11 Conducción de energía a través de una barra aislada uniforme de longitud L. Los extremos opuestos están en contacto térmico con depósitos de energía a diferentes temperaturas.

Las sustancias que son buenas conductoras térmicas tienen valores máximos de conductividad térmica, mientras que los buenos aislantes térmicos tienen valores bajos de conductividad térmica. La tabla 20.3 menciona conductividades térmicas para diferentes sustancias. Note que los metales por lo general son mejores conductores térmicos que los no metales.

Para una placa compuesta que contenga varios materiales de grosores $L_1, L_2, \ldots$ y conductividades térmicas $k_1, k_2, \ldots$ la rapidez de transferencia de energía a través de la placa en estado estable es

$$\mathcal{P} = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i (L_i/k_i)} \qquad \textbf{(20.17)}$$

donde T_c y T_h son las temperaturas de las superficies exteriores (que se mantienen constantes) y la suma es sobre todas las placas. El ejemplo 20.8 muestra cómo resulta la ecuación 20.17 de una consideración de dos grosores de materiales.

Pregunta rápida 20.5 Tiene dos barras de la misma longitud y diámetro, pero están formadas de diferentes materiales. Las barras se usan para conectar dos regiones a distintas temperaturas de modo que las transferencias de energía a través de las barras son por calor. Las barras se conectan en serie, como en la figura 20.12a, o en paralelo, como en la figura 20.12b. ¿En cuál caso la rapidez de transferencia de energía por calor es mayor? a) La rapidez es mayor cuando las barras están en serie. b) La rapidez es mayor cuando las barras están en paralelo. c) La rapidez es la misma en ambos casos.

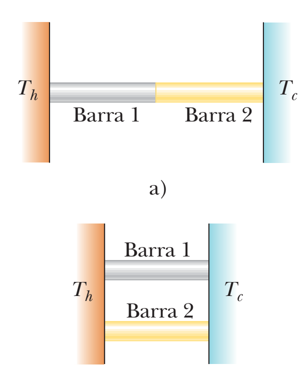


Figura 20.12 (Pregunta rápida 20.5) ¿En cuál caso la rapidez de transferencia de energía es mayor?

EJEMPLO 20.8 Transferencia de energía a través de dos placas

Dos placas de grosores L_1 y L_2 y conductividades térmicas k_1 y k_2 están en contacto térmico una con otra, como se muestra en la figura 20.13. Las temperaturas de sus superficies exteriores son T_c y T_h, respectivamente, y $T_h > T_c$. Determine la temperatura en la interfaz y la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de las placas en la condición de estado estable.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note la frase "en la condición de estado estable". A partir de dicha frase se entiende que las transferencias de energía a través de la placa compuesta son a la misma rapidez en todos los puntos. De otro modo, la energía se acumularía o desaparecería en algún punto. Además, la temperatura varía con la posición en las dos placas, muy probablemente a diferentes proporciones en cada parte de la placa compuesta. Cuando el sistema queda en estado estable, la interfaz está a alguna temperatura fija T.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de conducción térmica en equilibrio e impone la condición de que la potencia es la misma en ambas placas de material.

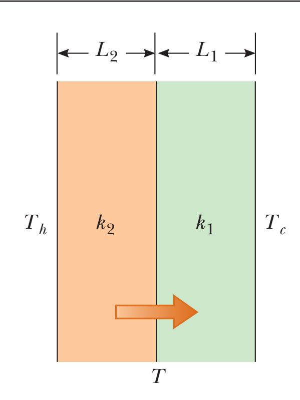


Figura 20.13 (Ejemplo 20.8) Transferencia de energía por conducción a través de dos placas en contacto térmico mutuo. En estado estable, la rapidez de transferencia de energía a través de la placa 1 es igual a la rapidez de transferencia de energía a través de la placa 2.

Analizar Aplique la ecuación 20.16 para expresar la rapidez a la que se transfiere energía a través de la placa 1:

$$1)\quad \mathcal{P}_1 = k_1 A\left(\frac{T - T_c}{L_1}\right)$$

Exprese la rapidez a la que se transfiere energía a través de la placa 2:

$$2)\quad \mathcal{P}_2 = k_2 A\left(\frac{T_h - T}{L_2}\right)$$

Iguale estas dos relaciones para representar la situación de equilibrio:

$$k_1 A\left(\frac{T - T_c}{L_1}\right) = k_2 A\left(\frac{T_h - T}{L_2}\right)$$

Resuelva para T:

$$3)\quad T = \frac{k_1 L_2 T_c + k_2 L_1 T_h}{k_1 L_2 + k_2 L_1}$$

Sustituya la ecuación 3) o en la ecuación 1) o en la ecuación 2):

$$4)\quad \mathcal{P} = \frac{A(T_h - T_c)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)}$$

Finalizar La extensión de este procedimiento a varias placas de materiales conduce a la ecuación 20.17.

¿Qué pasaría si? Suponga que usted construye un contenedor aislado con dos capas de aislante y la rapidez de transferencia de energía determinada por la ecuación 4) resulta ser muy alta. Tiene suficiente espacio para aumentar el grosor de una de las dos capas en 20%. ¿Cómo decidiría cuál capa elegir?

Respuesta Para reducir la potencia tanto como sea posible, debe aumentar lo más posible el denominador en la ecuación 4). Cualquier grosor que elija aumentar, L_1 o L_2, aumentará el correspondiente término L/k en el denominador en 20%. Para que este cambio porcentual represente el mayor cambio absoluto, usted quiere tomar 20% del término más grande. Por lo tanto, debe aumentar el grosor de la capa que tenga el valor más grande de L/k.

Aislamiento casero

En la práctica de ingeniería, el término L/k para una sustancia particular se conoce como el **valor *R*** del material. Debido a eso, la ecuación 20.17 se reduce a

$$\mathcal{P} = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i R_i} \qquad \textbf{(20.18)}$$

donde $R_i = L_i/k_i$. En la tabla 20.4 se proporcionan los valores R de algunos materiales de construcción comunes. En Estados Unidos, las propiedades aislantes de los materiales

TABLA 20.4

Valores R para algunos materiales de construcción comunes

Material	Valor R (ft$^2\cdot$°F$\cdot$h/Btu)
Recubrimiento de madera dura (1 pulgada de espesor)	0.91
Tejas de madera (traslapada)	0.87
Ladrillo (4 pulgadas de espesor)	4.00
Bloque de concreto (núcleo relleno)	1.93
Aislamiento de fibra de vidrio (3.5 pulgadas de espesor)	10.90
Aislamiento de fibra de vidrio (6 pulgadas de espesor)	18.80
Tablero de fibra de vidrio (1 pulgada de espesor)	4.35
Fibra de celulosa (1 pulgada de espesor)	3.70
Vidrio plano (0.125 pulgadas de espesor)	0.89
Vidrio aislante (0.25 pulgadas de espacio)	1.54
Espacio de aire (3.5 pulgadas de espesor)	1.01
Capa de aire estancado	0.17
Muro seco (0.5 pulgadas de espesor)	0.45
Revestimiento (0.5 pulgadas de espesor)	1.32

utilizados en la construcción por lo general se expresan en unidades usuales estadounidenses, no en unidades SI. Por lo tanto, en la tabla 20.4, los valores *R* se proporcionan como una combinación de unidades térmicas británicas, pies, horas y grados Fahrenheit.

En cualquier superficie vertical abierta al aire, una capa estancada muy delgada de aire se adhiere a la superficie. Uno debe considerar esta capa cuando determine el valor *R* para una pared. El grosor de esta capa estancada en una pared exterior depende de la rapidez del viento. La transferencia de energía a través de las paredes de una casa en un día tempestuoso es mayor que la de un día cuando el aire está tranquilo. Un valor *R* representativo para esta capa estancada de aire se da en la tabla 20.4.

EJEMPLO 20.9 El valor *R* de una pared típica

Calcule el valor *R* total de una pared construida como se muestra en la figura 20.14a. Desde el exterior de la casa (hacia el frente en la figura) y moviéndose hacia el interior, la pared consiste en 4 pulgadas de ladrillo, 0.5 pulgadas de revestimiento, un espacio de aire de 3.5 pulgadas de grueso y 0.5 pulgadas de muro seco.

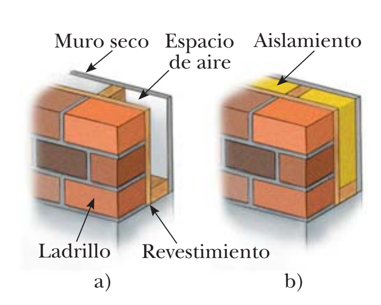


Figura 20.14 (Ejemplo 20.9) Una pared exterior de una casa que contiene a) un espacio de aire y b) aislamiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 20.14 para ayudarse a formar ideas de la estructura de la pared. No olvide las capas de aire estancado adentro y afuera de la casa.

Categorizar Para el aislamiento casero se usarán ecuaciones específicas desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la tabla 20.4 para hallar el valor *R* de cada capa:

$$R_1 \text{ (capa de aire estancada exterior)} = 0.17 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_2 \text{ (ladrillo)} = 4.00 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_3 \text{ (revestimiento)} = 1.32 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_4 \text{ (espacio de aire)} = 1.01 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_5 \text{ (muro seco)} = 0.45 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_6 \text{ (capa de aire estancado interior)} = 0.17 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

Sume los valores *R* para obtener el valor *R* total para la pared:

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 7.12 \text{ ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que no está contento con este valor *R* total para la pared. No puede cambiar la estructura total, pero le es posible llenar el espacio de aire, como en la figura 20.14b. Para *maximizar* el valor *R* total, ¿qué material debe elegir para llenar el espacio de aire?

Respuesta Al observar la tabla 20.4, se ve que 3.5 pulgadas de aislamiento de fibra de vidrio son diez veces más efectivas que 3.5 pulgadas de aire. Por lo tanto, debe llenar el espacio de aire con aislamiento de fibra de vidrio. El resultado es que se agregan 10.90 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ de valor *R* y se pierden 1.01 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ debido al espacio de aire que se sustituyó. El nuevo valor *R* total es igual a 712 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ + 9.89 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ = 17.01 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$.

Convección

En un momento u otro, ha calentado sus manos al mantenerlas sobre una flama abierta. En dicha situación, el aire que está arriba de la flama se caliente y expande. Como resultado, la densidad de este aire disminuye y el aire se eleva. Este aire caliente abriga sus manos mientras circula. **Se dice que la energía transferida por el movimiento de una sustancia caliente se transfiere por convección.** Aun cuando resulte a causa de diferencias en la densidad, como con el aire alrededor de un fuego, el proceso se conoce como *convección natural*. El flujo de aire en una playa es un ejemplo de convección natural, como lo es la

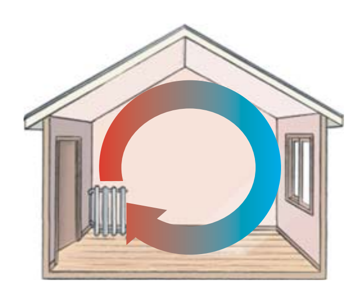


Figura 20.15 En una habitación calentada por un radiador se establecen corrientes de convección.

mezcla que se presenta a medida que el agua superficial en un lago se enfría y se hunde (véase la sección 19.4). Cuando la sustancia calentada se obliga a moverse mediante un ventilador o bomba, como en algunos sistemas de calefacción de aire caliente y agua caliente, el proceso se llama *convección forzada*.

Sin las corrientes de convección sería muy difícil hervir agua. A medida que el agua se calienta en una tetera, las capas inferiores se calientan primero. Esta agua se expande y eleva hasta lo alto porque su densidad es baja. Al mismo tiempo, el agua fría más densa en la superficie se hunde hasta el fondo de la tetera y se calienta.

El mismo proceso se presenta cuando una habitación se calienta mediante un radiador. El radiador calienta el aire en las regiones más bajas de la habitación. El aire caliente se expande y eleva hasta el techo debido a su densidad más baja. El aire más frío y denso de arriba se hunde, y se establece el patrón continuo de corriente de aire que se muestra en la figura 20.15.

Radiación

El tercer medio de transferencia de energía que se analizará es la **radiación térmica**. Todos los objetos continuamente radian energía en la forma de ondas electromagnéticas (véase el capítulo 34) producidas por vibraciones térmicas de las moléculas. Es probable que esté familiarizado con la radiación electromagnética en la forma de brillo anaranjado del quemador de una estufa eléctrica, un calentador eléctrico o las bobinas de un tostador.

La rapidez a la que un objeto radia energía es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Este comportamiento, conocido como **ley de Stefan**, se expresa en forma de ecuación como

Ley de Stefan ►

$$\mathcal{P} = \sigma A e T^4 \quad \textbf{(20.19)}$$

donde $\mathcal{P}$ es la potencia en watts de las ondas electromagnéticas radiadas de la superficie del objeto, σ es una constante igual a $5.669\,6 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$, A es el área superficial del objeto en metros cuadrados, e es la **emisividad** y T es la temperatura superficial en kelvins. El valor de e puede variar entre cero y la unidad, depende de las propiedades de la superficie del objeto. La emisividad es igual a la **absortividad**, que es la fracción de la radiación entrante que absorbe la superficie. Un espejo tiene muy baja absortividad porque refleja casi toda la luz incidente. Por lo tanto, la superficie de un espejo también tiene una emisividad muy baja. En el otro extremo, una superficie negra tiene alta absortividad y alta emisividad. Un **absorbedor ideal** se define como un objeto que absorbe toda la energía incidente sobre él y, para tal objeto, $e = 1$. Un objeto para el que $e = 1$ con frecuencia se conoce como **cuerpo negro**. En el capítulo 40 se investigarán planteamientos experimentales y teóricos a la radiación de un cuerpo negro.

Cada segundo, más o menos 1 370 J de radiación electromagnética del Sol pasan perpendicularmente a través de cada m^2 en lo alto de la atmósfera de la Tierra. Esta radiación es principalmente visible y es acompañada de luz infrarroja y una cantidad significativa de radiación ultravioleta. En el capítulo 34 se estudiarán a detalle estos tipos de radiación. A la superficie de la Tierra llega, cada día, suficiente energía como para cubrir cientos de veces todas las necesidades de energía; el problema es capturarla y usarla de manera eficiente. El crecimiento en Estados Unidos del número de hogares impulsados por energía solar refleja los crecientes esfuerzos que se hacen por utilizar esta energía abundante.

Otro ejemplo de los efectos de transferencia de energía por radiación es lo que ocurre con la temperatura atmosférica en la noche. Si hay una cubierta de nubes sobre la Tierra, el vapor de agua en las nubes absorbe parte de la radiación infrarroja emitida por la Tierra y la remite de regreso a la superficie. En consecuencia, los niveles de temperatura en la superficie permanecen moderados. En ausencia de esta cubierta de nubes, queda muy poco en el camino para evitar que escape esta radiación al espacio; por lo tanto, la temperatura disminuye más en una noche clara que en una llena de nubes.

Mientras un objeto radia energía a una proporción conocida por la ecuación 20.19, también absorbe radiación electromagnética de los alrededores, que también son otros objetos que radian energía. Si el proceso reciente no se presenta, un objeto al final radiaría toda su energía y su temperatura alcanzaría el cero absoluto. Si un objeto está a una temperatura T y sus alrededores están a una temperatura promedio T_0, la rapidez neta de energía ganada o perdida por el objeto como resultado de la radiación es

$$\mathcal{P}_{\text{net}} = \sigma A e(T^4 - T_0^4) \qquad \textbf{(20.20)}$$

Cuando un objeto está en equilibrio con sus alrededores, radia y absorbe energía a la misma proporción y su temperatura permanece constante. Cuando un objeto está más caliente que sus alrededores, radia más energía de la que absorbe y su temperatura disminuye.

La botella Dewar

La *botella Dewar*[7] es un recipiente diseñado para minimizar las transferencias de energía por conducción, convección y radiación. Tal recipiente se usa para almacenar líquidos fríos o calientes durante largos periodos de tiempo. (Una botella aislada, como un termo, es un equivalente casero común de una botella Dewar.) La construcción estándar (figura 20.16) consiste de un vaso de vidrio Pyrex de doble pared con paredes plateadas. El espacio entre las paredes se vacía para minimizar transferencia de energía por conducción y convección. Las superficies plateadas minimizan la transferencia de energía por radiación, porque la plata es un muy buen reflector y tiene muy baja emisividad. Una reducción nueva en pérdida de energía se obtiene al reducir el tamaño del cuello. Las botellas Dewar se usan comúnmente para almacenar nitrógeno líquido (punto de ebullición: 77 K) y oxígeno líquido (punto de ebullición: 90 K).

Para confinar helio líquido (punto de ebullición: 4.2 K), que tiene un calor de vaporización muy bajo, con frecuencia es necesario usar un doble sistema Dewar en el que la botella Dewar, que contiene el líquido, se rodee con una segunda botella Dewar. El espacio entre las dos botellas se llena con nitrógeno líquido.

Diseños más nuevos de contenedores usan "superaislamiento", que consiste de muchas capas de material reflector separadas por fibra de vidrio. Todo este material está en un vacío y no se necesita nitrógeno líquido en este diseño.

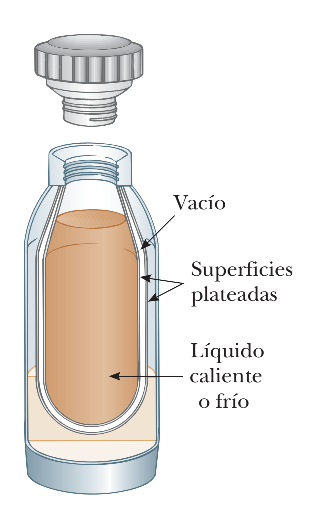


Figura 20.16 Vista transversal de una botella Dewar, que se usa para almacenar sustancias calientes o frías.


[7] Inventada por Sir James Dewar (1842–1923).

Resumen

DEFINICIONES

La **energía interna** es toda la energía de un sistema que se asocia con los componentes microscópicos del sistema. La energía interna incluye energía cinética de traslación aleatoria, rotación y vibración de moléculas, energía potencial vibratoria dentro de las moléculas y energía potencial entre moléculas.

El **calor** es la transferencia de energía a través de la frontera de un sistema, que resulta de una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. El símbolo Q representa la cantidad de energía transferida por este proceso.

Una **caloría** es la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5°C a 15.5°C.

La **capacidad térmica** C de cualquier muestra es la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de la muestra en 1°C.

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa:

$$c \equiv \frac{Q}{m\,\Delta T} \qquad \textbf{(20.3)}$$

El **calor latente** de una sustancia se define como la relación de la energía necesaria para causar un cambio de fase a la masa de la sustancia:

$$L \equiv \frac{Q}{m} \qquad \textbf{(20.6)}$$

(*continúa*)

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La energía Q que se requiere para cambiar la temperatura de una masa m de una sustancia en una cantidad ΔT es

$$Q = mc\,\Delta T \quad \textbf{(20.4)}$$

donde c es el calor específico de la sustancia.

La energía requerida para cambiar la fase de una sustancia pura de masa m es

$$Q = \pm mL \quad \textbf{(20.7)}$$

donde L es el calor latente de la sustancia y depende de la naturaleza del cambio de fase y la sustancia. El signo positivo se usa si la energía entra al sistema y el signo negativo se usa si la energía sale del sistema.

El **trabajo** consumido en un gas a medida que su volumen cambia de algún valor inicial V_i a algún valor final V_f es

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV \quad \textbf{(20.9)}$$

donde P es la presión del gas, que puede variar durante el proceso. Para evaluar W, el proceso debe estar completamente especificado; esto es: P y V se deben conocer durante cada etapa.
El trabajo consumido depende de la trayectoria que se sigue entre los estados inicial y final.

La **primera ley de la termodinámica** establece que, cuando un sistema se somete a un cambio de un estado a otro, el cambio en su energía interna es

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W \quad \textbf{(20.10)}$$

donde Q es la energía transferida al sistema por calor y W es el trabajo consumido en el sistema. Aunque Q y W dependen de la trayectoria tomada del estado inicial al estado final, la cantidad ΔE_{int} no depende de la trayectoria.

En un **proceso cíclico** (uno que se origina y termina en el mismo estado), $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y por lo tanto $Q = -W$. Esto es, la energía transferida al sistema por calor es igual al negativo del trabajo consumido en el sistema durante el proceso.

En un **proceso adiabático** no se transfiere energía por calor entre el sistema y sus alrededores ($Q = 0$). En este caso, la primera ley da $\Delta E_{\text{int}} = W$. En la **expansión adiabática libre** de un gas, $Q = 0$ y $W = 0$, de modo que $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Esto es, la energía interna del gas no cambia en tal proceso.

Un **proceso isobárico** es el que se presenta a presión constante. El trabajo invertido en un gas en tal proceso es $W = -P(V_f - V_i)$.

Un **proceso isovolumétrico** es aquel que se presenta a volumen constante. En tal proceso no se consume trabajo, así que $\Delta E_{\text{int}} = Q$.

Un **proceso isotérmico** es el que se presenta a temperatura constante. El trabajo consumido en un gas ideal durante un proceso isotérmico es

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right) \quad \textbf{(20.14)}$$

La **conducción** se puede ver como un intercambio de energía cinética entre moléculas o electrones que chocan. La rapidez de transferencia de energía por conducción a través de una placa de área A es

$$\mathcal{P} = kA\left|\frac{dT}{dx}\right| \quad \textbf{(20.15)}$$

donde k es la **conductividad térmica** del material del que está hecho la placa y $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura**.

En la **convección** una sustancia caliente transfiere energía de una posición a otra.

Todos los objetos emiten **radiación térmica** en la forma de ondas electromagnéticas con la relación

$$\mathcal{P} = \sigma A e T^4 \quad \textbf{(20.19)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Distinga claramente entre temperatura, calor y energía interna.

2. **O** El alcohol etílico tiene aproximadamente la mitad del calor específico del agua. Suponga que iguales cantidades de energía se transfieren por calor en muestras de líquido de igual masa de alcohol y agua en contenedores aislados separados. El agua eleva su temperatura en 25°C. ¿Cuánto elevará el alcohol su temperatura? a) 12°C, b) 25°C, c) 50°C, d) Depende de la rapidez de transferencia de energía. e) No elevará su temperatura.

3. ¿Qué está incorrecto en el siguiente enunciado: "Dados dos cuerpos cualesquiera, el que tiene mayor temperatura contiene más calor"?

4. **O** El berilio tiene aproximadamente la mitad del calor específico del agua líquida (H_2O). Clasifique las cantidades de entrada de energía requerida para producir los siguientes cambios de mayor a menor. En su clasificación anote cualquier caso de igualdad. a) elevar la temperatura de 1 kg de H_2O de 20°C a 26°C, b) elevar la temperatura de 2 kg de H_20 de 20°C a 23°C, c) elevar la temperatura de 2 kg de H_2O de 1°C a 4°C, d) elevar la temperatura de 2 kg de berilio de −1°C a 2°C, e) elevar la temperatura de 2 kg de H_2O de −1°C a 2°C.

5. ¿Por qué una persona es capaz de retirar, con la mano sin protección, una hoja de aluminio seco de un horno caliente; pero, si la hoja está húmeda resultará con una quemadura?

6. La temperatura del aire sobre las áreas costeras está profundamente influida por el calor específico considerable del agua. Una explicación es que la energía liberada cuando 1 m^3 de agua se enfría en 1°C elevará la temperatura de un volumen mucho mayor de aire en 1°C. Encuentre este volumen de aire. El calor específico del aire es aproximadamente 1 kJ/kg · °C. Considere que la densidad del aire es 1.3 kg/m^3.

7. **O** Suponga que mide el calor específico de una muestra de metal originalmente caliente por el método de mezclas, como se describe en el ejemplo 20.2. Ya que su calorímetro no está perfectamente aislado, la energía se puede transferir por calor entre los contenidos del calorímetro y la habitación. Para obtener el resultado más preciso para el calor especifico del metal, ¿debe usar agua, y con qué temperatura inicial? a) Ligeramente menor que la temperatura ambiente, b) igual que la temperatura ambiente, c) ligeramente sobre la temperatura ambiente, d) cualquiera que se quiera porque la temperatura inicial no hace diferencia.

8. Con la primera ley de la termodinámica explique por qué la energía *total* de un sistema aislado siempre es constante.

9. **O** Una persona agita durante algunos minutos una botella aislada y sellada que contiene café caliente. **i)** ¿Cuál es el cambio en la temperatura del café? a) Una gran reducción, b) una ligera reducción, c) no hay cambio, d) un ligero aumento, e) un gran aumento. **ii)** ¿Cuál es el cambio en la energía interna del café? Elija de las mismas posibilidades.

10. ¿Es posible convertir energía interna a energía mecánica? Explique con ejemplos.

11. Un mosaico en el piso del baño puede sentirse desagradablemente frío en su pie descalzo, pero un suelo alfombrado en una habitación adyacente a la misma temperatura se sentirá caliente. ¿Por qué?

12. Es la mañana de un día que se prevé caluroso. Acaba de comprar bebidas para un picnic y las carga, con hielo, en un baúl en la parte trasera de su auto. Tiene una manta de lana. ¿Debe cubrir el baúl con ella? ¿Hacerlo le ayudaría a mantener las bebidas frías, o esperaría que la manta de lana las caliente? Su hija pequeña le dice enfáticamente que a ella no le gustaría que la enredaran con una manta de lana en un día caliente. Explique sus respuestas y la respuesta a su hija.

13. Cuando acampa en un cañón en una noche serena, un campista nota que tan pronto como el sol golpea los picos circundantes, comienza a sentirse una brisa. ¿Qué causa la brisa?

14. **O** Un atizador es una barra rígida no flamable que se usa para empujar leños ardientes en una hoguera. Para facilidad de uso y seguridad, el atizador debe estar fabricado de un material a) con alto calor específico y alta conductividad térmica, b) con bajo calor específico y baja conductividad térmica, c) con bajo calor específico y alta conductividad térmica, o d) con alto calor específico y baja conductividad térmica.

15. **O** La estrella *A* tiene el doble de radio y el doble de temperatura absoluta que la estrella *B*. ¿Cuál es la proporción de potencia de salida de la estrella *A* en comparación con la estrella *B*? La emisividad de ambas estrellas es en esencia 1. a) 4, b) 8, c) 16, d) 32, e) 64.

16. Si el agua es un conductor térmico pobre, ¿por qué la temperatura en una olla de agua se puede elevar rápidamente cuando se pone sobre una flama?

17. Necesita recoger una olla muy caliente en su cocina. Tiene un par de agarraderas. Para poder recoger la cazuela de manera más cómoda, ¿debe mojar las agarraderas en agua fría o mantenerlas secas?

18. Suponga que sirve café caliente a sus invitados, y uno de ellos quiere beberlo con crema, muchos minutos después, y tan caliente como sea posible. Para tener al café más caliente, ¿la persona debe agregar la crema justo después de que se sirve el café o justo antes de beberlo? Explique.

19. **O** Las señales de advertencia que se ven en las autopistas justo antes de un puente son "Precaución. El puente se congela antes que la superficie del camino" o "Posible puente con hielo". ¿Cuál de los tres procesos de transferencia de energía explicados en la sección 20.7 es más importante en la formación de hielo sobre la superficie de un puente antes que en el resto del camino, en los días muy fríos? a) conducción, b) convección, c) radiación, d) ninguna de estas opciones porque el hielo se congela sin un cambio de temperatura.

20. Un profesor de física deja caer un malvavisco en un matraz de nitrógeno líquido, espera a que cese la ebullición más energética, lo pesca con unas tenazas, lo agita, lo suelta en su boca, lo mastica y lo traga. Nubes de cristales de hielo se proyectan de su boca cuando lo tritura ruidosamente y comenta acerca de su dulce sabor. ¿Cómo puede hacer esto sin lastimarse? *Precaución:* El nitrógeno líquido puede ser una sustancia peligrosa. Usted *no* debe intentar esta demostración por sí mismo. El profesor puede resultar severamente lesionado si no agita el malvavisco, si toca las tenazas con los dientes o si no comienza con un buche de saliva.

21. En 1801, Humphry Davy frotó piezas de hielo dentro de un iglú. Se aseguró de que nada en el ambiente estuviera a una temperatura mayor que la piezas frotadas. Observó la producción de gotas de agua líquida. Elabore una tabla que mencione este y otros experimentos o procesos para ilustrar cada una de las siguientes situaciones. a) Un sistema puede absorber energía por calor, aumento en energía interna y aumento en temperatura. b) Un sistema puede absorber energía por calor y aumento en energía interna sin un aumento en temperatura. c) Un sistema puede absorber energía por calor sin aumentar en temperatura o en energía interna. d) Un sistema puede aumentar en energía interna y en temperatura sin absorber energía por calor. e) Un sistema puede aumentar en energía interna sin absorber energía por calor o aumentar en temperatura. f) **¿Qué pasaría si?** Si aumenta la temperatura de un sistema, ¿necesariamente es cierto que aumenta su energía interna?

22. Considere la fotografía de apertura de la parte 3 (página 531). Discuta los papeles de la conducción, la convección y la radiación en la operación de las aletas de enfriamiento en los postes de soporte del oleoducto de Alaska.

Problemas

Sección 20.1 Calor y energía interna

1. En su luna de miel, James Joule puso a prueba la conversión de energía mecánica en energía interna al medir temperaturas de cascadas de agua. Si el agua en lo alto de una cascada suiza tenía una temperatura de 10.0°C y después caía 50.0 m, ¿qué temperatura máxima en el fondo podría esperar Joule? No tuvo éxito para medir el cambio de temperatura, en parte porque la evaporación enfriaba el agua que caía y también porque su termómetro no era suficientemente sensible.

2. Considere el aparato de Joule descrito en la figura 20.1. La masa de cada uno de los dos bloques es 1.50 kg y el tanque aislado está lleno con 200 g de agua. ¿Cuál es el aumento en la temperatura del agua después de que los bloques caen una distancia de 3.00 m?

Sección 20.2 Calor específico y calorimetría

3. La temperatura de una barra de plata se eleva 10.0°C cuando absorbe 1.23 kJ de energía por calor. La masa de la barra es 525 g. Determine el calor específico de la plata.

4. ● El láser *Nova* en el Lawrence Livermore National Laboratory en California se usó en los primeros estudios de inicio de fusión nuclear controlada (sección 45.4). Entregaba una potencia de 1.60×10^{13} W durante un intervalo de tiempo de 2.50 ns. Explique cómo se compara esta salida de energía en tal intervalo de tiempo, con la energía requerida para hacer una jarra de té calentando 0.800 kg de agua de 20.0°C a 100°C.

5. El uso sistemático de la energía solar produce un gran ahorro en el costo de calentamiento de una casa típica en el norte de Estados Unidos durante el invierno. Si la casa tiene buen aislamiento, puede modelarla con una pérdida de energía por calor estable en 6 000 W en un día de abril, cuando la temperatura exterior promedio es de 4°C, y el sistema de calefacción convencional no se usa. El colector pasivo de energía solar puede consistir simplemente de ventanas muy grandes en una habitación con cara al sur. La luz del sol que brilla durante el día se absorbe en el suelo, las paredes interiores y los objetos en la habitación, lo que eleva su temperatura a 38.0°C. A medida que el Sol se pone, las cortinas o persianas se cierran sobre las ventanas. Durante el periodo entre 5:00 p.m. y 7:00 a.m., la temperatura de la casa caerá y se requerirá una "masa térmica" suficientemente grande para evitar que caiga demasiado. La masa térmica puede ser una gran cantidad de piedra (con calor específico de 850 J/kg · °C) en el suelo y las paredes interiores expuestas a la luz solar. ¿Qué masa de piedra se requiere si la temperatura no cae por abajo de 18.0°C durante la noche?

6. Una taza de aluminio, de 200 g de masa, contiene 800 g de agua en equilibrio térmico a 80.0°C. La combinación de taza y agua se enfría uniformemente de modo que la temperatura disminuye en 1.50°C por minuto. ¿En qué proporción se retira la energía por calor? Exprese su respuesta en watts.

7. Una herradura de hierro de 1.50 kg, inicialmente a 600°C, se deja caer en una cubeta que contiene 20.0 kg de agua a 25.0°C. ¿Cuál es la temperatura final? (Ignore la capacidad térmica del contenedor y suponga que hierve una cantidad despreciable de agua.)

8. ● Un taladro eléctrico, con una broca de acero de 27.0 g de masa y 0.635 cm de diámetro, se usa para taladrar un bloque cúbico de acero de 240 g de masa. Suponga que el acero tiene las mismas propiedades que el hierro. Puede modelar que el proceso de corte ocurre en un punto sobre la circunferencia de la broca. Este punto se mueve en una espiral con rapidez constante de 40.0 m/s y ejerce una fuerza de magnitud constante de 3.20 N sobre el bloque. Como se muestra en la figura P20.8, un surco en la broca lleva las virutas a la parte superior del bloque, donde forman una pila alrededor del orificio. El bloque se mantiene en un tornillo de banco fabricado de material de baja conductividad térmica, y la broca se mantiene en un mandril hecho también de este material. Considere que se hace girar el taladro durante un intervalo de 15.0 s. Este intervalo de tiempo es suficientemente breve para que los objetos de acero pierdan sólo una cantidad despreciable de energía por conducción, convección y radiación a sus alrededores. No obstante, 15 s es lo suficientemente breve para que la conducción dentro del acero lo lleve todo a una temperatura uniforme. La temperatura se mide pronto con una sonda termómetro, que se muestra al lado del bloque en la figura. a) Suponga que la broca está afilada y corta tres cuartos del camino a través del bloque durante 15 s. Encuentre el cambio de temperatura de toda la cantidad de acero. b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la broca está mellada y corta sólo un octavo del camino a través del bloque. Identifique el cambio de temperatura de toda la cantidad de acero en este caso. c) ¿Qué fragmentos de información, si alguno, no son necesarios para la solución? Explique.

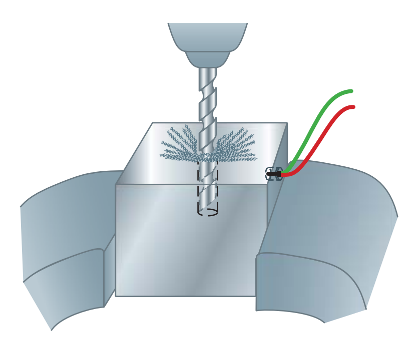


Figura P20.8

9. ● Un calorímetro de aluminio, con una masa de 100 g, contiene 250 g de agua. El calorímetro y el agua están en equilibrio térmico a 10.0°C. Dos bloques metálicos se colocan en el agua. Uno es un trozo de cobre de 50.0 g a 80.0°C. El otro tiene una masa de 70.0 g y originalmente está a una temperatura de 100°C. Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20.0°C. a) Determine el calor específico de la muestra desconocida. b) Con los datos de la tabla 20.1, ¿puede hacer una identificación positiva del material desconocido? ¿Puede identificar un material posible? Explique sus respuestas.

10. ● Una moneda de cobre de 3.00 g a 25.0°C cae 50.0 m al suelo. a) Si supone que 60.0% del cambio en energía potencial del sistema moneda–Tierra participa en el aumento de energía interna de la moneda, determine la temperatura final de la moneda. b) **¿Qué pasaría si?** ¿El resultado depende de la masa de la moneda? Explique.

11. Una combinación de 0.250 kg de agua a 20.0°C, 0.400 kg de aluminio a 26.0°C y 0.100 kg de cobre a 100°C se mezcla en un contenedor aislado y se les permite llegar a equilibrio térmico. Ignore cualquier transferencia de energía hacia o desde el contenedor y determine la temperatura final de la mezcla.

12. Dos recipientes térmicamente aislados se conectan mediante un estrecho tubo ajustado con una válvula que inicialmente está cerrada. Un recipiente, de 16.8 L de volumen, contiene oxígeno a una temperatura de 300 K y una presión de 1.75 atm. El otro recipiente, de 22.4 L de volumen, contiene oxígeno a una temperatura de 450 K y una presión de 2.25 atm. Cuando la válvula se abre, los gases en los dos recipientes se mezclan y la temperatura y la presión se vuelven uniformes en todas sus partes. a) ¿Cuál es la temperatura final? b) ¿Cuál es la presión final?

Sección 20.3 Calor latente

13. ¿Cuánta energía se requiere para cambiar un cubo de hielo de 40.0 g de hielo a −10.0°C a vapor a 110°C?

14. Un calorímetro de cobre de 50.0 g contiene 250 g de agua a 20.0°C. ¿Cuánto vapor se debe condensar en el agua, si la temperatura final del sistema llegará a 50.0°C?

15. Una bala de plomo de 3.00 g a 30.0°C se dispara con una rapidez de 240 m/s en un gran bloque de hielo a 0°C, en el que queda incrustada. ¿Qué cantidad de hielo se derrite?

16. Vapor a 100°C se agrega a hielo a 0°C. a) Encuentre la cantidad de hielo derretido y la temperatura final cuando la masa de vapor es 10.0 g y la masa de hielo es 50.0 g. b) **¿Qué pasaría si?** Repita cuando la masa de vapor es 1.00 g y la masa de hielo es 50.0 g.

17. Un bloque de cobre de 1.00 kg a 20.0°C se deja caer en un gran recipiente de nitrógeno líquido a 77.3 K. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno hierven para cuando el cobre alcanza 77.3 K? (El calor específico del cobre es 0.092 0 cal/g · °C. El calor latente de vaporización del nitrógeno es 48.0 cal/g.)

18. ● Un automóvil tiene una masa de 1 500 kg y sus frenos de aluminio tienen una masa global de 6.00 kg. a) Suponga que toda la energía mecánica que desaparece cuando el auto se detiene se deposita en los frenos y no se transfiere energía afuera de los frenos por calor. Los frenos originalmente están a 20.0°C. ¿Cuántas veces se puede detener el automóvil desde 25.0 m/s antes de que los frenos comiencen a fundirse? b) Identifique algunos efectos ignorados en el inciso a) que sean importantes en una valoración más realista del calentamiento de los frenos.

19. En un recipiente aislado 250 g de hielo a 0°C se agregan a 600 g de agua a 18.0°C. a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema? b) ¿Cuánto hielo permanece cuando el sistema alcanza el equilibrio?

20. **Problema de repaso.** La siguiente ecuación describe un proceso que se presenta tan rápidamente que la energía transferida es despreciable entre el sistema y el medio ambiente por conducción, convección o radiación:

$$\tfrac{1}{2}(0.012\ 0\ \text{kg})(300\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.008\ 00\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.020\ 0\ \text{kg})(20\ \text{m/s})^2$$
$$+ (0.020\ 0\ \text{kg})(128\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(327.3^\circ\text{C} - 30.0^\circ\text{C})$$
$$+ m_\ell(2.45 \times 10^4\ \text{J/kg})$$

a) Escriba un problema para el que la ecuación aparecerá en la solución. Dé los datos, describa el sistema y describa el proceso en marcha. Considere que el problema termina con el enunciado "Describa el estado del sistema inmediatamente después". b) Resuelva el problema, incluido el cálculo de la incógnita en la ecuación y la identificación de su significado físico.

Sección 20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

Los problemas 4 y 27 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

21. Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de 1.00 m^3 en un proceso cuasi estático para el que $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00\ \text{atm/m}^6$, como se muestra en la figura P20.21. ¿Cuánto trabajo se consume en el gas en expansión?

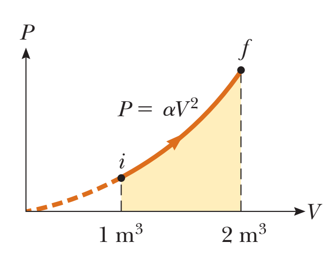


Figura P20.21

22. a) Determine el trabajo consumido en un fluido que se expande de i a f, como se indica en la figura P20.22. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el fluido si se comprime de f a i a lo largo de la misma trayectoria?

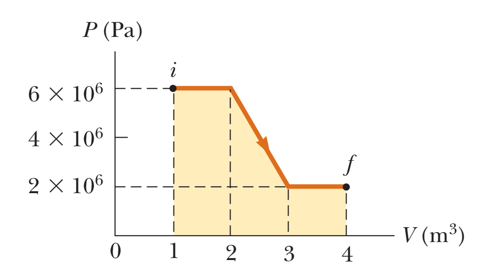


Figura P20.22

23. Un gas ideal se encierra en un cilindro con un pistón móvil encima de él. El pistón tiene una masa de 8 000 g y un área de 5.00 cm^2 y tiene libertad de deslizarse hacia arriba y hacia abajo, lo que mantiene constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se consume en el gas a medida que la temperatura de 0.200 moles del gas se elevan de 20.0°C a 300°C?

24. Un gas ideal se encierra en un cilindro que tiene un pistón móvil encima de él. El pistón tiene una masa m y área A y tiene libertad de deslizarse hacia arriba y hacia abajo, lo que mantiene constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se consumió en el gas a medida que la temperatura de n moles del gas se eleva de T_1 a T_2?

25. ● Un mol de un gas ideal se calienta lentamente de modo que va del estado PV (P_i, V_i) al ($3P_i$, $3V_i$), en tal forma que la presión del gas es directamente proporcional al volumen. a) ¿Cuánto trabajo se consume en el gas en el proceso? b) ¿Cómo se relaciona la temperatura del gas con su volumen durante este proceso?

Sección 20.5 Primera ley de la termodinámica

26. Un gas se lleva a través del proceso cíclico descrito en la figura P20.26. a) Encuentre la energía neta transferida al sistema por calor durante un ciclo completo. b) **¿Qué pasaría si?** Si el ciclo se invierte (esto es, el proceso sigue la trayectoria $ACBA$), ¿cuál es la entrada de energía neta por cada ciclo por calor?

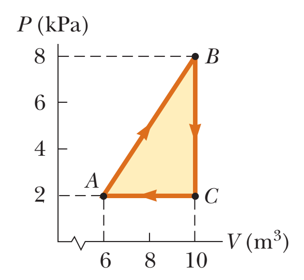


Figura P20.26 Problemas 26 y 29.

27. Un sistema termodinámico se somete a un proceso en el que su energía interna disminuye 500 J. Durante el mismo intervalo de tiempo, 220 J de trabajo se consume en el sistema. Encuentre la energía transferida hacia o desde él por calor.

28. Una muestra de un gas ideal pasa por el proceso que se muestra en la figura P20.28. De A a B, el proceso es adiabático; de B a C, es isobárico con 100 kJ de energía que entran al sistema por calor. De C a D, el proceso es isotérmico; de D a A, es isobárico con 150 kJ de energía que salen del sistema por calor. Determine la diferencia en energía interna $E_{int,B} - E_{int,A}$.

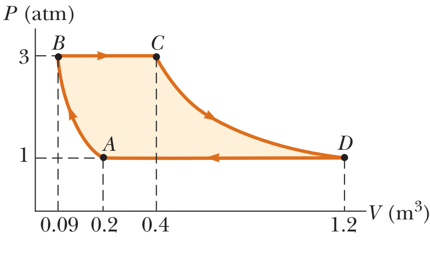


Figura P20.28

29. Considere el proceso cíclico que se bosqueja en la figura P20.26. Si Q es negativo para el proceso BC y ΔE_{int} es negativa para el proceso CA, ¿cuáles son los signos de Q, W y ΔE_{int} que se asocian con cada proceso?

Sección 20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

30. Un mol de un gas ideal realiza 3 000 J de trabajo sobre sus alrededores a medida que se expande isotérmicamente hasta una presión final de 1.00 atm y 25.0 L de volumen. Determine a) el volumen inicial y b) la temperatura del gas.

31. Un gas ideal inicialmente a 300 K experimenta una expansión isobárica a 2.50 kPa. Si el volumen aumenta de 1.00 m^3 a 3.00 m^3 y se transfieren 12.5 kJ al gas por calor, ¿cuáles son a) el cambio en su energía interna y b) su temperatura final?

32. Un bloque de aluminio de 1.00 kg se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 22.0°C a 40.0°C. Encuentre a) el trabajo consumido en el aluminio, b) la energía agregada a él por calor y c) el cambio en su energía interna.

33. ¿Cuánto trabajo se consume en el vapor cuando 1.00 mol de agua a 100°C hierve y se convierte en 1.00 mol de vapor a 100°C a 1.00 atm de presión? Suponga que el vapor se comporta como un gas ideal. Determine el cambio en energía interna del material a medida que se vaporiza.

34. Un gas ideal inicialmente a P_i, V_i y T_i se lleva a través de un ciclo, como se muestra en la figura P20.34. a) Encuentre el trabajo neto consumido en el gas por cada ciclo. b) ¿Cuál es la energía neta agregada por calor al sistema por cada ciclo? c) Obtenga un valor numérico para el trabajo neto consumido por cada ciclo por 1.00 mol de gas inicialmente a 0°C.

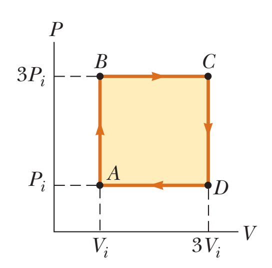


Figura P20.34

35. Una muestra de 2.00 moles de gas helio, inicialmente a 300 K y 0.400 atm, se comprime isotérmicamente a 1.20 atm. Si nota que el helio se comporta como un gas ideal, encuentre a) el volumen final del gas, b) el trabajo consumido en el gas y c) la energía transferida por calor.

36. En la figura P20.36, el cambio en energía interna de un gas que se lleva de A a C es +800 J. El trabajo consumido en el gas a lo largo de la trayectoria ABC es −500 J. a) ¿Cuánta energía se debe agregar al sistema por calor a medida que va de A a B a C? b) Si la presión en el punto A es cinco veces la del punto C, ¿cuál es el trabajo consumido en el sistema al ir de C a D? c) ¿Cuál es la energía que se intercambia con los alrededores por calor a medida que el ciclo va de C a A a lo largo de la trayectoria verde? d) Si el cambio en energía interna al ir del punto D al punto A es +500 J, ¿cuánta energía se debe agregar al sistema por calor a medida que va del punto C al punto D?

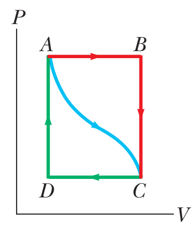


Figura P20.36

Sección 20.7 Mecanismos de transferencia de energía

37. Un ventanal de vidrio tiene un área de 3.00 m^2 y un grosor de 0.600 cm. La diferencia de temperatura entre sus caras es de 25.0°C, ¿cuál es la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la ventana?

38. Una ventana térmica, con área de 6.00 m^2, se construye de dos capas de vidrio, cada una de 4.00 mm de grosor, separadas una de otra por un espacio de aire de 5.00 mm. Si la superficie interior está a 20.0°C y la exterior a −30.0°C, ¿cuál es la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la ventana?

39. Una barra de oro (Au) en contacto térmico con una barra de plata (Ag) de la misma longitud y área (figura P20.39). Un extremo de la barra compuesta se mantiene a 80.0°C y el extremo opuesto está a 30.0°C. Cuando la transferencia de energía alcanza un estado estable, ¿cuál es la temperatura en la unión?

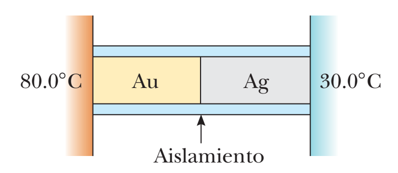


Figura P20.39

40. Calcule el valor R de a) una ventana fabricada de un solo panel de vidrio plano de $\frac{1}{8}$ de pulgada de grueso y b) una ventana térmica fabricada de dos paneles sencillos cada uno de $\frac{1}{8}$ pulgada de grueso y separadas por un espacio de aire de $\frac{1}{4}$ de pulgada. c) ¿En qué factor se reduce la transferencia de energía por calor a través de la ventana, si usa una ventana térmica en lugar de la ventana de panel sencillo?

41. Un estudiante intenta decidir qué vestir. Su recámara está a 20.0°C. La temperatura de su piel es de 35.0°C. El área de su piel expuesta es de 1.50 m^2. Hay personas en el planeta que tienen piel que es oscura en el infrarrojo, con emisividad aproximada de 0.900. Encuentre la pérdida de energía neta de su cuerpo por radiación en 10.0 min.

42. La superficie del Sol tiene una temperatura de aproximadamente 5 800 K. El radio del Sol es de 6.96×10^8 m. Calcule la energía total radiada por el Sol cada segundo. Suponga que la emisividad es 0.986.

43. ● Para pruebas bacteriológicas de los suministros de agua y en las clínicas médicas, las muestras se deben incubar rutinariamente durante 24 h a 37°C. Un baño estándar a temperatura constante con calefacción eléctrica y control termostático no es práctico en lugares de conflicto bélico y países en desarrollo sin líneas eléctricas en operación continua. El voluntario del Cuerpo de Paz e ingeniero del MIT, Amy Smith, inventó un incubador de bajo costo y bajo mantenimiento para llenar la necesidad. Consiste en una caja aislada con espuma que contiene varios paquetes de un material ceroso que se funde a 37.0°C, intercalado entre tubos, platos o botellas que contienen las muestras de prueba y medio de cultivo (alimento para bacterias). Fuera de la caja, el material ceroso primero se funde mediante una estufa o colector de energía solar. Luego el material ceroso se pone en la caja para mantener calientes las muestras de prueba, mientras se solidifica. El calor de fusión del cambio de fase del material es 205 kJ/kg. Modele el aislamiento como un panel con 0.490 m^2 de área superficial, 4.50 cm de grosor y 0.012 0 W/m · °C de conductividad. Suponga que la temperatura exterior es de 23.0°C durante 12.0 h y 16.0°C durante 12.0 h. a) ¿Qué masa del material ceroso se requiere para llevar a cabo la prueba bacteriológica? b) Explique por qué sus cálculos se pueden realizar sin conocer la masa de las muestras de prueba o del aislante.

44. Una gran pizza caliente flota en el espacio exterior después de ser rápidamente rechazada por una nave espacial Vogon. ¿Cuál es el orden de magnitud a) de su rapidez de pérdida de energía y b) de su rapidez de cambio de temperatura? Mencione las cantidades que estimó y el valor que consideró para cada una.

45. El filamento de tungsteno de cierto foco de 100 W radia 2.00 W de luz. (Los otros 98 W se dispersan mediante convección y conducción.) El filamento tiene un área superficial de 0.250 mm^2 y una emisividad de 0.950. Encuentre la temperatura del filamento. (El punto de fusión del tungsteno es 3 638 K.)

46. A mediodía, el Sol entrega 1 000 W a cada metro cuadrado de una carretera con recubrimiento negro. Si el asfalto caliente pierde energía sólo por radiación, ¿cuál es su temperatura en estado estable?

47. ● A nuestra distancia del Sol, la intensidad de la radiación solar es de 1 370 W/m^2. La temperatura de la Tierra es afectada por el efecto invernadero de la atmósfera, que hace que la emisividad del planeta para la luz visible sea mayor que su emisividad para luz infrarroja. En comparación, considere un objeto esférico de radio r sin atmósfera a la misma distancia del Sol que la Tierra. Suponga que su emisividad es la misma para todo tipo de ondas electromagnéticas y su temperatura es uniforme sobre su superficie. Explique por qué el área proyectada sobre la que absorbe luz solar es πr^2 y el área superficial sobre la que radia es $4\pi r^2$. Calcule su temperatura en estado estable. ¿Es frío? Sus cálculos se aplican a 1) la temperatura promedio de la Luna, 2) los astronautas en peligro mortal a bordo de la dañada nave espacial *Apolo 13* y 3) la catástrofe global en la Tierra si extensos incendios causaran una capa de hollín que se acumulara a lo largo de la atmósfera superior, de modo que la mayor parte de la radiación del Sol se absorbiese ahí en lugar de en la superficie abajo de la atmósfera.

48. Dos focos tienen filamentos cilíndricos mucho mayores en longitud que en diámetro. Las bombillas evacuadas son idénticas,

excepto que una funciona a una temperatura de filamento de 2 100°C y la otra funciona a 2 000°C. a) Encuentre la proporción de la potencia emitida por el foco más caliente al de la emitida por el foco más frío. b) Con los focos en operación a las mismas temperaturas respectivas, el más frío se alterará de modo que emita la misma potencia que el más caliente, al hacer más grueso el filamento del foco más frío. ¿En qué factor se debe aumentar el radio de este filamento?

Problemas adicionales

49. Un esquiador a campo traviesa de 75.0 kg se mueve horizontalmente sobre nieve a 0°C. El coeficiente de fricción entre los esquíes y la nieve es de 0.200. Suponga que toda la energía interna generada por fricción se agrega a la nieve, que se pega a sus esquíes hasta que se funde. ¿Qué distancia deberá esquiar para fundir 1.00 kg de nieve?

50. En un frío día de invierno usted compra nueces tostadas a un vendedor en la calle. Guarda su cambio, monedas de 9.00 g de cobre a −12.0°C, en el bolsillo de su parka. Su bolsillo ya contiene 14.0 g de monedas de plata a 30.0°C. Después de un breve intervalo de tiempo, la temperatura de las monedas de cobre es de 4.00°C y aumenta a una relación de 0.500°C/s. En este momento, a) ¿cuál es la temperatura de las monedas de plata y b) en qué proporción está cambiando?

51. Una barra de aluminio de 0.500 m de largo y con un área de sección transversal de 2.50 cm^2 se inserta dentro de un recipiente térmicamente aislado que contiene helio líquido a 4.20 K. La barra inicialmente está a 300 K. a) Si una mitad de la barra se inserta en el helio, ¿cuántos litros de helio escapan para cuando la mitad insertada se enfría a 4.20 K? (Suponga que la mitad superior todavía no se enfría.) b) Si el extremo superior de la barra se mantiene a 300 K, ¿cuál es la rapidez de agotamiento aproximada del helio líquido después de que la mitad inferior alcanza 4.20 K? (El aluminio tiene 31.0 J/s · cm · K de conductividad térmica a 4.2 K; ignore su variación de temperatura. El aluminio tiene un calor específico de 0.210 cal/g · °C y 2.70 g/cm^3 de densidad. La densidad del helio líquido es 0.125 g/cm^3.)

52. ● Un mol de un gas ideal se contiene en un cilindro con un pistón móvil. La presión, volumen y temperatura iniciales son P_i, V_i y T_i, respectivamente. Encuentre el trabajo consumido en el gas en los siguientes procesos. En términos operativos, describa cómo llevar a cabo cada proceso. Muestre cada proceso en un diagrama *PV*: a) una compresión isobárica con volumen final a la mitad del volumen inicial, b) una compresión isotérmica con presión final a cuatro veces la presión inicial, c) un proceso isovolumétrico con presión final a tres veces la presión inicial.

53. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se usa para medir el calor específico de un líquido. La técnica de calorimetría de flujo involucra la medición de la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de una corriente de líquido que circula mientras se agrega energía por calor en una proporción conocida. Un líquido de densidad ρ circula a través del calorímetro con relación de flujo volumétrico R. En estado estable, se establece una diferencia de temperatura ΔT entre los puntos de entrada y salida cuando la energía se suministra en proporción $\mathcal{P}$. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

54. **Problema de repaso.** Continúe el análisis del problema 52 del capítulo 19. Después de una colisión entre una gran nave espacial y un asteroide, un disco de cobre de 28.0 m de radio y 1.20 m de grueso, a una temperatura de 850°C, flota en el espacio, girando en torno a su eje con una rapidez angular de 25.0 rad/s. Mientras el disco radia luz infrarroja, su temperatura cae a 20.0°C. Sobre el disco no actúa momento de torsión externo. a) Encuentre el cambio de energía cinética del disco. b) Encuentre el cambio de energía interna del disco. c) Encuentre la cantidad de energía que radia.

55. **Problema de repaso.** Resulta que un meteorito de 670 kg está compuesto de aluminio. Cuando está lejos de la Tierra, su temperatura es de −15°C y se mueve con una rapidez de 14.0 km/s en relación con el planeta. Mientras choca con la Tierra, suponga que la energía interna adicional resultante se comparte igualmente entre el meteoro y el planeta y que todo el material del meteoro tiene una elevación momentánea similar a la temperatura final. Encuentre esta temperatura. Suponga que el calor específico del líquido y el del aluminio gaseoso es 1 170 J/kg · °C.

56. En una tetera eléctrica hierve agua. La potencia absorbida por el agua es 1.00 kW. Si supone que la presión de vapor en la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la rapidez de efusión de vapor del pico de la tetera si el pico tiene un área de sección transversal de 2.00 cm^2.

57. Una cocina solar consiste de una superficie reflectora curva que concentra la luz solar en el objeto a calentar (figura P20.57). La potencia solar por unidad de área que llega a la superficie de la Tierra en la ubicación es 600 W/m^2. La cocina da cara al Sol y tiene un diámetro de cara de 0.600 m. Suponga que 40.0% de la energía incidente se transfiere a 0.500 L de agua en un contenedor abierto, inicialmente a 20.0°C. ¿Durante qué intervalo de tiempo el agua hierve por completo? (Ignore la capacidad térmica del contenedor.)

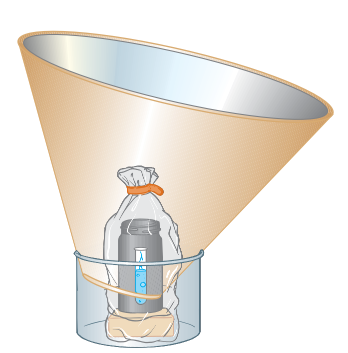


Figura P20.57

58. a) En aire a 0°C, un bloque de cobre de 1.60 kg a 0°C se pone a deslizar a 2.50 m/s sobre una hoja de hielo a 0°C. La fricción lleva al bloque al reposo. Encuentre la masa del hielo que se funde. Para describir el proceso de frenado, identifique la entrada de energía Q, la entrada de trabajo W, el cambio en energía interna ΔE_{int} y el cambio de energía mecánica ΔK para el bloque y también para el hielo. b) Un bloque de hielo de 1.60 kg a 0°C se pone a deslizar a 2.50 m/s sobre una hoja de cobre a 0°C. La fricción lleva el bloque al reposo. Encuentre la masa del hielo que se funde. Identifique Q, W, ΔE_{int} y ΔK para el bloque y para la hoja de metal durante el proceso. c) Una placa delgada de cobre de 1.60 kg a 20°C se pone a deslizar a 2.50 m/s sobre una placa idéntica fija a la misma temperatura. La fricción detiene el movimiento rápidamente. Si supone que no se pierde energía por calor al ambiente, encuentre el cambio en temperatura de ambos objetos. Identifique Q, W, ΔE_{int} y ΔK para cada objeto durante el proceso.

59. Un recipiente de cocina sobre un quemador lento contiene 10.0 kg de agua y una masa desconocida de hielo en equilibrio a 0°C en el tiempo $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en varios tiempos y el resultado se grafica en la figura P20.59. Durante los primeros 50.0 minutos, la mezcla permanece a 0°C. De 50.0 min a 60.0 min, la temperatura aumenta a 2.00°C. Si ignora la capacidad térmica del recipiente, determine la masa inicial del hielo.

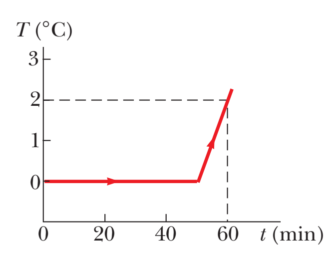


Figura P20.59

60. Un estanque de agua a 0°C se cubre con una capa de hielo de 4.00 cm de grueso. Si la temperatura del aire permanece constante a −10.0°C, ¿qué intervalo de tiempo se requiere para que el grosor del hielo aumente a 8.00 cm? *Sugerencia:* Use la ecuación 20.16 en la forma

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$$

y note que el incremento de energía dQ extraído del agua a través del grosor x de hielo es la cantidad requerida para congelar un grosor dx de hielo. Esto es: $dQ = L\rho A\, dx$, donde ρ es la densidad del hielo, A es el área y L es el calor latente de fusión.

61. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluidas las ventanas) y techo de la casa que se describe en la figura P20.61 es 0.480 W/m · °C y su grosor promedio es 21.0 cm. La casa se mantiene caliente con gas natural que tiene un calor de combustión (esto es, la energía proporcionada por cada metro cúbico de gas quemado) de 9 300 kcal/m³. ¿Cuántos cada metros cúbicos de gas se deben quemar cada día para mantener una temperatura interior de 25.0°C, si la temperatura exterior es 0.0°C? Ignore la radiación y la pérdida de energía por calor a través del suelo.

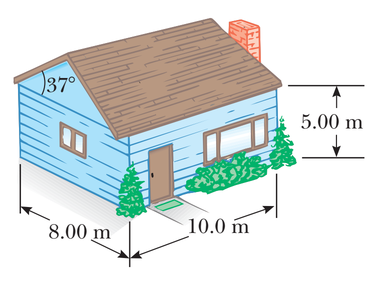


Figura P20.61

62. El interior de un cilindro hueco se mantiene a una temperatura T_a mientras que el exterior está a una temperatura menor T_b (figura P20.62). La pared del cilindro tiene una conductividad térmica k. Si ignora los efectos de los extremos, demuestre que la rapidez de conducción de energía desde la superficie interior hasta la exterior en la dirección radial es

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk\left[\frac{T_a - T_b}{\ln\,(b/a)}\right]$$

Sugerencia: El gradiente de temperatura es dT/dr. Note que una corriente de energía radial pasa a través de un cilindro concéntrico de área $2\pi rL$.

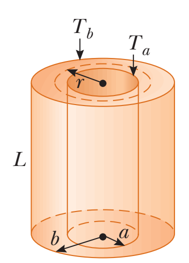


Figura P20.62

63. La sección de pasajeros de una aeronave tiene la forma de un tubo cilíndrico con una longitud de 35.0 m y un radio interior de 2.50 m. Sus paredes están recubiertas con un material aislante de 6.00 cm de grueso y tiene una conductividad térmica de 4.00×10^{-5} cal/s · cm · °C. Un calentador debe mantener la temperatura interior a 25.0°C mientras la temperatura exterior es de −35.0°C. ¿Qué potencia debe suministrar al calentador? (Puede usar el resultado del problema 62.)

64. ● Un estudiante mide los siguientes datos en un experimento de calorimetría diseñado para determinar el calor específico del aluminio:

Temperatura inicial de agua y calorímetro:	70°C
Masa de agua:	0.400 kg
Masa del calorímetro:	0.040 kg
Calor específico del calorímetro:	0.63 kJ/kg · °C
Temperatura inicial de aluminio:	27°C
Masa de aluminio:	0.200 kg
Temperatura final de mezcla:	66.3°C

Use estos datos para determinar el calor específico del aluminio. Explique si su resultado está dentro de 15% del valor mencionado en la tabla 20.1.

65. ● Un cascarón esférico tiene 3.00 cm de radio interior y 7.00 cm de radio exterior. Está hecho de material con conductividad térmica $k = 0.800$ W/m · °C. El interior se mantiene a 5°C de temperatura y el exterior a 40°C. Después de un intervalo de tiempo, el cascarón alcanza un estado estable en el que la temperatura en cada punto dentro de él se mantiene constante en el tiempo. a) Explique por qué la rapidez de transferencia de energía $\mathcal{P}$ debe ser la misma a través de cada superficie esférica, de radio r, dentro del cascarón y debe satisfacer

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi kr^2}$$

b) A continuación, compruebe que

$$\int_{5^\circ\text{C}}^{40^\circ\text{C}} dT = \frac{\mathcal{P}}{4\pi k}\int_{3\text{ cm}}^{7\text{ cm}} r^{-2}\, dr$$

c) Encuentre la rapidez de transferencia de energía a través del cascarón.

d) Compruebe que

$$\int_{5°C}^{T} dT = (1.84 \text{ m} \cdot °\text{C}) \int_{3 \text{ cm}}^{r} r^{-2}\, dr$$

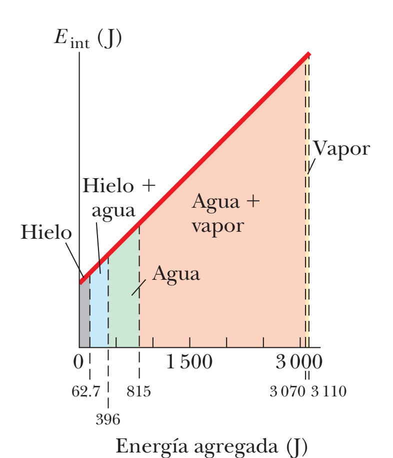
e) Hallar la temperatura dentro del cascarón como función del radio. f) Encuentre la temperatura en $r = 5.00$ cm, a la mitad a través del cascarón.

66. ● Durante periodos de gran actividad, el Sol tiene más manchas solares que de costumbre. Las manchas solares son más frías que el resto de la capa luminosa de la atmósfera del Sol (la fotosfera). Paradójicamente, la potencia de salida total del Sol activo no es menor que el promedio sino que es la misma o ligeramente mayor que el promedio. Elabore los detalles del siguiente modelo imperfecto de este fenómeno. Considere una mancha de la fotosfera con un área de 5.10×10^{14} m^2. Su emisividad es 0.965. a) Encuentre la potencia que radia si su temperatura es uniformemente de 5 800 K, correspondiente al Sol quieto. b) Para representar una mancha solar, suponga que 10.0% del área del parche está a 4 800 K y que el otro 90.0% está a 5 890 K. Esto es: una sección con el área superficial de la Tierra es 1 000 K más fría que antes y una sección nueve veces mayor es 90 K más caliente. Encuentre la temperatura promedio de la mancha. Establezca cómo se le compara con 5 800 K. c) Encuentre la potencia de salida de la mancha. Haga una comparación con la respuesta del inciso a). (El siguiente máximo de manchas solares se espera alrededor del año 2012.)

Respuestas a las preguntas rápidas

20.1 **i)** Agua, vidrio, hierro. Puesto que el agua tiene el mayor calor específico (4 186 J/kg · °C), tiene el menor cambio en temperatura. El vidrio es el siguiente (837 J/kg · °C) y el hierro el último (448 J/kg · °C). **i)** Hierro, vidrio, agua. Para cierto aumento de temperatura, la transferencia de energía por calor es proporcional al calor específico.

20.2 La figura muestra una representación gráfica de la energía interna del hielo como función de la energía agregada. Note que esta gráfica aparece muy diferente de la figura 20.2 en que no tiene las porciones planas durante los cambios de fase. Sin importar cómo varía la temperatura en la figura 20.2, la energía interna del sistema simplemente aumenta de manera lineal con la entrada de energía.



20.3

Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
a) Bombear rápidamente una llanta de bicicleta	Aire en la bomba	0	+	+
b) Olla con agua a temperatura ambiente sobre una estufa caliente	Agua en una olla	+	0	+
c) Aire que sale rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo	0	−	−

a) Ya que el bombeo es rápido, no entra o sale energía del sistema por calor. Puesto que $W > 0$ cuando se consume trabajo *en* el sistema, en este caso es positivo. Por lo tanto, $\Delta E_{int} = Q + W$ debe ser positivo. El aire en la bomba está más caliente. b) No hay trabajo que se consuma en o por el sistema, pero las transferencias de energía en el agua por calor del quemador caliente, hacen que tanto Q como ΔE_{int} sean positivos. c) De nuevo no hay transferencias de energía por calor adentro o afuera del sistema, pero las moléculas de aire que escapan del globo realizan trabajo sobre las moléculas de aire circundantes mientras las empujan afuera del camino. En consecuencia, W es negativo y ΔE_{int} es negativo. La reducción en energía interna es evidente porque el aire que escapa se vuelve más frío.

20.4 La trayectoria A es isovolumétrica, la trayectoria B es adiabática, la trayectoria C es isotérmica y la trayectoria D es isobárica.

20.5 b). En paralelo, las barras presentan un área más grande a través de la que se puede transferir energía y una longitud menor.



Los perros no tienen glándulas sudoríparas como los humanos. En los climas calientes, un perro jadea para promover la evaporación desde la lengua. En este capítulo se mostrará que la evaporación es un proceso de enfriamiento respecto a la transferencia de moléculas con alta energía cinética de un líquido. (Frank Oberle/Getty Images)

21 Teoría cinética de los gases

En el capítulo 19 se explicaron las propiedades de un gas ideal con el uso de variables macroscópicas como presión, volumen y temperatura. Estas propiedades a gran escala pueden estar relacionadas con una descripción a escala microscópica, donde la materia se trata como un conjunto de moléculas. Aplicar las leyes de movimiento de Newton de manera estadística a un conjunto de partículas proporciona una descripción razonable de los procesos termodinámicos. Para mantener las matemáticas a un nivel simple, se considerará principalmente el comportamiento de los gases, porque en los gases las interacciones entre moléculas son mucho más débiles de lo que son en líquidos o sólidos.

21.1 Modelo molecular de un gas ideal

Este capítulo inicia con el desarrollo de un modelo microscópico de un gas ideal, llamado **teoría cinética**. Al desarrollar este modelo, se hacen las siguientes suposiciones:

◄ Suposiciones del modelo molecular de un gas ideal

1. **En los gases las moléculas son numerosas y la separación promedio entre ellas es grande en comparación con sus dimensiones.** En otras palabras, las moléculas ocupan un volumen despreciable en el contenedor. Esto es consistente con el modelo de gas ideal, en el que las moléculas se modelan como partículas.
2. **Las moléculas obedecen las leyes de movimiento de Newton, pero como un todo tienen un movimiento aleatorio.** Por "aleatorio" se entiende que cualquier molécula se puede trasladar en cualquier dirección a cualquier rapidez.

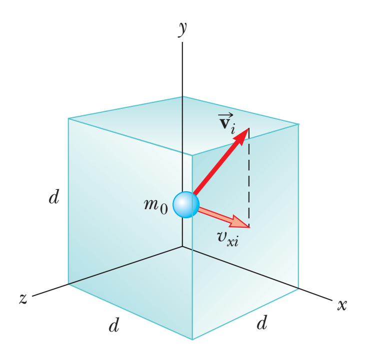


Figura 21.1 Un cubo con lados de longitud d que contiene un gas ideal. La molécula que se muestra se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$.

3. **Las moléculas interactúan sólo mediante fuerzas de corto alcance durante colisiones elásticas.** Esto es consistente con el modelo de gas ideal, en el que las moléculas no ejercen fuerzas de largo alcance unas sobre otra.
4. **Las moléculas tienen colisiones elásticas contra las paredes.** Estas colisiones conducen a la presión macroscópica sobre las paredes del contenedor.
5. **El gas en consideración es una sustancia pura; es decir, todas las moléculas son idénticas.**

Aunque con frecuencia se ilustra un gas ideal que consiste en átomos simples, el comportamiento de los gases moleculares se aproxima al de los gases ideales, más a presiones bajas. Por lo general, las rotaciones moleculares o vibraciones no tienen efecto sobre los movimientos considerados en este caso.

Como primera aplicación de la teoría cinética, obtenga una expresión para la presión de N moléculas de un gas ideal en un contenedor de volumen V en términos de cantidades microscópicas. El contenedor es un cubo con bordes de longitud d (figura 21.1). Primero se concentra la atención en una de dichas moléculas de masa m_0 y se supondrá móvil de modo que su componente de velocidad en la dirección x es v_{xi}, como en la figura 21.2. (En este caso, el subíndice i se refiere a la i–ésima molécula, no a un valor inicial. En breve se combinarán los efectos de todas las moléculas.) A medida que la molécula tiene una colisión elástica con cualquier pared (suposición 4), su componente de velocidad perpendicular a la pared se invierte, porque la masa de la pared es mucho mayor que la masa de la molécula. Ya que la componente de la cantidad de movimiento p_{xi} de la molécula es m_0v_{xi} antes de la colisión y $-m_0v_{xi}$ después de la colisión, el cambio en la componente x de la cantidad de movimiento de la molécula es

$$\Delta p_{xi} = -m_0v_{xi} - (m_0v_{xi}) = -2m_0v_{xi}$$

Ya que las moléculas obedecen las leyes de Newton (suposición 2), se aplica el teorema impulso–cantidad de movimiento (ecuación 9.8) a la molécula para obtener

$$\overline{F}_{i,\text{ sobre molécula}}\,\Delta t_{\text{colisión}} = \Delta p_{xi} = -2m_0v_{xi}$$

donde $\overline{F}_{i,\text{ sobre molécula}}$ es la componente x de la fuerza promedio[1] que la pared ejerce sobre la molécula durante la colisión y $\Delta t_{\text{colisión}}$ es la duración de la colisión. Para que la molécula tenga otra colisión con la misma pared después de esta primera colisión, debe viajar una distancia de $2d$ en la dirección x (a través del contenedor y de regreso). Por lo tanto, el intervalo de tiempo entre dos colisiones contra la misma pared es

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{xi}}$$

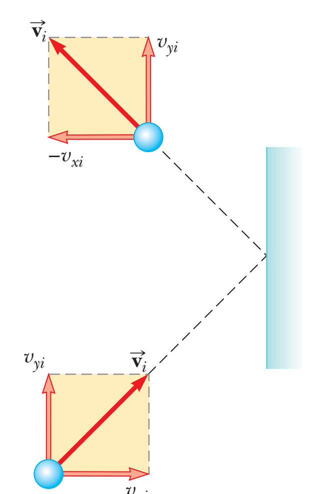


Figura 21.2 Una molécula tiene una colisión elástica contra la pared del contenedor. Su componente x de cantidad de movimiento se invierte, mientras que su componente y permanece inalterada. En esta construcción se supone que la molécula se mueve en el plano xy.

La fuerza que causa el cambio en cantidad de movimiento de la molécula en la colisión contra la pared se presenta sólo durante la colisión. Sin embargo, es posible promediar la fuerza durante el intervalo de tiempo para que la molécula se traslade a través del cubo y regrese. A veces, durante este intervalo de tiempo, se presenta la colisión, así que el cambio en cantidad de movimiento para este intervalo de tiempo es el mismo que para la duración breve de la colisión. En consecuencia, se puede reescribir el teorema impulso–cantidad de movimiento como

$$\overline{F}_i\,\Delta t = -2m_0v_{xi}$$

donde $\overline{F}_i$ es la componente de la fuerza promedio en el intervalo de tiempo para que la molécula se traslade a través del cubo y regrese. Ya que se presenta exactamente una colisión por cada uno de tales intervalos de tiempo, este resultado también es la fuerza promedio a largo plazo en la molécula durante largos intervalos de tiempo que contienen cualquier número de múltiplos de Δt.

Esta ecuación y la anterior permiten expresar la componente x de la fuerza promedio a largo plazo ejercida por la pared sobre la molécula como

$$\overline{F}_i = -\frac{2m_0v_{xi}}{\Delta t} = -\frac{2m_0v_{xi}^2}{2d} = -\frac{m_0v_{xi}^2}{d}$$

[1] Para esta explicación se usa una barra sobre una variable para representar el valor promedio de la variable, tal como $\overline{F}$ para la fuerza promedio, en lugar del subíndice “prom” que se usó anteriormente. Esta notación es para evitar confusiones porque ya se tienen algunos subíndices en las variables.

Ahora, por la tercera ley de Newton, la componente *x* de la fuerza promedio a largo plazo que ejerce la *molécula* sobre la *pared* es igual en magnitud y opuesta en dirección:

$$\overline{F}_{i,\text{ sobre la pared}} = -\overline{F}_i = -\left(-\frac{m_0 v_{xi}^{\,2}}{d}\right) = \frac{m_0 v_{xi}^{\,2}}{d}$$

La fuerza promedio total $\overline{F}$ que el gas ejerce sobre la pared se encuentra al sumar las fuerzas promedio ejercidas por las moléculas individuales. Al sumar los términos como el anterior para todas las moléculas se tiene

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_0 v_{xi}^{\,2}}{d} = \frac{m_0}{d} \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^{\,2}$$

donde se factorizó la longitud de la caja y la masa m_0 porque la suposición 5 dice que todas las moléculas son iguales. Ahora se impone la suposición 1, que el número de moléculas es grande. Para un número pequeño de moléculas, la fuerza real sobre la pared variaría con el tiempo. Sería distinta de cero durante el intervalo breve de la colisión de una molécula contra la pared y cero cuando ninguna molécula golpee la pared. Sin embargo, para un número muy grande de moléculas, como el número de Avogadro, estas variaciones en fuerza son uniformes, de modo que la fuerza promedio dada anteriormente es la misma sobre *cualquier* intervalo de tiempo. Por lo tanto, la fuerza *constante* F sobre la pared debida a las colisiones moleculares es

$$F = \frac{m_0}{d} \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^{\,2}$$

Para avanzar aún más, considere cómo expresar el valor promedio del cuadrado de la componente *x* de la velocidad para *N* moléculas. El promedio tradicional de un conjunto de valores es la suma de los valores sobre el número de valores:

$$\overline{v_x^{\,2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^{\,2}}{N}$$

El numerador de esta expresión se contiene en el lado derecho de la ecuación precedente. En consecuencia, al combinar las dos expresiones, la fuerza total sobre la pared se escribe

$$F = \frac{m_0}{d} N\overline{v_x^{\,2}} \tag{21.1}$$

Ahora considere de nuevo una molécula con componentes de velocidad v_{xi}, v_{yi} y v_{zi}. El teorema de Pitágoras relaciona el cuadrado de la rapidez de la molécula con los cuadrados de las componentes de velocidad:

$$v_i^{\,2} = v_{xi}^{\,2} + v_{yi}^{\,2} + v_{zi}^{\,2}$$

Por tanto, el valor promedio de v^2 para todas las moléculas en el contenedor se relaciona con los valores promedio de v_x^2, v_y^2 y v_z^2, de acuerdo con la expresión

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^{\,2}} + \overline{v_y^{\,2}} + \overline{v_z^{\,2}}$$

Ya que el movimiento es completamente aleatorio (suposición 2), los valores promedio $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$ y $\overline{v_z^2}$ son iguales uno a otro. Al usar este hecho, y la ecuación anterior, se encuentra que

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^{\,2}}$$

Por lo tanto, de la ecuación 21.1, la fuerza total ejercida sobre la pared es

$$F = \tfrac{1}{3} N \frac{m_0 \overline{v^2}}{d}$$

Con esta expresión encuentre la presión total que se ejerce sobre la pared:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \tfrac{1}{3}N\frac{m_0\overline{v^2}}{d^3} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{N}{V}\right)m_0\overline{v^2}$$

Correspondencia entre presión y energía cinética molecular

$$P = \tfrac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right) \qquad \textbf{(21.2)}$$

Este resultado indica que l**a presión de un gas es proporcional al número de moléculas por cada unidad de volumen y a la energía cinética traslacional promedio de las moléculas,** $\frac{1}{2}m_0\overline{v^2}$. Al analizar este modelo simplificado de un gas ideal, se obtiene un resultado importante que relaciona la cantidad macroscópica de presión con una cantidad microscópica, el valor promedio del cuadrado de la rapidez molecular. Debido a eso, se establece un vínculo clave entre el mundo molecular y el mundo a gran escala.

Observe que la ecuación 21.2 verifica algunas características de la presión, con la que probablemente esté familiarizado. Una forma de aumentar la presión dentro de un contenedor es aumentar el número de moléculas por cada unidad de volumen N/V en el contenedor. Esto es lo que hace cuando agrega aire a una llanta. La presión en la llanta también se puede aumentar al incrementar la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de aire. Esto se logra al aumentar la temperatura de dicho aire, razón por la cual la presión dentro de una llanta aumenta a medida que ésta se calienta durante viajes largos. La continua flexión de la llanta, a medida que se mueve a lo largo de la superficie del camino, resulta en trabajo consumido en el caucho conforme las partes de la llanta se distorsionan, lo que causa un aumento en energía interna del caucho. La temperatura aumentada del caucho resulta en la transferencia de energía por calor hacia el aire adentro de la llanta. Esta transferencia aumenta la temperatura del aire, y este aumento en temperatura a su vez produce un aumento en presión.

Interpretación molecular de la temperatura

Es posible obtener cierta comprensión del significado de la temperatura al escribir, primero la ecuación 21.2 en la forma

$$PV = \tfrac{2}{3}N\left(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right)$$

Ahora compare esta expresión con la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 19.10):

$$PV = Nk_BT$$

Recuerde que la ecuación de estado respecto en los hechos experimentales concernientes al comportamiento macroscópico de los gases. Al igualar los lados derechos de estas expresiones se obtiene

La temperatura es proporcional a la energía cinética promedio

$$T = \frac{2}{3k_B}\left(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right) \qquad \textbf{(21.3)}$$

Este resultado muestra que la temperatura es una medida directa de la energía cinética molecular promedio. Al reordenar la ecuación 21.3, es posible relacionar la energía cinética molecular traslacional con la temperatura:

Energía cinética promedio por molécula

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}k_BT \qquad \textbf{(21.4)}$$

Esto es, la energía cinética traslacional promedio por molécula es $\frac{3}{2}k_BT$. Ya que $\overline{v_x^{\,2}} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$, se sigue

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v_x^{\,2}} = \tfrac{1}{2}k_BT \qquad \textbf{(21.5)}$$

En forma similar, para las direcciones y y z,

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v_y^{\,2}} = \tfrac{1}{2}k_BT \quad \text{y} \quad \tfrac{1}{2}m_0\overline{v_z^{\,2}} = \tfrac{1}{2}k_BT$$

Por lo tanto, cada grado de libertad traslacional aporta una cantidad igual de energía, $\frac{1}{2}k_BT$ al gas. (En general, un "grado de libertad" se refiere a un medio independiente por

TABLA 21.1

Rapidez media cuadrática

Gas	Masa molar (g/mol)	v_{rms} a 20°C(m/s)	Gas	Masa molar (g/mol)	v_{rms} a 20°C(m/s)
H_2	2.02	1 902	NO	30.0	494
He	4.00	1 352	O_2	32.0	478
H_2O	18.0	637	CO_2	44.0	408
Ne	20.2	602	SO_2	64.1	338
N_2 o CO	28.0	511			

el que una molécula puede tener energía.) Una generalización de este resultado, conocido como **teorema de equipartición de la energía**, es:

> Cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_BT$ a la energía de un sistema, donde posibles grados de libertad son aquellos asociados con la traslación, rotación y vibración de las moléculas.

◀ Teorema de equipartición de la energía

La energía cinética traslacional total de N moléculas de gas es simplemente N veces la energía promedio por cada molécula, que se conoce por la ecuación 21.4:

$$K_{\text{tras tot}} = N\left(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right) = \tfrac{3}{2}Nk_BT = \tfrac{3}{2}nRT \quad \textbf{(21.6)}$$

◀ Energía cinética traslacional total de N moléculas

donde se usó $k_B = R/N_A$ para la constante de Boltzmann y $n = N/N_A$ para el número de moles de gas. Si las moléculas de gas tienen sólo energía cinética traslacional, la ecuación 21.6 representa la energía interna del gas. Este resultado implica que **la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura**. En la sección 21.2 se seguirá este punto.

La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se llama *rapidez media cuadrática* (rms) de las moléculas. De la ecuación 21.4 se encuentra que la rapidez rms es

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \textbf{(21.7)}$$

◀ Rapidez media cuadrática

donde M es la masa molar en kilogramos por cada mol y es igual a m_0N_A. Esta expresión muestra que, a una cierta temperatura, las moléculas más ligeras se trasladan más rápido, en promedio, que las moléculas más pesadas. Por ejemplo, a una temperatura determinada, las moléculas de hidrógeno, cuya masa molar es 2.02×10^{-3} kg/mol, tienen una rapidez promedio cerca de cuatro veces más que las moléculas de oxígeno, cuya masa molar es 32.0×10^{-3} kg/mol. La tabla 21.1 menciona la rapidez rms para diferentes moléculas a 20°C.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.1

¿La raíz cuadrada del cuadrado?

Sacar la raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ no "deshace" el cuadrado porque se toma un promedio *entre* elevar al cuadrado y sacar la raíz cuadrada. Aunque la raíz cuadrada de $(\overline{v})^2$ es $\overline{v} = v_{prom}$, porque elevar al cuadrado se hace después del promedio, la raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ *no* es v_{prom}, sino v_{rms}.

Pregunta rápida 21.1 Dos contenedores mantienen un gas ideal a la misma temperatura y presión. Ambos retienen el mismo tipo de gas, pero el contenedor B tiene el doble de volumen que el contenedor A. **i)** ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio por molécula en el contenedor B? a) El doble que el contenedor A, b) la misma que el contenedor A, c) la mitad que el contenedor A, d) es imposible de determinar. **ii)** Entre las mismas opciones describa la energía interna del gas en el contenedor B.

EJEMPLO 21.1 Un tanque de helio

Un tanque que se usa para llenar globos de helio tiene un volumen de 0.300 m^3 y contiene 2.00 moles de gas helio a 20.0°C. Suponga que el helio se comporta como un gas ideal.

A) ¿Cuál es la energía cinética traslacional total de las moléculas de gas?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un modelo microscópico de un gas en el que observa cómo se incrementa el movimiento de las moléculas alrededor del contenedor a medida que aumenta la temperatura.

Categorizar Se evalúan los parámetros con las ecuaciones desarrolladas en la explicación precedente, de modo que este ejemplo es un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 21.6 con $n = 2.00$ moles y $T = 293$ K:

$$K_{\text{tras tot}} = \tfrac{3}{2}nRT = \tfrac{3}{2}(2.00\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(293\text{ K})$$
$$= \boxed{7.30 \times 10^{3}\text{ J}}$$

B) ¿Cuál es la energía cinética promedio por molécula?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 21.4:

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}k_BT = \tfrac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K})(293\text{ K})$$
$$= \boxed{6.07 \times 10^{-21}\text{ J}}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la temperatura se eleva de 20.0°C a 40.0°C? Ya que 40.0 es el doble de 20.0, ¿la energía cinética traslacional total de las moléculas del gas es el doble a la temperatura más alta?

Respuesta La expresión para la energía traslacional total depende de la temperatura, y el valor para la temperatura se debe expresar en kelvins, no en grados Celsius. Por lo tanto, la proporción de 40.0 a 20.0 *no* es la proporción adecuada. Al convertir las temperaturas Celsius a kelvins, 20.0°C es 293 K y 40.0°C es 313 K. En consecuencia, la energía traslacional total aumenta en un factor de sólo 313 K/293 K = 1.07.

21.2 Calor específico molar de un gas ideal

Considere un gas ideal que se somete a varios procesos tales que el cambio en temperatura es $\Delta T = T_f - T_i$ para todos los procesos. El cambio de temperatura se puede lograr al tomar una variedad de trayectorias de una isoterma a otra, como se muestra en la figura 21.3. Ya que ΔT es la misma para cada trayectoria, el cambio de energía interna ΔE_{int} es el mismo para todas las trayectorias. El trabajo W consumido en el gas (el negativo del área bajo las curvas) es diferente para cada trayectoria. Por lo tanto, a partir de la primera ley de la termodinámica, el calor asociado con un cambio determinado en temperatura *no* tiene un valor único, como se explica en la sección 20.4.

Esta dificultad se puede abordar al definir calores específicos para dos procesos especiales: isovolumétrico e isobárico. Ya que el número de moles es una medida convenida de la cantidad de gas, se definen los **calores específicos molares** asociados con estos procesos del modo siguiente:

$$Q = nC_V\,\Delta T \text{ (volumen constante)} \tag{21.8}$$

$$Q = nC_P\,\Delta T \text{ (presión constante)} \tag{21.9}$$

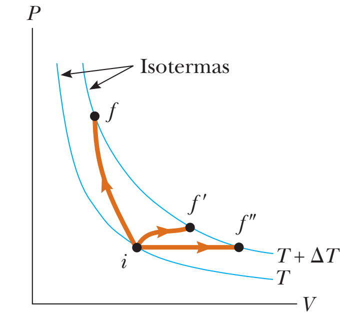


Figura 21.3 Un gas ideal se lleva de una isoterma a temperatura T a otra a temperatura $T + \Delta T$ a lo largo de tres trayectorias diferentes.

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante** y C_P es el **calor específico molar a presión constante**. Cuando se agrega energía a un gas por calor a presión constante, no sólo aumenta la energía interna del gas, sino que se consume trabajo (negativo) en el gas debido al cambio en volumen. En consecuencia, el calor Q en la ecuación 21.9 debe explicar tanto el aumento en energía interna como la transferencia de energía hacia afuera del sistema por trabajo. Por este motivo, Q es mayor en la ecuación 21.9 que en la ecuación 21.8 para ciertos valores de n y ΔT. En consecuencia, C_P es mayor que C_V.

En la sección anterior se halló que la temperatura de un gas es una medida de la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de gas. Esta energía cinética se asocia con el movimiento del centro de masa de cada molécula. No incluye la energía asociada con el movimiento interno de la molécula, a saber, vibraciones y rotaciones respecto al

centro de masa. Esto no debería sorprenderle porque el modelo simple de teoría cinética supone una molécula sin estructura.

De este modo, considere primero el caso más simple de un gas monoatómico ideal, un gas que contiene un átomo por cada molécula, como helio, neón o argón. Cuando se agrega energía a un gas monoatómico en un contenedor de volumen fijo, toda la energía agregada participa en el aumento de la energía cinética traslacional de los átomos. No hay otra forma de almacenar la energía en un gas monoatómico. Por lo tanto, de la ecuación 21.6, se ve que la energía interna E_{int} de N moléculas (o n moles) de un gas monoatómico ideal es

$$E_{\text{int}} = K_{\text{tras tot}} = \tfrac{3}{2}Nk_BT = \tfrac{3}{2}nRT \qquad \textbf{(21.10)}$$

◀ Energía interna de un gas monoatómico ideal

Para un gas monoatómico ideal, E_{int} sólo es una función de T y la correspondencia funcional se conoce por la ecuación 21.10. En general, la energía interna de cualquier gas ideal es una función sólo de T y la relación exacta depende del tipo de gas.

Si la energía se transfiere por calor a un sistema a volumen constante, no se consume trabajo en el sistema. Esto es, $W = -\int P\,dV = 0$ para un proceso a volumen constante. Por lo tanto, a partir de la primera ley de la termodinámica,

$$Q = \Delta E_{\text{int}} \qquad \textbf{(21.11)}$$

En otras palabras, toda la energía transferida por calor toma parte en el aumento de la energía interna del sistema. En la figura 21.4 se describe un proceso a volumen constante de i a f para un gas ideal, donde ΔT es la diferencia de temperatura entre las dos isotermas. Al sustituir la expresión para Q dada por la ecuación 21.8 en la ecuación 21.11, se obtiene

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V\,\Delta T \qquad \textbf{(21.12)}$$

Si el calor específico molar es constante, la energía interna de un gas se expresa como

$$E_{\text{int}} = nC_VT$$

Esta ecuación se aplica a todos los gases ideales, aquellos gases que tienen más de un átomo por cada molécula, así como a gases ideales monoatómicos. En el límite de cambios infinitesimales se aplica la ecuación 21.12 para expresar el calor específico molar a volumen constante como

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{\text{int}}}{dT} \qquad \textbf{(21.13)}$$

Ahora aplique los resultados de esta explicación a un gas monoatómico. Al sustituir la energía interna de la ecuación 21.10 en la ecuación 21.13 se obtiene

$$C_V = \tfrac{3}{2}R \qquad \textbf{(21.14)}$$

Esta expresión predice un valor de $C_V = \frac{3}{2}R = 12.5\text{ J/mol}\cdot\text{K}$ para *todos* los gases monoatómicos. Esta predicción está en excelente concordancia con los valores medidos de calores específicos molares para gases como helio, neón, argón y xenón sobre un amplio intervalo de temperaturas (tabla 21.2, página 594). Las pequeñas variaciones que hay en la tabla 21.2 de los valores predichos, se debe a que los gases reales no son gases ideales. En los gases reales se presentan interacciones intermoleculares débiles, que no se abordan en el modelo de gas ideal presentado.

Ahora suponga que el gas sigue la trayectoria $i \rightarrow f'$ a presión constante, como se muestra en la figura 21.4. A lo largo de esta trayectoria, la temperatura de nuevo aumenta en ΔT. La energía que se debe transferir por calor al gas en este proceso es $Q = nC_P\,\Delta T$. Por los cambios de volumen en este proceso, el trabajo consumido en el gas es $W = -P\,\Delta V$, donde P es la presión constante a la que ocurre el proceso. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a este proceso, se tiene

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = nC_P\,\Delta T + (-P\,\Delta V) \qquad \textbf{(21.15)}$$

En este caso, la energía agregada al gas por calor se canaliza del modo siguiente. Parte de ella sale del sistema por trabajo (el gas mueve un pistón a través de un desplazamiento) y el resto aparece como un aumento en la energía interna del gas. Sin embargo, el

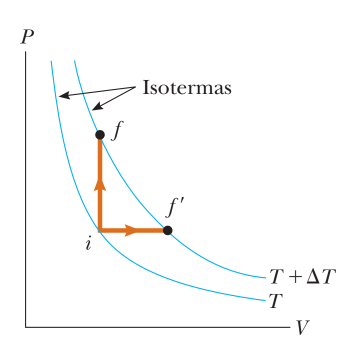


Figura 21.4 La energía se transfiere por calor a un gas ideal en dos formas. Para la trayectoria $i \rightarrow f$ a volumen constante, toda la energía participa en el aumento de energía interna del gas, porque no se realiza trabajo. A lo largo de la trayectoria $i \rightarrow f'$ a presión constante, parte de la energía transferida adentro por calor se transfiere afuera por trabajo.

TABLA 21.2

Calores específicos molares de varios gases

Gas	**Calor específico molar (J/mol · K)[a]** C_P	C_V	$C_P - C_V$	$\gamma = C_P/C_V$
Gases monoatómicos				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.64
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
Gases diatómicos				
H_2	28.8	20.4	8.33	1.41
N_2	29.1	20.8	8.33	1.40
O_2	29.4	21.1	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl_2	34.7	25.7	8.96	1.35
Gases poliatómicos				
CO_2	37.0	28.5	8.50	1.30
SO_2	40.4	31.4	9.00	1.29
H_2O	35.4	27.0	8.37	1.30
CH_4	35.5	27.1	8.41	1.31

[a]Todos los valores, excepto el del agua, se obtuvieron a 300 K.

cambio en energía interna para el proceso $i \rightarrow f'$ es igual al del proceso $i \rightarrow f$ porque E_{int} sólo depende de la temperatura para un gas ideal y ΔT es la misma para ambos procesos. Además, ya que $PV = nRT$, note que, para un proceso a presión constante, $P\,\Delta V = nR\,\Delta T$. Al sustituir este valor para $P\,\Delta V$ en la ecuación 21.15 con $\Delta E_{\text{int}} = nC_V\,\Delta T$ (ecuación 21.12) se obtiene

$$nC_V\,\Delta T = nC_P\,\Delta T - nR\,\Delta T$$

$$C_P - C_V = R \qquad \textbf{(21.16)}$$

Esta expresión se aplica a *cualquier* gas ideal y predice que el calor específico molar de un gas ideal a presión constante es mayor que el calor específico molar a volumen constante en una cantidad R, la constante universal de los gases (que tiene el valor 8.31 J/mol · K). Esta expresión es aplicable a gases reales, como muestran los datos de la tabla 21.2.

Ya que $C_V = \frac{3}{2}R$ para un gas ideal monoatómico, la ecuación 21.16 predice un valor $C_P = \frac{5}{2}R = 20.8$ J/mol · K para el calor específico molar de un gas monoatómico a presión constante. La proporción de estos calores específicos molares es una cantidad adimensional γ (letra griega gamma):

Proporción de calores específicos molares para un gas ideal monoatómico ▶

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5R/2}{3R/2} = \frac{5}{3} = 1.67 \qquad \textbf{(21.17)}$$

Los valores teóricos de C_V, C_P y γ están en excelente concordancia con los valores experimentales obtenidos para gases monoatómicos, pero discrepan con los valores para los gases más complejos (véase la tabla 21.12). Esto no sorprende: el valor $C_V = \frac{3}{2}R$ fue deducido para un gas ideal monoatómico, y se espera cierta contribución adicional al calor específico molar a partir de la estructura interna de las moléculas más complejas. En la sección 21.4 se describe el efecto de la estructura molecular sobre el calor específico molar de un gas. La energía interna y, por tanto, el calor específico molar de un gas complejo debe incluir aportaciones de los movimientos rotacional y vibratorio de la molécula.

En el caso de sólidos y líquidos calentados a presión constante, se consume muy poco trabajo porque la expansión térmica es pequeña. En consecuencia, C_P y C_V son aproximadamente iguales para sólidos y líquidos.

Pregunta rápida 21.2 **i)** ¿De qué modo cambia la energía interna de un gas mientras sigue la trayectoria $i \rightarrow f$ en la figura 21.4? a) E_{int} aumenta. b) E_{int} disminuye. c) E_{int} permanece igual. d) No hay suficiente información para determinar cómo cambia E_{int}. **ii)** Entre las mismas opciones, ¿cómo cambia la energía interna de un gas ideal a medida que sigue la trayectoria $f \rightarrow f'$ a lo largo de la isoterma marcada $T + \Delta T$ en la figura 21.4?

EJEMPLO 21.2 **Calentamiento de un cilindro de helio**

Un cilindro contiene 3.00 moles de gas helio a una temperatura de 300 K.

A) Si el gas se calienta a volumen constante, ¿cuánta energía por calor se debe transferir al gas para que su temperatura aumente a 500 K?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Proyecte el proceso en su mente con la ayuda del arreglo pistón–cilindro de la figura 19.12.

Categorizar Ya que el gas mantiene un volumen constante, el pistón en la figura 19.12 se asegura en su lugar. Los parámetros se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en la explicación precedente, así que este ejemplo es un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 21.8 para encontrar la transferencia de energía:

$$Q_1 = nC_V\,\Delta T$$

Sustituya los valores conocidos:

$$Q_1 = (3.00\text{ mol})(12.5\text{ J/mol}\cdot\text{K})(500\text{ K} - 300\text{ K})$$
$$= 7.50 \times 10^3\text{ J}$$

B) ¿Cuánta energía se debe transferir al gas por calor a presión constante para elevar la temperatura a 500 K?

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que el gas mantiene una presión constante, el pistón en la figura 19.12 tiene libertad de moverse, así que el pistón se modela como una partícula en equilibrio.

Use la ecuación 21.9 para encontrar la transferencia de energía:

$$Q_2 = nC_P\,\Delta T$$

Sustituya los valores conocidos:

$$Q_2 = (3.00\text{ mol})(20.8\text{ J/mol}\cdot\text{K})(500\text{ K} - 300\text{ K})$$
$$= 12.5 \times 10^3\text{ J}$$

Este valor es mayor que Q_1 debido a la transferencia de energía hacia afuera del gas, por trabajo en el proceso de presión constante.

21.3 Procesos adiabáticos para un gas ideal

Como se notó en la sección 20.6, un **proceso adiabático** es aquel en el que no se transfiere energía por calor entre un sistema y sus alrededores. Por ejemplo, si un gas se comprime (o expande) rápidamente, muy poca energía se transfiere afuera (o adentro) del sistema por calor, así que el proceso es casi adiabático. Tales procesos se presentan en el ciclo de un motor a gasolina, que se explica con detalle en el capítulo 22. Otro ejemplo de un proceso adiabático es la lenta expansión de un gas que está térmicamente aislado de sus alrededores. Las tres variables en la ley de gas ideal (P, V y T) cambian durante un proceso adiabático.

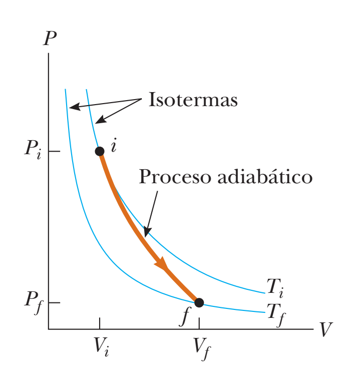


Figura 21.5 Diagrama *PV* para una expansión adiabática de un gas ideal. Note que $T_f < T_i$ en este proceso, así que la temperatura del gas disminuye.

Imagine un proceso adiabático de un gas que incluye un cambio infinitesimal en volumen dV acompañado de un cambio infinitesimal de temperatura dT. El trabajo consumido en el gas es $-P\,dV$. Ya que la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura, el cambio en la energía interna en un proceso adiabático es el mismo que para un proceso isovolumétrico entre las mismas temperaturas, $dE_{\text{int}} = nC_V\,dT$ (ecuación 21.12). Por tanto, la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = Q + W$, con $Q = 0$ se convierte en

$$dE_{\text{int}} = nC_V\,dT = -P\,dV$$

Al tomar la diferencial total de la ecuación de estado de un gas ideal, $PV = nRT$, da

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT$$

Al eliminar dT de estas dos ecuaciones, se encuentra que

$$P\,dV + V\,dP = -\frac{R}{C_V}P\,dV$$

Al sustituir $R = C_P - C_V$ y dividir entre PV produce

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -\left(\frac{C_P - C_V}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = (1-\gamma)\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$$

Al integrar esta expresión, se tiene

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{constante}$$

que es equivalente a

Correspondencia entre *P* y *V* para un proceso adiabático que involucra un gas ideal

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \tag{21.18}$$

El diagrama *PV* para una expansión adiabática se muestra en la figura 21.5. Ya que $\gamma > 1$, la curva *PV* es más pronunciada de lo que sería para una expansión isotérmica. Por definición de un proceso adiabático, no se transfiere energía por calor hacia adentro o hacia afuera del sistema. Por lo tanto, a partir de la primera ley, se ve que ΔE_{int} es negativo (el trabajo se consume *por* el gas, así que su energía interna disminuye) y por eso ΔT también es negativo. En consecuencia, la temperatura del gas disminuye ($T_f < T_i$) durante una expansión adiabática.[2] Por el contrario, la temperatura aumenta si el gas se comprime adiabáticamente. Al aplicar la ecuación 21.18 a los estados inicial y final, se ve que

$$P_iV_i^{\gamma} = P_fV_f^{\gamma} \tag{21.19}$$

Al aplicar la ley del gas ideal, la ecuación 21.19 se expresa como

Correspondencia entre *T* y *V* para un proceso adiabático de un gas ideal

$$T_iV_i^{\gamma-1} = T_fV_f^{\gamma-1} \tag{21.20}$$

EJEMPLO 21.3 Un cilindro de motor diesel

Aire a 20.0°C en el cilindro de un motor diesel se comprime desde una presión inicial de 1.00 atm y volumen de 800.0 cm^3 hasta un volumen de 60.0 cm^3. Suponga que el aire se comporta como un gas ideal con $\gamma = 1.40$ y la compresión es adiabática. Encuentre la presión y temperatura finales del aire.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede si un gas se comprime en un volumen más pequeño. La explicación anterior y la figura 21.5 indican que tanto la presión como la temperatura aumentan.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema que incluye un proceso adiabático.

[2] En la expansión adiabática libre, analizada en la sección 20.6, la temperatura permanece constante. En este proceso único, no se consume trabajo porque el gas se expande en un vacío. En general, la temperatura disminuye en una expansión adiabática en la que se consumió trabajo.

Analizar Aplique la ecuación 21.19 para hallar la presión final:

$$P_f = P_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} = (1.00 \text{ atm})\left(\frac{800.0 \text{ cm}^3}{60.0 \text{ cm}^3}\right)^{1.40}$$

$$= 37.6 \text{ atm}$$

Use la ley de gas ideal para encontrar la temperatura final:

$$\frac{P_iV_i}{T_i} = \frac{P_fV_f}{T_f}$$

$$T_f = \frac{P_fV_f}{P_iV_i}T_i = \frac{(37.6 \text{ atm})(60.0 \text{ cm}^3)}{(1.00 \text{ atm})(800.0 \text{ cm}^3)}(293 \text{ K})$$

$$= 826 \text{ K} = 553°\text{C}$$

Finalizar La temperatura del gas aumenta en un factor de 826 K/293 K = 2.82. La alta compresión en un motor diesel eleva la temperatura del combustible lo suficiente como para provocar su combustión sin el uso de bujías.

21.4 Equipartición de la energía

Las predicciones basadas en el modelo para calor específico molar concuerdan bastante bien con el comportamiento de los gases monoatómicos, pero no con el comportamiento de los gases complejos (véase la tabla 21.2). Sin embargo, el valor predicho por el modelo para la cantidad $C_P - C_V = R$, es el mismo para todos los gases. Dicha similitud no sorprende porque esta diferencia es el resultado del trabajo consumido en el gas, que es independiente de su estructura molecular.

Para aclarar las variaciones en C_V y C_P en los gases más complejos que los gases monoatómicos, explore aún más el origen del calor específico molar. Hasta el momento, se ha supuesto que la única contribución a la energía interna de un gas es la energía cinética traslacional de las moléculas. No obstante, la energía interna de un gas incluye aportaciones de los movimientos traslacional, vibratorio y rotacional de las moléculas. Los movimientos rotacional y vibratorio de las moléculas se activan mediante colisiones y, por lo tanto, se "acoplan" con el movimiento traslacional de las moléculas. La rama de la física conocida como *mecánica estadística* ha demostrado que, para un gran número de partículas que obedecen las leyes de la mecánica newtoniana, la energía disponible se comparte, en promedio, de manera equitativa por cada grado de libertad independiente. Recuerde de la sección 21.1 que el teorema de equipartición establece que, en equilibrio, cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_BT$ de energía por cada molécula.

Considere un gas diatómico cuyas moléculas tienen la forma de una mancuerna (figura 21.6). En este modelo, el centro de masa de la molécula se traslada en las direcciones x, y y z (figura 21.6a). Además, la molécula puede girar en torno a tres ejes mutuamente perpendiculares (figura 21.6b). La rotación en torno al eje y se puede despreciar, porque el momento de inercia I_y de la molécula y su energía rotacional $\frac{1}{2}I_y\omega^2$ en torno a este eje son despreciables comparadas con las asociadas a los ejes x y z. (Si los dos átomos se modelan como partículas, en tal caso I_y es idénticamente cero.) Por ende, hay cinco grados de libertad para traslación y rotación: tres asociados con el movimiento traslacional y dos asociados con el movimiento rotacional. Ya que cada grado de libertad aporta, en promedio, $\frac{1}{2}k_BT$ de energía por cada molécula, la energía interna para un sistema de N moléculas, ignorando por ahora la vibración, es

$$E_{\text{int}} = 3N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) = \tfrac{5}{2}Nk_BT = \tfrac{5}{2}nRT$$

Se puede usar este resultado y la ecuación 21.13 para encontrar el calor específico molar a volumen constante:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{\text{int}}}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}(\tfrac{5}{2}nRT) = \tfrac{5}{2}R \quad \textbf{(21.21)}$$

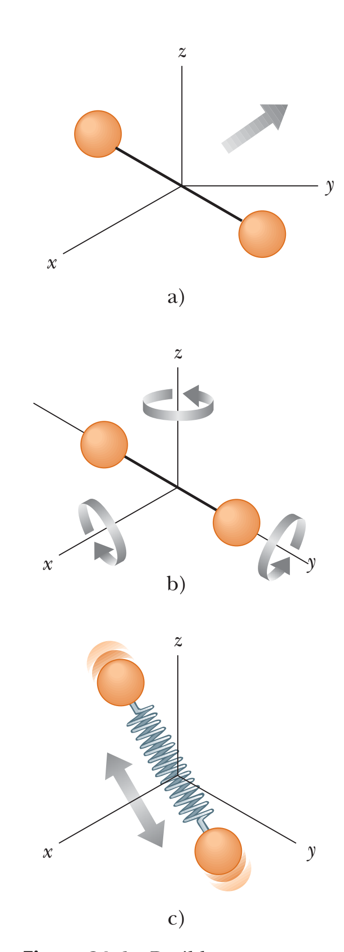


Figura 21.6 Posibles movimientos de una molécula diatómica: a) movimiento traslacional del centro de masa, b) movimiento rotacional en torno a los diferentes ejes y c) movimiento vibratorio a lo largo del eje molecular.

A partir de las ecuaciones 21.16 y 21.17, se encuentra que

$$C_P = C_V + R = \tfrac{7}{2}R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

Estos resultados concuerdan con la mayoría de los datos para moléculas diatómicas mencionadas en la tabla 21.2. Esto es sorprendente porque todavía no se explican las posibles vibraciones de la molécula.

En el modelo para vibración, los dos átomos se reúnen mediante un resorte imaginario (véase la figura 21.6c). El movimiento vibratorio agrega dos grados de libertad más, que corresponden a la energía cinética y a la energía potencial asociada con las vibraciones junto con la longitud de la molécula. Por tanto, un modelo que incluye los tres tipos de movimiento predice una energía interna total de

$$E_{\text{int}} = 3N(\tfrac{1}{2}k_{\text{B}}T) + 2N(\tfrac{1}{2}k_{\text{B}}T) + 2N(\tfrac{1}{2}k_{\text{B}}T) = \tfrac{7}{2}Nk_{\text{B}}T = \tfrac{7}{2}nRT$$

y un calor específico molar a volumen constante de

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{\text{int}}}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}(\tfrac{7}{2}nRT) = \tfrac{7}{2}R \qquad \textbf{(21.22)}$$

Este valor es inconsistente con los datos experimentales para moléculas como H_2 y N_2 (véase la tabla 21.2) y sugiere un fracaso del modelo en términos de la física clásica.

Puede parecer que el modelo es un fracaso para predecir calores específicos molares para gases diatómicos. Sin embargo, se puede afirmar cierto éxito del modelo si se hacen mediciones de calor específico molar sobre un amplio intervalo de temperatura, en lugar de hacerlo en una sola temperatura que dé los valores en la tabla 21.2. La figura 21.7 muestra el calor específico molar del hidrógeno como una función de la temperatura. La característica notable acerca de las tres mesetas en la curva de la gráfica, ¡es que son los valores del calor específico molar predicho por las ecuaciones 21.14, 21.21 y 21.22! Para bajas temperaturas, el gas hidrógeno diatómico se comporta como un gas monoatómico. A medida que la temperatura se eleva a la del ambiente, su calor específico molar se eleva a un valor para un gas diatómico, consistente con la inclusión de la rotación pero no de la vibración. Para temperaturas altas, el calor específico molar es consistente con un modelo que incluye todos los tipos de movimiento.

Antes de explicar la razón para este misterioso comportamiento, se harán algunas breves observaciones acerca de los gases poliatómicos. Para moléculas con más de dos átomos, las vibraciones son más complejas que para moléculas diatómicas y el número de grados de libertad es incluso más grande. El resultado es un calor específico molar mayor al predicho, lo que está en concordancia cualitativa con los experimentos. Los calores específicos molares para los gases poliatómicos en la tabla 21.2 son mayores que aquellos para gases

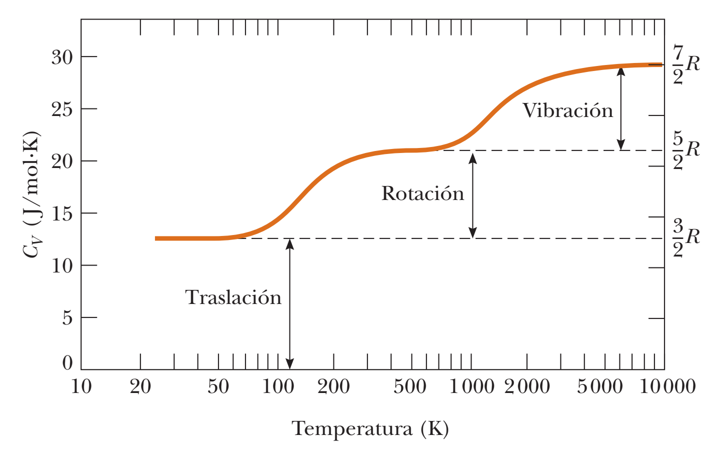


Figura 21.7 Calor específico molar del hidrógeno como función de la temperatura. La escala horizontal es logarítmica. Note que el hidrógeno se licua a 20 K.

diatómicos. Mientras más grados de libertad tenga disponibles una molécula, más "formas" habrá para almacenar energía, lo que resulta en un mayor calor específico molar.

Una sugerencia de la cuantización de la energía

Hasta el momento el modelo para calores específicos molares se basó en nociones meramente clásicas. Predice un valor del calor específico para un gas diatómico que, de acuerdo con la figura 21.7, sólo concuerda con las mediciones experimentales hechas a altas temperaturas. Para explicar el motivo de que este valor sólo es verdadero en altas temperaturas y por qué existen las mesetas en la figura 21.7, se debe ir más allá de la física clásica e introducir algo de física cuántica en el modelo. En el capítulo 18 se analizó la cuantización de la frecuencia para cuerdas en vibración y columnas de aire: sólo pueden existir ciertas frecuencias de ondas estables. Dicho resultado es natural siempre que las ondas estén sujetas a condiciones de frontera.

La física cuántica (capítulos del 40 al 43) demuestra que los átomos y las moléculas se pueden describir mediante la física de ondas bajo condiciones de frontera. En consecuencia, estas ondas tienen frecuencias cuantizadas. Además, en la física cuántica, la energía de un sistema es proporcional a la frecuencia de la onda que representa al sistema. Por tanto, **las energías de átomos y moléculas están cuantizadas**.

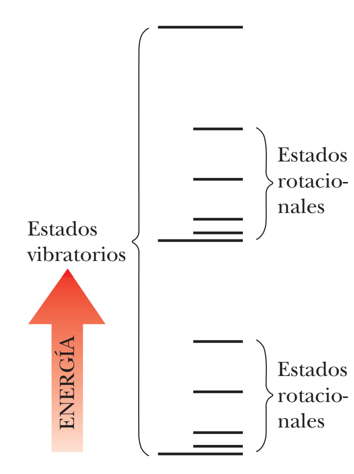


Figura 21.8 Diagrama de niveles de energía para estados vibratorio y rotacional de una molécula diatómica. Note que los estados rotacionales se encuentran más juntos en energía que los estados vibratorios.

Para una molécula, la física cuántica dice que las energías rotacional y vibratoria están cuantizadas. La figura 21.8 muestra un **diagrama de nivel de energía** para los estados cuánticos rotacional y vibratorio de una molécula diatómica. El estado más bajo permitido se llama **estado de mínima energía**. Note que los estados vibratorios están separados por extensos vacíos energéticos que son estados rotacionales.

A bajas temperaturas, la energía que gana una molécula en colisiones contra sus vecinas por lo general no es lo suficientemente grande como para elevarla al primer estado excitado o de rotación o de vibración. Por lo tanto, aun cuando, de acuerdo con la física clásica, se permitan rotación y vibración, en realidad no se presentan a bajas temperaturas. Todas las moléculas están en el estado fundamental para rotación y vibración. La única aportación a la energía promedio de las moléculas es de traslación, y el calor específico es el predicho por la ecuación 21.14.

A medida que la temperatura se eleva, la energía promedio de las moléculas aumenta. En algunas colisiones, una molécula puede tener suficiente energía transferida desde otra molécula para excitar el primer estado rotacional. Conforme la temperatura se eleva aún más, más moléculas se pueden excitar a este estado. El resultado es que la rotación comienza a contribuir a la energía interna y el calor específico molar se eleva. Cerca de la temperatura ambiente en la figura 21.7, se alcanza la segunda meseta y la rotación contribuye completamente al calor específico molar. El calor específico molar ahora es igual al valor predicho por la ecuación 21.21.

A temperatura ambiente no hay contribución de la vibración, porque las moléculas todavía están en el estado vibratorio fundamental. La temperatura se debe elevar aún más para excitar el primer estado vibratorio, lo que sucede en la figura 21.7 entre 1 000 K y 10 000 K. A 10 000 K en el lado derecho de la figura, la vibración contribuye por completo a la energía interna y el calor específico molar tiene el valor predicho por la ecuación 21.22.

Las predicciones de este modelo son sustento del teorema de equipartición de la energía. Además, la inclusión del modelo de la cuantización de energía de la física cuántica permite una total comprensión de la figura 21.7.

Pregunta rápida 21.3 El calor específico molar de un gas diatómico se observa a volumen constante y se encuentra que es de 29.1 J/mol · K. ¿Cuáles son los tipos de energía que contribuyen al calor específico molar? a) Sólo traslación, b) sólo traslación y rotación, c) sólo traslación y vibración, d) traslación, rotación y vibración.

Pregunta rápida 21.4 El calor específico molar de un gas se observa a volumen constante y se encuentra que es de $11R/2$. Es más probable que el gas sea, ¿a) monoatómico, b) diatómico o c) poliatómico?

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.2
La función de distribución

La función de distribución $n_V(E)$ se define en términos del número de moléculas con energía en el intervalo E a $E + dE$ antes que en términos del número de moléculas con energía E. Ya que el número de moléculas es finito y el número de posibles valores de la energía es infinito, el número de moléculas con una energía *exacta* E puede ser cero.

21.5 Distribución de magnitudes de velocidad moleculares

Hasta el momento sólo se han considerado valores promedio de las energías de moléculas en un gas y no se ha abordado la distribución de energías entre moléculas. En realidad, el movimiento de las moléculas es extremadamente caótico. Cualquier molécula individual choca contra otras a una rapidez enorme, por lo general cien mil millones de veces por cada segundo. Cada colisión resulta en un cambio en la rapidez y dirección de movimiento de cada una de las moléculas participantes. La ecuación 21.7 muestra que las magnitudes de velocidad moleculares rms aumentan conforme se incrementa la temperatura. ¿Cuál es el número relativo de moléculas que tienen alguna característica como energía dentro de cierto intervalo?

Esta cuestión se abordará al considerar la **densidad de número** $n_V(E)$. Esta cantidad, llamada *función de distribución*, se define de modo que $n_V(E)\ dE$ es el número de moléculas por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$. (La proporción del número de moléculas que tiene la característica deseada al número total de moléculas es la probabilidad de que una molécula particular tenga dicha característica.) En general, a partir de la mecánica estadística se encuentra que la densidad de número es

Ley de distribución de Boltzmann ▶

$$n_V(E) = n_0 e^{-E/k_B T} \tag{21.23}$$

donde n_0 se define tal que $n_0\ dE$ es el número de moléculas por unidad de volumen que tiene energía entre $E = 0$ y $E = dE$. Esta ecuación, conocida como **ley de distribución de Boltzmann**, es importante para describir la mecánica estadística de un gran número de moléculas. Dicha ley afirma que **la probabilidad de encontrar las moléculas en un estado energético particular varía exponencialmente como el negativo de la energía dividida entre $k_B T$**. Todas las moléculas caerán en el nivel energético más bajo si la agitación térmica a una temperatura T no excita las moléculas a niveles energéticos superiores.

EJEMPLO 21.4 **Excitación térmica de niveles energéticos atómicos**

Como se explicó en la sección 21.4, los átomos pueden ocupar sólo ciertos niveles energéticos discretos. Considere un gas a una temperatura de 2 500 K cuyos átomos puedan ocupar sólo dos niveles energéticos separados por 1.50 eV, donde 1 eV (electrónvolt) es una unidad de energía igual a 1.60×10^{-19} J (figura 21.9). Determine la relación del número de átomos en el nivel energético superior al número en comparación con el nivel energético inferior.

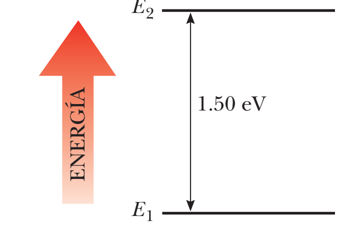


Figura 21.9 (Ejemplo 21.4) Diagrama de niveles de energía para un gas cuyos átomos pueden ocupar dos estados de energía.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En su representación mental de este ejemplo, recuerde que sólo dos posibles estados se permiten para el sistema del átomo. La figura 21.9 le ayuda a visualizar los dos estados en un diagrama de niveles de energía. En este caso, el átomo tiene dos posibles energías, E_1 y E_2, donde $E_1 < E_2$.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como uno en el que se aplica la ley de distribución de Boltzmann a un sistema cuantizado.

Analizar Establezca la proporción del número de átomos en el nivel energético superior en relación con el número en el nivel energético inferior y aplique la ecuación 21.23 para expresar cada número:

$$1)\quad \frac{n_V(E_2)}{n_V(E_1)} = \frac{n_0 e^{-E_2/k_B T}}{n_0 e^{-E_1/k_B T}} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T}$$

Evalúe $k_B T$ en el exponente:

$$k_B T = (1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(2\ 500\ \text{K})\left(\frac{1\ \text{eV}}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{J}}\right) = 0.216\ \text{eV}$$

Sustituya este valor en la ecuación 1):

$$\frac{n_V(E_2)}{n_V(E_1)} = e^{-1.50\ \text{eV}/0.216\ \text{eV}} = e^{-6.96} = \boxed{9.52 \times 10^{-4}}$$

Finalizar Este resultado indica que en $T = 2\,500$ K, sólo una pequeña fracción de los átomos están en el nivel energético superior. De hecho, por cada átomo en el nivel energético superior, hay aproximadamente 1 000 átomos en el nivel inferior. El número de átomos en el nivel superior aumenta incluso a temperaturas más altas, pero la ley de distribución especifica que en equilibrio siempre hay más átomos en el nivel inferior que en el nivel superior.

¿Qué pasaría si? ¿Y si los niveles de energía en la figura 21.9 estuvieran más juntos en energía? ¿La fracción de los átomos en el nivel energético superior aumentaría o disminuiría?

Respuesta Si el nivel excitado es menor en energía que en la figura 21.9, sería más fácil que la agitación térmica excitara átomos a este nivel y la fracción de átomos en este nivel energético sería mayor. Vea esto matemáticamente al expresar la ecuación (1) como

$$r_2 = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T}$$

donde r_2 es la relación de átomos que tienen energía E_2 en relación con los que tienen energía E_1. Al derivar respecto de E_2, se encuentra

$$\frac{dr_2}{dE_2} = \frac{d}{dE_2}\left(e^{-(E_2 - E_1)/k_B T}\right) = -\frac{E_2}{k_B T}\, e^{-(E_2 - E_1)/k_B T} < 0$$

Ya que la derivada tiene un valor negativo, a medida que E_2 disminuye, r_2 aumenta.

Ahora que se explicó la distribución de energías, piense acerca de la distribución de magnitudes de velocidad moleculares. En 1860, James Clerk Maxwell (1831–1879) obtuvo una expresión que describe la distribución de magnitudes de velocidad moleculares en una forma muy definida. Su obra, y desarrollos posteriores de otros científicos, generaron una gran controversia porque en esa época no se podía lograr experimentalmente la detección directa de moléculas. Sin embargo, alrededor de 60 años después, se diseñaron experimentos que confirmaron las predicciones de Maxwell.

Considere un contenedor de gas cuyas moléculas tienen alguna distribución de magnitudes de velocidad. Suponga que se busca determinar cuántas moléculas de gas tienen una rapidez en el intervalo de, por ejemplo, 400 a 401 m/s. La intuición dicta que la distribución de rapidez dependa de la temperatura. Además, se espera que la distribución tenga un máximo en la vecindad de v_{rms}. Esto es, se espera que pocas moléculas tengan rapideces mucho menores o mayores que v_{rms} porque dichas magnitudes de velocidad extremas sólo resultan de una improbable cadena de colisiones.

La distribución de rapidez observada en las moléculas de gas en equilibrio térmico se muestra en la figura 21.10 (página 602). La cantidad N_v, llamada **función de distribución de rapidez de Maxwell–Boltzmann**, se define del modo siguiente. Si N es el número total de moléculas, el número de moléculas con magnitudes de velocidad entre v y $v + dv$ es $dN = N_v\, dv$. Este número también es igual al área del rectángulo coloreado en la figura 21.10. Además, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad entre v y $v + dv$ es $(N_v\, dv)/N$. Esta fracción también es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez en el intervalo de v a $v + dv$.

La expresión fundamental que describe la distribución de magnitudes de velocidad de N moléculas de gas es

$$N_v = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/2k_B T} \qquad \textbf{(21.24)}$$

donde m_0 es la masa de una molécula de gas, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.[3] Observe la apariencia del factor Boltzmann $e^{-E/k_B T}$ con $E = \frac{1}{2}m_0 v^2$.

Cortesía de AIP Niels Bohr Library, Lande

LUDWIG BOLTZMANN
Físico austriaco (1844–1906)
Boltzmann hizo muchas aportaciones importantes al desarrollo de la teoría cinética de los gases, electromagnetismo y termodinámica. Su obra pionera en el campo de la teoría cinética condujo a la rama de la física conocida como mecánica estadística.

[3] Para la deducción de esta expresión, vea un texto avanzado acerca de termodinámica.

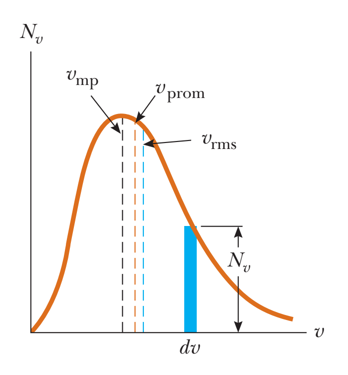


Figura 21.10 Distribución de rapidez de moléculas de gas a cierta temperatura. El número de moléculas que tienen magnitudes de velocidad en el intervalo de v a $v + dv$ es igual al área del rectángulo coloreado, $N_v\,dv$. La función N_v tiende a cero a medida que v tiende a infinito.

Como se indica en la figura 21.10, la rapidez promedio es en cierto modo menor que la rapidez rms. La *rapidez más probable* v_{mp} es la rapidez a la que llega a un máximo la curva de distribución. Con la ecuación 21.24, se encuentra que

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}} = 1.73\sqrt{\frac{k_BT}{m_0}} \quad \textbf{(21.25)}$$

$$v_{prom} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m_0}} = 1.60\sqrt{\frac{k_BT}{m_0}} \quad \textbf{(21.26)}$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m_0}} = 1.41\sqrt{\frac{k_BT}{m_0}} \quad \textbf{(21.27)}$$

La ecuación 21.25 apareció anteriormente como ecuación 21.7. Los detalles de las deducciones de estas ecuaciones a partir de la ecuación 21.24 se dejan al estudiante (consulte los problemas 33 y 57). A partir de estas ecuaciones, se ve que

$$v_{rms} > v_{prom} > v_{mp}$$

La figura 21.11 representa curvas de distribución de rapidez para nitrógeno, N_2. Las curvas se obtuvieron al aplicar la ecuación 21.24 para evaluar la función de distribución en varias magnitudes de velocidad y en dos temperaturas. Note que el máximo en cada curva se desplaza a la derecha a medida que T aumenta, lo que indica que la rapidez promedio aumenta con el aumento de temperatura, como se esperaba. Ya que la rapidez posible más baja es cero, y el límite clásico superior de la rapidez es infinito, las curvas son asimétricas. (En el capítulo 39 se demostrará que el límite superior real es la rapidez de la luz.)

La ecuación 21.24 muestra que la distribución de magnitudes de velocidad moleculares en un gas depende tanto de la masa como de la temperatura. A cierta temperatura, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad que superan un valor fijo aumenta a medida que la masa disminuye. Por lo tanto, las moléculas más ligeras, como H_2 y He, escapan más fácilmente de la atmósfera de la Tierra que las moléculas más pesadas como N_2 y O_2. (Véase el análisis de rapidez de escape en el capítulo 13. Las moléculas de gas escapan incluso más fácilmente de la superficie de la Luna que de la Tierra, porque la rapidez de escape en la Luna es menor que en la Tierra.)

Las curvas de distribución de rapidez para moléculas en un líquido son similares a las que se muestran en la figura 21.11. El fenómeno de la evaporación de un líquido se puede entender a partir de esta distribución en magnitudes de velocidad, dado que algunas moléculas en el líquido son más energéticas que otras. Algunas de las moléculas más rápidas en el líquido penetran la superficie e incluso dejan el líquido a temperaturas muy por abajo del punto de ebullición. Las moléculas que escapan del líquido por evaporación son las

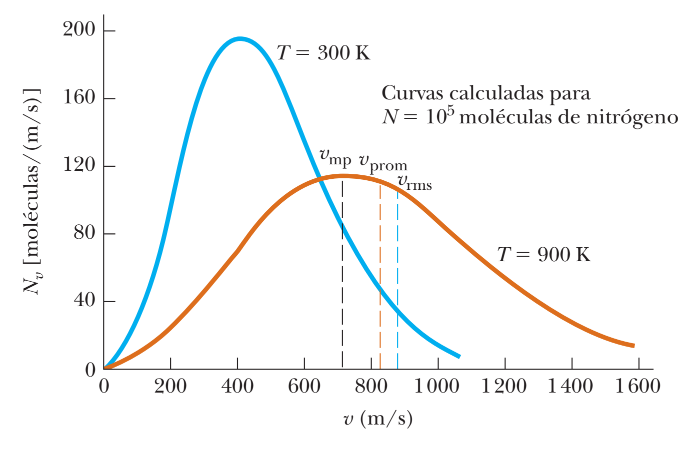


Figura 21.11 Función de distribución de rapidez para 10^5 moléculas de nitrógeno a 300 K y 900 K. El área total bajo cualquier curva es igual al número total de moléculas, que en este caso es igual a 10^5. Note que $v_{rms} > v_{prom} > v_{mp}$.

que tienen suficiente energía para superar las fuerzas atractivas de las moléculas en la fase líquida. En consecuencia, las moléculas que quedan en la fase líquida tienen una energía cinética promedio más baja; como resultado, la temperatura del líquido disminuye. Por tanto, la evaporación es un proceso de enfriamiento. Por ejemplo, puede colocar una tela mojada en alcohol en la cabeza de un paciente con fiebre para enfriarlo y reconfortarlo.

EJEMPLO 21.5 Un sistema de nueve partículas

Nueve partículas tienen magnitudes de velocidad de 5.00, 8.00, 12.0, 12.0, 12.0, 14.0, 14.0, 17.0 y 20.0 m/s.

A) Encuentre la rapidez promedio de las partículas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un pequeño número de partículas móviles en direcciones aleatorias con las magnitudes de velocidad mencionadas.

Categorizar Ya que se trata con un pequeño número de partículas, se puede calcular directamente la rapidez promedio.

Analizar Encuentre la rapidez promedio de las partículas al dividir la suma de las magnitudes de velocidad entre el número total de partículas:

$$v_{\text{prom}} = \frac{(5.00 + 8.00 + 12.0 + 12.0 + 12.0 + 14.0 + 14.0 + 17.0 + 20.0) \text{ m/s}}{9}$$

$$= \boxed{12.7 \text{ m/s}}$$

B) ¿Cuál es la rapidez rms de las partículas?

SOLUCIÓN

Encuentre la rapidez cuadrática media de las partículas al dividir la suma de las magnitudes de velocidad al cuadrado entre el número total de partículas:

$$\overline{v^2} = \frac{(5.00^2 + 8.00^2 + 12.0^2 + 12.0^2 + 12.0^2 + 14.0^2 + 14.0^2 + 17.0^2 + 20.0^2) \text{ m}^2/\text{s}^2}{9}$$

$$= 178 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Encuentre la rapidez rms de las partículas al sacar la raíz cuadrada:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{178 \text{ m}^2/\text{s}^2} = \boxed{13.3 \text{ m/s}}$$

C) ¿Cuál es la rapidez más probable de las partículas?

SOLUCIÓN

Tres de las partículas tienen una rapidez de 12.0 m/s, dos tienen una rapidez de 14.0 m/s y las cuatro restantes tienen diferentes magnitudes de velocidad. Por tanto, la rapidez más probable v_{mp} es 12.0 m/s.

Finalizar Compare este ejemplo, que tiene un número de partículas pequeño y del que se conocen las magnitudes de velocidad de las partículas individuales, con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 21.6 Magnitudes de velocidad moleculares en gas hidrógeno

Una muestra de 0.500 moles de gas hidrógeno está a 300 K.

A) Encuentre la rapidez promedio, la rapidez rms y la rapidez más probable de las moléculas de hidrógeno.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un gran número de partículas en un gas real, todas moviéndose en direcciones aleatorias con magnitudes de velocidad diferentes.

Categorizar No es posible calcular los promedios como se hizo en el ejemplo 21.5, porque las magnitudes de velocidad individuales de las partículas son desconocidas. Sin embargo, se trata con un número muy grande de partículas, así que se puede aplicar la función de distribución de rapidez de Maxwell–Boltzmann.

Analizar Aplique la ecuación 21.26 para encontrar la rapidez promedio:

$$v_{\text{prom}} = 1.60\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.60\sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}}$$
$$= 1.78 \times 10^3\ \text{m/s}$$

Use la ecuación 21.25 para encontrar la rapidez rms:

$$v_{\text{rms}} = 1.73\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.73\sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}}$$
$$= 1.93 \times 10^3\ \text{m/s}$$

Utilice la ecuación 21.27 para encontrar la rapidez más probable:

$$v_{\text{mp}} = 1.41\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.41\sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}}$$
$$= 1.57 \times 10^3\ \text{m/s}$$

B) Hallar el número de moléculas con magnitudes de velocidad entre 400 m/s y 401 m/s.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 21.24 para evaluar el número de moléculas en un intervalo estrecho de magnitudes de velocidad, entre v y $v + dv$:

$$1)\quad N_v\, dv = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/2k_B T}\, dv$$

Evalúe la constante enfrente de v^2:

$$4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} = 4\pi n N_A \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$
$$= 4\pi(0.500\ \text{mol})(6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})\left[\frac{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{2\pi(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}\right]^{3/2}$$
$$= 1.74 \times 10^{14}\ \text{s}^3/\text{m}^3$$

Evalúe el exponente de e:

$$-\frac{m_0 v^2}{2k_B T} = -\frac{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2}{2(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})} = -0.064\,5$$

Evalúe $N_v\, dv$ mediante la ecuación 1):

$$N_v\, dv = (1.74 \times 10^{14}\ \text{s}^3/\text{m}^3)(400\ \text{m/s})^2 e^{-0.064\,5}(1\ \text{m/s})$$
$$= 2.61 \times 10^{19}\ \text{moléculas}$$

Finalizar En esta evaluación, el resultado se podía calcular sin integración porque $dv = 1$ m/s es mucho menor que $v = 400$ m/s. De haber buscado el número de partículas por decir, entre 400 m/s y 500 m/s, se habría necesitado integrar la ecuación 1) entre estos límites de rapidez.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La presión de N moléculas de un gas ideal contenido en un volumen V es

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right) \quad \textbf{(21.2)}$$

La energía cinética traslacional promedio por cada molécula de un gas, $\frac{1}{2}m_0\overline{v^2}$, se relaciona con la temperatura T del gas a través de la expresión

$$\frac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT \quad \textbf{(21.4)}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Cada grado de libertad de traslación (x, y o z) tiene $\frac{1}{2}k_BT$ de energía asociada con él.

La energía interna de N moléculas (o n moles) de un gas monoatómico ideal es

$$E_{int} = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}nRT \quad \textbf{(21.10)}$$

El cambio en energía interna para n moles de algún gas ideal que se somete a un cambio ΔT en temperatura es

$$\Delta E_{int} = nC_V\,\Delta T \quad \textbf{(21.12)}$$

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante.**

El calor específico molar de un gas monoatómico ideal a volumen constante es $C_V = \frac{3}{2}R$; el calor específico molar a presión constante es $C_P = \frac{5}{2}R$. La relación de calores específicos se conoce por $\gamma = C_P/C_V = \frac{5}{3}$.

Si un gas ideal se somete a una expansión o compresión adiabáticos, la primera ley de la termodinámica, junto con la ecuación de estado, muestra que

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \quad \textbf{(21.18)}$$

La **ley de distribución de Boltzmann** describe la distribución de partículas entre estados de energía disponibles. El número relativo de partículas que tienen energía entre E y $E + dE$ es $n_V(E)\ dE$, donde

$$n_V(E) = n_0e^{-E/k_BT} \quad \textbf{(21.23)}$$

La **función de distribución de rapidez de Maxwell–Boltzmann** describe la distribución de magnitudes de velocidad de las moléculas en un gas:

$$N_v = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}v^2e^{-m_0v^2/2k_BT} \quad \textbf{(21.24)}$$

La ecuación 21.24 permite el cálculo de la **rapidez media cuadrática** (rms), la **rapidez promedio** y la **rapidez más probable** de las moléculas en un gas:

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}} = 1.73\sqrt{\frac{k_BT}{m_0}} \quad \textbf{(21.25)}$$

$$v_{prom} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m_0}} = 1.60\sqrt{\frac{k_BT}{m_0}} \quad \textbf{(21.26)}$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m_0}} = 1.41\sqrt{\frac{k_BT}{m_0}} \quad \textbf{(21.27)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. La ley de Dalton para las presiones parciales establece que la presión total de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones que cada gas en la mezcla ejercería si estuviera solo en el contenedor. Proporcione un argumento convincente para esta ley, de acuerdo con la teoría cinética de los gases.
2. Un recipiente lleno con gas helio y otro con gas argón. Ambos están a la misma temperatura. ¿Cuáles moléculas tienen la mayor rapidez rms? Explique.
3. Cuando se frota alcohol en el cuerpo, baja la temperatura de su piel. Explique este efecto.
4. **O** A un estudiante se le pide explicar paso a paso qué hace que aumente la temperatura de una muestra de gas. Su respuesta: cuando una muestra de gas se mantiene sobre una placa caliente, a) las moléculas aumentan su rapidez. b) Después las moléculas chocan unas contra otras con más frecuencia. c) La fricción interna hace que las colisiones sean inelásticas. d) Se produce calor en las colisiones. e) Tan pronto como se pone un termómetro, se ve que la temperatura subió. f) El mismo proceso puede tener lugar sin el uso de una placa caliente si se empuja rápidamente un pistón en un cilindro aislado que contenga al gas. **i)** ¿De entre las opciones a) a la f) de esta descripción, son enunciados correctos necesarios para una explicación clara y completa? **ii)** ¿Cuáles son enunciados correctos que no son necesarios para explicar la mayor lectura en el termómetro? **iii)** ¿Cuáles son incorrectos?

5. **O** Un globo lleno con helio inicialmente a temperatura ambiente se coloca en un congelador. El caucho permanece flexible. **i)** ¿Su volumen a) aumenta, b) disminuye o c) permanece igual? **ii)** ¿Su presión a) aumenta, b) disminuye o c) permanece igual?
6. **O** Un gas a 200 K. Si se quiere duplicar la rapidez rms de las moléculas del gas, ¿a cuánto se debe aumentar su temperatura? a) 283 K, b) 400 K, c) 566 K, d) 800 K, e) 1 130 K.
7. **O** Clasifique de mayor a menor y anote cualquier caso de igualdad. a) La rapidez promedio de las moléculas en una muestra particular de gas ideal. b) La rapidez más probable. c) La rapidez media cuadrática. d) El vector velocidad promedio de las moléculas. e) La rapidez del sonido en el gas.
8. **O** Dos muestras del mismo gas ideal tienen la misma presión y densidad. La muestra B tiene el doble de volumen que la muestra A. ¿Cuál es la rapidez rms de las moléculas en la muestra B? a) El doble que en la muestra A, b) igual a la muestra A, c) la mitad de la muestra A, d) imposible de determinar.
9. ¿Cuál es más denso, el aire seco o el aire saturado con vapor de agua? Explique.
10. ¿Qué sucede con un globo lleno con helio liberado en el aire? ¿Se expande o se contrae? ¿Deja de elevarse en alguna altura?
11. ¿Por qué un gas diatómico tiene un mayor contenido energético por cada mol que un gas monoatómico a la misma temperatura?
12. **O** Considere un gas ideal contenido en un recipiente a 300 K. Si la temperatura aumenta a 900 K, ¿cuál es el factor de cambio en **i)** la energía cinética promedio de las moléculas? a) 9, b) 3, c) $\sqrt{3}$, d) 1, e) $\frac{1}{3}$. **ii)** ¿Cuál es el factor de cambio en la rapidez molecular rms? Escoja entre las mismas posibilidades. **iii)** ¿Cuál es el factor de cambio en el cambio de cantidad de movimiento promedio que una molécula se somete en una colisión contra una pared particular? **iv)** ¿Cuál es el factor de cambio en la rapidez de colisiones contra las paredes de las moléculas? **v)** ¿Cuál es el factor de cambio en la presión del gas? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la e).
13. Si el aire caliente sube, ¿de esta manera por qué generalmente es más frío a medida que escala una montaña? *Nota:* El aire tiene una conductividad térmica baja.
14. O La curva café en la figura 21.11 muestra la distribución de rapidez para 100 000 moléculas de nitrógeno a 900 K. El criptón tiene casi tres veces la masa molecular del nitrógeno. La curva azul, sin importar su etiqueta, muestra la distribución de rapidez para a) 100 000 moléculas de criptón a 900 K, b) 100 000 moléculas de criptón a 520 K, c) 100 000 moléculas de criptón a 300 K, d) 100 000 moléculas de criptón a 100 K, e) 33 000 moléculas de criptón a 900 K, f) 33 000 moléculas de criptón a 300 K, g) Esta distribución no se puede atribuir a cualquier muestra de criptón, que no existe en la Tierra.

Problemas

Sección 21.1 Modelo molecular de un gas ideal

Nota: El problema 25 del capítulo 19 se puede asignar con esta sección.

1. Calcule la masa de un átomo de a) helio, b) hierro y c) plomo. Proporcione sus respuestas en gramos. Las masas atómicas de estos átomos son 4.00 u, 55.9 u y 207 u, respectivamente.
2. ● La m se usa para representar la masa de una muestra, m_0 para representar la masa de una molécula, M para la masa molar, n para el número de moles en una muestra, N para el número de moléculas y N_A para representar el número de Avogadro. Explique por qué cada una de las siguientes ecuaciones es verdadera:

$$N = nN_A, \quad m = nM = Nm_0, \quad M = m_0 N_A,$$

¿Las ecuaciones sólo son verdaderas para gases ideales? ¿Sólo para gases? ¿Sólo para elementos químicos puros? ¿Sólo para compuestos químicos puros? ¿Para mezclas?

3. En un intervalo de 30.0 s, 500 granizos golpean una ventana de vidrio de 0.600 m^2 de área a un ángulo de 45.0° con la superficie de la ventana. Cada granizo tiene una masa de 5.00 g y una rapidez de 8.00 m/s. Si supone que las colisiones son elásticas, encuentre la fuerza y presión promedio sobre la ventana.
4. En un periodo de 1.00 s, 5.00×10^{23} moléculas de nitrógeno golpean una pared con un área de 8.00 cm^2. Suponga que las moléculas se mueven con una rapidez de 300 m/s y golpean la pared frontal en colisiones elásticas. ¿Cuál es la presión ejercida sobre la pared? (La masa de una molécula de N_2 es 4.68×10^{-26} kg.)
5. En un sistema de ultra alto vacío, la presión es de 1.00×10^{-10} torr (donde 1 torr = 133 Pa). Si supone que la temperatura es de 300 K, encuentre el número de moléculas en un volumen de 1.00 m^3.
6. Una muestra de 2.00 moles de gas oxígeno se confinan en un recipiente de 5.00 L a una presión de 8.00 atm. Encuentre la energía cinética traslacional promedio de una molécula de oxígeno bajo estas condiciones.
7. Un globo esférico de 4 000 cm^3 de volumen contiene helio a una presión (interior) de 1.20×10^5 Pa. ¿Cuántas moles de helio hay en el globo si la energía cinética promedio de cada átomo de helio es de 3.60×10^{-22} J?
8. Un recipiente de 5.00 L contiene gas nitrógeno a 27.0°C y 3.00 atm. a) Encuentre la energía cinética traslacional total de las moléculas de gas y b) la energía cinética promedio por molécula.
9. a) ¿Cuántos átomos de gas helio llenan un globo de 30.0 cm de diámetro a 20.0°C y 1.00 atm? b) ¿Cuál es la energía cinética promedio de los átomos de helio? c) ¿Cuál es la rapidez media cuadrática de los átomos de helio?
10. a) Demuestre que 1 Pa = 1 J/m^3. b) Demuestre que la densidad en el espacio de la energía cinética traslacional de un gas ideal (la energía por volumen) es $3P/2$.
11. Un cilindro contiene una mezcla de gases helio y argón en equilibrio a 150°C. a) ¿Cuál es la energía cinética promedio para cada tipo de molécula de gas? b) ¿Cuál es la rapidez media cuadrática de cada tipo de molécula?

Sección 21.2 Calor específico molar de un gas ideal

Nota: Puede usar los datos de la tabla 21.2 acerca de gases particulares. Aquí se define un "gas monoatómico ideal" como aquel que tiene calores específicos molares $C_V = 3R/2$ y $C_P = 5R/2$, y un "gas diatómico ideal" tiene $C_V = 5R/2$ y $C_P = 7R/2$.

12. En un proceso a volumen constante se transfieren 209 J de energía por calor a 1.00 mol de un gas monoatómico ideal inicialmente a 300 K. Encuentre a) el aumento en energía interna del gas, b) el trabajo consumido en él y c) su temperatura final.

13. Una muestra de 1.00 mol de gas hidrógeno se calienta a presión constante de 300 K a 420 K. Calcule a) la energía transferida al gas por calor, b) el aumento en su energía interna y c) el trabajo consumido en el gas.

14. Una casa de paredes bien aisladas contiene un volumen de 100 m^3 de aire a 300 K. a) Calcule la energía requerida para aumentar la temperatura de este gas diatómico ideal en 1.00°C. b) **¿Qué pasaría si?** Si esta energía se pudiera usar para levantar un objeto de masa m a una altura de 2.00 m, ¿cuál es el valor de m?

15. Una botella aislada de 1 L está llena con té a 90°C. Vierte en una taza y de inmediato cierra la botella. Haga una estimación de un orden de magnitud del cambio en temperatura del té que queda en la botella que resulta de la admisión de aire a temperatura ambiente. Establezca las cantidades que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

16. Un cilindro vertical con un pesado pistón contiene aire a 300 K. La presión inicial es 200 kPa y el volumen inicial es 0.350 m^3. Considere que la masa molar del aire es de 28.9 g/mol y suponga que $C_V = 5R/2$. a) Encuentre el calor específico del aire a volumen constante en unidades de J/kg · °C. b) Calcule la masa del aire en el cilindro. c) Suponga que el pistón se mantiene fijo. Encuentre la entrada de energía que se requiere para elevar la temperatura del aire a 700 K. d) **¿Qué pasaría si?** Suponga de nuevo las condiciones del estado inicial y que el pesado pistón tiene libertad de movimiento. Encuentre la entrada de energía requerida para elevar la temperatura a 700 K.

17. Una muestra de 1.00 mol de gas diatómico ideal tiene presión P y volumen V. Cuando el gas se calienta, su presión se triplica y su volumen se duplica. Este proceso de calentamiento incluye dos etapas, el primero a presión constante y el segundo a volumen constante. Determine la cantidad de energía transferida al gas por calor.

Sección 21.3 Procesos adiabáticos para un gas ideal

18. Durante la carrera de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1.00 atm a 20.0 atm. Si el proceso es adiabático y la mezcla combustible–aire se comporta como un gas diatómico ideal, a) ¿en qué factor cambia el volumen y b) en qué factor cambia la temperatura? c) Si supone que la compresión comienza con 0.016 0 moles de gas a 27.0°C, encuentre los valores de Q, W y ΔE_{int} que caracterizan el proceso.

19. Una muestra de 2.00 moles de gas diatómico ideal se expanden lenta y adiabáticamente desde una presión de 5.00 atm y un volumen de 12.0 L hasta un volumen final de 30.0 L. a) ¿Cuál es la presión final del gas? b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final? c) Encuentre Q, W y ΔE_{int}.

20. Considere aire (un gas ideal diatómico) a 27.0°C y presión atmosférica que entra a una bomba de bicicleta que tiene un cilindro con diámetro interno de 2.50 cm y 50.0 cm de longitud. La carrera hacia abajo comprime adiabáticamente el aire, que alcanza una presión manométrica de 800 kPa antes de entrar a la llanta (figura P21.20). Determine a) el volumen del aire comprimido y b) la temperatura del aire comprimido. c) **¿Qué pasaría si?** La bomba está fabricada de acero y tiene una pared interior de 2.00 mm de grueso. Suponga que a 4.00 cm de la longitud del cilindro se le permite llegar a equilibrio térmico con el aire. ¿Cuál será el aumento en la temperatura de la pared?



Figura P21.20

21. El aire en una nube de tormenta se expande a medida que se eleva. Si su temperatura inicial es 300 K y no se pierde energía por conducción térmica en la expansión, ¿cuál es su temperatura cuando el volumen inicial se duplica?

22. Durante la carrera de trabajo en un motor de cuatro tiempos, el pistón se forza hacia abajo a medida que la mezcla de productos de combustión y aire se somete a una expansión adiabática. Suponga 1) que el motor gira a 2 500 ciclos/min; 2) la presión manométrica justo antes de la expansión es 20.0 atm; 3) los volúmenes de la mezcla justo antes y después de la expansión son 50.0 y 400 cm^3, respectivamente (figura P21.22); 4) el intervalo de tiempo para la expansión es un cuarto del ciclo total; y 5) la mezcla se comporta como un gas ideal con relación de calor específico de 1.40. Encuentre la potencia promedio generada durante la carrera de expansión.

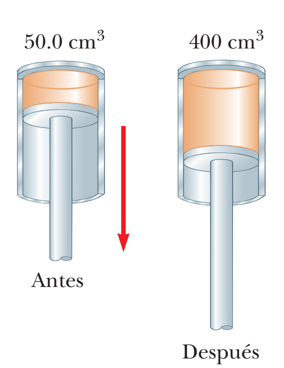


Figura P21.22

23. Una muestra de 4.00 L de gas ideal diatómico, confinado en un cilindro, tiene una relación de calor específico de 1.40 y se lleva a través de un ciclo cerrado. Al inicio el gas está a 1.00 atm y a 300 K. Primero su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente a su presión original. Por último, el gas se comprime isobáricamente a su volumen original. a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. b) Determine el volumen del gas al final de la expansión adiabática. c) Encuentre la temperatura del gas al comienzo de la expansión adiabática. d) Encuentre la temperatura al final del ciclo. e) ¿Cuál fue el trabajo neto consumido en el gas para este ciclo?

24. Un gas ideal diatómico ($\gamma = 1.40$), confinado a un cilindro, se lleva a través de un ciclo cerrado. Al inicio está a P_i, V_i y T_i. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente a su presión original y al final se comprime isobáricamente a su volumen original. a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. b) Determine el volumen al final de la expansión adiabática. Encuentre c) la temperatura del gas al inicio de la expansión adiabática y d) la temperatura al final del ciclo. e) ¿Cuál fue el trabajo neto consumido en el gas para este ciclo?

25. ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir 5.00 moles de aire a 20.0°C y 1.00 atm a un décimo del volumen original a) mediante un proceso isotérmico? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto trabajo se requiere para producir la misma compresión en un proceso adiabático? c) ¿Cuál es la presión final en cada uno de estos dos casos?

Sección 21.4 Equipartición de la energía

26. Cierta molécula tiene f grados de libertad. Demuestre que un gas ideal que consiste de tales moléculas tiene las siguientes propiedades: 1) su energía interna total es $fnRT/2$, 2) su calor específico molar a volumen constante es $fR/2$, 3) su calor específico molar a presión constante es $(f + 2)R/2$, y 4) su relación de calor específico es $\gamma = C_P/C_V = (f + 2)/f$.

27. Considere 2.00 moles de un gas ideal diatómico. a) Encuentre la capacidad térmica total como la define la ecuación 20.2 a volumen constante y la capacidad térmica total a presión constante, si supone que las moléculas giran pero no vibran. b) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso a), si supone que las moléculas giran y vibran.

28. En un modelo imperfecto (figura P21.28) de una molécula diatómica de cloro (Cl_2) en rotación, los dos átomos de Cl están separados 2.00×10^{-10} m y giran en torno a su centro de masa con rapidez angular $\omega = 2.00 \times 10^{12}$ rad/s. ¿Cuál es la energía cinética rotacional de una molécula de Cl_2, que tiene una masa molar de 70.0 g/mol?

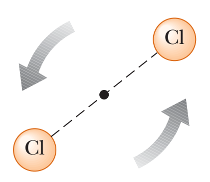


Figura P21.28

29. ● Examine la información para gases poliatómicos en la tabla 21.2 y dé una explicación por la que el dióxido de azufre tiene un mayor calor específico a volumen constante que los otros gases poliatómicos a 300 K.

30. ● Una molécula triatómica puede tener los tres átomos a lo largo de una línea, como el CO_2, o puede ser no lineal, como H_2O. Suponga que la temperatura de un gas de moléculas triatómicas es suficientemente baja como para que el movimiento vibratorio sea despreciable. ¿Cuál es la capacidad térmica molar a volumen constante, expresada como múltiplo de la constante universal de los gases, a) si las moléculas son lineales y b) si las moléculas no son lineales? En altas temperaturas, una molécula triatómica tiene dos modos de vibración, y cada uno aporta $\frac{1}{2}R$ a la capacidad térmica molar para su energía cinética y otro $\frac{1}{2}R$ para su energía potencial. Identifique la capacidad térmica molar de alta temperatura a volumen constante para un gas ideal triatómico de c) moléculas lineales y d) moléculas no lineales. e) Explique cómo se pueden usar los datos de calor específico para determinar si una molécula triatómica es lineal o no lineal. ¿Los datos en la tabla 21.2 son suficientes para hacer esta determinación?

Sección 21.5 Distribución de magnitudes de velocidad moleculares

31. Quince partículas idénticas tienen diferentes magnitudes de velocidad: una tiene una magnitud de velocidad de 2.00 m/s, dos tienen magnitudes de velocidad de 3.00 m/s, tres tienen magnitudes de velocidad de 5.00 m/s, cuatro tienen magnitudes de velocidad de 7.00 m/s, tres tienen magnitudes de velocidad de 9.00 m/s y dos tienen magnitudes de velocidad de 12.0 m/s. Encuentre a) la rapidez promedio, b) la rapidez rms y c) la rapidez más probable de estas partículas.

32. Un metro cúbico de hidrógeno atómico a 0°C a presión atmosférica contiene aproximadamente 2.70×10^{25} átomos. El primer estado excitado del átomo de hidrógeno tiene una energía de 10.2 eV sobre el nivel energético más bajo, llamado estado fundamental. Use el factor de Boltzmann para encontrar el número de átomos en el primer estado excitado a 0°C y a 10 000°C.

33. A partir de la distribución de rapidez de Maxwell–Boltzmann, demuestre que la rapidez más probable de una molécula de gas se conoce por la ecuación 21.27. Note que la rapidez más probable corresponde al punto en donde la pendiente de la curva de distribución de rapidez, dN_v/dv, es cero.

34. En una mezcla dos gases se difunden a través de un filtro en cantidades proporcionales a las magnitudes de velocidad rms de los gases. a) Encuentre la proporción de magnitudes de velocidad para los dos isótopos de cloro, ^{35}Cl y ^{37}Cl, mientras se difunden a través del aire. b) ¿Cuál isótopo se mueve más rápido?

35. **Problema de repaso.** ¿A qué temperatura la rapidez promedio de los átomos de helio sería igual a a) la rapidez de escape de la Tierra, 1.12×10^4 m/s y b) la rapidez de escape de la Luna, 2.37×10^3 m/s? (Consulte el capítulo 13 para una explicación de la rapidez de escape.) *Nota:* La masa de un átomo de helio es 6.64×10^{-27} kg.

36. ● Calcule a) la rapidez más probable, b) la rapidez promedio y c) la rapidez rms para moléculas de gas nitrógeno a 900 K. d) Establezca cómo se comparan sus resultados con los valores que se muestran en la figura 21.11.

37. Suponga que la atmósfera de la Tierra tiene una temperatura uniforme de 20°C y composición uniforme, con una masa molar efectiva de 28.9 g/mol. a) Demuestre que la densidad en el número de las moléculas depende de la altura y sobre el nivel del mar de acuerdo con

$$n_V(y) = n_0 e^{-m_0 g y / k_B T}$$

donde n_0 es la densidad de número a nivel del mar ($y = 0$). Este resultado se llama *ley de atmósferas.* b) Por lo general los aviones comerciales cruzan a una altitud de 11.0 km. Encuentre la relación de la densidad atmosférica en relación con la densidad al nivel del mar.

38. *Si no puede caminar al espacio exterior, ¿al menos puede caminar a la mitad del camino?* Use la ley de atmósferas del problema 37. La altura promedio de una molécula en la atmósfera de la Tierra se conoce por

$$\bar{y} = \frac{\int_0^\infty y n_V(y)\, dy}{\int_0^\infty n_V(y)\, dy} = \frac{\int_0^\infty y e^{-m_0 g y/k_B T}\, dy}{\int_0^\infty e^{-m_0 g y/k_B T}\, dy}$$

a) Pruebe que esta altura promedio es igual a $k_B T/m_0 g$. b) Evalúe la altura promedio, si supone que la temperatura es de 10°C y la masa molecular es 28.9 u, uniformes en todas las partes de la atmósfera.

Problemas adicionales

39. La función $E_{int} = 3.50nRT$ describe la energía interna de cierto gas ideal. Una muestra de gas de 2.00 moles siempre comienza a 100 kPa de presión y 300 K de temperatura. Para cada uno de los siguientes procesos determine la presión, volumen y temperatura finales; el cambio en energía interna del gas; la energía agregada al gas por calor; y el trabajo consumido en el gas. a) El gas se calienta a presión constante a 400 K. b) El gas se calienta a volumen constante a 400 K. c) El gas se comprime a temperatura constante a 120 kPa. d) El gas se comprime adiabáticamente a 120 kPa.

40. ● Las dimensiones de un salón de clase son 4.20 m × 3.00 m × 2.50 m. a) Encuentre el número de moléculas de aire en él a presión atmosférica y 20.0°C. b) Halle la masa de este aire, si supone que el aire consiste en moléculas diatómicas con masa molar de 28.9 g/mol. c) Encuentre la energía cinética promedio de una molécula. d) Halle la rapidez media cuadrática molecular. e) Con la suposición de que el calor específico molar es una constante independiente de la temperatura, $E_{int} = 5nRT/2$. Encuentre la energía interna en el aire. f) **¿Qué pasaría si?** Halle la energía interna del aire en la habitación a 25.0°C. Explique de qué modo es comparable con el resultado a 20.0°C y cómo sucede de esa forma.

41. ● En una muestra de un metal sólido, cada átomo tiene libertad de vibrar en torno a alguna posición de equilibrio. La energía del átomo consiste de energía cinética para movimiento en las direcciones *x*, *y* y *z*, más energía potencial elástica asociada con las fuerzas de la ley de Hooke ejercidas por los átomos vecinos sobre él en las direcciones *x*, *y* y *z*. De acuerdo con el teorema de equipartición de la energía, suponga que la energía promedio de cada átomo es $\frac{1}{2}k_B T$ para cada grado de libertad. a) Pruebe que el calor específico molar del sólido es $3R$. La *ley Dulong–Petit* establece que este resultado describe sólidos puros a temperaturas suficientemente elevadas. (Puede ignorar la diferencia entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante.) b) Evalúe el calor específico *c* del hierro. Explique cómo se compara con el valor que se menciona en la tabla 20.1. c) Repita la evaluación y comparación para el oro.

42. Veinte partículas, cada una con masa m_0 y confinada a un volumen *V*, tiene diferentes magnitudes de velocidad: dos tienen v, tres tienen $2v$, cinco tienen $3v$, cuatro tienen $4v$, tres tienen $5v$, dos tienen $6v$ y una tiene $7v$. Encuentre a) la rapidez promedio, b) la rapidez rms, c) la rapidez más probable, d) la presión que ejercen sobre las paredes del recipiente y e) la energía cinética promedio por cada partícula.

43. ● Un cilindro que contiene *n* moles de un gas ideal se somete a un proceso adiabático. a) Si comienza con la expresión $W = -\int P\, dV$ y aplica la condición PV^γ = constante, demuestre que el trabajo consumido en el gas es

$$W = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)(P_f V_f - P_i V_i)$$

b) Si comienza con la primera ley de la termodinámica en forma diferencial, demuestre que el trabajo consumido en el gas es igual a $nC_V(T_f - T_i)$. Explique si estos dos resultados son consistentes uno con otro.

44. A medida que una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se expande adiabáticamente, el trabajo consumido en él es −2 500 J. La temperatura y presión iniciales del gas son 500 K y 3.60 atm. Calcule a) la temperatura final y b) la presión final. Puede usar el resultado del problema 43.

45. Un cilindro se cierra en ambos extremos y tiene paredes aislantes. Se divide en dos compartimientos mediante un separador adiabático que es perpendicular al eje del cilindro. Cada compartimiento contiene 1.00 mol de oxígeno que se comporta como un gas ideal con $\gamma = \frac{7}{5}$. Al inicio los dos compartimientos tienen iguales volúmenes y sus temperaturas son 550 K y 250 K. A continuación se le permite al separador moverse lentamente hasta que las presiones sobre sus dos lados son iguales. Encuentre las temperaturas finales en los dos compartimientos. Puede usar el resultado del problema 43.

46. Un rifle de aire dispara un balín de plomo al permitir la expansión de aire a alta presión, lo que impulsa al balín por el cañón del rifle. Ya que este proceso sucede muy rápidamente, no se presenta conducción térmica apreciable y la expansión en esencia es adiabática. Suponga que el rifle comienza con 12.0 cm^3 de aire comprimido, que se comporta como un gas ideal con $\gamma = 1.40$. La expansión del aire empuja un balín de 1.10 g como un pistón con área de sección transversal de 0.030 0 cm^2 a lo largo del cañón del arma, de 50.0 cm de largo. El balín sale con una rapidez de boquilla de 120 m/s. Use el resultado del problema 43 para encontrar la presión inicial requerida.

47. **Problema de repaso.** El oxígeno a presiones mucho mayores que 1 atm es tóxico para las células pulmonares. Suponga que un buzo de profundidad respira una mezcla de oxígeno (O_2) y helio (He). En peso, ¿qué relación de helio a oxígeno debe usar si el buzo está a una profundidad oceánica de 50.0 m?

48. Un recipiente contiene 1.00×10^4 moléculas de oxígeno a 500 K. a) Elabore una gráfica precisa de la función de distribución de rapidez de Maxwell en función de la rapidez con puntos a intervalo de rapidez de 100 m/s. b) Determine la rapidez más probable a partir de esta gráfica. c) Calcule las rapideces promedio y rms para las moléculas y etiquete estos puntos sobre su gráfica. d) A partir de la gráfica, estime la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad en el intervalo de 300 m/s a 600 m/s.

49. La compresibilidad κ de una sustancia se define como el cambio fraccionario en volumen de dicha sustancia para un cambio conocido en presión:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

a) Explique por qué el signo negativo en esta expresión asegura que κ siempre es positiva. b) Demuestre que, si un gas ideal se comprime isotérmicamente, su compresibilidad se conoce por $\kappa_1 = 1/P$. c) **¿Qué pasaría si?** Demuestre que si un gas ideal se comprime adiabáticamente, su compresibilidad se conoce por $\kappa_2 = 1/\gamma P$. d) Determine valores para κ_1 y κ_2 para un gas ideal monoatómico a una presión de 2.00 atm.

50. ● **Problema de repaso.** a) Demuestre que la rapidez del sonido en un gas ideal es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

donde M es la masa molar. Use la expresión general para la rapidez del sonido en un fluido de la sección 17.1; la definición del módulo volumétrico de la sección 12.4 y el resultado del problema 49 anterior. A medida que una onda sonora pasa a través de un gas, las compresiones son tan rápidas o tan separadas que la conducción térmica se evita por un intervalo de tiempo despreciable o por un grosor de aislamiento efectivo. Las compresiones y enrarecimiento son adiabáticas. b) Calcule la rapidez teórica del sonido en el aire a 20°C y establezca cómo se compara con el valor en la tabla 17.1. Considere $M =$ 28.9 g/mol. c) Demuestre que la rapidez del sonido en un gas ideal es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m_0}}$$

donde m_0 es la masa de una molécula. Establezca la comparación con las magnitudes de velocidad más probables, promedio y rms molecular.

51. ● El calor latente de vaporización para el agua a temperatura ambiente es 2 430 J/g. Considere una molécula particular en la superficie de un vaso con agua líquida, móvil hacia arriba con rapidez suficiente que será la siguiente molécula en unirse al vapor. a) Encuentre su energía cinética traslacional. b) Halle su rapidez. c) Ahora considere un gas no denso hecho justo de moléculas como ésta. ¿Cuál es su temperatura? ¿Por qué no se quema por el agua en evaporación?

52. ● *Movimiento browniano.* El movimiento molecular es invisible por sí mismo. Cuando una partícula pequeña se suspende en un fluido, el bombardeo por moléculas hace que la partícula tiemble en rededor al azar. Robert Brown descubrió este movimiento en 1827, mientras estudiaba la fertilización de plantas. Albert Einstein lo analizó en 1905 y Jean Perrin lo usó para una primera medición del número de Avogadro. La energía cinética promedio de la partícula visible se puede considerar como $\frac{3}{2}k_B T$, la misma que la de una molécula en un gas ideal. Considere una partícula esférica de 1 000 kg/m^3 de densidad en agua a 20°C. a) Para una partícula de diámetro d, evalúe la rapidez rms. b) El movimiento real de la partícula es aleatorio, pero imagine que se mueve con velocidad constante igual en magnitud a su rapidez rms. ¿En qué intervalo de tiempo se movería una distancia igual a su propio diámetro? c) Evalúe la rapidez rms y el intervalo de tiempo para una partícula de 3.00 μm de diámetro. d) Evalúe la rapidez rms y el intervalo de tiempo para una esfera de 70.0 kg de masa, con la que modele su propio cuerpo. e) Encuentre el diámetro de una partícula cuya rapidez rms sea igual a su propio diámetro dividido entre 1 s. f) Explique si sus resultados sugieren que hay un tamaño de partícula óptimo para la observación del movimiento browniano.

53. Modele el aire como un gas ideal diatómico con $M = 28.9$ g/mol. Un cilindro con un pistón contiene 1.20 kg de aire a 25.0°C y 200 kPa. La energía se transfiere por calor al sistema mientras se le permite expandirse, con la presión elevándose a 400 kPa. A lo largo de la expansión, la correspondencia entre presión y volumen se conoce por

$$P = CV^{1/2}$$

donde C es una constante. a) Encuentre el volumen inicial. b) Halle el volumen final. c) Encuentre la temperatura final. d) Halle el trabajo consumido en el aire. e) Encuentre la energía transferida por calor.

54. *¡Humeante!* Un pitcher lanza una pelota de beisbol de 0.142 kg a 47.2 m/s. Mientras viaja 19.4 m al plato de home, la pelota se frena hasta 42.5 m/s debido a la resistencia del aire. Encuentre el cambio en temperatura del aire a consecuencia de lo que pasa. Para encontrar el mayor cambio de temperatura posible, puede hacer las siguientes suposiciones. El aire tiene un calor específico molar de $C_P = 7R/2$ y una masa molar equivalente de 28.9 g/mol. El proceso es tan rápido que la cubierta de la pelota actúa como aislador térmico y la temperatura de la pelota no cambia. Al inicio sucede un cambio en temperatura sólo para el aire en un cilindro de 19.4 m de largo y 3.70 cm de radio. Este aire inicialmente está a 20.0°C.

55. Use una computadora o calculadora programable para encontrar el valor numérico, para un gas maxwelliano, de la relación $N_v(v)/N_v(v_{mp})$ para los siguientes valores de v: $v = (v_{mp}/50)$, $(v_{mp}/10)$, $(v_{mp}/2)$, v_{mp}, $2v_{mp}$, $10v_{mp}$, $50v_{mp}$. Proporcione sus resultados a tres cifras significativas.

56. Considere las partículas en una centrifugadora de gas, dispositivo utilizado para separar partículas de diferente masa al hacerlas girar en una trayectoria circular de radio r con rapidez angular ω. La fuerza centrípeta que actúa sobre una partícula es $m_0\omega^2 r$. a) Explique cómo se puede usar una centrifugadora de gas para separar partículas de diferente masa. b) Demuestre que la densidad de las partículas como función de r es

$$n(r) = n_0 e^{m_0 r^2 \omega^2 / 2k_B T}$$

57. Verifique las ecuaciones 21.25 y 21.26 para las rapideces rms y promedio de las moléculas de un gas a una temperatura T. El valor promedio de v^n es

$$\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^n N_v \, dv$$

Use la tabla de integrales B.6 en el apéndice B.

58. En el diagrama PV para un gas ideal hay una curva isotérmica y una curva adiabática que pasan a través de cada punto. Pruebe que la pendiente de la curva adiabática es más inclinada que la pendiente de la isoterma por el factor γ.

59. ● Una muestra de gas ideal monoatómico ocupa 5.00 L a presión atmosférica y 300 K (punto A en la figura P21.59). Se calienta a volumen constante a 3.00 atm (punto B). Luego se le permite expandirse isotérmicamente a 1.00 atm (punto C) y al final se comprime isobáricamente a su estado original. a) Encuentre el número de moles en la muestra. b) Halle la temperatura en los puntos B y C y el volumen en el punto C. c) Suponga que el calor específico molar no depende de la temperatura, de modo que $E_{int} = 3nRT/2$. Encuentre la energía interna en los puntos A, B y C. d) Tabule P, V, T y E en los estados de los puntos A, B y C. e) Ahora considere lo procesos $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ y $C \rightarrow A$. Describa cómo llevar a cabo cada pro-

ceso de manera experimental. f) Encuentre Q, W y ΔE_{int} para cada uno de los procesos. g) Para todo el ciclo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, encuentre Q, W y ΔE_{int}.

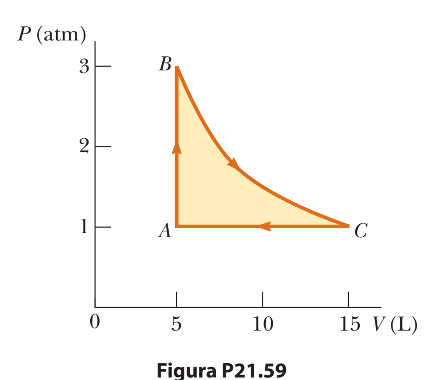


Figura P21.59

60. Este problema puede ayudarle a pensar acerca del tamaño de las moléculas. En Beijing, un restaurante mantiene un caldero de caldo de pollo hirviendo a fuego lento. Cada mañana se llena con 10.0 L de agua, junto con un pollo fresco, vegetales y especias. La sopa se agita por completo. La masa molar del agua es 18.0 g/mol. a) Encuentre el número de moléculas de agua en el caldero. b) Durante cierto mes, 90.0% del caldo se sirvió cada día a personas que luego emigraron inmediatamente. De las moléculas de agua en el caldero puestas el primer día del mes, ¿cuándo se sirvió la última? c) El caldo se ha hervido a fuego lento durante siglos, a través de guerras, terremotos y reparaciones de estufa. Suponga que el agua que estuvo en el caldero hace mucho se mezcló en la hidrosfera de la Tierra, de 1.32×10^{21} kg de masa. ¿Cuántas de las moléculas del agua original, es probable que estén presentes en él de nuevo en la actualidad?

61. **Problema de repaso.** a) Si tiene suficiente energía cinética, es posible que una molécula en la superficie de la Tierra "escape a la gravitación de la Tierra", en el sentido de que puede continuar alejándose de la Tierra para siempre, como se explicó en la sección 13.6. Con el principio de conservación de la energía, demuestre que la mínima energía cinética necesaria para "escapar" es $m_0 g R_E$, donde m_0 es la masa de la molécula, g es la aceleración de caída libre en la superficie y R_E es el radio de la Tierra. b) Calcule la temperatura para la cual la mínima energía cinética de escape es diez veces la energía cinética promedio de una molécula de oxígeno.

62. Con múltiples rayos láser, los físicos han podido enfriar y atrapar átomos de sodio en una región pequeña. En un experimento, la temperatura de los átomos se redujo a 0.240 mK. a) Determine la rapidez rms de los átomos de sodio a esta temperatura. Los átomos se pueden capturar durante aproximadamente 1.00 s. La trampa tiene una dimensión lineal de más o menos 1.00 cm. b) ¿Durante qué intervalo de tiempo aproximado un átomo vagaría afuera de la región de la trampa si no hubiera acción de captura?

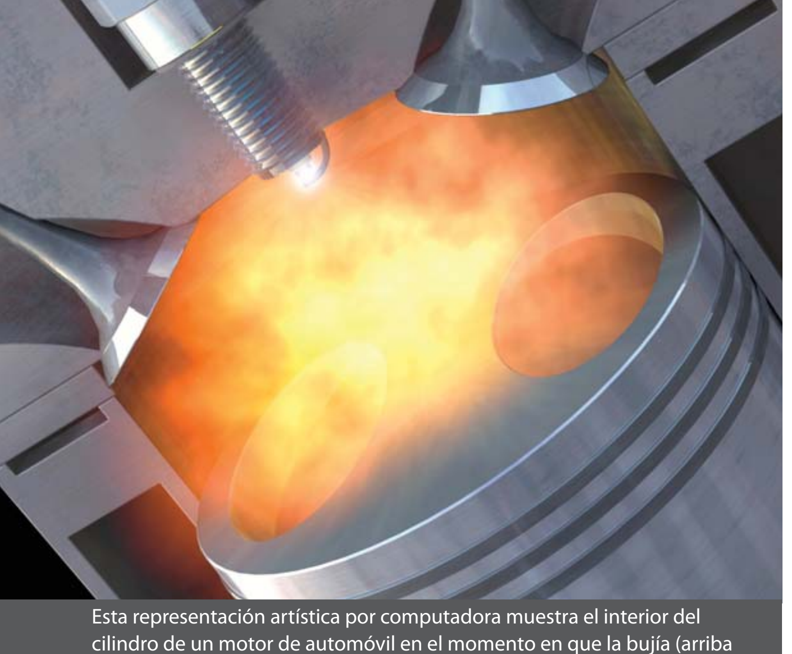
Respuestas a las preguntas rápidas

21.1 **i)**, b). La energía cinética traslacional promedio por cada molécula es una función de la temperatura. **ii)**, a). Cada que hay el doble de moléculas y la temperatura de ambos contenedores es la misma, la energía total en B es el doble que la de A.

21.2 **i)**, a). De acuerdo con la ecuación 21.10, E_{int} es una función sólo de la temperatura. Porque la temperatura aumenta, la energía interna aumenta. **ii)**, c). A lo largo de una isoterma, T es constante por definición. Por lo tanto, la energía interna del gas no cambia.

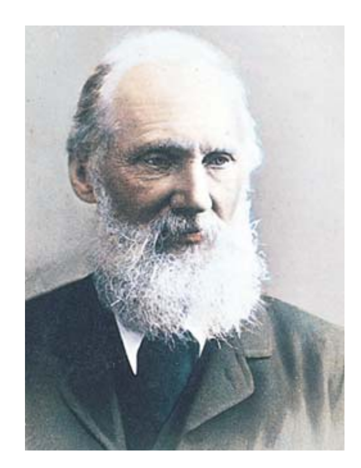
21.3 d). El valor de 29.1 J/mol · K es $7R/2$. De acuerdo con la figura 21.7, este resultado sugiere que ocurren los tres tipos de movimiento.

21.4 c). El valor más alto posible de C_V para un gas diatómico es $7R/2$, de modo que el gas debe ser poliatómico.



Esta representación artística por computadora muestra el interior del cilindro de un motor de automóvil en el momento en que la bujía (arriba a la izquierda) se enciende e inflama la mezcla de aire–combustible. Los gases que se expanden empujan hacia abajo sobre el pistón (abajo a la derecha), lo que a final de cuentas resulta en la energía que se les proporciona a las ruedas de transmisión del automóvil. El motor de un automóvil es un ejemplo de máquina térmica, que se estudiará en este capítulo. (Roger Harris/Science Photo Library)

22 Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica



LORD KELVIN
Físico y matemático británico (1824–1907)
William Thomson nació en Belfast, conocido como Kelvin fue el primero en proponer el uso de una escala absoluta de temperatura. La escala de temperatura Kelvin se nombró así en su honor. El trabajo de Kelvin en termodinámica condujo a la idea de que la energía no puede pasar espontáneamente de un objeto más frío a un objeto más caliente.

La primera ley de la termodinámica, que se estudió en el capítulo 20, es un enunciado de la conservación de energía. Esta ley afirma que un cambio en energía interna en un sistema puede presentar como un resultado de transferencia de energía por calor, por trabajo o por ambos. Aunque la primera ley de la termodinámica es muy importante, no hace distinción entre los procesos que se presentan espontáneamente y aquellos que no lo hacen así. Sin embargo, en la naturaleza sólo tienen lugar ciertos tipos de procesos de conversión de energía y de transferencia de energía. La *segunda ley de la termodinámica*, el tema principal de este capítulo, establece cuáles procesos se presentan y cuáles no. Los siguientes son ejemplos de procesos que no violan la primera ley de la termodinámica si ellos siguen su curso en cualquier dirección, aunque en realidad se observa que siguen su curso sólo en una dirección:

- Cuando dos objetos a diferentes temperaturas se colocan en contacto térmico, la transferencia de energía neta por calor siempre es del objeto más caliente al objeto más frío, nunca del más frío al más caliente.
- Una bola de caucho que se deja caer al suelo rebota varias veces y con el tiempo llega al reposo, pero una bola que se encuentra en el suelo nunca reúne energía interna del suelo y comienza a rebotar por cuenta propia.
- Un péndulo en oscilación al final llega al reposo debido a que colisiona contra las moléculas del aire y a la fricción en el punto de suspensión. La energía mecánica del sistema se convierte en energía interna en el aire, el péndulo y la suspensión; la conversión contraria de energía nunca se presenta.

Todos estos procesos son *irreversibles*: es decir, son procesos que se presentan de manera natural en una sola dirección. No se ha observado jamás que algún proceso irreversible gire de regreso. Si lo hiciera, violaría la segunda ley de la termodinámica.[1]

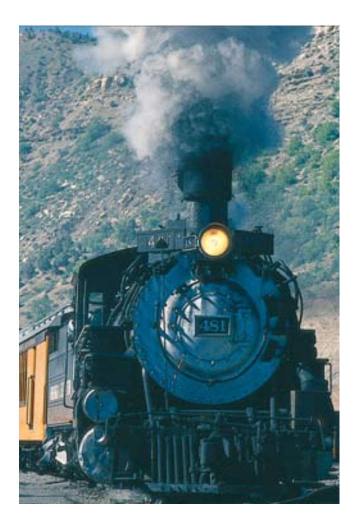


Figura 22.1 Esta locomotora impulsada por vapor corre de Durango a Silverton, Colorado. Obtiene su energía mediante la quema de madera o carbón. La energía generada vaporiza agua, que impulsa la locomotora. (Esta locomotora debe tomar agua de tanques ubicados a lo largo de la ruta para sustituir la pérdida de vapor a través de la chimenea.) Las locomotoras modernas usan combustible diesel en lugar de madera o carbón. Ya sean antiguas o modernas, tales locomotoras se modelan como máquinas térmicas, que extraen energía de la quema de un combustible y convierten una fracción del mismo en energía mecánica.

22.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica

Una **máquina térmica** es un dispositivo que toma energía por calor[2] y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. Por ejemplo, en un proceso representativo por el que una planta de energía produce electricidad, un combustible, como carbón, se quema y los gases de alta temperatura producidos se usan para convertir agua líquida en vapor. Este vapor se dirige a las aspas de una turbina y las pone a girar. La energía mecánica asociada con esta rotación se usa para impulsar un generador eléctrico. Otro dispositivo que se modela como máquina térmica es el motor de combustión interna de un automóvil. Este dispositivo usa energía de la quema de un combustible para realizar trabajo sobre pistones, lo que resulta en el movimiento del automóvil.

Una máquina térmica lleva alguna sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico durante el que 1) la sustancia de trabajo absorbe energía por calor de un depósito de energía a alta temperatura, 2) la máquina consume trabajo y 3) se expulsa energía por calor a un depósito a temperatura más baja. Como ejemplo, considere la operación de una máquina de vapor (figura 22.1), que usa agua como la sustancia de trabajo. El agua en una caldera absorbe energía de la quema de combustible y la convierte en vapor, que luego realiza trabajo al expandirse contra un pistón. Después de que el vapor se enfría y condensa, el agua líquida producida regresa a la caldera y el ciclo se repite.

Es útil representar de manera esquemática una máquina térmica, como en la figura 22.2. La máquina absorbe una cantidad de energía $|Q_h|$ del depósito caliente. Para la explicación matemática de las máquinas térmicas, se usan valores absolutos para hacer positivas todas las transferencias de energía y la dirección de transferencia se indica con un signo explícito, positivo o negativo. La máquina realiza trabajo $W_{\text{máq}}$ (de modo que el trabajo *negativo* $W = -W_{\text{máq}}$ se consume *en* la máquina) y después entrega una cantidad de energía $|Q_c|$ al depósito frío. Ya que la sustancia de trabajo pasa a través de un ciclo, sus energías internas inicial y final son iguales: $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Por lo tanto, a partir de la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = Q + W = Q - W_{\text{máq}} = 0$, y **el trabajo neto $W_{\text{máq}}$ realizado**

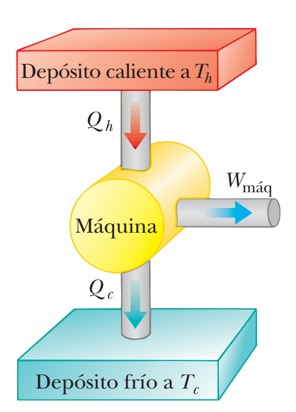


Figura 22.2 Representación esquemática de una máquina térmica. La máquina realiza trabajo $W_{\text{máq}}$. La flecha en la parte superior representa energía $Q_h > 0$ que entra a la máquina. En el fondo, $Q_c < 0$ representa la energía que sale de la máquina.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.1

Primera y segunda leyes

Note la distinción entre la primera y segunda leyes de la termodinámica. Si un gas se somete a un *proceso isotérmico en alguna dirección*, en tal caso $\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 0$ y $W = -Q$. Debido a eso, la primera ley permite que *toda* la entrada de energía por calor se expulse mediante trabajo. Sin embargo, en una máquina térmica, en la que una sustancia se somete a un proceso *cíclico*, sólo una *porción* de la entrada de energía por calor se expulsa mediante trabajo, de acuerdo con la segunda ley.

[1] Aunque un proceso que ocurre en el sentido inverso del tiempo nunca se ha *observado*, es *posible* que ocurra. Sin embargo, como se verá más adelante en este capítulo, la probabilidad de que ocurra tal proceso es infinitesimalmente pequeña. Desde este punto de vista, los procesos ocurren con una probabilidad muy grande en una dirección que en la dirección opuesta.

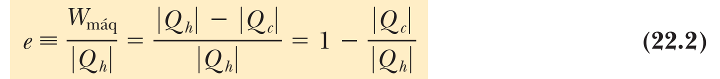
[2] Se usa calor como modelo para transferencia de energía a una máquina térmica. Sin embargo, en el modelo de máquina térmica son posibles otros métodos de transferencia de energía. Por ejemplo, la atmósfera de la Tierra se puede modelar como una máquina térmica con transferencia de entrada de energía mediante radiación electromagnética del Sol. La salida de la máquina térmica atmosférica causa la consistencia de los vientos en la atmósfera.

por una máquina térmica es igual a la energía neta Q_{neta} que se le transfiere. Como puede ver a partir de la figura 22.2, $Q_{\text{neta}} = |Q_h| - |Q_c|$; por lo tanto,

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| \quad \textbf{(22.1)}$$

La **eficiencia térmica** e de una máquina térmica se define como la relación del trabajo neto invertido por la máquina durante un ciclo, a la entrada de energía a la mayor temperatura durante el ciclo:

Eficiencia térmica de una máquina térmica ▶



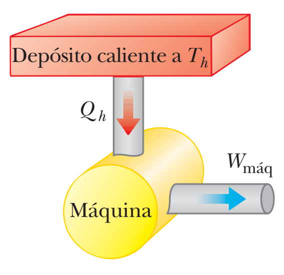
$$e \equiv \frac{W_{\text{máq}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} \quad \textbf{(22.2)}$$

Puede pensar en la eficiencia como la proporción de lo que gana (trabajo) a lo que da (transferencia de energía a la mayor temperatura). En la práctica, todas las máquinas térmicas sólo expulsan una fracción de la energía de entrada Q_h por trabajo mecánico; en consecuencia, su eficiencia siempre es menor que el 100%. Por ejemplo, un buen motor de automóvil tiene una eficiencia aproximada de 20%, y los motores diesel tienen eficiencias que varían de 35% a 40%.

La ecuación 22.2 muestra que una máquina térmica tiene 100% de eficiencia ($e = 1$) sólo si $|Q_c| = 0$, esto es, si no se expulsa energía al depósito frío. En otras palabras, una máquina térmica con eficiencia perfecta tendría que expulsar toda la energía de entrada mediante trabajo. Ya que las eficiencias de los motores reales están muy por abajo de 100%, la **forma de Kelvin–Planck de la segunda ley de la termodinámica** establece lo siguiente:

> Es imposible construir una máquina térmica que, funcionando en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor de un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo.

Este enunciado de la segunda ley significa que, durante el funcionamiento de una máquina térmica, $W_{\text{máq}}$ nunca puede ser igual a $|Q_h|$ o, la otra opción, que algo de energía $|Q_c|$ se debe rechazar al ambiente. La figura 22.3 es un diagrama esquemático de la imposible máquina térmica "perfecta".





La máquina imposible

Figura 22.3 Diagrama esquemático de una máquina térmica que toma energía de un depósito caliente y realiza una cantidad equivalente de trabajo. Es imposible construir tal máquina perfecta.

Pregunta rápida 22.1 La entrada de energía a una máquina es 3.00 veces mayor que el trabajo que realiza. **i)** ¿Cuál es su eficiencia térmica? a) 3.00, b) 1.00, c) 0.333, d) imposible de determinar. **ii)** ¿Qué fracción de la entrada de energía se expulsa al depósito frío? a) 0.333, b) 0.667, c) 1.00, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 22.1 La eficiencia de una máquina

Una máquina transfiere 2.00×10^3 J de energía de un depósito caliente durante un ciclo y transfiere 1.50×10^3 J conforme expulsa a un depósito frío.

A) Encuentre la eficiencia de la máquina.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Revise la figura 22.2; piense en la energía que va a la máquina desde el depósito caliente y se divide, una parte que sale mediante trabajo y otra mediante calor hacia el depósito frío.

Categorizar Este ejemplo involucra la evaluación de cantidades de las ecuaciones presentadas en esta sección, así que se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la eficiencia de la máquina a partir de la ecuación 22.2:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{1.50 \times 10^3 \text{ J}}{2.00 \times 10^3 \text{ J}} = \boxed{0.250, \text{ o } 25.0\%}$$

B) ¿Cuánto trabajo realiza esta máquina en un ciclo?

SOLUCIÓN

Encuentre el trabajo realizado por la máquina al tomar la diferencia entre las energías de entrada y de salida:

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| = 2.00 \times 10^3 \text{ J} - 1.50 \times 10^3 \text{ J}$$
$$= \boxed{5.0 \times 10^2 \text{ J}}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que se le pregunta por la potencia de salida de la máquina. ¿Tiene suficiente información para responder?

Respuesta No, no tiene suficiente información. La potencia de una máquina es la *rapidez* a la que realiza trabajo. Sabe cuánto trabajo se realiza por ciclo, pero no tiene información acerca del intervalo de tiempo asociado con un ciclo. Sin embargo, si se le dijera que la máquina opera a 2 000 rpm (revoluciones por minuto), podría relacionar esta proporción con el periodo de rotación T del mecanismo de la máquina. Si supone que hay un ciclo termodinámico por revolución, la potencia es

$$\mathcal{P} = \frac{W_{\text{máq}}}{T} = \frac{5.0 \times 10^2\text{ J}}{\left(\frac{1}{2\,000}\text{ min}\right)}\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right) = 1.7 \times 10^4\text{ W}$$

22.2 Bombas de calor y refrigeradores

En una máquina térmica la dirección de la transferencia de energía es del depósito caliente al depósito frío, que es la dirección natural. La función de la máquina térmica es procesar la energía del depósito caliente de modo que se transforme en trabajo útil. ¿Qué pasaría si se quiere transferir energía del depósito frío al depósito caliente? Ya que no es la dirección natural de la transferencia de energía, se debe poner algo de energía en un dispositivo para lograrlo. Los dispositivos que realizan esta tarea se llaman **bombas de calor** y **refrigeradores**. Por ejemplo, los hogares en verano se enfrían con el uso de bombas de calor llamadas *acondicionadores de aire*. El acondicionador de aire transfiere energía de la habitación fría en la casa al aire caliente exterior.

En un refrigerador o bomba de calor, la máquina toma energía $|Q_c|$ de un depósito frío y expulsa energía $|Q_h|$ a un depósito caliente (figura 22.4), que se puede lograr sólo si se realiza trabajo *en* la máquina. A partir de la primera ley, se sabe que la energía expulsada al depósito caliente debe ser igual a la suma del trabajo realizado y la energía que se toma del depósito frío. Por lo tanto, el refrigerador o bomba de calor transfiere energía desde un cuerpo más frío (por ejemplo, los contenidos de un refrigerador de cocina o el aire invernal afuera de un edificio) a un cuerpo más caliente (el aire en la cocina o a una habitación en el edificio). En la práctica, es deseable llevar a cabo este proceso con un mínimo de trabajo. Si el proceso se pudiera lograr sin realizar trabajo alguno, el refrigerador o bomba de calor sería "perfecto" (figura 22.5). De nuevo, la existencia de tal dispositivo violaría la segunda ley de la termodinámica, que en la forma del **enunciado de Clausius**[3] afirma:

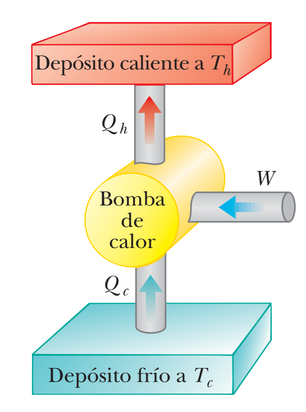


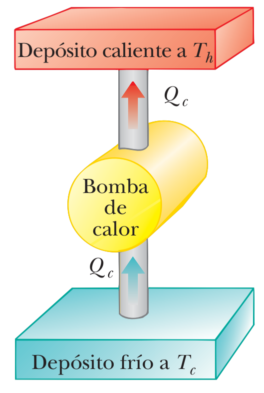
Figura 22.4 Diagrama esquemático de una bomba de calor, que toma energía $Q_c > 0$ de un depósito frío y expulsa energía $Q_h < 0$ a un depósito caliente. El trabajo W se invierte *en* la bomba de calor. Un refrigerador funciona de la misma forma.

> Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea transferir energía de manera continua mediante calor desde un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo.

En términos más simples, **la energía no se transfiere espontáneamente por calor de un objeto frío a un objeto caliente**.

Los enunciados de Clausius y de Kelvin–Planck de la segunda ley de la termodinámica aparecen, a primera vista, como desconectados, pero de hecho son equivalentes en todos los aspectos. Aunque no se prueba aquí, si algún enunciado es falso, también lo es el otro.[4]

En la práctica, una bomba de calor consiste en un fluido que circula a través de dos conjuntos de serpentines metálicos que intercambian energía con los alrededores. El fluido es frío y a baja presión cuando está en los serpentines ubicados en un ambiente frío, donde absorbe energía por calor. En tal caso el fluido caliente resultante se comprime y entra a los otros serpentines como un fluido caliente de alta presión. Ahí libera su energía almacenada a los alrededores calientes. En un acondicionador de aire, la energía se absorbe en el fluido de los serpentines ubicados en el interior de un edificio; después de que el fluido se comprime, la energía deja el fluido a través de serpentines ubicados en el



Bomba de calor imposible

Figura 22.5 Diagrama esquemático de una bomba de calor o refrigerador imposible: uno que toma energía de un depósito frío y expulsa una cantidad equivalente de energía a un depósito caliente sin la entrada de energía por calor.

[3] Expresada por primera vez por Rudolf Clausius (1822–1888).

[4] Vea un texto avanzado de termodinámica para esta prueba.



Figura 22.6 Los serpentines en la parte trasera de un refrigerador transfieren energía por calor al aire. Debido a la entrada de energía por trabajo, esta cantidad de energía debe ser mayor que la cantidad de energía removida de los contenidos del refrigerador.

exterior. En un refrigerador, los serpentines externos están detrás o debajo de la unidad (figura 22.6). Los serpentines internos están en las paredes del refrigerador y absorben energía de los alimentos.

La efectividad de una bomba de calor se describe en términos de un número llamado **coeficiente de realización** (COP). El COP es similar a la eficiencia térmica de una máquina térmica en que es una relación de lo que gana (energía transferida a o desde un depósito) a lo que da (entrada de trabajo). Para una bomba de calor que funciona en el modo de enfriamiento, "lo que gana" es energía removida del depósito frío. El refrigerador o acondicionador de aire más efectivo es el que retira la mayor cantidad de energía del depósito frío a cambio de la menor cantidad de trabajo. Por lo tanto, para aquellos dispositivos que funcionan en el modo de enfriamiento, se define el COP en términos de $|Q_c|$:

$$\text{COP (modo de enfriamiento)} = \frac{|Q_c|}{W} \tag{22.3}$$

Un buen refrigerador debe tener un COP alto, típicamente 5 o 6.

Además de aplicaciones de enfriamiento, las bombas de calor cada vez se vuelven más populares para propósitos de calentamiento. Los serpentines que absorben energía para una bomba de calor se ubican afuera de un edificio, en contacto con el aire o enterrados en el suelo. El otro conjunto de serpentines está en el interior del edificio. El fluido en circulación que circula a través de los serpentines absorbe energía del exterior y la libera en el interior del edificio desde los serpentines interiores.

En el modo de calentamiento, el COP de una bomba de calor se define como la proporción de la energía transferida hacia el depósito caliente, al trabajo requerido para transferir dicha energía:

$$\begin{array}{c}\text{COP (modo de}\\ \text{calentamiento)}\end{array} = \frac{\text{energía transferida a alta temperatura}}{\text{trabajo invertido en la bomba de calor}} = \frac{|Q_h|}{W} \tag{22.4}$$

Si la temperatura exterior es de 25°F (−4°C) o mayor, un valor representativo del COP para una bomba de calor es aproximadamente 4. Esto es: la cantidad de energía transferida al edificio es cerca de 4 veces más que el trabajo consumido por el motor en la bomba de calor. Sin embargo, conforme desciende la temperatura exterior, se vuelve más difícil que la bomba de calor extraiga suficiente energía del aire y el COP disminuye. Por lo tanto, el uso de bombas de calor que extraen energía del aire, aunque satisfactorio en climas moderados, no es adecuado en áreas donde las temperaturas invernales son muy bajas. Es posible usar bombas de calor en áreas más frías al enterrar los serpentines exteriores en el suelo. En este caso la energía se extrae del suelo, que tiende a estar más caliente que el aire en el invierno.

Pregunta rápida 22.2 La energía que entra a un calentador eléctrico mediante transmisión eléctrica se puede convertir en energía interna con una eficiencia de 100%. ¿En qué factor cambia el costo de calentar su casa cuando sustituye su sistema de calefacción eléctrico con una bomba de calor eléctrica que tenga un COP de 4.00? Suponga que el motor que activa la bomba de calor es 100% eficiente. a) 4.00, b) 2.00, c) 0.500, d) 0.250.

EJEMPLO 22.2 Congelación de agua

Cierto refrigerador tiene un COP de 5.00. Cuando el refrigerador está en funcionamiento, su potencia de entrada es de 500 W. Una muestra de agua de 500 g de masa y 20.0°C de temperatura se coloca en el compartimiento de congelador. ¿Cuánto tarda en congelar el agua a 0°C? Suponga que las otras partes del refrigerador permanecen a la misma temperatura y no hay fugas de energía al exterior, así que la operación del refrigerador resulta sólo en energía que se extrae del agua.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La energía sale del agua, lo que reduce su temperatura y luego se congela en hielo. El intervalo de tiempo requerido para todo este proceso se relaciona con la rapidez a la que la energía se extrae del agua, la que a su vez se relaciona con la potencia de entrada del refrigerador.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como una combinación de la comprensión de los cambios de temperatura y cambios de fase del capítulo 20, y la comprensión de las bombas de calor de este capítulo.

Analizar Con las ecuaciones 20.4 y 20.7, encuentre la cantidad de energía que se debe extraer de 500 g de agua a 20°C para convertirla en hielo a 0°C:

$$|Q_c| = |mc\,\Delta T - mL_f| = m|c\,\Delta T - L_f|$$
$$= |(0.500\text{ kg})[(4\,186\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(-20.0^\circ\text{C}) - 3.33\times 10^5\text{ J/kg}]|$$
$$= 2.08\times 10^5\text{ J}$$

Mediante la ecuación 22.3 encuentre cuánta energía se debe proporcionar al refrigerador para extraer esta cantidad de energía del agua:

$$\text{COP} = \frac{|Q_c|}{W} \quad\rightarrow\quad W = \frac{|Q_c|}{\text{COP}} = \frac{2.08\times 10^5\text{ J}}{5.00}$$
$$W = 4.17\times 10^4\text{ J}$$

Use la potencia nominal del refrigerador para encontrar el intervalo de tiempo necesario para que ocurra el proceso de congelación:

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad\rightarrow\quad \Delta t = \frac{W}{\mathcal{P}} = \frac{4.17\times 10^4\text{ J}}{500\text{ W}} = 83.3\text{ s}$$

Finalizar En realidad, el intervalo de tiempo para que el agua se congele en un refrigerador es mucho más que 83.3 s, lo que sugiere que las suposiciones del modelo no son válidas. Sólo una pequeña parte de la energía extraída del interior del refrigerador en un intervalo de tiempo dado proviene del agua. También se debe extraer energía del contenedor en el que se coloca el agua, y se debe extraer la energía que continuamente se filtra al interior desde el exterior.

22.3 Procesos reversibles e irreversibles

En la siguiente sección se propone una máquina térmica teórica que sea lo más eficiente posible. Para entender su naturaleza, primero se debe examinar el significado de los procesos reversibles e irreversibles. En un proceso **reversible** el sistema se somete al proceso que puede regresar a sus condiciones iniciales a lo largo de la misma trayectoria sobre un diagrama *PV*, y cada punto a lo largo de dicha trayectoria está en estado de equilibrio. Un proceso que no satisface estos requisitos es **irreversible**.

Todos los procesos naturales son irreversibles. Para comprobarlo considere la expansión libre de un gas adiabático, que ya se explicó en la sección 20.6, y demuestre que no puede ser reversible. Ahora examine un gas en un contenedor aislado térmicamente, como se muestra en la figura 22.7. Una membrana separa al gas de un vacío. Cuando la membrana se perfora, el gas se expande libremente en el vacío. Como resultado de la perforación, el sistema cambió porque ocupa un mayor volumen después de la expansión. Ya que el gas no ejerce una fuerza a través de un desplazamiento, no realiza trabajo sobre los alrededores mientras se expande. Además, no se transfiere energía hacia o desde el gas por calor, porque el contenedor está aislado de sus alrededores. Por lo tanto, en este proceso adiabático, el sistema cambió pero los alrededores no.

Si el gas regresa a su volumen y temperatura originales sin cambiar los alrededores, el proceso es reversible. Imagine invertir el proceso mediante la compresión del gas a su volumen original. Para hacerlo, se ajusta el contenedor con un pistón y se usa una máquina para forzar el pistón hacia adentro. Durante este proceso, los alrededores cambian porque se consume trabajo mediante un agente externo sobre el sistema. Además, el sistema cambia porque la compresión aumenta la temperatura del gas. La temperatura del gas se puede bajar al permitirle entrar en contacto con un depósito de energía externo. Aunque esta etapa regresa al gas a sus condiciones originales, los alrededores de nuevo resultan afectados porque se agrega energía a los alrededores desde el gas. Si esta energía se pudiera usar para impulsar la máquina que comprime el gas, la transferencia de energía neta hacia los alrededores sería cero. De esta manera, el sistema y sus alrededores podrían regresar a sus condiciones iniciales y se podría identificar el proceso como reversible. Sin embargo, el enunciado de Kelvin–Planck de la segunda ley especifica que la energía removida del gas para regresar la temperatura a su valor original no se puede convertir completamente en energía mecánica en la forma del trabajo consumido por la máquina al comprimir el gas. Efectivamente, se debe concluir que el proceso es irreversible.

También se podría argumentar que la expansión libre adiabática es irreversible al considerar la definición de un proceso reversible que se refiere a los estados de equilibrio.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.2

Todos los procesos reales son irreversibles

El proceso reversible es una idealización; todos los procesos reales en la Tierra son irreversibles.

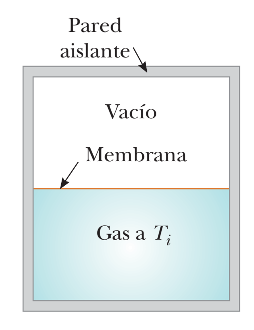


Figura 22.7 Expansión libre adiabática de un gas.

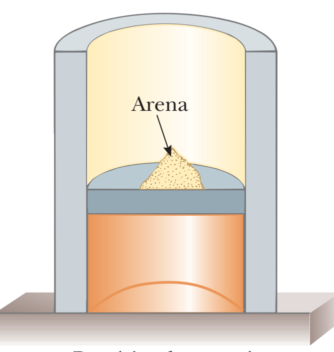
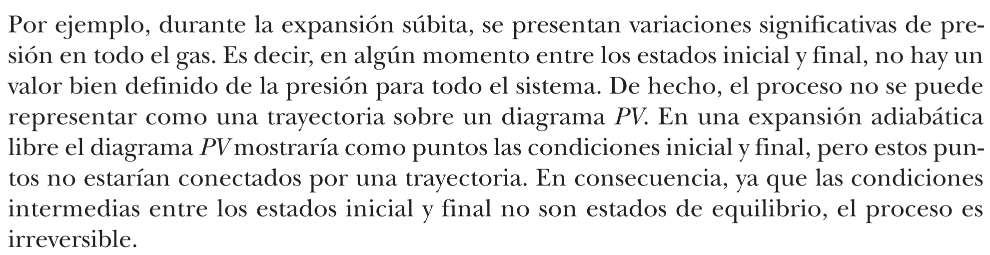


Figura 22.8 Un gas en contacto térmico con un depósito de energía se comprime lentamente conforme granos individuales de arena caen sobre el pistón. La compresión es isotérmica y reversible.


Por ejemplo, durante la expansión súbita, se presentan variaciones significativas de presión en todo el gas. Es decir, en algún momento entre los estados inicial y final, no hay un valor bien definido de la presión para todo el sistema. De hecho, el proceso no se puede representar como una trayectoria sobre un diagrama *PV*. En una expansión adiabática libre el diagrama *PV* mostraría como puntos las condiciones inicial y final, pero estos puntos no estarían conectados por una trayectoria. En consecuencia, ya que las condiciones intermedias entre los estados inicial y final no son estados de equilibrio, el proceso es irreversible.

Aunque todos los procesos reales son irreversibles, algunos son casi reversibles. Si un proceso real ocurre muy lentamente, tal que el sistema siempre está muy cerca de un estado de equilibrio, el proceso se puede aproximar como reversible. Suponga que un gas se comprime isotérmicamente en un arreglo pistón–cilindro en que el gas está en contacto térmico con un depósito de energía y continuamente se transfiere suficiente energía del gas al depósito para mantener la temperatura constante. Por ejemplo, imagine que el gas se comprime muy lentamente al soltar granos de arena sobre un pistón sin fricción, como se muestra en la figura 22.8. Conforme cada grano cae sobre el pistón y comprime el gas una pequeña cantidad, el sistema se desvía de un estado de equilibrio, pero está tan cerca que logra un nuevo estado de equilibrio en un intervalo de tiempo relativamente breve. Cada grano agregado representa un cambio a un nuevo estado de equilibrio, pero las diferencias entre estados son tan pequeñas que todo el proceso se aproxima como si sucediera a través de estados de equilibrio continuos. El proceso se puede regresar al retirar lentamente granos del pistón.

Una característica general de un proceso reversible es que no presenta efectos de disipación (como turbulencia o fricción) que conviertan energía mecánica a energía interna. Tales efectos pueden ser imposibles de eliminar por completo. Por ende, no es de sorprender que los procesos reales en la naturaleza sean irreversibles.

22.4 La máquina de Carnot

En 1824 un ingeniero francés llamado Sadi Carnot describió una máquina teórica, ahora llamada **máquina de Carnot**, que es de gran importancia desde puntos de vista prácticos y teóricos. Él demostró que una máquina térmica que funciona en un ciclo reversible ideal, llamado **ciclo de Carnot**, entre dos depósitos de energía es la máquina más eficiente posible. Tal máquina ideal establece un límite superior sobre las eficiencias de todas las otras máquinas. Esto es: el trabajo neto realizado, en el ciclo de Carnot, por una sustancia de trabajo es la mayor cantidad de trabajo posible para una cantidad determinada de energía suministrada a la sustancia a la temperatura superior. El **teorema de Carnot** se puede establecer del modo siguiente:

> Ninguna máquina térmica que funcione entre dos depósitos de energía puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que funcione entre los mismos dos depósitos.

Para probar la validez de este teorema, imagine dos máquinas térmicas que funcionan entre los *mismos* depósitos de energía. Una es una máquina de Carnot con eficiencia e_C, y la otra es una máquina con eficiencia e, donde se supone $e > e_C$. Ya que el ciclo en la máquina de Carnot es reversible, la máquina puede funcionar en reversa como un refrigerador. La máquina más eficiente se usa para impulsar la máquina de Carnot como un refrigerador de Carnot. La salida por trabajo de la máquina más eficiente se iguala con la entrada por trabajo del refrigerador de Carnot. Para la *combinación* de máquina y refrigerador, no ocurre intercambio por trabajo con los alrededores. Ya que se supuso que la máquina es más eficiente que el refrigerador, el resultado neto de la combinación es una transferencia de energía del depósito frío al caliente sin que se realice trabajo sobre la combinación. De acuerdo con el enunciado de Clausius sobre la segunda ley, este proceso es imposible. Por tanto, la suposición $e > e_C$ debe ser falsa. **Todas las máquinas reales son menos eficientes que la máquina de Carnot porque no funcionan a través de un ciclo reversible**. La eficiencia de una máquina real se reduce aún más por dificultades prácticas como fricción y pérdidas de energía por conducción.



J. L. Charmet/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.

SADI CARNOT
Ingeniero francés (1796–1832)
Carnot fue el primero en demostrar la relación cuantitativa entre trabajo y calor. En 1824 publicó su única obra, *Reflexiones acerca del poder motriz del calor*, que revisaba la importancia industrial, política y económica de la máquina de vapor. En ella definió el trabajo como “el peso levantado a través de una altura”.

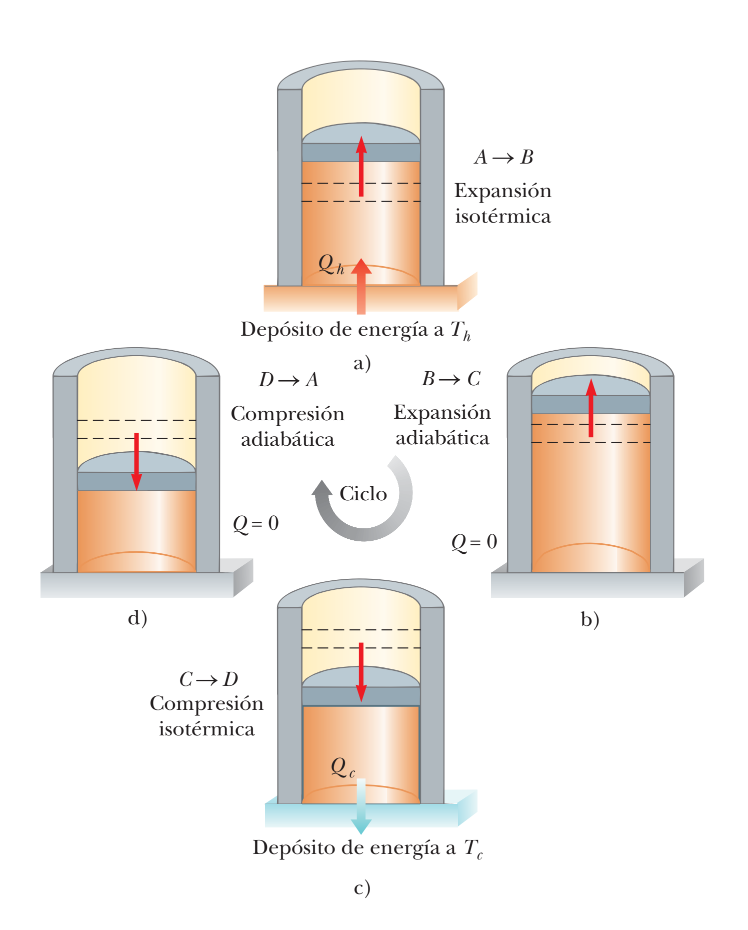


Figura 22.9 El ciclo de Carnot. a) En el proceso $A \to B$, el gas se expande isotérmicamente mientras está en contacto con un depósito a T_h. b) En el proceso $B \to C$, el gas se expande adiabáticamente ($Q = 0$). c) En el proceso $C \to D$, el gas se comprime isotérmicamente mientras está en contacto con un depósito a $T_c < T_h$. d) En el proceso $D \to A$, el gas se comprime adiabáticamente. Las flechas sobre el pistón indican la dirección de su movimiento durante cada proceso.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.3

No compre una máquina de Carnot

La máquina de Carnot es una idealización; no espere que se desarrolle una máquina de Carnot para uso comercial. La máquina de Carnot se explora sólo para consideraciones teóricas.

Para describir el ciclo de Carnot que tiene lugar entre las temperaturas T_c y T_h, suponga que la sustancia de trabajo es un gas ideal contenido en un cilindro adaptado con un pistón móvil en un extremo. Las paredes del cilindro y el pistón son térmicamente no conductoras. En la figura 22.9 se muestran cuatro etapas del ciclo de Carnot, y el diagrama *PV* para el ciclo se muestra en la figura 22.10. El ciclo de Carnot consiste de dos procesos adiabáticos y dos procesos isotérmicos, todos reversibles:

1. El proceso $A \to B$ (figura 22.9a) es una expansión isotérmica a temperatura T_h. El gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_h. Durante la expansión, el gas absorbe energía $|Q_h|$ del depósito a través de la base del cilindro y realiza trabajo W_{AB} para elevar el pistón.
2. En el proceso $B \to C$ (figura 22.9b), la base del cilindro se sustituye por una pared térmicamente no conductora y el gas se expande adiabáticamente; esto es, no entra ni sale energía del sistema por calor. Durante la expansión, la temperatura del gas disminuye de T_h a T_c y el gas realiza trabajo W_{BC} para elevar el pistón.
3. En el proceso $C \to D$ (figura 22.9c), el gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c y se comprime isotérmicamente a temperatura T_c. Durante este tiempo, el gas expulsa energía $|Q_c|$ al depósito y el trabajo que el pistón realiza sobre el gas es W_{CD}.
4. En el proceso final $D \to A$ (figura 22.9d), la base del cilindro se sustituye por una pared no conductora y el gas se comprime adiabáticamente. La temperatura del gas aumenta a T_h y el trabajo que el pistón realiza sobre el gas es W_{DA}.

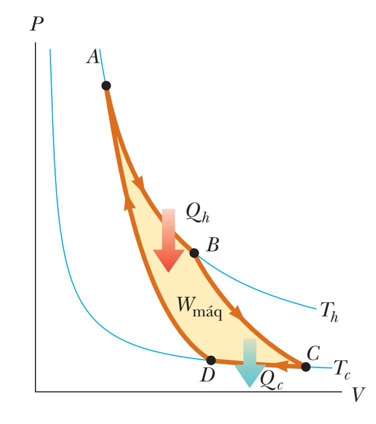


Figura 22.10 Diagrama *PV* para el ciclo de Carnot. El trabajo neto realizado $W_{\text{máq}}$ es igual a la energía neta transferida en la máquina de Carnot en un ciclo, $|Q_h| - |Q_c|$. Como con cualquier ciclo, el trabajo consumido durante el ciclo es el área encerrada por la trayectoria en el diagrama *PV*. Note que $\Delta E_{\text{int}} = 0$ para el ciclo.

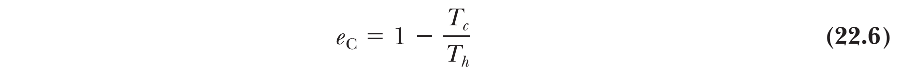
La eficiencia térmica de la máquina está dada por la ecuación 22.2:

$$e = \frac{W_{\text{máq}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}$$

En el ejemplo 22.3, se demostró que, para un ciclo de Carnot,

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \quad \textbf{(22.5)}$$

Por tanto, la eficiencia térmica de una máquina de Carnot es



Eficiencia de una máquina de Carnot

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad \textbf{(22.6)}$$

Este resultado indica que **todas las máquinas de Carnot que funcionan entre las mismas dos temperaturas tienen la misma eficiencia**.[5]

La ecuación 22.6 se puede aplicar a cualquier sustancia de trabajo que funciona en un ciclo de Carnot entre dos depósitos de energía. De acuerdo con esta ecuación, la eficiencia es cero si $T_c = T_h$, como uno esperaría. La eficiencia aumenta conforme T_c baja y T_h se eleva. Sin embargo, la eficiencia puede ser la unidad (100%), sólo si $T_c = 0$ K. Tales depósitos no están disponibles; debido a eso, la máxima eficiencia siempre es menor que 100%. En la mayoría de los casos prácticos, T_c está cerca de temperatura ambiente, que es aproximadamente 300 K. En consecuencia, por lo general uno lucha por aumentar la eficiencia al elevar T_h. En teoría, una máquina térmica con ciclo de Carnot que funcione en reversa constituye la bomba de calor más efectiva posible, y ello determina el máximo COP para una combinación dada de temperaturas de depósito caliente y fría. Al usar las ecuaciones 22.1 y 22.4, se ve que el máximo COP para una bomba de calor en su modo de calentamiento es

$$\text{COP}_C \text{ (modo de calentamiento)} = \frac{|Q_h|}{W}$$

$$= \frac{|Q_h|}{|Q_h| - |Q_c|} = \frac{1}{1 - \dfrac{|Q_c|}{|Q_h|}} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_c}{T_h}} = \frac{T_h}{T_h - T_c}$$

El COP de Carnot para una bomba de calor en el modo de enfriamiento es

$$\text{COP}_C \text{ (modo de enfriamiento)} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

Conforme la diferencia entre las temperaturas de los dos depósitos tiende a cero en esta expresión, el COP teórico tiende a infinito. En la práctica, la baja temperatura de los serpentines de enfriamiento y la alta temperatura en el compresor limitan el COP a valores por abajo de 10.

Pregunta rápida 22.3 Tres máquinas funcionan entre depósitos separados en temperatura en 300 K. Las temperaturas de los depósitos son las siguientes: Máquina A: $T_h = 1\,000$ K, $T_c = 700$ K; Máquina B: $T_h = 800$ K, $T_c = 500$ K; Máquina C: $T_h = 600$ K, $T_c = 300$ K. Clasifique las máquinas, por su eficiencia teórica posible, de mayor a menor.

[5] Para que los procesos en el ciclo de Carnot sean reversibles, deben realizarse de manera infinitesimalmente lenta. Por lo tanto, aunque la máquina de Carnot sea la máquina más eficiente posible, ¡tiene una salida de potencia cero porque tarda un intervalo de tiempo infinito en completar un ciclo! Para una máquina real, el corto intervalo de tiempo para cada ciclo resulta en que la sustancia de trabajo alcanza una temperatura alta menor que la del depósito caliente y una temperatura baja mayor que la del depósito frío. Una máquina que experimenta un ciclo de Carnot entre tan estrecho intervalo de temperaturas lo analizaron F. L. Curzon y B. Ahlborn (*Am. J. Phys.* 43(1), p. 22, 1975), quienes encontraron que la eficiencia a máxima potencia de salida sólo depende de las temperaturas de depósito T_c y T_h y está dada por $e_{C\text{–}A} = 1 - (T_c/T_h)^{1/2}$. La eficiencia Curzon–Ahlborn $e_{C\text{–}A}$ proporciona una aproximación cercana a las eficiencias de las máquinas reales más que la eficiencia de Carnot.

EJEMPLO 22.3 Eficiencia de la máquina de Carnot

Demuestre que la relación de transferencias de energía por calor en una máquina de Carnot es igual a la proporción de temperaturas de los depósitos, como se presenta en la ecuación 22.5.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use las figuras 22.9 y 22.10 para ayudarse a visualizar los procesos en el ciclo de Carnot.

Categorizar Debido a la comprensión del ciclo de Carnot, los procesos en el ciclo se pueden clasificar como isotérmico y adiabático.

Analizar Para la expansión isotérmica (proceso $A \rightarrow B$ en la figura 22.9), encuentre la transferencia de energía por calor desde el depósito caliente mediante la ecuación 20.14 y la primera ley de la termodinámica:

$$|Q_h| = |\Delta E_{\text{int}} - W_{AB}| = |0 - W_{AB}| = W_{AB} = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A}$$

De manera similar, halle la transferencia de energía al depósito frío durante la compresión isotérmica $C \rightarrow D$:

$$|Q_c| = |\Delta E_{\text{int}} - W_{CD}| = |0 - W_{CD}| = W_{CD} = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}$$

Divida la segunda expresión entre la primera:

$$1) \quad \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln (V_C/V_D)}{\ln (V_B/V_A)}$$

Aplique la ecuación 21.20 a los procesos adiabáticos $B \rightarrow C$ y $D \rightarrow A$:

$$T_h V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$$

$$T_h V_A^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

$$2) \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln (V_C/V_D)}{\ln (V_B/V_A)} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln (V_C/V_D)}{\ln (V_C/V_D)} = \frac{T_c}{T_h}$$

Finalizar Esta última es la ecuación 22.5, la que se debía comprobar.

EJEMPLO 22.4 La máquina de vapor

Una máquina de vapor tiene un calentador que funciona a 500 K. La energía del combustible quemado cambia el agua líquida a vapor, y este vapor después impulsa un pistón. La temperatura del depósito frío es la del aire exterior, aproximadamente 300 K. ¿Cuál es la máxima eficiencia térmica de esta máquina de vapor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En una máquina de vapor el gas que empuja sobre el pistón en la figura 22.9 es vapor. Una máquina de vapor real no funciona en un ciclo de Carnot, pero, para encontrar la máxima eficiencia posible, imagine una máquina de vapor de Carnot.

Categorizar La eficiencia se calcula con la ecuación 22.6, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las temperaturas de los depósitos en la ecuación 22.6:

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.400 \quad \text{o} \quad 40.0\%$$

Este resultado es la máxima eficiencia *teórica* de la máquina. En la práctica, la eficiencia es considerablemente menor.

¿Qié pasaría si? Suponga que se quiere aumentar la eficiencia teórica de esta máquina. Este aumento se puede lograr al elevar T_h en ΔT o reducir T_c por la misma ΔT. ¿Qué sería más efectivo?

Respuesta Una ΔT determinada tendría un mayor efecto fraccionario en una temperatura menor, así que se esperaría un mayor cambio en eficiencia si se altera T_c en ΔT. Pruebe esto numéricamente. Elevar T_h en 50 K, lo que corresponde a $T_h = 550$ K, daría una máxima eficiencia de

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{550 \text{ K}} = 0.455$$

Reducir T_c en 50 K, lo que corresponde a $T_c = 250$ K, daría una eficiencia máxima de

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{250 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.500$$

Aunque cambiar T_c es *matemáticamente* más efectivo, con frecuencia cambiar T_h es *prácticamente* más factible.

22.5 Motores de gasolina y diesel

En cada ciclo de un motor de gasolina se presentan seis procesos; cinco de ellos se ilustran en la figura 22.11. En esta explicación considere el interior del cilindro arriba del pistón, como el sistema que se lleva a través de ciclos repetidos en el funcionamiento del motor. Para un ciclo determinado, el pistón se mueve arriba y abajo dos veces, lo que representa un ciclo de cuatro tiempos que consiste de dos recorridos ascendentes y dos recorridos descendentes. Los procesos en el ciclo se pueden aproximar mediante el **ciclo de Otto** que se muestra en el diagrama *PV* en la figura 22.12. En la siguiente explicación consulte la figura 22.11 para la representación ilustrada de los tiempos y la figura 22.12 para el significado del diagrama *PV* de la siguiente designación de caracteres:

1. Durante el *tiempo de admisión* $O \rightarrow A$ (figura 22.11a), el pistón se mueve hacia abajo y una mezcla gaseosa de aire y combustible entra al cilindro a presión atmosférica. En este proceso el volumen aumenta de V_2 a V_1. Esta es la parte de entrada de energía del ciclo: la energía entra al sistema (el interior del cilindro) por transferencia de materia como energía potencial almacenada en el combustible.
2. Durante el *tiempo de compresión* $A \rightarrow B$ (figura 22.11b), el pistón se mueve hacia arriba, la mezcla aire–combustible se comprime adiabáticamente del volumen V_1 al volumen V_2 y la temperatura aumenta de T_A a T_B. El trabajo consumido en el gas es positivo y su valor es igual al negativo del área bajo la curva *AB* en la figura 22.12.

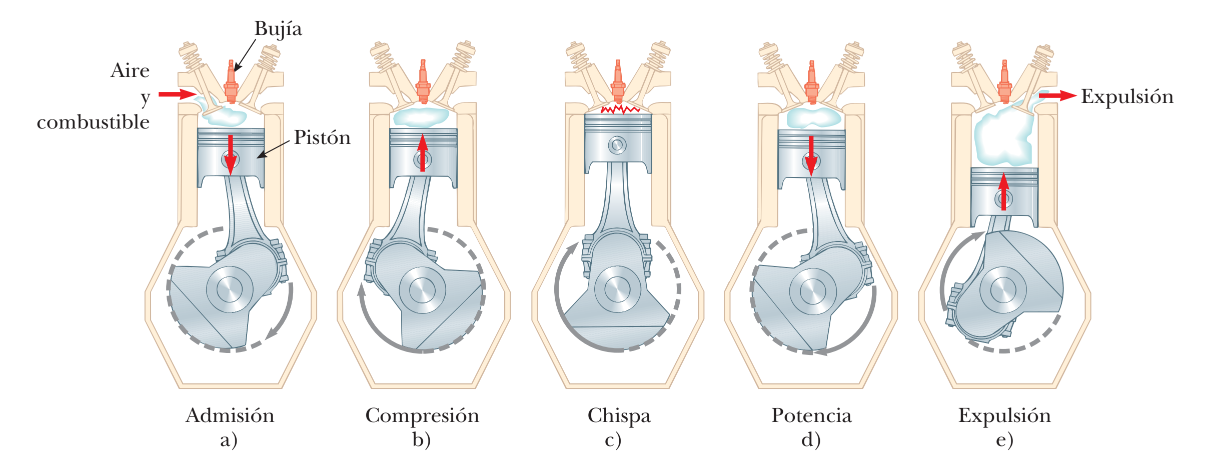


Figura 22.11 Ciclo de cuatro tiempos de un motor de gasolina convencional. Las flechas en el pistón indican la dirección de su movimiento durante cada proceso. a) En el tiempo de admisión, aire y combustible entran al cilindro. b) La válvula de admisión está cerrada y la mezcla aire–combustible se comprime mediante el pistón. c) La mezcla se enciende por la bujía, con el resultado de que la temperatura de la mezcla aumenta esencialmente a volumen constante. d) En el tiempo de trabajo, el gas se expande contra el pistón. e) Por último, los gases residuales se expulsan y el ciclo se repite.

3. En el proceso $B \to C$ la combustión se presenta cuando la bujía produce chispa (figura 22.11c). Este no es uno de los tiempos del ciclo porque se presenta en un intervalo de tiempo muy breve, mientras el pistón está en su posición más alta. La combustión representa una transformación rápida de energía potencial, almacenada en enlaces químicos en el combustible, a energía interna asociada con movimiento molecular, que se relaciona con temperatura. Durante este intervalo de tiempo, la presión y temperatura de la mezcla aumentan rápidamente, y la temperatura se eleva de T_B a T_C. Sin embargo, el volumen permanece aproximadamente constante debido al breve intervalo de tiempo. Como resultado, casi no se realiza trabajo en o por el gas. Este proceso se puede representar en el diagrama PV (figura 22.12) como aquel proceso en el que la energía $|Q_h|$ entra al sistema. (No obstante, en realidad, este proceso es una *conversión* de energía en el cilindro del proceso $O \to A$.)

4. En el *tiempo de trabajo* $C \to D$ (figura 22.11d), el gas se expande adiabáticamente de V_2 a V_1. Esta expansión causa la caída de temperatura de T_C a T_D. El gas realiza trabajo al empujar el pistón hacia abajo y el valor de este trabajo es igual al área bajo la curva CD.

5. En el proceso $D \to A$ (que no se muestra en la figura 22.11), una válvula de escape se abre conforme el pistón alcanza la parte más baja de su viaje y la presión cae súbitamente durante un breve intervalo de tiempo. Durante este intervalo el pistón está casi fijo y el volumen es aproximadamente constante. Desde el interior del cilindro se expulsa energía y continúa expulsándose durante el siguiente proceso.

6. En el proceso final, la *fase de escape* $A \to O$ (figura 22.11e), el pistón se mueve hacia arriba mientras la válvula de escape permanece abierta. Los gases residuales se expulsan a presión atmosférica y el volumen disminuye de V_1 a V_2. Después el ciclo se repite.

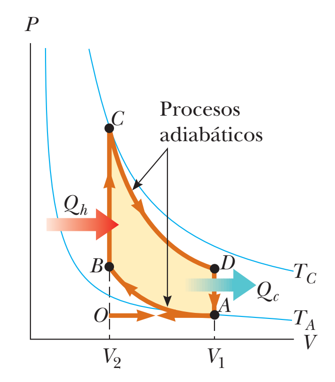


Figura 22.12 Diagrama PV para el ciclo de Otto, que representa aproximadamente los procesos que ocurren en un motor de combustión interna.

Si la mezcla aire–combustible se supone como un gas ideal, la eficiencia del ciclo de Otto es

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} \quad \text{(ciclo de Otto)} \qquad \textbf{(22.7)}$$

donde V_1/V_2 es la **relación de compresión** y γ es la relación de los calores específicos molares C_P/C_V para la mezcla combustible–aire. La ecuación 22.7, que se deduce en el ejemplo 22.5, muestra que la eficiencia aumenta conforme la relación de compresión aumenta. Para una relación de compresión representativa de 8 con $\gamma = 1.4$, la ecuación 22.7 predice una eficiencia teórica de 56% para un motor que funciona en el ciclo de Otto idealizado. Este valor es mucho mayor que el logrado en los motores reales (15% a 20%) debido a efectos como fricción, transferencia de energía por conducción a través de las paredes del cilindro y combustión incompleta de la mezcla aire–combustible.

Los motores diesel operan en un ciclo similar al ciclo de Otto, pero no emplean bujía. La relación de compresión para un motor diesel es mucho mayor que el de un motor de gasolina. El aire en el cilindro se comprime a un volumen muy pequeño y, como consecuencia, la temperatura del cilindro al final del tiempo de compresión es muy alta. En este punto, el combustible se inyecta en el cilindro. La temperatura es lo suficientemente alta como para que la mezcla combustible–aire se encienda sin la ayuda de una bujía. Los motores diesel son más eficientes que los motores de gasolina debido a sus mayores relaciones de compresión y las mayores temperaturas de combustión resultantes.

EJEMPLO 22.5 **Eficiencia del ciclo de Otto**

Demuestre que la eficiencia térmica de un motor que funciona en un ciclo de Otto idealizado (véase las figuras 22.11 y 22.12) se conoce por la ecuación 22.7. Trate la sustancia de trabajo como un gas ideal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie las figuras 22.11 y 22.12 para asegurarse de que comprendió el funcionamiento del ciclo de Otto.

Categorizar Como se vio en la figura 22.12, los procesos en el ciclo de Otto se clasifican como isovolumétrico y adiabático.

Analizar Modele la entrada y salida de energía en los procesos $B \rightarrow C$ y $D \rightarrow A$ que se presentan por calor. (En realidad, la mayor parte de la energía entra y sale por transferencia de materia conforme la mezcla combustible–aire entra y sale del cilindro.) Use la ecuación 21.8 para encontrar las transferencias de energía por calor para dichos procesos, que tienen lugar a volumen constante:

$$B \rightarrow C \quad |Q_h| = nC_V\,(T_C - T_B)$$
$$D \rightarrow A \quad |Q_c| = nC_V\,(T_D - T_A)$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación 22.2:

$$1)\quad e = \frac{W_{\text{máq}}}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Aplique la ecuación 21.20 a los procesos adiabáticos $A \rightarrow B$ y $C \rightarrow D$:

$$A \rightarrow B \quad T_A V_A{}^{\gamma-1} = T_B V_B{}^{\gamma-1}$$
$$C \rightarrow D \quad T_C V_C{}^{\gamma-1} = T_D V_D{}^{\gamma-1}$$

Resuelva estas ecuaciones para las temperaturas T_A y T_D, y note que $V_A = V_D = V_1$ y $V_B = V_C = V_2$:

$$2)\quad T_A = T_B\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_B\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$3)\quad T_D = T_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = T_C\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Reste la ecuación 2) de la ecuación 3) y reordene:

$$4)\quad \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 1):

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

Finalizar Esta expresión final es la ecuación 22.7.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.4

La entropía es abstracta

La entropía es una de las nociones más abstractas de la física, así que siga con mucho cuidado la explicación en ésta y las secciones siguientes. No confunda energía con entropía. Aun cuando los nombres suenen similares, los conceptos son muy diferentes.

22.6 Entropía

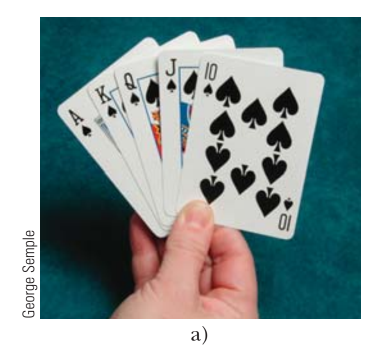
La ley cero de la termodinámica incluye el concepto de temperatura, y la primera ley el concepto de energía interna. Temperatura y energía interna son variables de estado: el valor de cada una sólo depende del estado termodinámico de un sistema, no del proceso que lo llevó a dicho estado. Otra variable de estado, relacionada con la segunda ley de la termodinámica, es la **entropía** S. En esta sección se define la entropía a escala macroscópica, como se expresó por primera vez por Clausius en 1865.

La entropía originalmente se formuló como un concepto útil en termodinámica. Sin embargo, su importancia creció conforme el campo de la mecánica estadística se desarrolló porque las técnicas analíticas de esta ciencia proporcionan un medio alternativo de interpretación y un significado más global de la entropía. En mecánica estadística el concepto de una sustancia se describe en términos del comportamiento estadístico de sus átomos y moléculas. Un hallazgo importante en estos estudios es que los **sistemas aislados tienden hacia el desorden y la entropía es una medida de este desorden**. Por ejemplo, considere las moléculas de un gas en el aire de su habitación. Si la mitad de las moléculas de gas tuviera vectores velocidad de igual magnitud dirigidos hacia la izquierda y la otra mitad vectores velocidad de la misma magnitud dirigidos hacia la derecha, la situación sería muy ordenada. Sin embargo, tal situación es extremadamente improbable. Si pudiera, vería que las moléculas se mueven azarosamente en todas direcciones, rebotan unas con otras y cambian de rapidez en las colisiones, y algunas van más rápido y otras más lento. Esta situación es enormemente desordenada.

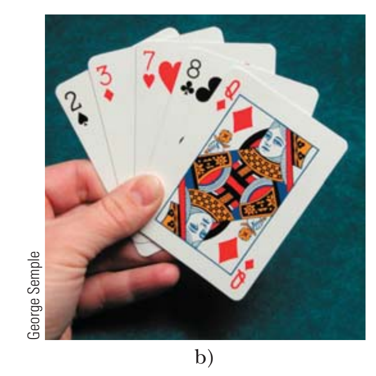
La causa de la tendencia de un sistema aislado hacia el desorden se explica fácilmente. Para hacerlo, distinga entre *microestados* y *macroestados* de un sistema. Un **microestado** es una configuración particular de los componentes individuales del sistema. Por ejemplo, la descripción de los vectores velocidad, ordenados, de las moléculas de aire en su habitación se refiere a un microestado particular, y el movimiento azaroso, más probable, es otro microestado, uno que representa desorden. Un **macroestado** es una descripción de las condiciones del sistema desde un punto de vista macroscópico y usa variables macroscópicas como presión, densidad y temperatura para gases.

Algunos microestados son posibles para algún macroestado determinado del sistema. Por ejemplo, el macroestado de un 4 en un par de dados se puede formar a partir de los posibles microestados 1–3, 2–2 y 3–1. Se supone que todos los microestados son igualmente probables. Sin embargo, cuando se examinan todos los macroestados posibles, se encuentra que los macroestados asociados con el desorden tienen muchos más microestados posibles que los asociados con el orden. Por ejemplo, sólo hay un microestado asociado con el macroestado de una flor imperial en una mano de póquer de cinco espadas, que se encuentran en orden de diez a as (figura 22.13a). Esta combinación de cartas es una mano enormemente ordenada. Sin embargo, muchos microestados (el conjunto de cinco cartas individuales en una mano de póquer) están asociados con una mano sin valor en póquer (figura 22.13b).

La probabilidad de que a uno le toque la flor imperial de espadas es exactamente la misma que la probabilidad de que toque cualquier mano sin valor *particular*. Sin embargo, ya que hay muchas manos sin valor, la probabilidad de un macroestado de una mano sin valor es mucho mayor que la probabilidad de un macroestado de la flor imperial de espadas.



a)



b)

Figura 22.13 a) Una flor imperial es una mano de póquer enormemente ordenada con baja probabilidad de ocurrencia. b) Una mano de póquer desordenada y sin valor. La probabilidad de que se presente esta mano *particular* es la misma que para la flor imperial de espadas. Sin embargo, hay tantas manos sin valor, que la probabilidad de que a uno le toque una mano sin valor es mucho mayor que la del reparto de una flor imperial de espadas.

Pregunta rápida 22.4 a) Suponga que selecciona cuatro cartas al azar de un mazo estándar de baraja y termina con un macroestado de cuatro dos. ¿Cuántos microestados se asocian con este macroestado? b) Suponga que levanta dos cartas y termina con un macroestado de dos ases. ¿Cuántos microestados se asocian con este macroestado?

También puede imaginar macroestados ordenados y macroestados desordenados en los procesos físicos, no sólo en juegos de dados y póquer. La probabilidad de que un sistema móvil en el tiempo de un macroestado ordenado a un macroestado desordenado es mucho mayor que la probabilidad de lo contrario, porque hay más microestados en un macroestado desordenado.

Si se considera un sistema y sus alrededores para incluir todo el Universo, el Universo siempre se mueve hacia un macroestado que corresponde a mayor desorden. Ya que la entropía es una medida de desorden, una manera alternativa de establecer esta ley es que **la entropía del Universo aumenta en todos los procesos reales**. Este enunciado es otra forma de enunciar la segunda ley de la termodinámica que, se puede demostrar, es equivalente a los enunciados de Kelvin–Planck y de Clausius.

◀ Enunciado de entropía de la segunda ley de la termodinámica

La formulación original de entropía en termodinámica involucra la transferencia de energía por calor durante un proceso reversible. Considere cualquier proceso infinitesimal en el que un sistema cambia de un estado de equilibrio a otro. Si dQ_r es la cantidad de energía transferida por calor cuando el sistema sigue una trayectoria reversible entre los estados, el cambio en entropía dS es igual a esta cantidad de energía para el proceso reversible dividida entre la temperatura absoluta del sistema:

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \tag{22.8}$$

Se considera que la temperatura es constante porque el proceso es infinitesimal. Ya que la entropía es una variable de estado, **el cambio en entropía durante un proceso sólo depende de los puntos extremos, por lo que es independiente de la trayectoria real seguida. En consecuencia, el cambio en entropía para un proceso irreversible se determina al calcular el cambio en entropía para un proceso reversible que conecta los mismos estados inicial y final**.

El subíndice r en la cantidad dQ_r es un recordatorio de que la energía transferida se medirá a lo largo de una trayectoria reversible aun cuando el sistema en realidad pueda

haber seguido alguna trayectoria irreversible. Cuando el sistema absorbe energía, dQ_r es positiva y la entropía del sistema aumenta. Cuando el sistema expulsa energía, dQ_r es negativa y la entropía del sistema disminuye. Note que la ecuación 22.8 no define la entropía sino, más bien, el *cambio* en entropía. Por tanto, la cantidad significativa para describir un proceso es el *cambio* en entropía.

Para calcular el cambio en entropía para un proceso *finito*, primero reconozca que T, por lo general, no es constante. En consecuencia, se debe integrar la ecuación 22.8:

Cambio en entropía para un proceso finito ▶



$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \quad \textbf{(22.9)}$$

Igual que con un proceso infinitesimal, el cambio en entropía ΔS de un sistema que va de un estado a otro tiene el mismo valor para *todas* las trayectorias que conectan los dos estados. Esto es, el cambio finito en entropía ΔS de un sistema sólo depende de las propiedades de los estados de equilibrio inicial y final. Por lo tanto, uno tiene libertad de elegir una trayectoria reversible sobre la cual evaluar la entropía en lugar de la trayectoria real, en tanto los estados inicial y final sean los mismos para ambas trayectorias. Este punto se explora más en la sección 22.7.

Pregunta rápida 22.5 Un gas ideal se lleva de una temperatura inicial T_i a una temperatura final mayor T_f a lo largo de dos trayectorias reversibles diferentes. La trayectoria A está a presión constante y la trayectoria B a volumen constante. ¿Cuál es la relación entre los cambios de entropía del gas para estas trayectorias? a) $\Delta S_A > \Delta S_B$, b) $\Delta S_A = \Delta S_B$, c) $\Delta S_A < \Delta S_B$.

EJEMPLO 22.6 Cambio en entropía: fusión

Un sólido que tiene un calor latente de fusión L_f se funde a una temperatura T_m. Calcule el cambio en entropía de esta sustancia cuando se funde una masa m de la sustancia.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que coloca la sustancia en un ambiente caliente, así la energía entra a la sustancia mediante calor. El proceso se puede invertir al colocar la sustancia en un ambiente frío, la energía sale de la sustancia por calor.

Categorizar Ya que la fusión tiene lugar a una temperatura fija, el proceso se clasifica como isotérmico.

Analizar Aplique la ecuación 20.7 a la ecuación 22.9 y note que la temperatura permanece fija:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_m}\int dQ_r = \frac{Q_r}{T_m} = \frac{mL_f}{T_m}$$

Finalizar Note que ΔS es positiva, lo que representa que al cubo de hielo se agrega energía.

¿Qué pasaría si? Suponga que no tiene disponible la ecuación 22.9 para calcular un cambio en entropía. ¿Cómo podría argumentar, a partir de la descripción estadística de la entropía, que los cambios en entropía deben ser positivos?

Respuesta Cuando un sólido se funde su entropía aumenta, porque las moléculas están mucho más desordenadas en el estado líquido de lo que están en el estado sólido. El valor positivo para ΔS también significa que la sustancia en su estado líquido no transfiere energía espontáneamente a los alrededores calientes ni se congela, porque hacerlo involucraría un aumento espontáneo en orden y una reducción en entropía.

Considere los cambios en entropía que se presentan en una máquina térmica de Carnot que funciona entre las temperaturas T_c y T_h. En un ciclo la máquina toma energía $|Q_h|$ del depósito caliente y expulsa energía $|Q_c|$ al depósito frío. Estas transferencias de energía sólo ocurren durante las porciones isotérmicas del ciclo de Carnot; por lo tanto, la temperatura constante se puede sacar enfrente del signo de integral en la ecuación 22.9. En tal caso la integral simplemente tiene el valor de la cantidad de energía total transferida por calor. En consecuencia, el cambio total en entropía para un ciclo es

$$\Delta S = \frac{|Q_h|}{T_h} - \frac{|Q_c|}{T_c}$$

donde el signo menos representa que la energía sale de la máquina. En el ejemplo 22.3 se demostró que, para una máquina de Carnot,

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h}$$

Al usar este resultado en la expresión anterior para ΔS, se encuentra que el cambio total en entropía para una máquina de Carnot que funciona en un ciclo es *cero*:

$$\Delta S = 0$$

Ahora considere un sistema que se lleva a través de un ciclo reversible arbitrario (no de Carnot). Ya que la entropía es una variable de estado y, en consecuencia, sólo depende de las propiedades de un estado de equilibrio conocido, se concluye que $\Delta S = 0$ para *cualquier* ciclo reversible. En general, esta condición se puede escribir como

$$\oint \frac{dQ_r}{T} = 0 \quad \text{(ciclo reversible)} \qquad \textbf{(22.10)}$$

donde el símbolo $\oint$ indica que la integración es sobre una trayectoria cerrada.

22.7 Cambios de entropía en procesos irreversibles

Por definición, un cálculo del cambio en entropía para un sistema requiere información acerca de una trayectoria reversible que conecte los estados de equilibrio inicial y final. Para calcular los cambios en entropía para procesos reales (irreversibles), recuerde que la entropía (al igual que la energía interna) sólo depende del *estado* del sistema: la entropía es una variable de estado y el cambio en entropía sólo depende de los estados inicial y final.

Usted puede calcular el cambio en entropía en algún proceso irreversible entre dos estados de equilibrio, al idear un proceso reversible (o serie de procesos reversibles) entre los dos estados y calcular $\Delta S = \int dQ_r/T$ para el proceso reversible. En procesos irreversibles es importante distinguir entre Q, la energía real que se transfiere en el proceso, y Q_r, la energía que se habría transferido por calor a lo largo de una trayectoria reversible. Sólo Q_r es el valor correcto a usar en el cálculo del cambio de entropía.

El cambio en entropía para un sistema y sus alrededores siempre es positivo para un proceso irreversible. En general, la entropía total, y por tanto el desorden, siempre aumenta en un proceso irreversible. Al tener en cuenta estas consideraciones, la segunda ley de la termodinámica se puede establecer del modo siguiente:

> La entropía total de un sistema aislado que se somete a un cambio no puede disminuir.

Además, **si el proceso es irreversible, la entropía total de un sistema aislado siempre aumenta. En un proceso reversible, la entropía total de un sistema aislado permanece constante**.

Cuando es un sistema que no está aislado de sus alrededores, recuerde que el aumento en entropía, descrito en la segunda ley, es la del sistema *y* sus alrededores. Cuando un sistema y sus alrededores interactúan en un proceso irreversible, el aumento en entropía de uno es mayor que la disminución en entropía del otro. Por tanto, **el cambio en entropía del Universo debe ser mayor que cero para un proceso irreversible e igual a cero para un proceso reversible**. A final de cuentas, la entropía del Universo debe alcanzar un valor máximo. En este valor, el Universo estará en un estado de temperatura y densidad uniformes. Todos los procesos físicos, químicos y biológicos cesarán porque un estado de des-

orden perfecto implica que no hay energía disponible para hacer trabajo. A este sombrío panorama a veces se le conoce como la muerte térmica del Universo.

Pregunta rápida 22.6 Cierto o falso. El cambio en entropía en un proceso adiabático debe ser cero porque $Q = 0$.

Cambio en entropía en conducción térmica

Ahora considere un sistema que consiste en un depósito caliente y un depósito frío en contacto térmico y aislados del resto del Universo. Durante un proceso la energía Q se transfiere por calor del depósito caliente a temperatura T_h al depósito frío a temperatura T_c. El proceso, como se describe, es irreversible, así que se debe encontrar un proceso reversible equivalente. Ya que la temperatura de un depósito no cambia durante el proceso, se puede sustituir el proceso real para cada depósito con un proceso isotérmico reversible en el que la misma cantidad de energía se transfiera por calor. En consecuencia, para un depósito, el cambio en entropía no depende si el proceso es reversible o irreversible.

Ya que el depósito frío absorbe energía Q, su entropía aumenta en Q/T_c. Al mismo tiempo, el depósito caliente pierde energía Q, así que su cambio en entropía es $-Q/T_h$. Como $T_h > T_c$, el aumento en entropía del depósito frío es mayor que la disminución en entropía del depósito caliente. Por lo tanto, el cambio en entropía del sistema (y del Universo) es mayor que cero:

$$\Delta S_U = \frac{Q}{T_c} + \frac{-Q}{T_h} > 0$$

Suponga que un objeto frío transfiere espontáneamente energía a un objeto caliente, en flagrante violación a la segunda ley. Esta transferencia de energía imposible se puede describir en términos de desorden. Antes de la transferencia, cierto grado de orden se asocia con las diferentes temperaturas de los objetos. Las moléculas del objeto caliente tienen una mayor energía promedio que las moléculas del objeto frío. Si la energía se transfiere espontáneamente del objeto frío al objeto caliente, el objeto frío se vuelve más frío durante un intervalo de tiempo y el objeto caliente se vuelve más caliente. La diferencia en energía molecular promedio se vuelve aún mayor, lo que representaría un aumento en orden para el sistema y una violación de la segunda ley.

En comparación, el proceso que ocurre naturalmente es la transferencia de energía del objeto caliente al objeto frío. En este proceso, la diferencia en energía molecular promedio disminuye, lo que representa una distribución más aleatoria de energía y un aumento en desorden.

Cambio en entropía en una expansión libre

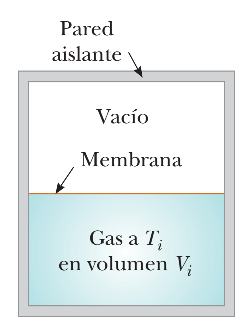


Figura 22.14 Expansión libre adiabática de un gas. Cuando se rompe la membrana que separa al gas de la región evacuada, el gas se expande libre e irreversiblemente. Como resultado, ocupa un mayor volumen final. El contenedor está térmicamente aislado de sus alrededores; por lo tanto, $Q = 0$.

Considere de nuevo la expansión libre adiabática de un gas que ocupa un volumen inicial V_i (figura 22.14). En esta situación, se rompe una membrana que separa al gas de una región evacuada y el gas se expande (irreversiblemente) a un volumen V_f. ¿Cuáles son los cambios en la entropía del gas y del Universo durante este proceso? El proceso ni es reversible ni cuasiestático. Como se demuestra en la sección 20.6, las temperaturas inicial y final del gas son las mismas.

Para aplicar la ecuación 22.9, no se puede tomar $Q = 0$, el valor para el proceso irreversible, sino que se debe encontrar Q_r; esto es: se debe encontrar una trayectoria reversible equivalente que comparta los mismos estados inicial y final. Una elección simple es una expansión isotérmica reversible en la que el gas empuja lentamente contra un pistón mientras entra energía al gas, por calor, desde un depósito para mantener constante la temperatura. Ya que T es constante en este proceso, la ecuación 22.9 produce

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_r$$

Para un proceso isotérmico, la primera ley de la termodinámica especifica que $\int_i^f dQ_r$ es igual al negativo del trabajo realizado sobre el gas durante la expansión de V_i a V_f, que

se conoce por la ecuación 20.14. Al usar este resultado, se encuentra que el cambio de entropía para el gas es

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad \textbf{(22.11)}$$

Ya que $V_f > V_i$, se concluye que ΔS es positivo. Este resultado positivo indica que tanto la entropía como el desorden del gas *aumentan* como resultado de la expansión adiabática irreversible.

Es fácil ver que el gas está más desordenado después de la expansión. En lugar de concentrarse en un espacio relativamente pequeño, las moléculas se dispersan sobre una región más grande.

Ya que la expansión libre tiene lugar en un contenedor aislado, no se transfiere energía por calor desde los alrededores. (Recuerde que la expansión isotérmica reversible sólo es un proceso *de reemplazo* que se usó para calcular el cambio de entropía para el gas; no es el proceso *real*.) Por lo tanto, la expansión libre no tiene efecto en los alrededores y el cambio de entropía de los alrededores es cero.

22.8 Entropía de escala microscópica

Como se vio, es posible abordar la entropía al apoyarse en conceptos macroscópicos. La entropía también se puede tratar desde un punto de vista microscópico a través del análisis estadístico de movimientos moleculares. Use un modelo microscópico para investigar una vez más la expansión libre de un gas ideal, que se explicó desde un punto de vista macroscópico en la sección 22.7.

En la teoría cinética de los gases las moléculas de gas se representan como partículas con movimiento aleatorio. Suponga que el gas inicialmente está confinado al volumen V_i que se muestra en la figura 22.14. Cuando la membrana se remueve, las moléculas al final se distribuyen a través del mayor volumen V_f de todo el contenedor. Para una distribución uniforme del gas en el volumen, hay un gran número de microestados equivalentes, y la entropía del gas se puede relacionar con el número de microestados que corresponden a un macroestado determinado.

Cuente el número de microestados al considerar la variedad de ubicaciones moleculares disponibles a las moléculas. En el instante después de que se quita el separador (y antes de que las moléculas hayan tenido oportunidad de correr hacia la otra mitad del contenedor), todas las moléculas están en el volumen inicial. Suponga que cada molécula ocupa algún volumen microscópico V_m. El número total de posibles ubicaciones de una sola molécula en un volumen macroscópico inicial V_i es la razón $w_i = V_i/V_m$, que es un número enorme. Aquí se usa w_i para representar el número de *formas* en las que las moléculas se pueden colocar en el volumen inicial, o el número de microestados, que es equivalente al número de ubicaciones disponibles. Se supone que las probabilidades de que una molécula ocupe alguna de estas ubicaciones son iguales.

Conforme más moléculas se agregan al sistema, se multiplica el número de posibles formas en que las moléculas se pueden ubicar en el volumen. Por ejemplo, si considera dos moléculas, por cada posible colocación de la primera, todas las posibles colocaciones de la segunda están disponibles. En consecuencia, hay w_i formas de ubicar la primera molécula y, por cada forma, hay w_i formas de ubicar la segunda molécula. El número total de formas de ubicar las dos moléculas es $w_i w_i = w_i^2$.

Si desprecia la probabilidad, muy pequeña, de tener dos moléculas ocupando la misma ubicación, cada molécula puede ir en alguna de las V_i/V_m ubicaciones y, por eso, el número de formas de ubicar N moléculas en el volumen se convierte en $W_i = w_i^N = (V_i/V_m)^N$. ($W_i$ no debe confundirse con trabajo.) De igual modo, cuando el volumen aumenta a V_f, el número de formas de ubicar N moléculas aumenta a $W_f = w_f^N = (V_f/V_m)^N$. La proporción del número de formas de colocar las moléculas en el volumen para las configuraciones inicial y final es

$$\frac{W_f}{W_i} = \frac{(V_f/V_m)^N}{(V_i/V_m)^N} = \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^N$$

Tomar el logaritmo natural de esta ecuación y multiplicar por la constante de Boltzman produce

$$k_B \ln\left(\frac{W_f}{W_i}\right) = k_B \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^N = nN_A k_B \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

donde se usó la igualdad $N = nN_A$. A partir de la ecuación 19.11 sabe que $N_A k_B$ es la constante universal de los gases R; debido a eso, esta ecuación se escribe como

$$k_B \ln W_f - k_B \ln W_i = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \tag{22.12}$$

De la ecuación 22.11 si un gas se somete a una expansión libre de V_i a V_f, el cambio en entropía es

$$S_f - S_i = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \tag{22.13}$$

Note que los lados derechos de las ecuaciones 22.12 y 22.13 son idénticos. Por lo tanto, a partir de los lados izquierdos, se hace la siguiente conexión importante entre entropía y el número de microestados para un macroestado conocido:

Entropía (definición microscópica) ▶

$$S \equiv k_B \ln W \tag{22.14}$$

Mientras más microestados haya que correspondan a un macroestado determinado, mayor será la entropía de dicho macroestado. Como se explicó anteriormente, existen muchos más microestados asociados con macroestados desordenados que con macroestados ordenados. Por lo tanto, la ecuación 22.14 indica matemáticamente que **la entropía es una medida del desorden**. Aunque la discusión utilizó el ejemplo específico de la expansión libre de un gas ideal, un desarrollo más riguroso de la interpretación estadística de la entropía conduciría a la misma conclusión.

También se estableció que microestados individuales son igualmente probables. Sin embargo, ya que hay muchos más microestados asociados con un macroestado desordenado que con un macroestado ordenado, un macroestado desordenado es mucho más probable que uno ordenado.

Explore este concepto al considerar 100 moléculas en un contenedor. En cualquier momento determinado la probabilidad de que una molécula esté en la parte izquierda del contenedor, que se muestra en la figura 22.15a, como resultado de movimiento aleatorio es $\frac{1}{2}$. Si hay dos moléculas, como se muestra en la figura 22.15b, la probabilidad de que ambas estén en la parte izquierda es $(\frac{1}{2})^2$, o 1 en 4. Si hay tres moléculas (figura 22.15c), la probabilidad de que todas ellas estén en la porción izquierda al mismo tiempo es $(\frac{1}{2})^3$, o 1 en 8. Para 100 moléculas que se mueven independientemente, la probabilidad de que las 50 más rápidas se encuentren en la parte izquierda en algún momento es $(\frac{1}{2})^{50}$. Del mismo modo, la probabilidad de que las 50 moléculas restantes, más lentas, se encuentren en la parte derecha en algún momento es $(\frac{1}{2})^{50}$. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar esta separación rápido–lento como resultado de movimiento aleatorio es el producto $(\frac{1}{2})^{50}(\frac{1}{2})^{50} = (\frac{1}{2})^{100}$, que corresponde aproximadamente a 1 en 10^{30}. Cuando este cálculo se extrapola de 100 moléculas al número en 1 mol de gas (6.02×10^{23}), ¡se encuentra que el arreglo ordenado es *extremadamente* improbable!

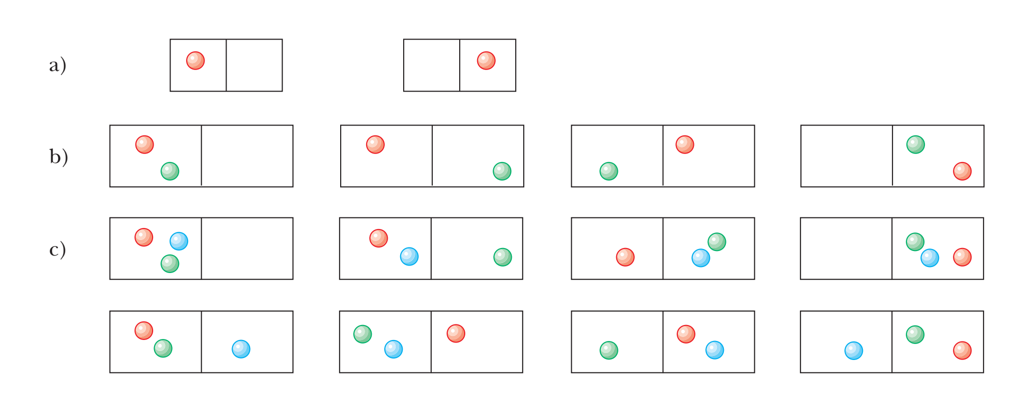


Figura 22.15 a) Una molécula en un contenedor tiene una oportunidad en dos de estar en el lado izquierdo. b) Dos moléculas tienen una oportunidad en cuatro de estar en el lado izquierdo al mismo tiempo. c) Tres moléculas tienen una oportunidad en ocho de estar en el lado izquierdo al mismo tiempo.

EJEMPLO 22.7 **¡A jugar canicas!**

Suponga que tiene un bolsa de 100 canicas, de las cuales 50 son rojas y 50 son verdes. Se le permite extraer cuatro canicas de la bolsa, de acuerdo con las siguientes reglas: Extraiga una canica, registre su color y regrésela a la bolsa. Agite la bolsa y luego extraiga otra canica. Continúe este proceso hasta que haya extraído y regresado cuatro canicas. ¿Cuáles son los macroestados posibles para este conjunto de eventos? ¿Cuál es el macroestado más probable? ¿Cuál es el macroestado menos probable?

TABLA 22.1

Posibles resultados de extraer cuatro canicas de una bolsa

Macroestado	Posibles microestados	Número total de microestados
Todas R	RRRR	1
1V, 3R	RRRV, RRVR, RVRR, VRRR	4
2V, 2R	RRVV, RVRV, VRRV, RVVR, VRVR, VVRR	6
3V, 1R	VVVR, VVRV, VRVV, RVVV	4
Todas V	VVVV	1

SOLUCIÓN

Ya que cada canica se regresa a la bolsa antes de que la siguiente se extraiga y luego la bolsa se agita, la probabilidad de extraer una canica roja siempre es la misma que la probabilidad de extraer una verde. En la tabla 22.1 se muestran todos los posibles microestados y macroestados. Como indica esta tabla, sólo hay una forma de extraer un macroestado de cuatro canicas rojas, así que sólo hay un microestado para dicho macroestado. Sin embargo, hay cuatro posibles microestados que corresponden al macroestado de una canica verde y tres canicas rojas, seis microestados que corresponden a dos canicas verdes y dos canicas rojas, cuatro microestados que corresponden a tres canicas verdes y una canica roja, y un microestado que corresponde a cuatro canicas verdes. El macroestado más probable, y más desordenado (dos canicas rojas y dos canicas verdes), corresponde al mayor número de microestados. Los macroestados menos probables y más ordenados (cuatro canicas rojas o cuatro canicas verdes) corresponden al menor número de microestados.

EJEMPLO 22.8 **Expansión libre adiabática: una última vez**

Verifique que los planteamientos macroscópico y microscópico para el cálculo de la entropía conducen a la misma conclusión para la expansión libre adiabática de un gas ideal. Suponga que un gas ideal se expande a cuatro veces su volumen inicial. Como se vio para este proceso, las temperaturas inicial y final son las mismas.

A) Con una aproximación macroscópica, calcule el cambio en entropía para el gas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 22.14, que es un diagrama del sistema antes de la expansión libre adiabática. Imagine romper la membrana de modo que el gas se mueve hacia el área evacuada. La expansión es irreversible.

Categorizar Es posible sustituir el proceso irreversible con un proceso isotérmico reversible entre los mismos estados inicial y final. Este enfoque es macroscópico, de modo que se usan variables de estado termodinámico como P, V y T.

Analizar Aplique la ecuación 22.11 para evaluar el cambio en entropía:

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nR \ln\left(\frac{4V_i}{V_i}\right) = nR \ln 4$$

B) Mediante consideraciones estadísticas, calcule el cambio de entropía para el gas y demuestre que concuerda con la respuesta que obtuvo en el inciso A).

SOLUCIÓN

Categorizar Este enfoque es microscópico, de modo que se usan variables relacionadas con las moléculas individuales.

Analizar El número de microestados disponibles a una sola molécula en el volumen inicial V_i es $w_i = V_i/V_m$. Use este número para encontrar el número de microestados disponibles para N moléculas:

$$W_i = w_i^N = \left(\frac{V_i}{V_m}\right)^N$$

Encuentre el número de microestados disponibles para N moléculas en el volumen final $V_f = 4V_i$:

$$W_f = \left(\frac{V_f}{V_m}\right)^N = \left(\frac{4V_i}{V_m}\right)^N$$

Aplique la ecuación 22.14 para encontrar el cambio de entropía:

$$\Delta S = k_B \ln W_f - k_B \ln W_i = k_B \ln \left(\frac{W_f}{W_i}\right)$$

$$= k_B \ln \left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^N = k_B \ln (4^N) = Nk_B \ln 4 = nR \ln 4$$

Finalizar La respuesta es la misma que para el inciso A), que trata con parámetros macroscópicos.

¿Qué pasaría si? En el inciso A) se usó la ecuación 22.11, que se basó en un proceso isotérmico reversible que conecta los estados inicial y final. ¿Llegaría al mismo resultado si elige un proceso reversible diferente?

Respuesta *Debe* llegar al mismo resultado porque la entropía es una variable de estado. Por ejemplo, considere los procesos de dos etapas en la figura 22.16a: una expansión adiabática reversible de V_i a $4V_i$, ($A \rightarrow B$) en que la temperatura cae de T_1 a T_2, y un proceso isovolumétrico reversible ($B \rightarrow C$) que lleva al gas de vuelta a la temperatura inicial T_1. Durante el proceso adiabático reversible, $\Delta S = 0$ porque $Q_r = 0$.

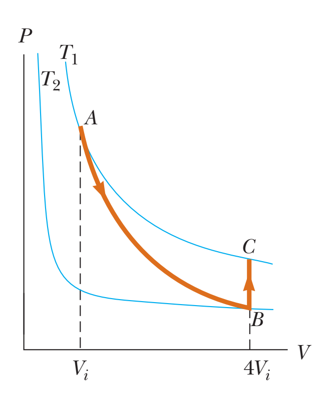


Figura 22.16 (Ejemplo 22.8) Un gas se expande a cuatro veces su volumen inicial y regresa a la temperatura inicial mediante un proceso de dos etapas.

Para el proceso isovolumétrico reversible ($B \rightarrow C$), use la ecuación 22.9:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_2}^{T_1} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

Encuentre la relación de temperatura T_2 a T_1 de la ecuación 21.20 para el proceso adiabático:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^{\gamma-1} = (4)^{\gamma-1}$$

Sustituya para encontrar ΔS:

$$\Delta S = nC_V \ln (4)^{\gamma-1} = nC_V (\gamma - 1) \ln 4$$

$$= nC_V \left(\frac{C_P}{C_V} - 1\right) \ln 4 = n(C_P - C_V) \ln 4 = nR \ln 4$$

y de hecho obtiene el mismo resultado exacto para el cambio en entropía.

Resumen

DEFINICIONES

La **eficiencia térmica** e de una máquina térmica es

$$e \equiv \frac{W_{\text{máq}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} \qquad \textbf{(22.2)}$$

Desde un punto de vista microscópico, la entropía de un cierto macroestado se define como

$$S \equiv k_B \ln W \qquad \textbf{(22.14)}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y W es el número de microestados del sistema que corresponden al macroestado.

En un proceso **reversible**, el sistema puede regresar a su condición inicial a lo largo de la misma trayectoria sobre un diagrama PV y cada punto a lo largo de su trayectoria es un estado de equilibrio. Un proceso que no satisface este requisito es **irreversible**.

(*continúa*)

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Una **máquina térmica** es un dispositivo que toma energía por calor y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. El trabajo neto realizado por una máquina térmica al llevar una sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico ($\Delta E_{\text{int}} = 0$) es

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| \quad \textbf{(22.1)}$$

donde $|Q_h|$ es la energía que se toma de un depósito caliente y $|Q_c|$ es la energía que se expulsa a un depósito frío.

La **segunda ley de la termodinámica** establece lo siguiente:

- Es imposible construir una máquina térmica que, al funcionar en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor desde un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo (enunciado de Kelvin–Planck).
- Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea la transferencia continua de energía, mediante calor, de un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo (enunciado de Clausius).

El **teorema de Carnot** establece que ninguna máquina térmica real que funcione (irreversiblemente) entre las temperaturas T_c y T_h puede ser más eficiente que una máquina que funcione reversiblemente en un ciclo de Carnot entre las mismas dos temperaturas.

La eficiencia térmica de una máquina térmica que funciona en el ciclo de Carnot es

$$e_{\text{C}} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad \textbf{(22.6)}$$

La segunda ley de la termodinámica afirma que, cuando se presentan procesos reales (irreversibles), el grado de desorden en el sistema y los alrededores, aumenta. Cuando se presenta un proceso en un sistema aislado, el estado del sistema se vuelve más desordenado. La medida de desorden en un sistema se llama **entropía** S. Debido a eso, incluso otra forma de la segunda ley se puede establecer del modo siguiente:

- La entropía del Universo aumenta en todos los procesos reales.

El **cambio en entropía** dS de un sistema durante un proceso entre dos estados de equilibrio infinitesimalmente separados es

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \quad \textbf{(22.8)}$$

donde dQ_r es la transferencia de energía por calor para el sistema para un proceso reversible que conecta los estados inicial y final.

El cambio de entropía de un sistema durante un proceso arbitrario entre un estado inicial y un estado final es

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \quad \textbf{(22.9)}$$

El valor de ΔS para el sistema es el mismo para todas las trayectorias que conectan los estados inicial y final. El cambio de entropía para un sistema que se somete a algún proceso reversible cíclico es cero, y cuando ocurre tal proceso, la entropía del Universo permanece constante.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Cuáles son algunos factores que afectan la eficiencia de los motores automotrices?

2. **O** Considere procesos cíclicos completamente caracterizados por cada una de las siguientes entradas y salidas de energía neta. En cada caso, las transferencias de energía que se mencionan son las *únicas* que ocurren. Clasifique cada proceso como a) posible, b) imposible de acuerdo con la primera ley de la termodinámica, c) imposible de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica o d) imposible de acuerdo con la primera y segunda leyes. **i)** Entrada de 5 J de trabajo y salida de 4 J de trabajo. **ii)** Entrada de 5 J de trabajo y salida de 5 J de energía transferida por calor. **iii)** Entrada de 5 J de energía transferida por transmisión eléctrica y salida de 6 J de trabajo. **iv)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 5 J de energía transferida por calor. **v)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 5 J de trabajo. **vi)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 3 J de trabajo más 2 J de energía transferida por calor. **vii)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 3 J de trabajo más 2 J de energía transferida por ondas mecánicas. **viii)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 3 J de trabajo más 1 J de energía transferida por radiación electromagnética.

3. Una turbina impulsada por vapor es uno de los componentes principales de una planta eléctrica. ¿Por qué es ventajoso tener la temperatura del vapor tan alta como sea posible?

4. ¿La segunda ley de la termodinámica contradice o corrige la primera ley? Argumente su respuesta.

5. "La primera ley de la termodinámica dice que en realidad no se puede ganar, y la segunda ley dice que ni siquiera puede quedar empatado." Explique cómo se aplica este enunciado a un dispositivo o proceso particular; además argumente contra el enunciado.

6. **O** La flecha *OA* en el diagrama *PV* que se muestra en la figura P22.6 representa una expansión adiabática reversible de un gas ideal. La misma muestra de gas, a partir del mismo estado *O*, ahora experimenta una expansión libre adiabática hacia el mismo volumen final. ¿Qué punto sobre el diagrama podría representar el estado final del gas? a) el mismo punto *A* como para la expansión reversible, b) el punto *B*, c) el punto *C*, d) cualquiera de estas opciones, e) ninguna de estas opciones.

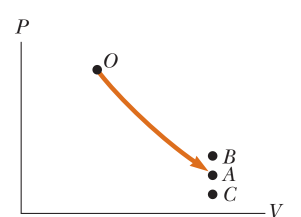


Figura P22.6

7. Dé varios ejemplos de procesos irreversibles que se presentan en la naturaleza. Proporcione un ejemplo de un proceso en la naturaleza que sea casi reversible.

8. El dispositivo que se muestra en la figura P22.8, llamado convertidor termoeléctrico, usa una serie de celdas semiconductoras para transformar energía interna en energía potencial eléctrica, que se estudiará en el capítulo 25. En la fotografía a la izquierda, ambas patas del dispositivo están a la misma temperatura y no se produce energía potencial eléctrica. Sin embargo, cuando una pata está a una temperatura mayor que la otra, como se muestra en la fotografía de la derecha, se produce energía potencial eléctrica conforme el dispositivo extrae energía del depósito caliente y activa un pequeño motor eléctrico. a) ¿Por qué es necesaria la diferencia en temperatura para producir energía potencial eléctrica en esta demostración? b) ¿En qué sentido este intrigante experimento demuestra la segunda ley de la termodinámica?



Cortesía de PASCO Scientific Company



Cortesía de PASCO Scientific Company

Figura P22.8

9. **O** Suponga que usted llega a casa, un pequeño departamento en un edificio bien aislado cálido en una tarde de verano. La tienda de electrodomésticos le acaba de entregar su nuevo acondicionador de aire, pero usted está muy cansado para instalarlo de manera adecuada. Hasta que el sol se ponga, hará más calor afuera que adentro, así que no abre una ventana. **i)** Saca el acondicionador de su caja, lo pone en la mesa del comedor, lo conecta y enciende. ¿Qué ocurre con la temperatura del departamento? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Permanece constante. **ii)** Suponga que, en vez de ello, saca rápidamente todos los cubos de hielo y vegetales del congelador del refrigerador, los pone en un tazón sobre la mesa y cierra el refrigerador. ¿Qué ocurre ahora con la temperatura del departamento? Elija entre las mismas posibilidades.

10. **O i)** La segunda ley de la termodinámica afirma que el coeficiente de realización de un refrigerador debe ser a) menor que 1, b) menor que o igual a 1, c) mayor que o igual a 1, d) menor que infinito o e) mayor que 0. **ii)** ¿Cuál debe ser el coeficiente de realización de una bomba de calor, según la segunda ley de la termodinámica? Elija entre las mismas posibilidades.

11. Explique tres ejemplos diferentes, que sean comunes, de procesos naturales con un aumento en entropía. Asegúrese de explicar todas las partes de cada sistema.

12. Explique el cambio de entropía de un gas que se expande a) a temperatura constante y b) adiabáticamente.

13. **O** Ocurre un proceso termodinámico en el que la entropía de un sistema cambia en -8 J/K. De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, ¿qué puede concluir acerca del cambio de entropía del ambiente? a) Debe ser -8 J/K o menor. b) Debe ser igual a -8 J/K. c) Debe estar entre -8 J/K y 0. d) Debe ser 0. e) Debe estar entre 0 y $+8$ J/K. f) Debe ser igual a $+8$ J/K. g) Debe ser $+8$ J/K o más. h) Se necesitaría conocer la naturaleza del proceso para llegar a una conclusión. i) Es imposible que el sistema tenga un cambio de entropía negativo.

14. **O** Una muestra de un gas monoatómico ideal está contenido en un cilindro con un pistón. Su estado se representa mediante el punto en el diagrama *PV* que se muestra en la figura P22.14. Las flechas de la *A* a la *H* representan procesos isotérmicos, isobáricos, isovolumétricos y adiabáticos que experimenta la muestra. En cada compresión y expansión el volumen cambia en un factor de 2. a) Clasifique estos procesos de acuerdo con el trabajo $W_{\text{máq}} = +\int P\,dV$ realizado por el gas desde el máximo valor positivo hasta el valor negativo de mayor magnitud. En su clasificación, muestre cualquier caso de igualdad. b) Clasifique los mismos procesos de acuerdo con el cambio en energía interna del gas, desde el mayor valor positivo hasta el valor negativo de mayor magnitud. c) Clasifique los mismos procesos de acuerdo con la energía transferida a la muestra por calor.

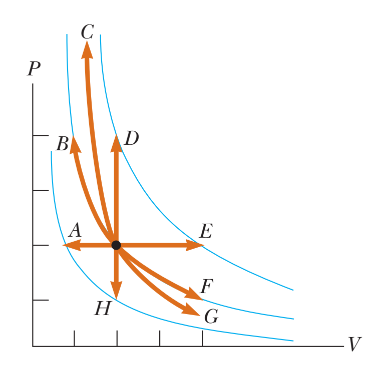


Figura P22.14

15. **O** Considere los procesos que se muestran en la figura P22.14 y que se describen en la pregunta 14. Clasifique los procesos del *A* al *H* de acuerdo con el cambio de entropía del gas ideal monoatómico, desde el mayor valor positivo hasta el valor negativo de mayor magnitud.

16. El escape de energía en una estación de generación eléctrica impulsada por carbón, se realiza al "enfriar el agua" en el lago Ontario. El agua queda caliente, según las criaturas vivientes del lago. Algunas de ellas se congregan alrededor del puerto de salida y pueden impedir que circule el agua. a) Use la teoría de las máquinas térmicas para explicar por qué esta acción puede reducir la salida de potencia eléctrica de la estación. b) Un ingeniero dice que la salida eléctrica se reduce debido a "mayor contrapresión en las aspas de la turbina". Comente acerca de la precisión de este enunciado.

17. **O** Suponga que una muestra de gas ideal está a temperatura ambiente. ¿Qué acción hará que la entropía de la muestra aumente? a) transferencia de energía por calor hacia él, b) transferencia de energía hacia él irreversiblemente por calor, c) hacer trabajo sobre él, d) aumentar o su temperatura o su volumen, sin dejar que la otra variable disminuya, e) ninguna de estas opciones.

18. Suponga que su compañero de cuarto es el "Sr. Limpio" y pone en orden su muy sucia habitación después de una gran fiesta. Dado que su compañero de cuarto crea más orden, ¿este proceso representa una violación de la segunda ley de la termodinámica?

19. "La energía es el ama del Universo y la entropía es su sombra." Al escribir para un auditorio, argumente a favor de este enunciado con ejemplos. Además, argumente para la visión de que la entropía es como un decisivo ejecutivo práctico que determina lo que ocurrirá, mientras que la energía es como un miserable contador detrás de la puerta que dice cuán poco se puede permitir. (Arnold Sommerfeld sugirió la idea para esta pregunta.)

20. Si usted agita un frasco lleno con frijoles de grenetina de diferentes tamaños, los frijoles de grenetina más grandes tienden a aparecer cerca de la parte superior y los más pequeños tienden a caer al fondo. ¿Por qué? ¿Este proceso viola la segunda ley de la termodinámica?

Problemas

Sección 22.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica

1. Una máquina térmica admite 360 J de energía de un depósito caliente y realiza 25.0 J de trabajo en cada ciclo. Encuentre a) la eficiencia de la máquina y b) la energía expulsada al depósito frío en cada ciclo.

2. Un arma es una máquina térmica. En particular, es una máquina de pistón de combustión interna que no funciona en un ciclo, sino que se aparta durante su proceso de expansión adiabática. Cierta arma consiste de 1.80 kg de hierro. Dispara una bala de 2.40 g a 320 m/s con una eficiencia energética de 1.10%. Suponga que el cuerpo del arma absorbe toda la salida de energía, el otro 98.9%, y aumenta uniformemente en temperatura durante un breve intervalo de tiempo, antes de perder alguna energía por calor en el ambiente. Encuentre su aumento de temperatura.

3. Una máquina térmica tiene una potencia de salida mecánica de 5.00 kW y una eficiencia de 25.0%. La máquina expulsa 8 000 J de energía de escape en cada ciclo. Encuentre a) la energía que admite durante cada ciclo y b) el intervalo de tiempo por cada ciclo.

4. Un motor de gasolina multicilindro en un avión, que funciona a 2 500 rev/min, admite 7.89×10^3 J de energía y expulsa 4.58×10^3 J por cada revolución del cigüeñal. a) ¿Cuántos litros de combustible consume en 1.00 h de operación, si el calor de combustión es 4.03×10^7 J/L? b) ¿Cuál es la potencia mecánica de salida de la máquina? Ignore la fricción y exprese la respuesta en caballos de potencia. c) ¿Cuál es el momento de torsión que ejerce el cigüeñal sobre la carga? d) ¿Qué potencia debe transferir afuera del motor el sistema de escape y enfriamiento?

5. Suponga que una máquina térmica se conecta a dos depósitos de energía, uno es una alberca de aluminio fundido (660°C) y el otro un bloque de mercurio sólido (−38.9°C). La máquina participa al congelar 1.00 g de aluminio y fundir 15.0 g de mercurio durante cada ciclo. El calor de fusión del aluminio es 3.97×10^5 J/kg; el calor de fusión del mercurio es 1.18×10^4 J/kg. ¿Cuál es la eficiencia de esta máquina?

Sección 22.2 Bombas de calor y refrigeradores

6. Un refrigerador tiene un coeficiente de realización igual a 5.00. El refrigerador admite 120 J de energía de un depósito frío en cada ciclo. Encuentre a) el trabajo requerido en cada ciclo y b) la energía expulsada al depósito caliente.

7. Un refrigerador tiene un coeficiente de realización de 3.00. El compartimiento de charolas de hielo está a −20.0°C, y la temperatura ambiente es de 22.0°C. El refrigerador puede convertir 30.0 g de agua a 22.0°C a 30.0 g de hielo a −20.0°C cada minuto. ¿Qué potencia de entrada se requiere? Proporcione su respuesta en watts.

8. ● En 1993 el gobierno estadounidense instituyó el requisito de que todos los acondicionadores de aire que se vendan en Estados Unidos deben tener un factor de eficiencia energética (EER, por sus siglas en inglés) de 10 o mayor. El EER se define como la relación de la capacidad de enfriamiento del acondicionador de aire, medido en unidades térmicas británicas por hora, o Btu/h, a su requerimiento de energía eléctrica en watts. a) Convierta el EER de 10.0 a forma adimensional, con el uso de la conversión 1 Btu = 1 055 J. b) ¿Cuál es el nombre adecuado de esta cantidad adimensional? c) Alrededor de 1970 era común encontrar acondicionadores de aire de habitación con EER de 5 o menos. Establezca la comparación de los costos de operación para acondicionadores de aire de 10 000 Btu/h con EER de 5.00 y 10.0. Suponga que cada acondicionador de aire opera durante 1 500 h durante el verano en una ciudad donde la electricidad cuesta 10.0¢ por kWh.

Sección 22.3 Procesos reversibles e irreversibles

Sección 22.4 La máquina de Carnot

9. Una de las máquinas térmicas más eficientes jamás construida es una turbina de vapor en el valle del río Ohio, que funciona entre 430°C y 1 870°C con energía del carbón de Virginia del

oeste para producir electricidad para el medio oeste. a) ¿Cuál es su máxima eficiencia teórica? b) La eficiencia real del motor es 42.0%. ¿Cuánta potencia mecánica entrega la máquina si admite 1.40×10^5 J de energía cada segundo de su depósito caliente?

10. Una máquina de Carnot tiene una potencia de salida de 150 kW. La máquina funciona entre dos depósitos a 20.0°C y 500°C. a) ¿Cuánta energía admite por hora? b) ¿Cuánta energía pierde por hora en su descarga?

11. ● Una máquina funciona en un ciclo y admite energía por calor a 180°C y y lo pone de escape a 100°C. En cada ciclo la descarga de energía es 2.00×10^4 J y la máquina hace 1.50×10^3 J de trabajo. Explique cómo se compara la eficiencia real de la máquina con la eficiencia de una máquina reversible que funciona entre las mismas temperaturas.

12. Una máquina térmica de Carnot funciona entre las temperaturas T_h y T_c. a) Si $T_h = 500$ K y $T_c = 350$ K, ¿cuál es la eficiencia de la máquina? b) ¿Cuál es el cambio en su eficiencia por cada grado de aumento en T_h sobre 500 K? c) ¿Cuál es el cambio en su eficiencia por cada grado de disminución en T_c por abajo de 350 K?

13. Un gas ideal circula a través de un ciclo de Carnot. La expansión isotérmica se presenta a 250°C y la compresión isotérmica tiene lugar a 50.0°C. El gas admite 1 200 J de energía del depósito caliente durante la expansión isotérmica. Encuentre a) la energía expulsada al depósito frío en cada ciclo y b) el trabajo neto realizado por el gas en cada ciclo.

14. Una planta eléctrica funciona a un 32.0% de eficiencia durante el verano, cuando el agua de mar que utiliza para enfriar está a 20.0°C. La planta usa vapor a 350°C para impulsar las turbinas. Si la eficiencia de la planta cambia en la misma proporción que la eficiencia ideal, ¿cuál es la eficiencia de la planta en el invierno, cuando el agua de mar está a 10.0°C?

15. A una turbina entra Argón en una relación de 80.0 kg/min, una temperatura de 800°C y una presión de 1.50 MPa. Se expande adiabáticamente mientras empuja sobre las aspas de la turbina y sale a presión de 300 kPa. a) Calcule su temperatura en la salida. b) Calcule la potencia de salida (máxima) de la turbina que gira. c) La turbina es un componente de un modelo de máquina de turbina de gas a ciclo cerrado. Calcule la máxima eficiencia de la máquina.

16. ● Se ha propuesto una planta eléctrica que usaría el gradiente de temperatura del océano. El sistema funcionará entre 20.0°C (temperatura del agua superficial) y 5.00°C (temperatura del agua a una profundidad de aproximadamente 1 km). a) ¿Cuál sería la máxima eficiencia de tal sistema? b) Si la potencia eléctrica de salida de la planta fuese de 75.0 MW, ¿por hora, cuánta energía admite del depósito caliente? c) En vista de su respuesta del inciso a), explique si cree que tal sistema vale la pena. Note que el "combustible" es gratuito.

17. ● Suponga que construye un dispositivo de dos máquinas térmicas y que la salida de energía de escape de una se suministra como la energía de entrada para la segunda. Se dice que las dos máquinas funcionan *en serie*. Sean e_1 y e_2 las representaciones de las eficiencias de las dos máquinas. a) La eficiencia global del dispositivo de dos máquinas se define como la salida de trabajo total dividida entre la energía que se pone en la primera máquina por calor. Demuestre que la eficiencia global se conoce por

$$e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$$

b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que las dos máquinas son máquinas de Carnot. La máquina 1 funciona entre las temperaturas T_h y T_i. El gas en la máquina 2 varía en temperatura entre T_i y T_c. En términos de las temperaturas, ¿cuál es la eficiencia de la combinación de máquinas? ¿A partir del uso de dos máquinas resulta una mejoría en la eficiencia neta en lugar de usar sólo una? c) ¿Qué valor de la temperatura intermedia T_i resulta en que cada una de las dos máquinas en serie realice igual trabajo? d) ¿Qué valor de T_i resulta en cada una de las dos máquinas en serie que tienen la misma eficiencia?

18. ● Una estación para generar energía eléctrica se diseña para dar una potencia de salida eléctrica de 1.40 MW con el uso de una turbina a dos tercios de la eficiencia de una máquina de Carnot. La descarga de energía se transfiere por calor a una torre de enfriamiento a 110°C. a) Encuentre la rapidez de descarga de energía por calor, como función de la temperatura de combustión T_h. Si el hogar se modifica para funcionar más caliente con el uso de tecnología de combustión más avanzada, ¿cómo cambia la cantidad de energía que se descarga? b) Encuentre la potencia de descarga para $T_h = 800$°C. c) Encuentre el valor de T_h para el que la potencia de escape sólo sería la mitad del inciso b). d) Encuentre el valor de T_h para el que la potencia de descarga sería un cuarto del inciso b).

19. ¿Cuál es el coeficiente de realización de un refrigerador que funciona con eficiencia de Carnot entre las temperaturas −3.00°C y +27.0°C?

20. En el punto A en un ciclo de Carnot, 2.34 moles de un gas ideal monoatómico tienen una presión de 1 400 kPa, un volumen de 10.0 L y una temperatura de 720 K. El gas se expande isotérmicamente al punto B y luego se expande adiabáticamente al punto C, donde su volumen es 24.0 L. Una compresión isotérmica lo lleva al punto D, donde su volumen es 15.0 L. Un proceso adiabático regresa el gas al punto A. a) Determine todas las presiones, volúmenes y temperaturas desconocidas conforme llena la siguiente tabla:

	P	*V*	*T*
A	1 400 kPa	10.0 L	720 K
B			
C		24.0 L	
D		15.0 L	

b) Encuentre la energía que se agrega por calor, el trabajo realizado por la máquina y el cambio en energía interna para cada uno de los pasos $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ y $D \rightarrow A$. c) Calcule la eficiencia $W_{neto}/|Q_h|$. Demuestre que es igual a $1 - T_C/T_A$, la eficiencia de Carnot.

21. Un refrigerador ideal o una bomba de calor ideal es equivalente a una máquina de Carnot que funciona en reversa. Esto es: energía $|Q_c|$ que se admite de un depósito frío y energía $|Q_h|$ que se rechaza a un depósito caliente. a) Demuestre que el trabajo que se debe suministrar para que funcione el refrigerador o bomba de calor es

$$W = \frac{T_h - T_c}{T_c} |Q_c|$$

b) Demuestre que el coeficiente de realización del refrigerador ideal es

$$\text{COP} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

22. ¿Cuál es el máximo coeficiente de realización posible de una bomba de calor que toma energía del exterior a −3.00°C dentro de una casa a 22.0°C? *Nota:* El trabajo realizado para que funcione la bomba de calor también está disponible para calentar la casa.

23. ¿Cuánto trabajo requiere un refrigerador de Carnot ideal, para remover 1.00 J de energía de helio líquido a 4.00 K y disipar esta energía a la temperatura de una habitación (293 K)?

24. La bomba de calor que se muestra en la figura P22.24 es en esencia un acondicionador de aire instalado hacia atrás. Extrae energía del aire exterior más frío y lo deposita en una habitación más caliente. Suponga que la relación de la energía real que entra a la habitación respecto al trabajo realizado por el motor del dispositivo es 10.0% de la relación máxima teórica. Determine la energía que entra a la habitación por joule de trabajo realizado por el motor, dado que la temperatura interior es 20.0°C y la temperatura exterior es −5.00°C.

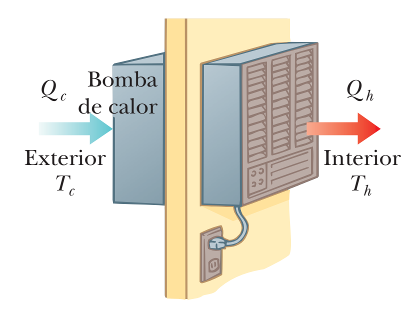


Figura P22.24

25. Un congelador ideal (Carnot) en una cocina tiene una temperatura constante de 260 K, mientras que el aire en la cocina tiene una temperatura constante de 300 K. Suponga que el aislamiento para el congelador no es perfecto y conduce energía al congelador en una cantidad de 0.150 W. Determine la potencia promedio requerida para que el motor del congelador mantenga la temperatura constante en el congelador.

26. Si una máquina térmica de Carnot con 35.0% de eficiencia (figura 22.2) funciona en reversa de modo que forma un refrigerador (figura 22.4), ¿cuál sería el coeficiente de realización de este refrigerador?

Sección 22.5 Motores de gasolina y diesel

27. En el cilindro de un motor de automóvil, enseguida de la combustión, el gas se confina en un volumen de 50.0 cm^3 y tiene una presión inicial de 3.00 × 10^6 Pa. El pistón se mueve hacia afuera a un volumen final de 300 cm^3 y el gas se expande sin pérdida de energía por calor. a) Si $\gamma = 1.40$ para el gas, ¿cuál es la presión final? b) ¿Cuánto trabajo realiza el gas al expandirse?

28. La relación de compresión de un ciclo de Otto, como se muestra en la figura 22.12, es $V_A/V_B = 8.00$. Al comienzo A del proceso de compresión, 500 cm^3 de gas están a 100 kPa y 20.0°C. Al comienzo de la expansión adiabática, la temperatura es $T_C = 750$°C. Modele el fluido de trabajo como un gas ideal con $E_{\text{int}} = nC_VT = 2.50\ nRT$ y $\gamma = 1.40$. a) Llene esta tabla para seguir los estados del gas:

	T (K)	P (kPa)	V (cm^3)	E_{int} (J)
A	293	100	500	
B				
C	1 023			
D				
A				

b) Llene esta tabla para seguir los procesos:

	Q (entrada)	W (salida)	ΔE_{int}
$A \to B$			
$B \to C$			
$C \to D$			
$D \to A$			
$ABCDA$			

c) Identifique la entrada de energía $|Q_h|$, la descarga de energía $|Q_c|$ y el trabajo neto de salida $W_{\text{máq}}$. d) Calcule la eficiencia térmica. e) Encuentre el número de revoluciones por minuto del cigüeñal requeridos para que un motor de un cilindro tenga una potencia de salida de 1.00 kW = 1.34 hp. *Nota:* El ciclo termodinámico involucra cuatro tiempos de pistón.

29. Un motor de gasolina tiene una relación de compresión de 6.00 y usa un gas para el que $\gamma = 1.40$. a) ¿Cuál es la eficiencia del motor si funciona en un ciclo idealizado de Otto? b) **¿Qué pasaría si?** Si la eficiencia real es de 15.0%, ¿qué fracción del combustible se desperdicia como resultado de fricción y pérdidas de energía por calor que se podrían evitar en un motor reversible? Suponga combustión completa de la mezcla aire–combustible.

Sección 22.6 Entropía

30. Una charola de hielo contiene 500 g de agua líquida a 0°C. Calcule el cambio de entropía del agua conforme se congela lenta y completamente a 0°C.

31. Una muestra que consiste en una masa m de una sustancia con calor específico c se calienta de la temperatura T_i a la temperatura T_f. Imagine que por calor absorbe energía de depósitos a temperaturas incrementalmente mayores $T_i + \delta$, $T_i + 2\delta$, $T_i + 3\delta$, . . . , T_f. Compruebe que el cambio de entropía de la muestra se conoce por $mc \ln (T_f/T_i)$.

32. ● Para hacer mermelada de frambuesa se combinan 900 g de jugo de frambuesa con 930 g de azúcar. La mezcla comienza a temperatura ambiente, 23.0°C, y lentamente se calienta en una estufa hasta que alcanza 220°F. Luego se vierte en frascos calientes y se le permite enfriarse. Suponga que el jugo tiene el mismo calor específico que el agua. El calor específico de la sacarosa es 0.299 cal/g · °C. Considere el proceso de calentamiento. a) ¿Cuál de los siguientes términos describe este proceso: adiabático, isobárico, isotérmico, isovolumétrico, cíclico, reversible, isentrópico? Explique su respuesta. b) ¿Cuánta energía absorbe la mezcla? c) ¿Cuál es el cambio mínimo de entropía de la mermelada, mientras se calienta? Puede usar el resultado del problema 31.

33. Calcule el cambio en entropía de 250 g de agua calentada lentamente de 20.0°C a 80.0°C. Puede usar el resultado del problema 31.

Sección 22.7 Cambios de entropía en procesos irreversibles

34. La temperatura en la superficie del Sol es aproximadamente 5 700 K y la temperatura en la superficie de la Tierra es cerca de 290 K. ¿Qué cambio de entropía se presenta cuando 1 000 J de energía se transfieren por radiación del Sol a la Tierra?

35. Un automóvil de 1 500 kg se mueve a 20.0 m/s. El conductor frena hasta detenerse. Los frenos se enfrían a la temperatura del aire circundante, que es casi constante en 20.0°C. ¿Cuál es el cambio de entropía total? Puede usar el resultado del problema 31.

36. Calcule el aumento en entropía del Universo cuando agrega 20.0 g de crema a 5.00°C a 200 g de café a 60.0°C. Suponga que los calores específicos de la crema y el café son de 4.20 J/g · °C. Puede usar el resultado del problema 31.

37. ¿Individualmenbte, qué tan rápido hace que aumente la entropía del Universo justo ahora? Calcule un orden de magnitud, establezca qué cantidades toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

38. Una herradura de hierro de 1.00 kg se lleva de una forja a 900°C y se deja caer en 4.00 kg de agua a 10.0°C. Si supone que se pierde energía por calor a los alrededores, determine el cambio en entropía total del sistema herradura–más agua. Puede usar el resultado del problema 31.

39. Una muestra de 1.00 mol de gas H_2 se coloca en el lado izquierdo del contenedor que se muestra en la figura P22.39, que tiene volúmenes iguales izquierdo y derecho. El lado derecho está vacío. Cuando la válvula se abre, el gas circula hacia el lado derecho. ¿Cuál es el cambio en entropía total del gas? ¿Cambia la temperatura del gas? Suponga que el contenedor es tan grande que el hidrógeno se comporta como un gas ideal.

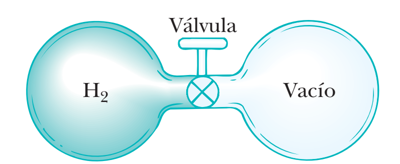


Figura P22.39

40. Un recipiente de 2.00 L tiene un separador al centro que lo divide en dos partes iguales, como se muestra en la figura P22.40. El lado izquierdo contiene gas H_2 y el lado derecho contiene gas O_2. Ambos gases están a temperatura ambiente y a presión atmosférica. Se retira el separador y se permite que los gases se mezclen. ¿Cuál es el aumento en entropía del sistema?

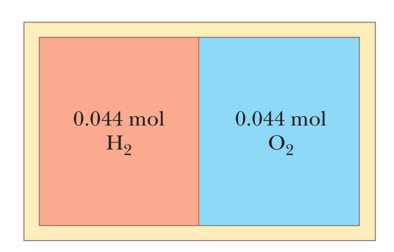


Figura P22.40

Sección 22.8 Entropía de escala microscópica

41. Si lanza dos dados, ¿cuál es el número total de formas en las que puede obtener a) un 12? b) ¿Un 7?

42. Prepare una tabla como la tabla 22.1 para los siguientes acontecimientos. Lanza simultáneamente cuatro monedas al aire y registra los resultados de sus lanzamientos en términos del número de águila y sol que resulten. Por ejemplo, AASA y ASAA son dos posibles formas en las que se pueden lograr tres águilas y un sol. a) A partir de su tabla, ¿cuál es el resultado más probable registrado para un lanzamiento? En términos de entropía, b) ¿cuál es el macroestado más ordenado y c) cuál es el más desordenado?

43. Repita el procedimiento para construir la tabla 22.1 a) para el caso en el que saca tres canicas de su bolsa en lugar de cuatro y b) para el caso en el que saca cinco en lugar de cuatro.

Problemas adicionales

44. En las cataratas del Niágara cada segundo unos 5 000 m^3 de agua caen una distancia de 50.0 m. ¿Cuál es el aumento en entropía por segundo debido a la caída de agua? Suponga que la masa de los alrededores es tan grande que su temperatura y la del agua permanecen casi constantes a 20.0°C. También suponga una cantidad despreciable de agua que se evapora.

45. ● Un hogar está a 750 K y la temperatura ambiente a 300 K. La eficiencia de una máquina de Carnot que hace 150 J de trabajo mientras transporta energía entre estos baños de temperaturas constante es 60.0%. La máquina de Carnot debe tomar energía a 150 J/0.600 = 250 J del depósito caliente y colocar 100 J de energía por calor en el ambiente. Para seguir el razonamiento de Carnot, suponga que alguna otra máquina térmica S podría tener una eficiencia de 70.0%. a) Encuentre la entrada de energía y la salida de energía desperdiciada de la máquina S conforme consume 150 J de trabajo. b) Deje que la máquina S funcione como en el inciso a) y funcione la máquina de Carnot en reversa. Encuentre la energía total que el hogar genera a medida que ambas máquinas funcionan juntas y la energía total es transferida al ambiente. Explique cómo los resultados demuestran que se viola el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica. c) Encuentre la entrada de energía y la salida de trabajo de la máquina S conforme saca energía de escape de 100 J. d) Deje que la máquina S funcione como en el inciso c) y aporte 150 J de su trabajo de salida para que funcione la máquina de Carnot en reversa. Encuentre la energía total que el hogar proporciona cuando ambas máquinas funcionan juntas, el trabajo total de salida y la energía total transferida al ambiente. Explique cómo los resultados demuestran que se viola el enunciado de Kelvin–Planck de la segunda ley. Por lo tanto, la suposición acerca de la eficiencia de la máquina S debe ser falsa. e) Deje que las máquinas funcionen juntas a través de un ciclo, como en el inciso d). Encuentre el cambio en entropía del Universo. Explique cómo el resultado demuestra que se viola el enunciado de entropía de la segunda ley.

46. **Problema de repaso.** Este problema complementa al problema 24 del capítulo 10. En la operación de un motor de pistón de combustión interna de un solo cilindro, una carga de combustible explota para impulsar el pistón hacia afuera en el llamado tiempo de trabajo. Parte de su energía de salida se almacena en un volante giratorio. Después esta energía se usa para empujar el pistón hacia adentro para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En este proceso de compresión suponga que un volumen original de 0.120 L de un gas ideal diatómico, a presión atmosférica, se comprime adiabáticamente a un octavo de su volumen original. a) Encuentre la entrada de trabajo que se requiere para comprimir el gas. b) Suponga que el volante es un disco sólido de 5.10 kg de masa y 8.50 cm de radio, que gira libremente sin fricción entre el tiempo de trabajo y el tiempo de compresión. ¿Cuán rápido debe girar el volante inmediatamente después del tiempo de trabajo? Esta situación representa la mínima rapidez angular a la que el motor puede funcionar; no es el punto de ahogamiento. c) Cuando la operación del motor está muy por arriba del punto de ahogamiento, suponga que el volante pone 5.00% de su energía máxima para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. Encuentre su rapidez angular máxima en este caso.

47. Una casa pierde energía a través de las paredes exteriores y el techo, con una rapidez de 5 000 J/s = 5.00 kW cuando la temperatura interior es 22.0°C y la temperatura exterior es

−5.00°C. a) Calcule la potencia eléctrica requerida para mantener la temperatura interior a 22.0°C si la potencia eléctrica se usa en calefactores de resistencia eléctrica que convierten toda la energía transferida mediante transmisión eléctrica en energía interna. b) **¿Qué pasaría si?** Calcule la potencia eléctrica requerida para mantener la temperatura interior a 22.0°C, si la potencia eléctrica se usa para impulsar un motor eléctrico que maneja el compresor de una bomba de calor que tiene un coeficiente de realización igual a 60.0% del valor del ciclo de Carnot.

48. Una máquina térmica funciona entre dos depósitos a $T_2 = 600$ K y $T_1 = 350$ K. Admite 1 000 J de energía del depósito de mayor temperatura y realiza 250 J de trabajo. Encuentre a) el cambio de entropía del Universo ΔS_U para este proceso y b) el trabajo W que podría realizar una máquina de Carnot que opere entre estos dos depósitos. c) Demuestre que la diferencia entre las cantidades de trabajo realizados en las partes a) y b) es $T_1 \Delta S_U$.

49. En 1816 Robert Stirling, un clérigo escocés, patentó el *motor Stirling*, que desde entonces encontró gran variedad de aplicaciones. El combustible se quema externamente para calentar uno de los dos cilindros del motor. Una cantidad fija de gas inerte se mueve cíclicamente entre los cilindros y se expande en el caliente y se contrae en el frío. La figura P22.49 representa un modelo de su ciclo termodinámico. Considere n moles de un gas ideal monoatómico que circula una vez por el ciclo, que consiste de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_i$ y T_i y dos procesos a volumen constante. Determine, en términos de n, R y T_i, a) la energía neta transferida por calor al gas y b) la eficiencia del motor. Un motor Stirling es más fácil de fabricar que un motor de combustión interna o una turbina. Puede funcionar con la quema de basura o con la energía de la luz solar y no producir materiales de descarga.

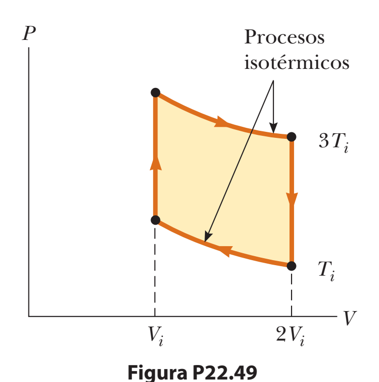


Figura P22.49

50. ● Un atleta, cuya masa es de 70.0 kg, bebe 16 onzas (453.6 g) de agua fría. El agua está a una temperatura de 35.0°F. a) Si ignora el cambio de temperatura del cuerpo que resulta de la ingesta del agua (de modo que el cuerpo se considera como un depósito siempre a 98.6°F), encuentre el aumento en entropía de todo el sistema. b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que todo el cuerpo se enfría por la bebida y que el calor específico promedio de una persona es igual al calor específico del agua líquida. Si ignora cualquier otra transferencia de energía por calor y cualquier liberación de energía metabólica, encuentre la temperatura del atleta después de que bebe el agua fría, dada una temperatura corporal inicial de 98.6°F. Bajo estas suposiciones, ¿cuál es el aumento de entropía de todo el sistema? Establezca cómo se compara este resultado con el que obtuvo en el inciso a).

51. Una planta de energía, que tiene eficiencia de Carnot, produce 1 000 MW de energía eléctrica a partir de turbinas que admite vapor a 500 K y rechaza agua a 300 K en un río. La corriente del agua es 6.00 K más caliente debido a la salida de la planta eléctrica. Determine la relación de flujo del río.

52. Una planta eléctrica, que tiene eficiencia de Carnot, produce energía eléctrica $\mathcal{P}$ a partir de turbinas que admite energía de vapor a temperatura T_h y descargan energía a temperatura T_c a través de un intercambiador de calor en un río. La corriente del agua es más caliente en ΔT debido a la salida de la planta eléctrica. Determine la relación de flujo del río.

53. Un laboratorio de biología se mantiene a una temperatura constante de 7.00°C mediante un acondicionador de aire, que da salida al aire exterior. En un típico día caluroso de verano, la temperatura exterior es de 27.0°C y la unidad de acondicionamiento de aire emite energía al exterior en una cantidad de 10.0 kW. Modele la unidad que tiene un coeficiente de realización igual a 40.0% del coeficiente de realización de un dispositivo ideal de Carnot. a) ¿Con qué rapidez el acondicionador de aire retira energía del laboratorio? b) Calcule la potencia requerida para la entrada de trabajo. c) Encuentre el cambio en entropía que produce el acondicionador de aire en 1.00 h. d) **¿Qué pasaría si?** La temperatura exterior aumenta a 32.0°C. Encuentre el cambio fraccionario en el coeficiente de realización del acondicionador de aire.

54. ● Una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se lleva a través del ciclo que se muestra en la figura P22.54. El proceso $A \rightarrow B$ es una expansión isotérmica reversible. Calcule: a) el trabajo neto realizado por el gas, b) la energía agregada al gas por calor, c) la energía expulsada del gas por calor y d) la eficiencia del ciclo. e) Explique cómo se compara la eficiencia con la de una máquina de Carnot que funciona entre los mismos extremos de temperatura.

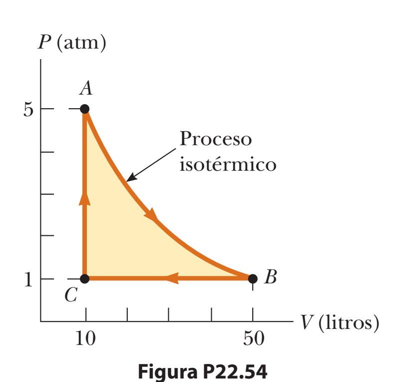


Figura P22.54

55. ● Una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se lleva a través del ciclo que se muestra en la figura P22.55.

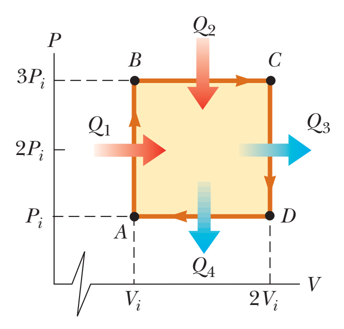


Figura P22.55

En el punto A la presión, el volumen y la temperatura son P_i, V_i y T_i, respectivamente. En términos de R y T_i, encuentre a) la energía total que entra al sistema por calor por ciclo, b) la energía total que sale del sistema por calor por ciclo y c) la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo. d) Explique cómo se compara la eficiencia con la de una máquina que funciona en un ciclo de Carnot entre los mismos extremos de temperatura.

56. Una muestra que consiste de n moles de un gas ideal que se somete a una expansión isobárica reversible desde el volumen V_i hasta el volumen $3V_i$. Encuentre el cambio de entropía del gas al calcular $\int_i^f dQ/T$, donde $dQ = nC_P\,dT$.

57. ● Un sistema que consiste de n moles de un gas ideal que se somete a dos procesos reversibles. Comienza con presión P_i y volumen V_i, se expande isotérmicamente y luego se contrae adiabáticamente para alcanzar un estado final con presión P_i y volumen $3V_i$. a) Encuentre su cambio de entropía en el proceso isotérmico. (La entropía no cambia en el proceso adiabático.) b) **¿Qué pasaría si?** Explique por qué la respuesta al inciso a) debe ser la misma que la respuesta al problema 56.

58. ● Una muestra de 1.00 moles de un gas ideal se expande isotérmicamente y duplica su volumen. a) Demuestre que el trabajo que hace al expandirse es $W_{\text{máq}} = RT\ln 2$. b) Ya que la energía interna E_{int} de un gas ideal depende exclusivamente de su temperatura, el cambio de energía interna es cero durante la expansión. Se sigue de la primera ley que la entrada de energía al gas por calor durante la expansión es igual a la salida de energía por trabajo. ¿Este proceso tiene 100% de eficiencia al convertir la entrada de energía por calor en salida de trabajo? ¿Esta conversión viola la segunda ley? Explique sus respuestas.

59. Un motor diesel idealizado funciona en un ciclo conocido como *ciclo diesel estándar de aire*, que se muestra en la figura P22.59. El combustible se rocía en el cilindro en el punto de máxima compresión, B. La combustión se presenta durante la expansión $B \rightarrow C$, que se modela como un proceso isobárico. Demuestre que la eficiencia de un motor que funciona en este ciclo diesel idealizado es

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)$$

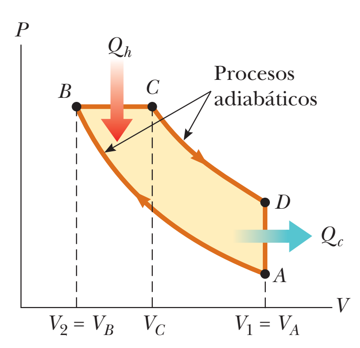


Figura P22.59

60. ● Suponga que trabaja en una oficina de patentes y un inventor llega con usted y le afirma que su máquina térmica, que emplea agua como sustancia de trabajo, tiene una eficiencia termodinámica de 0.61. Le explica que funciona entre depósitos de energía a 4°C y 0°C. Es un dispositivo muy complicado, con muchos pistones, engranes y poleas, y el ciclo involucra congelación y fusión. ¿Su afirmación de que $e = 0.61$ merece seria consideración? Explique su respuesta.

61. ● Suponga que 1.00 kg de agua a 10.0°C se mezcla con 1.00 kg de agua a 30.0°C a presión constante. Cuando la mezcla llega al equilibrio, a) ¿cuál es la temperatura final? b) Considere $c_P = 4.19$ kJ/kg · K para el agua y demuestre que la entropía del sistema aumenta en

$$\Delta S = 4.19 \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right] \text{ kJ/K}$$

Puede usar el resultado del problema 31. c) Verifique numéricamente que $\Delta S > 0$. d) ¿El mezclado es un proceso irreversible? Explique cómo lo sabe.

62. Una muestra de 1.00 mol de un gas ideal ($\gamma = 1.40$) se lleva a través del ciclo de Carnot descrito en la figura 22.10. En el punto A la presión es 25.0 atm y la temperatura es 600 K. En el punto C la presión es 1.00 atm y la temperatura es 400 K. a) Determine las presiones y volúmenes en los puntos A, B, C y D. b) Calcule el trabajo neto realizado por ciclo. c) Determine la eficiencia de una máquina que funciona en este ciclo.

Respuestas a las preguntas rápidas

22.1 **i**), c). La ecuación 22.2 da este resultado directamente. **ii**), b). El trabajo representa un tercio de la energía de entrada. Los dos tercios restantes se deben expulsar al depósito frío.

22.2 d). El COP de 4.00 para la bomba de calor significa que usted recibe cuatro veces la energía que entra por transmisión eléctrica. Con cuatro veces de energía por unidad de energía de electricidad, sólo necesita un cuarto de electricidad.

22.3 C, B, A. Aunque los tres motores funcionan sobre una diferencia de temperatura de 300 K, la eficiencia depende de la relación de temperaturas, no de la diferencia.

22.4 a) Un microestado: todos dos. b) Seis microestados: trébol–diamante, trébol–corazón, trébol–espada, diamante–corazón, diamante–espada, corazón–espada. El macroestado de dos ases es más probable que el de cuatro dos en el inciso a) porque hay seis veces más microestados para este macroestado particular en comparación con el macroestado de cuatro dos. Por lo tanto, en una mano de póquer, dos de una clase es menos valioso que cuatro de una clase.

22.5 a). A partir de la primera ley de la termodinámica, para estos dos procesos reversibles, $Q_r = \Delta E_{\text{int}} - W$. Durante el proceso de volumen constante, $W = 0$, mientras que el trabajo W es distinto de cero y negativo durante la expansión a presión constante. Por lo tanto, Q_r es mayor para el proceso de presión constante, lo que conduce a un mayor valor para el cambio en entropía. En términos de entropía como desorden, durante el proceso de presión constante, el gas se debe expandir. El aumento en volumen resulta en más formas de ubicar las moléculas del gas en un contenedor, lo que resulta en un mayor aumento en entropía.

22.6 Falso. El factor determinante para el cambio en entropía es Q_r, no Q. Si el proceso adiabático no es reversible, el cambio en entropía no necesariamente es cero porque una trayectoria reversible entre los mismos estados inicial y final puede involucrar transferencia de energía por calor.

TABLA A.1

Factores de conversión

Longitud

	m	cm	km	pulg	pie	mi
1 metro	1	10^{2}	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.393 7	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	10^{3}	10^{5}	1	3.937×10^{4}	3.281×10^{3}	0.621 4
1 pulgada	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.304 8	30.48	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1 609	1.609×10^{5}	1.609	6.336×10^{4}	5 280	1

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^{3}	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug	14.59	1.459×10^{4}	1	8.789×10^{27}
1 unidad masa atómica	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Nota: 1 ton métrica = 1 000 kg.

Tiempo

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3 600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	8.640×10^{4}	1 440	24	1	2.738×10^{-5}
1 año	3.156×10^{7}	5.259×10^{5}	8.766×10^{3}	365.2	1

Rapidez

	m/s	cm/s	pie/s	mi/h
1 metro por segundo	1	10^{2}	3.281	2.237
1 centímetro por segundo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 pie por segundo	0.304 8	30.48	1	0.681 8
1 milla por hora	0.447 0	44.70	1.467	1

Nota: 1 mi/min = 60 mi/h = 88 pie/s.

Fuerza

	N	lb
1 newton	1	0.224 8
1 libra	4.448	1

(*continúa*)

TABLA A.1

Factores de conversión (*continuación*)

Energía, transferencia de energía

	J	**pie · lb**	**eV**
1 joule	1	0.737 6	6.242×10^{18}
1 pie-libra	1.356	1	8.464×10^{18}
1 electrón volt	1.602×10^{-19}	1.182×10^{-19}	1
1 caloría	4.186	3.087	2.613×10^{19}
1 unidad térmica británica	1.055×10^{3}	7.779×10^{2}	6.585×10^{21}
1 kilowatt-hora	3.600×10^{6}	2.655×10^{6}	2.247×10^{25}

	cal	**Btu**	**kWh**
1 joule	0.238 9	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 pie-libra	0.323 9	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 electrón volt	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 caloría	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 unidad térmica británica	2.520×10^{2}	1	2.930×10^{-4}
1 kilowatt-hora	8.601×10^{5}	3.413×10^{2}	1

Presión

	Pa	**atm**
1 pascal	1	9.869×10^{-6}
1 atmósfera	1.013×10^{5}	1
1 centímetro de mercurio[a]	1.333×10^{3}	1.316×10^{-2}
1 libra por pulgada cuadrada	6.895×10^{3}	6.805×10^{-2}
1 libra por pie cuadrado	47.88	4.725×10^{-4}

	cm Hg	**lb/pulg^2**	**lb/pie^2**
1 pascal	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 atmósfera	76	14.70	2.116×10^{3}
1 centímetro de mercurio[a]	1	0.194 3	27.85
1 libra por pulgada cuadrada	5.171	1	144
1 libra por pie cuadrado	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

[a]A 0°C y en una ubicación donde la aceleración tiene su valor "estándar", 9.806 65 m/s^2.

TABLA A.2

Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas

Cantidad	Símbolo común	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidades en términos de unidades del SI base
Aceleración	$\vec{\mathbf{a}}$	m/s^2	L/T^2	m/s^2
Cantidad de sustancia	n	MOL		mol
Ángulo	θ, ϕ	radián (rad)	1	
Aceleración angular	$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$	rad/s^2	T^{-2}	s^{-2}
Frecuencia angular	ω	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Cantidad de movimiento angular	$\vec{\mathbf{L}}$	kg · m^2/s	ML^2/T	kg · m^2/s
Velocidad angular	$\vec{\boldsymbol{\omega}}$	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Área	A	m^2	L^2	m^2
Número atómico	Z			
Capacitancia	C	farad (F)	Q^{2}T^2/ML^2	A^2 · s^4/kg · m^2
Carga	q, Q, e	coulomb (C)	Q	A · s

(*continúa*)

TABLA A.2

Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas (*continuación*)

Densidad de carga				
Línea	λ	C/m	Q/L	A · s/m
Superficie	σ	C/m^2	Q/L^2	A · s/m^2
Volumen	ρ	C/m^3	Q/L^3	A · s/m^3
Conductividad	σ	1/Ω · m	Q^{2}T/ML^3	A^2 · s^3/kg · m^3
Corriente	I	AMPERE	Q/T	A
Densidad de corriente	J	A/m^2	Q/TL^2	A/m^2
Densidad	ρ	kg/m^3	M/L^3	kg/m^3
Constante dieléctrica	κ			
Momento de dipolo eléctrico	$\vec{\mathbf{p}}$	C · m	QL	A · s · m
Campo eléctrico	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	ML/QT^2	kg · m/A · s^3
Flujo eléctrico	Φ_E	V · m	ML^3/QT^2	kg · m^3/A · s^3
Fuerza electromotriz	$\mathcal{E}$	volt (V)	ML^2/QT^2	kg · m^2/A · s^3
Energía	E, U, K	joule (J)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Entropía	S	J/K	ML^2/T^{2}K	kg · m^2/s^2 · K
Fuerza	$\vec{\mathbf{F}}$	newton (N)	ML/T^2	kg · m/s^2
Frecuencia	f	hertz (Hz)	T^{-1}	s^{-1}
Calor	Q	joule (J)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Inductancia	L	henry (H)	ML^2/Q^2	kg · m^2/A^2 · s^2
Longitud	ℓ, L	METRO	L	m
Desplazamiento	$\Delta x, \Delta\vec{\mathbf{r}}$			
Distancia	d, h			
Posición	$x, y, z, \vec{\mathbf{r}}$			
Momento de dipolo magnético	$\vec{\boldsymbol{\mu}}$	N · m/T	QL^2/T	A · m^2
Campo magnético	$\vec{\mathbf{B}}$	tesla (T) (= Wb/m^2)	M/QT	kg/A · s^2
Flujo magnético	Φ_B	weber (Wb)	ML^2/QT	kg · m^2/A · s^2
Masa	m, M	KILOGRAMO	M	kg
Calor específico molar	C	J/mol · K		kg · m^2/s^2 · mol · K
Momento de inercia	I	kg · m^2	ML^2	kg · m^2
Cantidad de movimiento	$\vec{\mathbf{p}}$	kg · m/s	ML/T	kg · m/s
Periodo	T	s	T	s
Permeabilidad de espacio libre	μ_0	N/A^2 (= H/m)	ML/Q^2	kg · m/A^2 · s^2
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	C^2/N · m^2 (= F/m)	Q^{2}T^2/ML^3	A^2 · s^4/kg · m^3
Potencial	V	volt (V) (= J/C)	ML^2/QT^2	kg · m^2/A · s^3
Potencia	$\mathcal{P}$	watt (W) (= J/s)	ML^2/T^3	kg · m^2/s^3
Presión	P	pascal (Pa) (= N/m^2)	M/LT^2	kg/m · s^2
Resistencia	R	ohm (Ω) (= V/A)	ML^2/Q^{2}T	kg · m^2/A^2 · s^3
Calor específico	c	J/kg · K	L^2/T^{2}K	m^2/s^2 · K
Rapidez	v	m/s	L/T	m/s
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tiempo	t	SEGUNDO	T	s
Momento de torsión	$\vec{\boldsymbol{\tau}}$	N · m	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Velocidad	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s	L/T	m/s
Volumen	V	m^3	L^3	m^3
Longitud de onda	λ	m	L	m
Trabajo	W	joule (J) (= N · m)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2

[a]Las unidades del SI base están dadas en mayúsculas.

[b]Los símbolos M, L, T, K y Q denotan masa, longitud, tiempo, temperatura y carga, respectivamente.

Este apéndice en matemáticas tiene la intención de ser un breve repaso de operaciones y métodos. Desde las primeras etapas de este curso usted debió estar familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Las secciones acerca de cálculo diferencial e integral son más detalladas y se dedican a aquellos estudiantes que tengan dificultad para aplicar los conceptos del cálculo a situaciones físicas.

B.1 Notación científica

Muchas cantidades utilizadas por los científicos con frecuencia tienen valores o muy grandes o muy pequeños. La rapidez de la luz, por ejemplo, es de aproximadamente 300 000 000 m/s, y la tinta requerida para hacer el punto sobre una *i* en este libro tiene una masa de aproximadamente 0.000 000 001 kg. Obviamente, es muy complicado leer, escribir y seguir la pista de tales números. Este problema se evita al usar un método que incorpora potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la que se eleva el diez, llamado **exponente** de diez. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, se puede expresar como 3.00×10^8 m/s.

En este método, algunos números representativos menores que la unidad son los siguientes:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos, el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados como alguna potencia de diez, multiplicados por otro número entre uno y diez, están en **notación científica**. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es 5.943×10^9 y para 0.000 083 2 es 8.32×10^{-5}.

Cuando se multiplican números expresados en notación científica, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \tag{B.1}$$

donde *n* y *m* pueden ser *cualquier* número (no necesariamente enteros). Por ejemplo, $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regla también se aplica si uno de los exponentes es negativo: $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Cuando se dividen números expresados en notación científica, observe que

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \quad \textbf{(B.2)}$$

Ejercicios

Con ayuda de las reglas anteriores, verifique las respuestas de las siguientes ecuaciones:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
3. $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
4. $(4.0 \times 10^8)(9.0 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
5. $(3.0 \times 10^7)(6.0 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
6. $\dfrac{75 \times 10^{-11}}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
7. $\dfrac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

B.2 Álgebra

Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Los símbolos como x, y y z por lo general se usan para representar cantidades no especificadas, llamadas **incógnitas**.

Primero, considere la ecuación

$$8x = 32$$

Si quiere resolver para x, divida (o multiplique) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin destruir la igualdad. En este caso, si divide ambos lados entre 8, tiene

$$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$$

$$x = 4$$

A continuación considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión se puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si resta 2 de cada lado, obtiene

$$x + 2 - 2 = 8 - 2$$

$$x = 6$$

En general, si $x + a = b$, por lo tanto $x = b - a$.

Ahora considere la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$

Si multiplica cada lado por 5, queda x sola en la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$

$$x = 45$$

En todos los casos, *cualquier operación que realice en el lado izquierdo de la igualdad también la debe realizar en el lado derecho.*

Debe recordar las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones, donde a, b, c y d son cuatro números:

	Regla	Ejemplo
Multiplicar	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Dividir	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
Sumar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios resuelva para x.

	Respuestas
1. $a = \frac{1}{1 + x}$	$x = \frac{1 - a}{a}$
2. $3x - 5 = 13$	$x = 6$
3. $ax - 5 = bx + 2$	$x = \frac{7}{a - b}$
4. $\frac{5}{2x + 6} = \frac{3}{4x + 8}$	$x = -\frac{11}{7}$

Potencias

Cuando multiplique potencias de una cantidad conocida x, aplique las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \quad \textbf{(B.3)}$$

Por ejemplo, $x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$.

Cuando divida potencias de una cantidad conocida, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad \textbf{(B.4)}$$

Por ejemplo, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potencia que es fracción, como $\frac{1}{3}$, corresponde a una raíz del modo siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad \textbf{(B.5)}$$

Por ejemplo, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.587\,4$. (Para tales cálculos es útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad x^n elevada a la potencia m es

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad \textbf{(B.6)}$$

La tabla B.1 resume las reglas de exponentes.

TABLA B.1

Reglas de exponentes
$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^n x^m = x^{n+m}$
$x^n/x^m = x^{n-m}$
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$

Ejercicios

Verifique las siguientes ecuaciones:

1. $3^2 \times 3^3 = 243$
2. $x^5 x^{-8} = x^{-3}$
3. $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709\,976$ (Use su calculadora)
5. $60^{1/4} = 2.783\,158$ (Use su calculadora)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Factorización

Las siguientes son algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$ factor común

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ cuadrado perfecto

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ diferencia de cuadrados

Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{B.7}$$

donde x es la cantidad desconocida y a, b y c son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, conocidas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{B.8}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

EJEMPLO B.1

La ecuación $x^2 + 5x + 4 = 0$ tiene las siguientes raíces que corresponden a los dos signos del término raíz cuadrada:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \qquad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

donde x_+ se refiere a la raíz correspondiente al signo positivo y x_- se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

	Respuestas	
1. $x^2 + 2x - 3 = 0$	$x_+ = 1$	$x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$	$x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$	$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

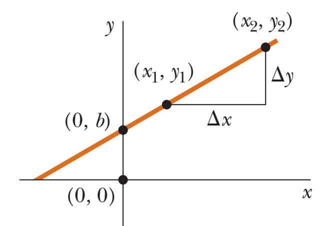


Figura B.1 Línea recta graficada sobre un sistema coordenado xy. La pendiente de la línea es la proporción de Δy a Δx.

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \tag{B.9}$$

donde m y b son constantes. A esta ecuación se le conoce como lineal porque la gráfica de y en función de x es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante b, llamada **ordenada al origen**, representa el valor de y en el que la línea recta interseca el eje y. La constante m es igual a la **pendiente** de la línea recta. Si dos puntos cualesquiera en la línea recta se especifican mediante las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como en la figura B.1, la pendiente de la línea recta se expresa como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{B.10}$$

Note que m y b pueden tener valores positivos o negativos. Si $m > 0$, la línea recta tiene una pendiente *positiva*, como en la figura B.1. Si $m < 0$, la línea recta tiene una pendiente *negativa*. En la figura B.1, tanto m como b son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones.

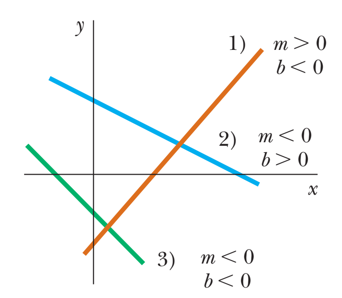


Figura B.2 La línea café tiene una pendiente positiva y una ordenada al origen negativa. La línea azul tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen positiva. La línea verde tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen negativa.

Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de las siguientes líneas rectas: a) $y = 5x + 3$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = -3x - 6$.
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

Respuestas a) 5, b) −2, c) −3.

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos: a) (0, −4) y (4, 2), b) (0, 0) y (2, −5) c) (−5, 2) y (4, −2).

Respuestas a) $\frac{3}{2}$, b) $-\frac{5}{2}$, c) $-\frac{4}{9}$.

Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación $3x + 5y = 15$, que tiene dos incógnitas, x y y. Tal ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo $(x = 0,\ y = 3)$, $(x = 5,\ y = 0)$ y $(x = 2,\ y = \frac{9}{5})$ son todas soluciones a esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única sólo es posible si se tienen *dos* ecuaciones. En general, si un problema tiene n incógnitas, su solución requiere n ecuaciones. Para resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas, x y y, resuelva una de las ecuaciones para x en términos de y y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

EJEMPLO B.2

Resuelva las dos ecuaciones simultáneas

$$1)\qquad 5x + y = -8$$

$$2)\qquad 2x - 2y = 4$$

Solución De la ecuación 2), $x = y + 2$. La sustitución de esta ecuación en la ecuación 1) produce

$$5(y + 2) + y = -8$$

$$6y = -18$$

$$y = -3$$

$$x = y + 2 = -1$$

Solución alternativa Multiplique cada término en la ecuación 1) por el factor 2 y sume el resultado a la ecuación 2):

$$\begin{array}{r} 10x + 2y = -16 \\ 2x - 2y = 4 \\ \hline 12x \quad\;\; = -12 \end{array}$$

$$x = -1$$

$$y = x - 2 = -3$$

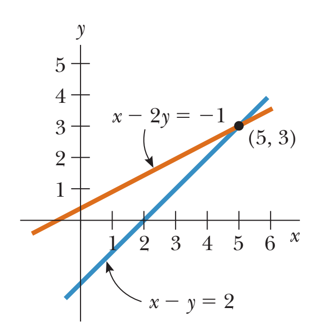


Figura B.3 Solución gráfica para dos ecuaciones lineales.

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas también se pueden resolver mediante un método gráfico. Si las líneas rectas que corresponden a las dos ecuaciones se grafican en un sistema coordenado convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos líneas tiene las coordenadas $x = 5$ y $y = 3$, que representan la solución a las ecuaciones. Debe comprobar esta solución mediante la técnica analítica explicada anteriormente.

Ejercicios

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

	Respuestas
1. $x + y = 8$ $x - y = 2$	$x = 5,\ y = 3$
2. $98 - T = 10a$ $T - 49 = 5a$	$T = 65,\ a = 3.27$
3. $6x + 2y = 6$ $8x - 4y = 28$	$x = 2,\ y = -3$

Logaritmos

Suponga que una cantidad x se expresa como una potencia de alguna cantidad a:

$$x = a^y \tag{B.11}$$

El número a se llama **número** base. El **logaritmo** de x respecto a la base a es igual al exponente al que se debe elevar la base para satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x \tag{B.12}$$

A la inversa, el **antilogaritmo** de y es el número x:

$$x = \text{antilog}_a\ y \tag{B.13}$$

En la práctica, las dos bases usadas con más frecuencia son la base 10, llamada base de logaritmo *común*, y la base $e = 2.718\ 282$, llamada constante de Euler o base de logaritmo *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y) \tag{B.14}$$

Cuando se usan logaritmos naturales:

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y) \tag{B.15}$$

Por ejemplo, $\log_{10} 52 = 1.716$, de modo que $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$. Del mismo modo, $\ln 52 = 3.951$, de modo que $\text{antiln } 3.951 = e^{3.951} = 52$.

En general, note que puede convertir entre base 10 y base e con la igualdad

$$\ln x = (2.302\ 585) \log_{10} x \tag{B.16}$$

Por último, las siguientes son algunas propiedades útiles de los logaritmos:

$$\left.\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \end{aligned}\right\} \text{cualquier base}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

B.3 Geometría

La **distancia** d entre dos puntos que tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{B.17}$$

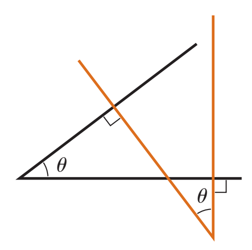


Figura B.4 Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares.

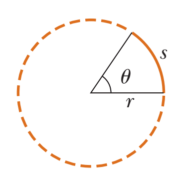


Figura B.5 El ángulo θ en radianes es el cociente de la longitud del arco s al radio r del círculo.

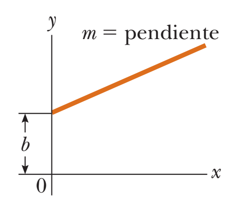


Figura B.6 Una línea recta con una pendiente m y una ordenada al origen b.

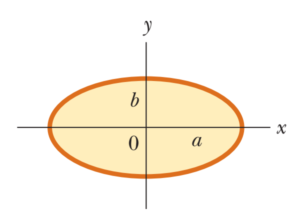


Figura B.7 Una elipse con semieje mayor a y semieje menor b.

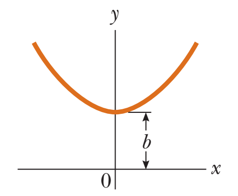


Figura B.8 Una parábola con su vértice en $y = b$.

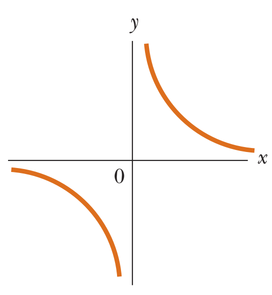


Figura B.9 Una hipérbola.

TABLA B.2

Información útil para geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
Rectángulo (ℓ, w)	Área $= \ell w$	Esfera (r)	Área superficial $= 4\pi r^2$ Volumen $= \dfrac{4\pi r^3}{3}$
Círculo (r)	Área $= \pi r^2$ Circunferencia $= 2\pi r$	Cilindro (r, ℓ)	Superficie lateral área $= 2\pi r\ell$ Volumen $= \pi r^2\ell$
Triángulo (h, b)	Área $= \frac{1}{2}bh$	Caja rectangular (h, w, ℓ)	Área superficial $=$ $2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen $= \ell wh$

Dos ángulos son iguales si sus lados son perpendiculares, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo. Por ejemplo, los dos ángulos marcados θ en la figura B.4 son iguales debido a la perpendicularidad de los lados de los ángulos. Para distinguir los lados izquierdo y derecho de un ángulo, imagine estar de pie en el vértice del ángulo y de frente al ángulo.

Medida radián: La longitud de arco s de un arco circular (figura B.5) es proporcional al radio r para un valor fijo de θ (en radianes):

$$s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r} \tag{B.18}$$

La tabla B.2 da las **áreas** y **volúmenes** para varias formas geométricas usadas por todo el texto.

La ecuación de una **línea recta** (figura B.6) es

$$y = mx + b \tag{B.19}$$

donde b es la ordenada al origen y m la pendiente de la línea.

La ecuación de un **círculo** de radio R con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{B.20}$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (figura B.7) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{B.21}$$

donde a es la longitud del eje semimayor (el más largo) y b es la longitud del eje semimenor (el más corto).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice está en $y = b$ (figura B.8) es

$$y = ax^2 + b \tag{B.22}$$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (figura B.9) es

$$xy = \text{constante} \tag{B.23}$$

B.4 Trigonometría

La parte de las matemáticas en función de las propiedades especiales del triángulo recto se llama trigonometría. Por definición, un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo de 90°. Considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10, donde el lado a es opuesto al ángulo θ, el lado b es adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa

del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por tal triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En términos del ángulo θ, estas funciones se definen del modo siguiente:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \tag{B.24}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \tag{B.25}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b} \tag{B.26}$$

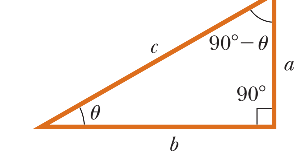


Figura B.10 Un triángulo rectángulo, que se usa para definir las funciones básicas de la trigonometría.

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente relación entre los lados de un triángulo recto:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{B.27}$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se sigue que

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente se definen como

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Las siguientes relaciones se deducen directamente del triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10:

$$\text{sen } \theta = \cos (90° - \theta)$$
$$\cos \theta = \text{sen } (90° - \theta)$$
$$\cot \theta = \tan (90° - \theta)$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\text{sen } (-\theta) = -\text{sen } \theta$$
$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$
$$\tan (-\theta) = -\tan \theta$$

Las relaciones que siguen son aplicables a *cualquier* triángulo, como se muestra en la figura B.11:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\text{Ley de cosenos} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

$$\text{Ley de senos} \qquad \frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

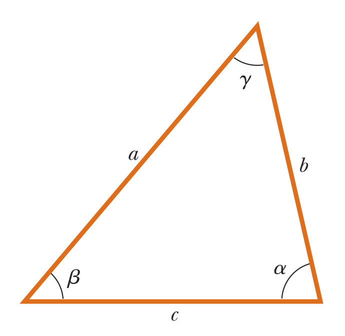


Figura B.11 Un triángulo arbitrario no rectángulo.

La tabla B.3 (página A-12) menciona algunas identidades trigonométricas útiles.

EJEMPLO B.3

Considere el triángulo rectángulo de la figura B.12 en el que $a = 2.00$, $b = 5.00$ y c es desconocido. A partir del teorema de Pitágoras se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2.00^2 + 5.00^2 = 4.00 + 25.0 = 29.0$$

$$c = \sqrt{29.0} = 5.39$$

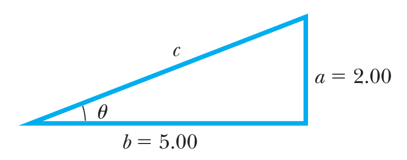


Figura B.12 (Ejemplo B.3)

Para encontrar el ángulo θ, note que

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{2.00}{5.00} = 0.400$$

Con una calculadora se encuentra que

$$\theta = \tan^{-1}(0.400) = 21.8°$$

donde $\tan^{-1}(0.400)$ es la notación para "ángulo cuya tangente es 0.400", que a veces se escribe como arctan (0.400).

TABLA B.3

Algunas identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$	$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$	$1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$
$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen} B$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$

$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(A \pm B)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(A \mp B)\right]$

$\cos A + \cos B = 2\cos\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(A - B)\right]$

$\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(B - A)\right]$

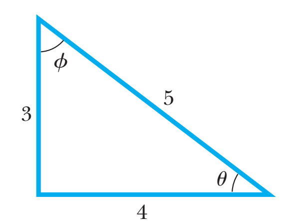


Figura B.13 (Ejercicio 1)

Ejercicios

1. En la figura B.13, identifique a) el lado opuesto a θ, b) el lado adyacente a ϕ y luego encuentre c) $\cos\theta$, d) sen ϕ y e) $\tan\phi$.

Respuestas a) 3, b) 3, c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{4}{5}$, e) $\frac{4}{3}$.

2. En cierto triángulo rectángulo, los dos lados que son mutuamente perpendiculares miden 5.00 m y 7.00 m. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

Respuesta 8.60 m.

3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3.00 m de largo y uno de sus ángulos 30°. a) ¿Cuál es la longitud del lado opuesto al ángulo de 30°? b) ¿Cuál es el lado adyacente al ángulo de 30°?

Respuestas a) 1.5 m, b) 2.6 m.

B.5 Series de expansión

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \tfrac{1}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} x \text{ en radianes}$$

Para $x << 1$, se pueden usar las siguientes aproximaciones:[1]

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad \operatorname{sen} x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x \qquad \cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \qquad \tan x \approx x$$

B.6 Cálculo diferencial

En diferentes ramas de la ciencia, a veces, es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de diferentes problemas en mecánica newtoniana, electricidad y magnetismo. En esta sección simplemente se establecen algunas propiedades básicas y "reglas empíricas" que deben ser un útil repaso para el estudiante.

Primero, se debe especificar una **función** que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se llama y (la variable dependiente) y la otra x (la variable independiente). Puede tener una correspondencia funcional como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes específicas, y se puede calcular para cualquier valor de x. Por lo general se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las que y varía "de manera uniforme" con x.

La **derivada** de y respecto a x se define como el límite a medida que Δx tiende a cero de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos sobre la curva y en función de x. En términos matemáticos, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \qquad \textbf{(B.28)}$$

donde Δy y Δx se definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (figura B.14). Note que dy/dx *no* significa dy dividido por dx, simplemente es una notación del proceso de límite de la derivada según se define por la ecuación B.28.

Una expresión útil de recordar cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una *constante* y n es *cualquier* número positivo o negativo (entero o fracción), es

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \qquad \textbf{(B.29)}$$

Si $y(x)$ es un polinomio o función algebraica de x, se aplica la ecuación B.29 a *cada* término en el polinomio y se saca $d[\text{constante}]/dx = 0$. En los ejemplos B.4 al B.7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

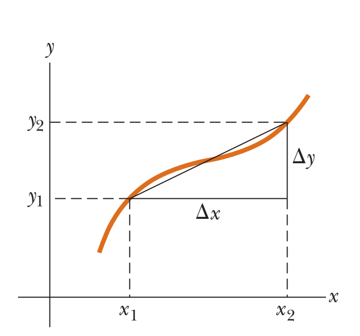


Figura B.14 Las longitudes Δx y Δy se usan para definir la derivada de esta función en un punto.

[1]Las aproximaciones para las funciones sen x, cos x y tan x son para $x \leq 0.1$ rad.

TABLA B.4

Derivadas de varias funciones

$$\frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } ax) = a \cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$$

$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} ax) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} ax) = \frac{a}{1 + a^2x^2}$$

Nota: Los símbolos a y n representan constantes.

Propiedades especiales de la derivada

A. Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ se conoce por el producto de dos funciones, por decir, $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se define como

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx} \tag{B.30}$$

B. Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \tag{B.31}$$

C. Regla de la cadena para cálculo diferencial. Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, en tal caso dy/dz se puede escribir como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} \tag{B.32}$$

D. La segunda derivada. La segunda derivada de y respecto a x se define como la derivada de la función dy/dx (la derivada de la derivada). Por lo general se escribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{B.33}$$

Algunas de las derivadas de las funciones más comúnmente usadas se mencionan en la tabla B.4.

EJEMPLO B.4

Suponga que $y(x)$ (es decir, y como función de x) se conoce por

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

donde a y b son constantes. Se sigue que

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c \\ &= a(x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c \end{aligned}$$

de modo que

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\,\Delta x$$

Al sustituir esto en la ecuación B.28 se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3ax^2 + 3ax\,\Delta x + a\,\Delta x^2] + b$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

EJEMPLO B.5

Encuentre la derivada de

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

Solución Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente y recordar que d/dx (constante) $= 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2 + 2$$

EJEMPLO B.6

Encuentre la derivada de $y(x) = x^3/(x+1)^2$ respecto a x.

Solución Esta función se puede rescribir como $y(x) = x^3/(x+1)^{-2}$ y aplicar la ecuación B.30:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{-2}\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\frac{d}{dx}(x+1)^{-2}$$

$$= (x+1)^{-2}3x^2 + x^3(-2)(x+1)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}$$

EJEMPLO B.7

Una fórmula útil que se sigue de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}$$

Solución El cociente se puede escribir como gh^{-1} y luego aplicar las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g\frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1}\frac{d}{dx}(g)$$

$$= -gh^{-2}\frac{dh}{dx} + h^{-1}\frac{dg}{dx}$$

$$= \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}$$

B.7 Cálculo integral

La integración se considera como el inverso de la derivación. Como ejemplo, considere la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \qquad \textbf{(B.34)}$$

que fue el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

en el ejemplo B.4. La ecuación B.34 se puede escribir como $dy = f(x)\,dx = (3ax^2 + b)$ y obtener $y(x)$ al "sumar" sobre todos los valores de x. En términos matemáticos, esta operación inversa se escribe como

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

Para la función $f(x)$ conocida por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)\,dx = ax^3 + bx + c$$

donde c es una constante de integración. Este tipo de integral se llama *integral indefinida*, porque su valor depende de la elección de c.

Una **integral indefinida** general $I(x)$ se define como

$$I(x) = \int f(x)\,dx \qquad \textbf{(B.35)}$$

donde $f(x)$ se llama *integrando* y $f(x) = dI(x)/dx$.

Para una función *continua general* $f(x)$, la integral se puede describir como el área bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre dos valores específicos de x, por decir, x_1 y x_2, como en la figura B.15.

El área del elemento azul en la figura B.15 es aproximadamente $f(x_i)\,\Delta x_i$. Si suma todos estos elementos de área entre x_1 y x_2 y toma el límite de esta suma como $\Delta x_i \to 0$, obtiene el área *verdadera* bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre los límites x_1 y x_2:

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad \textbf{(B.36)}$$

Las integrales del tipo definido por la ecuación B.36 se llaman **integrales definidas**.

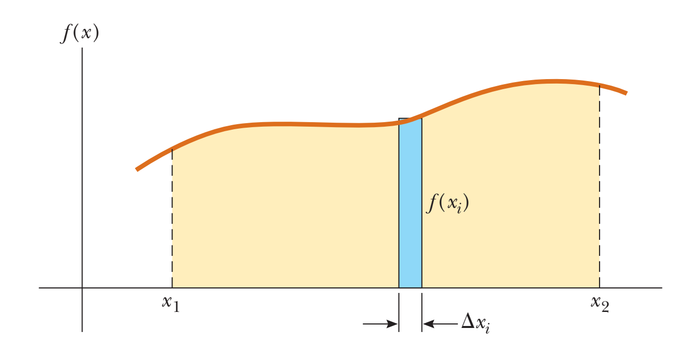


Figura B.15 La integral definida de una función es el área bajo la curva de la función entre los límites x_1 y x_2.

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \tag{B.37}$$

Este resultado es obvio, pues la derivación del lado derecho respecto a x da $f(x) = x^n$ directamente. Si los límites de la integración se conocen, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{\,n+1} - x_1^{\,n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{B.38}$$

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{a^3}{3}$

2. $\displaystyle\int_0^b x^{3/2}dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}\bigg]_0^b = \tfrac{2}{5}b^{5/2}$

3. $\displaystyle\int_3^5 x\,\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg]_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$

Integración parcial

A veces es útil aplicar el método de *integración parcial* (también llamado "integración por partes") para evaluar ciertas integrales. Este método usa la propiedad

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{B.39}$$

donde u y v se eligen con *cuidado* para reducir una integral compleja a una más simple. En muchos casos, tienen que hacerse muchas reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2 e^x\,dx$$

que se puede evaluar al integrar por partes dos veces. Primero, si elige $u = x^2$, $v = e^x$, obtiene

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,d(e^x) = x^2 e^x - 2\int e^x x\,\,dx + c_1$$

Ahora, en el segundo término, elija $u = x$, $v = e^x$, que produce

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x\,e^x + 2\int e^x\,dx + c_1$$

o

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

TABLA B.5

Algunas integrales indefinidas (A cada una de estas integrales debe agregar una constante arbitraria.)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{siempre que } n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{x+a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \quad (a^2 - x^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \quad (x^2 - a^2 > 0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\tfrac{1}{2}\ln(a^2 \pm x^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} \quad (a^2 - x^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\overline{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

$$\int x\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx = \tfrac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \ln ax\,dx = (x\ln ax) - x$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}\,(ax-1)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx})$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{sen} ax)$$

$$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\left(\tan\frac{ax}{2}\right).$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}(\tan ax) - x$$

$$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}(\cot ax) - x$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \cos^{-1} ax\,dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

TABLA B.6

Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{(Integral de probabilidad de Gauss)}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2}\, dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2}\, dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$

La diferencial perfecta

Otro método útil para recordar es el de la *diferencial perfecta*, en el que se busca un cambio de variable tal que la diferencial de la función sea la diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \;\text{sen}\; x \; dx$$

Esta integral se vuelve fácil de evaluar si reescribe la diferencial como $d(\cos x) = -\text{sen}\, x\, dx$. Entonces la integral se convierte en

$$\int \cos^2 x \;\text{sen}\; x \; dx = -\int \cos^2 x \, d(\cos x)$$

Si ahora se cambian variables, con $y = \cos x$, obtenemos

$$\int \cos^2 x \;\text{sen}\; x \; dx = -\int y^2\, dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 (página A-18) menciona algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 da la integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa se puede encontrar en varios textos, como *The Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Ratón, Fl: CRC Press, que se publica anualmente).

B.8 Propagación de incertidumbre

En experimentos de laboratorio una actividad común es tomar mediciones que fungen como datos no analizados. Estas mediciones son de varios tipos (longitud, intervalo de tiempo, temperatura, voltaje, y así sucesivamente) y se toman mediante varios instrumentos. Sin importar la medición y la calidad de la instrumentación, **siempre hay incertidumbre asociada con una medición física**. Esta incertidumbre es una combinación de la que se asocia con el instrumento y la relacionada con el sistema a medir. Un ejemplo de lo anterior es la incapacidad de determinar con exactitud la posición de una medición de longitud entre las líneas de una regleta. Otro ejemplo de incertidumbre relacionado con el sistema a medir es la variación de la temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que es difícil determinar una sola temperatura para la muestra.

Las incertidumbres se expresan en dos formas. La **incertidumbre absoluta** se refiere a una incertidumbre expresada en las mismas unidades que la medición. Por lo tanto, la longitud de una etiqueta de disco de computadora se puede expresar como (5.5 ± 0.1) cm. Sin embargo, la incertidumbre de ± 0.1 cm por sí misma no es lo suficientemente descriptiva para algunos propósitos. Esta incertidumbre es grande si la medición es 1.0 cm, pero es pequeña si la medición es 100 m. Para dar una explicación más descriptiva de la incertidumbre, se usa la **incertidumbre fraccionaria** o la **incertidumbre porcentual**. En este tipo de descripción la incertidumbre se divide por la medición real. Por lo tanto, la longitud de la etiqueta del disco de computadora podría expresarse como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm \frac{0.1 \text{ cm}}{5.5 \text{ cm}} = 5.5 \text{ cm} \pm 0.018 \quad \text{(incertidumbre fraccionaria)}$$

o como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm 1.8\% \quad \text{(incertidumbre porcentual)}$$

Cuando se combinan mediciones en un cálculo, la incertidumbre porcentual en el resultado final por lo general es mayor que la incertidumbre en las mediciones individuales. A esto se le llama **propagación de incertidumbre** y es uno de los retos de la física experimental.

Algunas reglas simples pueden proporcionar estimaciones razonables de incertidumbre en un resultado calculado:

Multiplicación y división: Cuando las mediciones con incertidumbres se multiplican o dividen, sume las *incertidumbres porcentuales* para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: El área de una placa rectangular

$$A = \ell w = (5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%) \times (6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%) = 35 \text{ cm}^2 \pm 3.4\%$$
$$= (35 \pm 1) \text{ cm}^2$$

Suma y resta: Cuando se suman o restan mediciones con incertidumbre, sume las *incertidumbres absolutas* para obtener la incertidumbre absoluta en el resultado.

Ejemplo: Un cambio en temperatura

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (99.2 \pm 1.5)°\text{C} - (27.6 \pm 1.5)°\text{C} = (71.6 \pm 3.0)°\text{C}$$
$$= 71.6°\text{C} \pm 4.2\%$$

Potencias: Si una medición se eleva a una potencia, la incertidumbre porcentual se multiplica por dicha potencia para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: Volumen de una esfera

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi(6.20 \text{ cm} \pm 2.0\%)^3 = 998 \text{ cm}^3 \pm 6.0\%$$
$$= (998 \pm 60) \text{ cm}^3$$

Para cálculos complicados muchas incertidumbres se suman juntas, lo que puede hacer que la incertidumbre en el resultado final sea indeseablemente grande. Los experimentos se deben diseñar de modo que los cálculos sean tan simples como sea posible.

Note que las incertidumbres en un cálculo siempre se suman. Como resultado, un experimento que involucre una resta se debe evitar, si es posible, en especial si las mediciones a restar están cercanas. El resultado de tal cálculo es una diferencia pequeña en las mediciones e incertidumbres que se suman. ¡Es posible que la incertidumbre en el resultado pueda ser mayor que el resultado mismo!

Símbolo — **Ca** 20 — Número atómico
Masa atómica† — 40.078
$4s^2$ — Configuración de electrón

Grupo I	Grupo II	Elementos transitorios						
H 1 1.007 9 $1s$								
Li 3 6.941 $2s^1$	**Be** 4 9.0122 $2s^2$							
Na 11 22.990 $3s^1$	**Mg** 12 24.305 $3s^2$							
K 19 39.098 $4s^1$	**Ca** 20 40.078 $4s^2$	**Sc** 21 44.956 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47.867 $3d^24s^2$	**V** 23 50.942 $3d^34s^2$	**Cr** 24 51.996 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54.938 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55.845 $3d^64s^2$	**Co** 27 58.933 $3d^74s^2$
Rb 37 85.468 $5s^1$	**Sr** 38 87.62 $5s^2$	**Y** 39 88.906 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91.224 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92.906 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95.94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 (98) $4d^55s^2$	**Ru** 44 101.07 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102.91 $4d^85s^1$
Cs 55 132.91 $6s^1$	**Ba** 56 137.33 $6s^2$	57–71*	**Hf** 72 178.49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180.95 $5d^36s^2$	**W** 74 183.84 $5d^46s^2$	**Re** 75 186.21 $5d^56s^2$	**Os** 76 190.23 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192.2 $5d^76s^2$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 (226) $7s^2$	89–103**	**Rf** 104 (261) $6d^27s^2$	**Db** 105 (262) $6d^37s^2$	**Sg** 106 (266)	**Bh** 107 (264)	**Hs** 108 (277)	**Mt** 109 (268)

*Serie lantánidos	**La** 57 138.91 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140.12 $5d^14f^16s^2$	**Pr** 59 140.91 $4f^36s^2$	**Nd** 60 144.24 $4f^46s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^56s^2$	**Sm** 62 150.36 $4f^66s^2$
**Serie actínidos	**Ac** 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 232.04 $6d^27s^2$	**Pa** 91 231.04 $5f^26d^17s^2$	**U** 92 238.03 $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 (237) $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^66d^07s^2$

Nota: Los valores de masa atómica son promedios sobre isótopos en los porcentajes en los que existen en la naturaleza.
† Para un elemento inestable el número de masa del isótopo conocido más estable aparece entre paréntesis.
†† Los elementos 112 y 114 todavía no tienen nombre.
††† Para una descripción de los datos atómicos, visite *physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/per_text.html*

			Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
							H 1 1.007 9 $1s^1$	**He** 2 4.002 6 $1s^2$
			B 5 10.811 $2p^1$	**C** 6 12.011 $2p^2$	**N** 7 14.007 $2p^3$	**O** 8 15.999 $2p^4$	**F** 9 18.998 $2p^5$	**Ne** 10 20.180 $2p^6$
			Al 13 26.982 $3p^1$	**Si** 14 28.086 $3p^2$	**P** 15 30.974 $3p^3$	**S** 16 32.066 $3p^4$	**Cl** 17 35.453 $3p^5$	**Ar** 18 39.948 $3p^6$
Ni 28 58.693 $3d^8 4s^2$	**Cu** 29 63.546 $3d^{10} 4s^1$	**Zn** 30 65.41 $3d^{10} 4s^2$	**Ga** 31 69.723 $4p^1$	**Ge** 32 72.64 $4p^2$	**As** 33 74.922 $4p^3$	**Se** 34 78.96 $4p^4$	**Br** 35 79.904 $4p^5$	**Kr** 36 83.80 $4p^6$
Pd 46 106.42 $4d^{10}$	**Ag** 47 107.87 $4d^{10} 5s^1$	**Cd** 48 112.41 $4d^{10} 5s^2$	**In** 49 114.82 $5p^1$	**Sn** 50 118.71 $5p^2$	**Sb** 51 121.76 $5p^3$	**Te** 52 127.60 $5p^4$	**I** 53 126.90 $5p^5$	**Xe** 54 131.29 $5p^6$
Pt 78 195.08 $5d^9 6s^1$	**Au** 79 196.97 $5d^{10} 6s^1$	**Hg** 80 200.59 $5d^{10} 6s^2$	**Tl** 81 204.38 $6p^1$	**Pb** 82 207.2 $6p^2$	**Bi** 83 208.98 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
Ds 110 (271)	**Rg** 111 (272)	112†† (285)		114†† (289)				

Eu 63 151.96 $4f^7 6s^2$	**Gd** 64 157.25 $4f^7 5d^1 6s^2$	**Tb** 65 158.93 $4f^8 5d^1 6s^2$	**Dy** 66 162.50 $4f^{10} 6s^2$	**Ho** 67 164.93 $4f^{11} 6s^2$	**Er** 68 167.26 $4f^{12} 6s^2$	**Tm** 69 168.93 $4f^{13} 6s^2$	**Yb** 70 173.04 $4f^{14} 6s^2$	**Lu** 71 174.97 $4f^{14} 5d^1 6s^2$
Am 95 (243) $5f^7 7s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^7 6d^1 7s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^8 6d^1 7s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10} 7s^2$	**Es** 99 (252) $5f^{11} 7s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12} 7s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13} 7s^2$	**No** 102 (259) $5f^{14} 7s^2$	**Lr** 103 (262) $6d^1 5f^{14} 7s^2$

TABLA D.1

Unidades del SI

	Unidad base del SI	
Cantidad base	**Nombre**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

TABLA D.2

Algunas unidades del SI deducidas

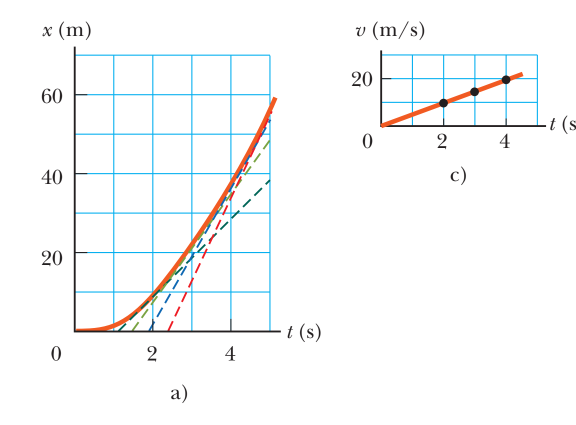
Cantidad	Nombre	Símbolo	Expresión en términos de unidades base	Expresión en términos de otras unidades del SI
Ángulo plano	radián	rad	m/m	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	J/m
Presión	pascal	Pa	$kg/m \cdot s^2$	N/m^2
Energía	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$	
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$	W/A
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$	V/A
Flujo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	$V \cdot s$
Campo magnético	tesla	T	$kg/A \cdot s^2$	
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	$T \cdot m^2/A$

CAPÍTULO 1

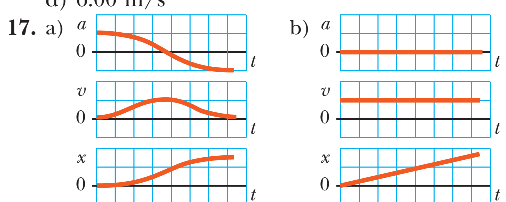
1. 5.52×10^3 kg/m^3, entre la densidad del aluminio y la del hierro, y mayor que las densidades de rocas superficiales representativas
3. 23.0 kg
5. 7.69 cm
7. b) sólo
9. Las unidades de G son m^3/kg · s^2
11. 1.39×10^3 m^2
13. No con las páginas del volumen 1, pero sí con las páginas de la versión completa. Cada página tiene un área de 0.059 m^2. La habitación tiene 37 m^2 de área de pared, lo que requiere 630 hojas, que se contarían como 1 260 páginas.
15. 11.4×10^3 kg/m^3
17. a) 250 años b) 3.09×10^4 veces
19. 1.00×10^{10} lb
21. 151 μm
23. 2.86 cm
25. $\sim 10^6$ pelotas
27. $\sim 10^2$ kg; $\sim 10^3$ kg
29. $\sim 10^2$ afinadores
31. a) 3 b) 4 c) 3 d) 2
33. a) 797 b) 1.1 c) 17.66
35. 8.80%
37. 9
39. 63
41. 108° y 288°
43. 48.6 kg
45. a) menor en nueve veces b) Δt es inversamente proporcional a d^2 c) Grafique Δt en el eje vertical y $1/d^2$ en el eje horizontal d) $4QL/[k\pi(T_h - T_c)]$
47. a) $m = 346$ g $- (14.5$ g/cm$^3)a^3$ b) $a = 0$ c) 346 g d) sí e) $a = 2.60$ cm f) 90.6 g g) sí h) 218 g i) No; 218 g no es igual a 314 g. j) Los incisos b), c) y d) describen una esfera sólida uniforme con $\rho = 4.70$ g/cm^3 conforme a tiende a cero. Los incisos e), f) y g) describen una gota líquida uniforme con $\rho = 1.23$ g/cm^3 conforme a tiende a 2.60 cm. La función $m(a)$ no es una función lineal, así que a a la mitad entre 0 y 2.60 cm no da un valor para m a la mitad entre los valores mínimo y máximo. La gráfica de m en función de a comienza en $a = 0$ con una tangente horizontal. Luego se curva hacia abajo cada vez más pronunciada conforme a aumenta. La gota líquida de 1.30 cm de radio tiene sólo un octavo del volumen de toda la esfera, así que su presencia reduce la masa sólo por una pequeña cantidad, de 346 g a 314 g. k) La respuesta no cambiaría en tanto la pared del cascarón no esté rota.
49. 5.0 m
51. $0.579t$ pies^3/s + $(1.19 \times 10^{-9})t^2$ pies^3/s^2
53. 3.41 m
55. 0.449%
57. a) 0.529 cm/s b) 11.5 cm/s
59. 1×10^{10} gal/años

CAPÍTULO 2

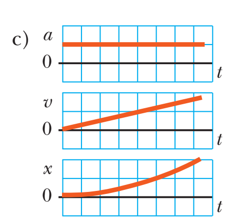
1. a) 5 m/s b) 1.2 m/s c) −2.5 m/s d) −3.3 m/s e) 0
3. a) 3.75 m/s b) 0
5. a) −2.4 m/s b) −3.8 m/s c) 4.0 s
7. a) y c)



b) $v_{t=5.0\text{ s}} = 23$ m/s, $v_{t=4.0\text{ s}} = 18$ m/s, $v_{t=3.0\text{ s}} = 14$ m/s, $v_{t=2.0\text{ s}} = 9.0$ m/s c) 4.6 m/s^2 d) 0
9. 5.00 m
11. a) 20.0 m/s, 5.00 m/s (b) 262 m
13. a) 2.00 m b) −3.00 m/s c) −2.00 m/s^2
15. a) 13.0 m/s b) 10.0 m/s, 16.0 m/s c) 6.00 m/s^2 d) 6.00 m/s^2
17. a)



c)



19. a) 9.00 m/s b) 5.00 m/s c) 3.00 m/s d) −3.00 m/s e) 17.0 m/s f) La gráfica de velocidad en función del tiempo es una línea recta que pasa a través de 13 m/s a las 10:05 a.m., y se inclina hacia abajo, reduciendo 4 m/s cada segundo de ahí en adelante. g) Si y solo si se conoce la velocidad del objeto en un instante de tiempo, conocer su aceleración dice su velocidad en cualquier otro momento, en tanto la aceleración sea constante.
21. −16.0 cm/s^2
23. a) 20.0 s b) No puede; necesitaría una pista más larga.
25. 3.10 m/s
27. a) −202 m/s^2 b) 198 m
29. a) 4.98×10^{-9} s b) 1.20×10^{15} m/s^2
31. a) Falso a menos que la aceleración sea cero. La aceleración constante se define de modo que la velocidad cambia de manera estable en el tiempo. Después la velocidad no puede cambiar de manera estable en el espacio. b) Verdadero. Ya que la velocidad cambia de manera estable en el tiempo, la velocidad a la mitad de un intervalo es igual al promedio de sus valores inicial y final.
33. a) 3.45 s b) 10.0 pies
35. a) 19.7 cm/s b) 4.70 cm/s^2 c) El intervalo de tiempo requerido para que la rapidez cambie entre Ⓐ y Ⓑ es

suficiente para encontrar la aceleración, más directamente de lo que podría encontrarla a partir de la distancia entre los puntos.

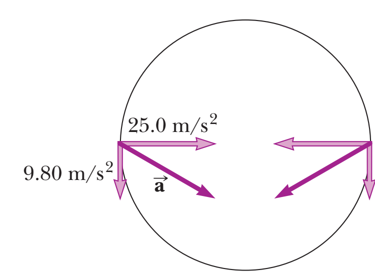
37. Ignore la resistencia del aire. Suponga que el tiempo de vuelo del trabajador, "una milla", y "un dólar" se midieron a tres cifras de precisión. Se interpretó "en el cielo permaneció" como referencia al tiempo de caída libre, no a los tiempos de lanzamiento y aterrizaje. Por lo tanto, el salario fue de \$99.3/h.
39. a) 10.0 m/s arriba b) 4.68 m/s abajo
41. a) 29.4 m/s b) 44.1 m
43. a) 7.82 m b) 0.782 s
45. 38.2 m
47. a) $a_x(t) = a_{xi} + Jt$, $v_x(t) = v_{xi} + a_{xi}t + \frac{1}{2}Jt^2$, $x(t) = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_{xi}t^2 + \frac{1}{6}Jt^3$
49. a) 0 b) 6.0 m/s^2 c) -3.6 m/s^2 d) 6 s y 18 s e) 18 s f) 84 m g) 204 m
51. a) 41.0 s b) 1.73 km c) -184 m/s
53. a) 5.43 m/s ^{2} y 3.83 m/s^2 b) 10.9 m/s y 11.5 m/s c) Maggie por 2.62 m
55. 155 s, 129 s
57. a) 3.00 s b) -15.3 m/s c) 31.4 m/s abajo y 34.8 m/s abajo
59. a) 5.46 s b) 73.0 m c) $v_{\text{Stan}} = 22.6$ m/s, $v_{\text{Kathy}} = 26.7$ m/s
61. a) sí, a dos cifras significativas b) 0.742 s c) Sí; la distancia de frenado es proporcionar al cuadrado de la rapidez original. d) -19.7 pies/s^2 = -6.01 m/s^2
63. 0.577 v

CAPÍTULO 3

1. $(-2.75, -4.76)$ m
3. a) 2.24 m b) 2.24 m a 26.6°
5. a) r, 180° $-$ θ b) 2 r, 180° + θ c) 3 r, $-\theta$
7. 70.0 m
9. a) 10.0 m b) 15.7 m c) 0
11. a) 5.2 m a 60° b) 3.0 m a 330° c) 3.0 m a 150° d) 5.2 m a 300°
13. aproximadamente 420 pies a -3°
15. 47.2 unidades a 122°
17. Sí. La rapidez del remolque debería ser 28.3 m/s o mayor.
19. a) $(-11.1\mathbf{i} + 6.40\hat{\mathbf{j}})$ m b) $(1.65\hat{\mathbf{i}} + 2.86\hat{\mathbf{j}})$ cm c) $(-18.0\mathbf{i} - 12.6\hat{\mathbf{j}})$ pulg.
21. 358 m a 2.00° SE
23. 196 cm a 345°
25. a) $2.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00\hat{\mathbf{j}}$ b) $4.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}}$ c) 6.32 d) 4.47 e) 288°, 26.6°
27. 9.48 m a 166°
29. 4.64 m a 78.6° NE
31. a) 185 N a 77.8° desde el eje $+x$ b) $(-39.3\hat{\mathbf{i}} - 181\hat{\mathbf{j}})$ N
33. $|\vec{\mathbf{B}}| = 7.81$, $\theta_x = 59.2°$, $\theta_y = 39.8°$, $\theta_z = 67.4°$
35. a) 5.92 m es la magnitud de $(5.00\hat{\mathbf{i}} - 1.00\hat{\mathbf{j}} - 3.00\hat{\mathbf{k}})$ m b) 19.0 m es la magnitud de $(4.00\hat{\mathbf{i}} - 11.0\hat{\mathbf{j}} - 15.0\hat{\mathbf{k}})$ m
37. a) $8.00\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}} - 4.00\hat{\mathbf{k}}$ b) $2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} - 1.00\hat{\mathbf{k}}$ c) $-24.0\hat{\mathbf{i}} - 36.0\hat{\mathbf{j}} + 12.0\hat{\mathbf{k}}$
39. a) $(3.12\hat{\mathbf{i}} + 5.02\hat{\mathbf{j}} - 2.20\hat{\mathbf{k}})$ km b) 6.31 km
41. a) $-3.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}}$ b) 3.61 a 146° c) $3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00\hat{\mathbf{j}}$
43. a) $49.5\hat{\mathbf{i}} + 27.1\hat{\mathbf{j}}$ b) 56.4 unidades a 28.7°
45. a) $[(5 + 11f)\hat{\mathbf{i}} + (3 + 9f)\hat{\mathbf{j}}]$ m, b) $(5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ m es razonable porque es el punto de partida. c) $(16\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}})$m es razonable porque es el punto final.
47. 1.15°
49. 2.29 km
51. a) 7.17 km b) 6.15 km
53. 390 mi/h a 7.37° NE
55. $(0.456\hat{\mathbf{i}} - 0.708\hat{\mathbf{j}})$ m
57. 240 m a 237°
59. a) (10.0 m, 16.0 m) b) Llegará al tesoro si toma los árboles en cualquier orden. Las instrucciones lo llevan a la posición promedio de los árboles.
61. a) 106°

CAPÍTULO 4

1. a) 4.87 km a 209° desde E b) 23.3 m/s c) 13.5 m/s a 209°
3. 2.50 m/s
5. a) $(0.800\hat{\mathbf{i}} - 0.300\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2 b) 339° c) $(360\hat{\mathbf{i}} - 72.7\hat{\mathbf{j}})$ m, $-15.2°$
7. a) $\vec{\mathbf{v}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 4t^{3/2}\hat{\mathbf{j}}$ b) $\vec{\mathbf{r}} = 5t\hat{\mathbf{i}} + 1.6t^{5/2}\hat{\mathbf{j}}$
9. a) $3.34\hat{\mathbf{i}}$ m/s b) $-50.9°$
11. $(7.23 \times 10^3$ m, 1.68×10^3 m$)$
13. 53.1°
15. a) 22.6 m b) 52.3 m c) 1.18 s
17. a) La bola libra por 0.889 m b) mientras desciende
19. a) 18.1 m/s b) 1.13 m c) 2.79 m
21. 9.91 m/s
23. $\tan^{-1}[(2gh)^{1/2}/v]$
25. 377 m/s^2
27. a) 6.00 rev/s b) 1.52 km/s^2 c) 1.28 km/s^2
29. 1.48 m/s^2 hacia adentro y 29.9° hacia atrás
31. a) 13.0 m/s ^{2} b) 5.70 m/s c) 7.50 m/s^2
33. a) 57.7 km/h a 60.0° O de la vertical b) 28.9 km/h hacia abajo
35. 2.02×10^3 s; 21.0% más largo
37. $t_{\text{Alan}} = \dfrac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$, $t_{\text{Beth}} = \dfrac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Beth regresa primero.
39. 15.3 m
41. 27.7° NE
43. a) 9.80 m/s^2 abajo b) 3.72 m
45. a) 41.7 m/s b) 3.81 s c) $(34.1\hat{\mathbf{i}} - 13.4\hat{\mathbf{j}})$ m/s; 36.7 m/s
47. a) 25.0 m/s^2; 9.80 m/s^2
b)



c) 26.8 m/s^2 hacia adentro a 21.4° bajo la horizontal
49. a)

t (s)	0	1	2	3	4	5
r (m)	0	45.7	82.0	109	127	136

t (s)	6	7	8	9	10
r (m)	138	133	124	117	120

b) El vector $\vec{\mathbf{v}}$ dice cómo cambia $\vec{\mathbf{r}}$. Si $\vec{\mathbf{v}}$ en un punto particular tiene una componente a lo largo de $\vec{\mathbf{r}}$, por lo tanto $\vec{\mathbf{r}}$ aumentará en magnitud (si $\vec{\mathbf{v}}$ está en un ángulo menor que 90° desde $\vec{\mathbf{r}}$) o disminuirá (si el ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ es más de 90°). Para ser un máximo, la distancia desde el origen momentáneamente debe permanecer constante, y la única forma en que puede suceder es si el ángulo entre velocidad y posición es un ángulo recto. En tal caso $\vec{\mathbf{r}}$ cambiará en dirección en dicho punto, pero no en magnitud. c) El requisito de perpendicularidad se puede definir como igualdad entre la tangente del ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y la dirección x y la tangente del ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y la dirección y. En símbolos, esta igualdad se puede escribir $(9.8t - 49)/12 = 12t/(49t - 4.9t^2)$, que tiene la solución $t = 5.70$ s, lo que a su vez da $r = 138$ m. De manera alternativa, se puede requerir $dr^2/dt = 0 = (d/dt)[(12t)^2 + (49t - 4.9t^2)^2]$, que resulta en la misma ecuación con la misma solución.

51. a) 26.6° b) 0.949

53. a) 6.80 km b) 3.00 km verticalmente arriba del punto de impacto c) 66.2°

55. a) 46.5 m/s b) −77.6° c) 6.34 s

57. a) 20.0 m/s, 5.00 s b) $(16.0\hat{\mathbf{i}} - 27.1\hat{\mathbf{j}})$ m/s c) 6.53 s d) $24.5\hat{\mathbf{i}}$ m

59. a) 43.2 m b) $(9.66\hat{\mathbf{i}} - 25.5\hat{\mathbf{j}})$m/s. La resistencia del aire de ordinario hace menor la distancia de salto y las componentes de velocidades finales horizontal y vertical son un poco menores. Cuando el saltador experto hace de su cuerpo una superficie sustentadora, desvía hacia abajo el aire por el que pasa, así que él se desvía hacia arriba, lo que le da más tiempo en el aire y un salto más largo.

61. Las distancias seguras son menores que 270 m o mayores que 3.48×10^3 a la línea poniente de la costa.

CAPÍTULO 5

1. $(6.00\hat{\mathbf{i}} + 15.0\hat{\mathbf{j}})$ N; 16.2 N

3. a) $(2.50\ \hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ N b) 5.59 N

5. a) 3.64×10^{-18} N b) 8.93×10^{-30} N es 408 mil millones de veces menor

7. 2.55 N para una persona de 88.7 kg

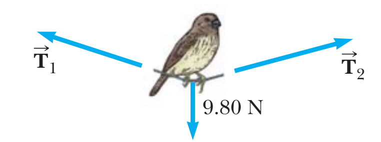
9. a) 5.00 m/s ^{2} a 36.9° b) 6.08 m/s^2 a 25.3°

11. a) $\sim 10^{-22}$ m/s^2 b) $\sim 10^{-23}$ m

13. a) 15.0 lb arriba b) 5.00 lb arriba c) 0

15. a) 3.43 kN b) 0.967 m/s horizontalmente hacia adelante

17.



613 N

19. a) $P\cos 40° - n = 0$ y $P\,\text{sen}\,40° - 220\text{ N} = 0$; $P = 342$ N y $n = 262$ N b) $P - n\cos 40° - (220\text{ N})\,\text{sen}\,40° = 0$ y $n\,\text{sen}\,40 - (220\text{ N})\cos 40° = 0$; $n = 262$ N y $P = 342$ N c) Los resultados concuerdan. Los métodos tienen un nivel similar de dificultad. Cada uno involucra una ecuación con una incógnita y una ecuación con dos incógnitas. Si está interesado en encontrar n sin encontrar P, el método b) es más simple.

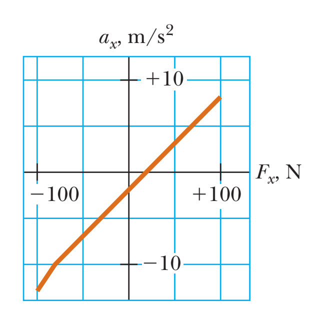
23. a) 49.0 N b) 49.0 N c) 98.0 N d) 24.5 N

25. 8.66 N Este

27. a) 646 N arriba b) 646 N arriba c) 627 N arriba d) 589 N arriba

29. 3.73 m

31. a) $F_x > 19.6$ N b) $F_x \leq -78.4$ N c)



33. a) 706 N b) 814 N c) 706 N d) 648 N

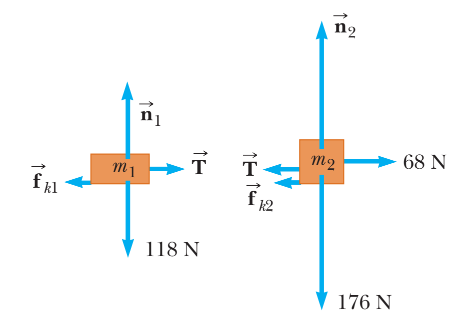
35. a) 256 m b) 42.7 m

37. a) no b) 16.9 N hacia atrás + 37.2 N hacia arriba = 40.9 N hacia arriba y atrás a 65.6° con la horizontal

39. a) 1.78 m/s^2 b) 0.368 c) 9.37 N d) 2.67 m/s

41. 37.8 N

43. a)



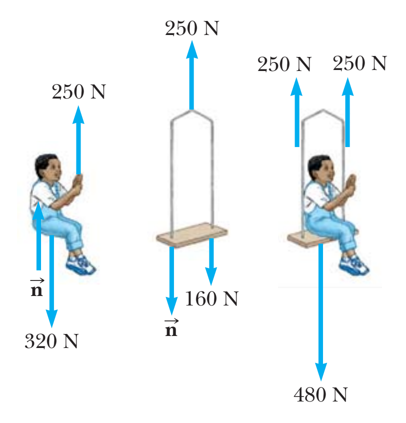
b) 27.2 N, 1.29 m/s^2.

45. a) $a = 0$ si $P < 8.11$ N; $a = -3.33$ m/s^2 + (1.41/kg) P a la derecha si $P > 8.11$ N b) $a = 0$; 3.99 N horizontalmente hacia atrás c) 10.8 m/s^2 a la derecha; 3.45 N a la izquierda d) La aceleración es cero para todos los valores de P menores que 8.11 N. Cuando P pasa este umbral, la aceleración salta a su mínimo valor distinto de cero de 8.14 m/s^2. Desde ahí aumenta linealmente con P hacia valores arbitrariamente altos.

47. 72.0 N

49. a) 2.94 m/s^2 adelante b) 2.45 m/s^2 adelante c) 1.19 m/s^2 arriba del plano d) 0.711 m/s^2 arriba del plano e) 16.7° f) La masa no hace diferencia. Matemáticamente, la masa se elimina en las determinaciones de aceleración. Si varios paquetes de platos se colocaran en el camión, todos se deslizarían juntos, independientemente de si están o no amarrados unos a otros.

51. a)



b) 0.408 m/s^2 c) 83.3 N

53. a) 3.00 s b) 20.1 m c) $(18.0\ \hat{\mathbf{i}} - 9.00\hat{\mathbf{j}})$ m

55. a) $a = 12\ \text{N}/(4\ \text{kg} + m_1)$ adelante b) $12\ \text{N}/(1 + m_1/4\ \text{kg})$ adelante c) 2.50 m/s^2 adelante y 10.0 N adelante d) La fuerza tiende a cero e) La fuerza tiende a 12.0 N f) La tensión en la cuerda de masa despreciable es constante a lo largo de su longitud.

57. a) $Mg/2$, $Mg/2$, $Mg/2$, $3Mg/2$, Mg b) $Mg/2$

59. a) Ambos son iguales respectivamente. b) 1.61×10^4 N c) 2.95×10^4 N d) 0 N; 3.51 m/s hacia arriba. Los primeros 3.50 m/s de la rapidez de 3.51 m/s no necesitan causa dinámica; el movimiento del cable continúa por él mismo, como se describe por la ley de "inercia" o "terquedad". El aumento de 3.50 m/s a 3.51 m/s debe ser causado por alguna fuerza total hacia arriba en la sección de cable. Sin embargo, ya que su masa es muy pequeña comparada con mil kilogramos, la fuerza es muy pequeña comparada con 1.61×10^4 N, la tensión casi uniforme de esta sección de cable.

61. b)

θ	0	15°	30°	45°	60°
P (N)	40.0	46.4	60.1	94.3	260

63. a) La fuerza neta sobre el cojín neumático está en una dirección fija, hacia abajo y adelante, y forma un ángulo $\tan^{-1}(F/mg)$ con la vertical. Si parte del reposo, se moverá a lo largo de esta línea con b) rapidez creciente. Su velocidad cambia en magnitud. c) 1.63 m d) Se moverá a lo largo de una parábola. El eje de la parábola es paralelo a la línea discontinua en la figura del problema. Si el cojín se lanza en una dirección sobre la línea discontinua, su trayectoria será cóncava hacia abajo, lo que hace que su velocidad se vuelva más y más paralela a la línea discontinua con el tiempo. Si el cojín se lanza abajo más pronunciadamente, su trayectoria será cóncava hacia arriba, lo que de nuevo hace que su velocidad cambie hacia la dirección fija de su aceleración.

65. a) 19.3° b) 4.21 N

67. $(M + m_1 + m_2)(m_2 g/m_1)$

69. a) 30.7° b) 0.843 N

71. a) $T_1 = \dfrac{2mg}{\operatorname{sen}\theta_1}$, $T_2 = \dfrac{mg}{\operatorname{sen}\theta_2} = \dfrac{mg}{\operatorname{sen}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\theta_1\right)\right]}$,

$$T_3 = \frac{2\ mg}{\tan\ \theta_1}$$

b) $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{\tan\ \theta_1}{2}\right)$

CAPÍTULO 6

1. Cualquier rapidez arriba de 8.08 m/s

3. a) 8.32×10^{-8} N hacia el núcleo b) 9.13×10^{22} m/s^2 hacia adentro

5. a) fricción estática b) 0.085 0

7. 2.14 rev/min

9. $v \leq 14.3$ m/s

11. a) 108 N b) 56.2 N

13. a) 4.81 m/s b) 700 N arriba

15. No. Tarzán necesita una liana con resistencia a la rotura de 1.38 kN.

17. 3.13 m/s

19. a) 3.60 m/s^2 b) cero c) Un observador en el automóvil (un marco no inercial) afirma una fuerza de 18.0 N hacia la izquierda y una fuerza de 18.0 N hacia la derecha. Un observador inercial (afuera del auto) sólo afirma una fuerza de 18.0 N hacia la derecha.

21. a) 17.0° b) 5.12 N

23. a) 491 N b) 50.1 kg c) 2.00 m/s

25. 0.092 8°

27. a) 32.7 s^{-1} b) 9.80 m/s^2 abajo c) 4.90 m/s^2 abajo

29. 3.01 N arriba

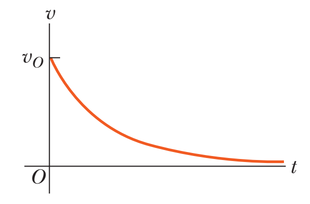
31. a) 1.47 N · s/m b) 2.04×10^{-3} s c) 2.94×10^{-2} N

33. a) 78.3 m/s b) 11.1 s c) 121 m

35. a) $x = k^{-1} \ln (1 + kv_0 t)$ b) $v = v_0 e^{-kx}$

37. a) 0.034 7 s^{-1} b) 2.50 m/s c) $a = -cv$

39. $v = v_0 e^{-bt/m}$



En este modelo, el objeto sigue moviéndose por siempre. Recorre una distancia infinita en un intervalo de tiempo infinito.

41. a) 106 N arriba del plano b) 0.396

43. a) 11.5 kN b) 14.1 m/s

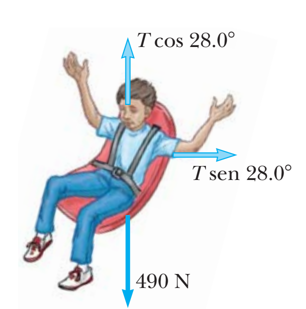
45. a) 0.016 2 kg/m b) $\frac{1}{2}D\rho A$ c) 0.778 d) 1.5% e) Para filtros de café apilados que caen en aire con rapidez terminal, la gráfica de fuerza de resistencia del aire como función del cuadrado de la rapidez demuestra que la fuerza es proporcional a la rapidez al cuadrado, dentro de la incertidumbre experimental estimada como 2%. Esta proporcionalidad concuerda con el modelo teórico de resistencia del aire con magnitudes de velocidad altas. El coeficiente de arrastre de un filtro de café es $D = 0.78 \pm 2\%$.

47. $g(\cos\phi \tan\theta - \operatorname{sen}\phi)$

49. b) 732 N abajo en el ecuador y 735 N abajo en los polos.

51. a) La única fuerza horizontal en el automóvil es la fuerza de fricción, con un valor máximo determinado por la rugosidad de la superficie (descrita por el coeficiente de fricción estática) y la fuerza normal (en este caso igual a la fuerza gravitacional sobre el automóvil). b) 34.3 m c) 68.6 m d) Frenar es mejor. No debe girar el volante. Si usó alguna de las fuerzas de fricción disponibles para cambiar la dirección del automóvil, no sería posible frenar el auto y la distancia de frenado sería mayor. e) La conclusión es verdadera en general. El radio de la curva que apenas puede hacer es el doble de su distancia de frenado mínima.

53. a) 5.19 m/s
b) $T = 555$ N



55. b) 2.54 s; 23.6 rev/min c) Las fuerzas gravitacional y de fricción permanecen constantes. La fuerza normal aumenta. La persona permanece en movimiento con la pared. d) La fuerza gravitacional permanece constante. Las fuerzas normal y de fricción disminuyen. La persona se desliza en relación con la pared y hacia abajo en el hueco.

57. a) $v_{\text{mín}} = \sqrt{\dfrac{Rg(\tan\theta - \mu_s)}{1 + \mu_s \tan\theta}}$, $v_{\text{máx}} = \sqrt{\dfrac{Rg(\tan\theta + \mu_s)}{1 - \mu_s \tan\theta}}$

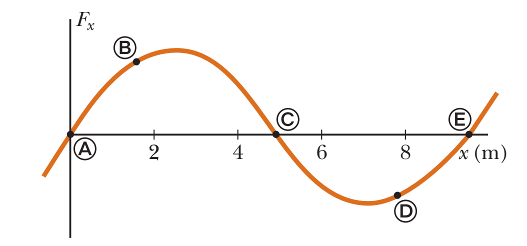
b) $\mu_s = \tan\theta$ c) 8.57 m/s $\leq v \leq$ 16.6 m/s

59. a) 0.013 2 m/s b) 1.03 m/s c) 6.87 m/s

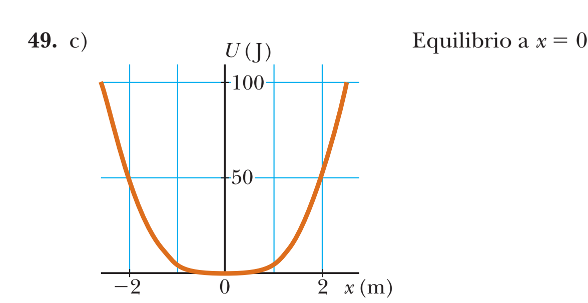
61. 12.8 N

CAPÍTULO 7

1. a) 31.9 J b) 0 c) 0 d) 31.9 J
3. −4.70 kJ
7. a) 16.0 J b) 36.9°
9. a) 11.3° b) 156° c) 82.3°
11. $\vec{\mathbf{A}}$ = 7.05 m a 28.4°
13. a) 24.0 J b) −3.00 J c) 21.0 J
15. a) 7.50 J b) 15.0 J c) 7.50 J d) 30.0 J
17. a) 0.938 cm b) 1.25 J
19. 7.37 N/m
21. 0.299 m/s
23. a) 0.020 4 m b) 720 N/m
25. b) mgR
27. a) 0.600 J b) −0.600 J c) 1.50 J
29. a) 1.20 J b) 5.00 m/s c) 6.30 J
31. a) 60.0 J b) 60.0 J
33. 878 kN arriba
35. a) 4.56 kJ b) 6.34 kN c) 422 km/s^2 d) 6.34 kN e) Las fuerzas son las mismas. Las dos teorías concuerdan.
37. a) 259 kJ, 0, −259 kJ b) 0, −259 kJ, −259 kJ
39. a) −196 J b) −196 J c) −196 J. La fuerza es conservativa.
41. a) 125 J b) 50.0 J c) 66.7 J d) La fuerza es no conservativa. Los resultados difieren.
43. a) 40.0 J (b) −40.0 J c) 62.5 J
45. (A/r^2) alejándose de la otra partícula
47. a) + enⒷ, − enⒹ, 0 enⒶ, Ⓒ, y Ⓔ
b) Ⓒ estable; Ⓐ y Ⓔ inestable



49. c) Equilibrio a $x = 0$



d) 0.823 m/s
51. 90.0 J
53. a) $x = (3.62m)/(4.30 - 23.4m)$ donde x está en metros y m en kilogramos b) 0.095 1 m c) 0.492 m d) 6.85 m e) La situación es imposible. f) La extensión es directamente proporcional a m cuando m sólo es unos cuantos gramos. Por lo tanto crece cada vez más rápido y diverge a infinito para m = 0.184 kg.
55. $U(x) = 1 + 4e^{-2x}$. La fuerza debe ser conservativa porque el trabajo que la fuerza hace en el objeto sobre el que actúa sólo depende de las posiciones original y final del objeto, no de la trayectoria entre ellos.
57. 1.68 m/s
59. 0.799 J

CAPÍTULO 8

1. a) $\Delta E_{int} = Q + T_{ET} + T_{ER}$ b) $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W + Q + T_{MW} + T_{MT}$ c) $\Delta U = Q + T_{MT}$ d) $0 = Q + T_{MT} + T_{ET} + T_{ER}$
3. a) $v = (3gR)^{1/2}$ b) 0.098 0 N abajo
5. 10.2 m
7. a) 4.43 m/s b) 5.00 m
9. 5.49 m/s
11. a) 25.8 m b) 27.1 m/s^2
13. a) 650 J b) 588 J c) 0 d) 0 e) 62.0 J f) 1.76 m/s
15. a) −168 J b) 184 J c) 500 J d) 148 J e) 5.65 m/s
17. 2.04 m
19. 3.74 m/s
21. a) −160 J b) 73.5 J c) 28.8 N d) 0.679
23. a) 1.40 m/s b) 4.60 cm después de liberar c) 1.79 m/s
25. a) 0.381 m b) 0.143 m c) 0.371 m
27. a) $a_x = -\mu_k gx/L$ b) $v = (\mu_k gL)^{1/2}$
29. 875 W
31. ~ 10^4 W
33. $46.2
35. a) 10.2 kW b)10.6 kW c) 5.82 MJ
37. a) 11.1 m/s b) 19.6 m/s^2 hacia arriba c) 2.23×10^3 N hacia arriba d) 1.01×10^3 J e) 5.14 m/s f) 1.35 m g) 1.39 s
39. a) $(2 + 24t^2 + 72t^4)$ J b) $12t$ m/s^2; $48t$ N c) $(48t + 288t^3)$ W d) 1 250 J
41. a) 1.38×10^4 J b) 3.02×10^4 W
43. a) 4.12 m b) 3.35 m
45. a) 2.17 kW b) 58.6 kW
47. a) $x = -4.0$ mm b) −1.0 cm
49. 33.4 kW
51. a) 0.225 J b) $\Delta E_{mec} = -0.363$ J c) No. La fuerza normal cambia en una forma complicada.
53. a) 100 J b) 0.410 m c) 2.84 m/s d) −9.80 mm e) 2.85 m/s
55. 0.328
57. 1.24 m/s
59. a) 0.400 m b) 4.10 m/s c) El bloque permanece en la pista.
61. $2m$
65. a) 14.1 m/s b) −7.90 kJ c) 800 N d) 771 N e) 1.57 kN arriba

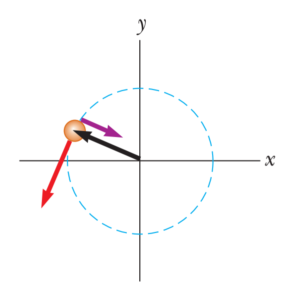
CAPÍTULO 9

1. a) $(9.00\hat{\mathbf{i}} - 12.0\hat{\mathbf{j}})$ kg · m/s b) 15.0 kg · m/s a 307°
3. ~ 10^{-23} m/s
5. b) $p = \sqrt{2mK}$
7. a) 13.5 N · s b) 9.00 kN c) 18.0 kN
9. 260 N normal hacia la pared
11. a) $12.0\,\hat{\mathbf{i}}$ N · s b) $4.80\hat{\mathbf{i}}$ m/s c) $2.80\hat{\mathbf{i}}$ m/s d) $2.40\hat{\mathbf{i}}$ N
13. b) pequeño d) grande e) no hay diferencia
15. 301 m/s
17. a) 2.50 m/s b) 37.5 kJ c) Cada proceso es el inverso temporal del otro. La misma ecuación de conservación de cantidad de movimiento describe a ambos.
19. 0.556 m
21. a) $\vec{\mathbf{v}}_g = 1.15\hat{\mathbf{i}}$ m/s b) $\vec{\mathbf{v}}_p = -0.346\hat{\mathbf{i}}$ m/s
23. a) 0.284 b) 115 fJ y 45.4 fJ

25. 91.2 m/s
27. 2.50 m/s a −60.0°
29. $v_{\text{naranja}} = 3.99$ m/s, $v_{\text{amarillo}} = 3.01$ m/s
31. $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 1.20\hat{\mathbf{j}})$ m/s
33. a) $(-9.33\hat{\mathbf{i}} - 8.33\hat{\mathbf{j}})$ Mm/s b) 439 fJ
35. $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = (0\hat{\mathbf{i}} + 1.00\hat{\mathbf{j}})$ m
37. $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = (11.7\hat{\mathbf{i}} + 13.3\hat{\mathbf{j}})$ cm
39. a) 15.9 g b) 0.153 m
41. a) $(1.40\hat{\mathbf{i}} + 2.40\hat{\mathbf{j}})$ m/s b) $(7.00\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}})$ kg · m/s
43. 0.700 m
45. a) Sí. 18.0 $\hat{\mathbf{i}}$ kg · m/s. b) No. El suelo hace trabajo cero. c) Sí. Se podría decir que la cantidad de movimiento final del vehículo provino del suelo o de la Tierra a través del suelo. d) No. La energía cinética provino de la energía gravitacional original de la carga elevada, en cantidad 27.0 J. e) Sí. La aceleración es causada por la fuerza de fricción estática ejercida por el suelo que evita que las orugas se deslicen hacia atrás.
47. b) 2.06 m/s c) Sí. La defensa continúa ejerciendo una fuerza hacia la izquierda hasta que la partícula se ha balanceado hasta su punto más bajo.
49. a) 3.75 kg · m/s² hacia la derecha b) 3.75 N hacia la derecha c) 3.75 N d) 2.81 J e) 1.41 J f) La fricción entre la arena y la banda convierte la mitad del trabajo de entrada en energía interna adicional.
51. a) 39.0 MN b) 3.20 m/s² arriba
53. a) 442 toneladas métricas b) 19.2 toneladas métricas. Esta cantidad es mucho menor que el valor sugerido. Matemáticamente, el logaritmo en la ecuación de propulsión del cohete no es una función lineal. Físicamente, una mayor rapidez de escape tiene un efecto acumulativo extragrande sobre la rapidez final del marco del cohete, al contar una y otra vez la rapidez que el marco logra segundo tras segundo durante su quema.
55. 240 s
57. $\left(\dfrac{M + m}{m}\right)\sqrt{\dfrac{gd^2}{2h}}$
59. a) 0; inelástica
b) $(-0.250\hat{\mathbf{i}} + 0.750\hat{\mathbf{j}} - 2.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s; perfectamente inelástica
c) o $a = -6.74$ con $\vec{\mathbf{v}} = -0.419\,\hat{\mathbf{k}}$ m/s o
$a = 2.74$ con $\vec{\mathbf{v}} = -3.58\,\hat{\mathbf{k}}$ m/s
61. a) $m/M = 0.403$ b) no hay cambios; no hay diferencia
63. b) 0.042 9 c) 1.00 d) La energía es una cosa totalmente diferente de la cantidad de movimiento. Una comparación: cuando los niños comen su sopa, no comen el mantel. Otra comparación: cuando un flash de fotógrafo de un solo uso se dispara, se oxida un filamento de magnesio. La energía química desaparece. (La energía interna aparece y la luz se lleva algo de energía.) La masa medida del flash es la misma antes y después. Puede ser la misma a pesar de 100% de conversión de energía porque la energía y la masa son cosas totalmente diferentes en la física clásica. En el péndulo balístico, la conversión de energía de mecánica a interna no altera la conservación de masa o la conservación de la cantidad de movimiento.
65. a) $-0.256\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $0.128\hat{\mathbf{i}}$ m/s
b) $-0.064\,2\hat{\mathbf{i}}$ m/s y 0 c) 0 y 0
67. a) 100 m/s b) 374 J
69. $(3Mgx/L)\hat{\mathbf{j}}$

CAPÍTULO 10

1. a) 5.00 rad, 10.0 rad/s, 4.00 rad/s² b) 53.0 rad, 22.0 rad/s, 4.00 rad/s²
3. a) 4.00 rad/s² b) 18.0 rad
5. a) 5.24 s b) 27.4 rad
7. a) 7.27×10^{-5} rad/s b) 2.57×10^{4} s = 428 min
9. 50.0 rev
11. ~10^7 rev
13. a) 8.00 rad/s b) 8.00 m/s, $a_r = -64.0$ m/s², $a_t = 4.00$ m/s² c) 9.00 rad
15. a) $(-2.73\hat{\mathbf{i}} + 1.24\hat{\mathbf{j}})$m b) en el segundo cuadrante, a 156° c) $(-1.85\hat{\mathbf{i}} - 4.10\hat{\mathbf{j}})$m/s d) hacia el tercer cuadrante, a 246°



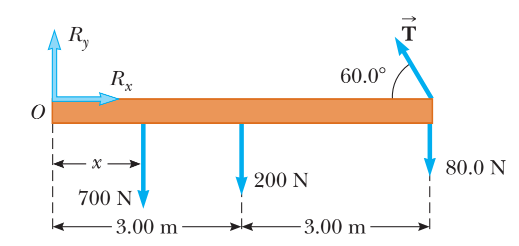
e) $(6.15\hat{\mathbf{i}} - 2.78\hat{\mathbf{j}})$m/s² f) $(24.6\hat{\mathbf{i}} - 11.1\hat{\mathbf{j}})$N
17. a) 126 rad/s b) 3.77 m/s c) 1.26 km/s² d) 20.1 m
19. 0.572
21. a) 143 kg · m² b) 2.57 kJ
25. a) 24.5 m/s b) no; no; no; no; sí
27. 1.28 kg · m²
29. ~10^0 kg · m²
33. −3.55 N · m
35. a) 24.0 N · m b) 0.035 6 rad/s² c) 1.07 m/s²
37. a) 0.309 m/s² b) 7.67 N y 9.22 N
39. 21.5 N
41. 24.5 km
43. 149 rad/s
45. a) 1.59 m/s b) 53.1 rad/s
47. a) 11.4 N, 7.57 m/s², 9.53 m/s abajo b) 9.53 m/s
51. a) $2(Rg/3)^{1/2}$ b) $4(Rg/3)^{1/2}$ c) $(Rg)^{1/2}$
53. a) 500 J b) 250 J c) 750 J
55. a) $\frac{2}{3}g$ sen θ para el disco, mayor que $\frac{1}{2}g$ sen θ para el aro b) $\frac{1}{3}$tan θ
57. 1.21×10^{-4} kg · m²; la altura no es necesaria
59. $\frac{1}{3}\ell$
61. a) 4.00 J b) 1.60 s c) sí
63. a) $\omega = 3F\ell/b$ b) $\alpha = 3F\ell/mL^2$ c) y d) Ambos mayores. Un componente de la fuerza de empuje, ejercida por el agua para rociar desde los extremos de los brazos, causa un momento de torsión hacia adelante sobre el rotor. Note también que el rotor con brazos doblados tiene un momento de inercia ligeramente menor del que tendría si los mismos tubos metálicos fuesen rectos.
65. a) $(3g/L)^{1/2}$ b) $3g/2L$ c) $-\frac{3}{2}g\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}g\hat{\mathbf{j}}$
d) $-\frac{3}{2}Mg\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{4}Mg\hat{\mathbf{j}}$
67. −0.322 rad/s²
71. a) 118 N y 156 N b) 1.17 kg · m²
73. a) $\alpha = -0.176$ rad/s² b) 1.29 rev c) 9.26 rev
75. a) $\omega(2h^3/g)^{1/2}$ b) 0.011 6 m c) Sí; la desviación sólo es de 0.02% de la altura original.
79. a) 2.70R b) $\Sigma F_x = -20mg/7$, $\Sigma F_y = -5mg/7$
81. a) $(3gh/4)^{1/2}$ b) $(3gh/4)^{1/2}$
83. c) $(8Fd/3M)^{1/2}$
85. a la izquierda

CAPÍTULO 11

1. $-7.00\hat{\mathbf{i}} + 16.0\hat{\mathbf{j}} - 10.0\hat{\mathbf{k}}$
3. a) $-17.0\hat{\mathbf{k}}$ b) 70.6°
5. 0.343 N · m horizontalmente al norte
7. 45.0°
9. $F_3 = F_1 + F_2$; no
11. $17.5\hat{\mathbf{k}}$ kg · m²/s
13. $(60.0\hat{\mathbf{k}})$ kg · m²/s
15. $mvR[\cos(vt/R) + 1]\hat{\mathbf{k}}$
17. a) cero b) $(-mv_i^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta/2g)\hat{\mathbf{k}}$ c) $(-2mv_i^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta/g\hat{\mathbf{k}}$ d) La fuerza gravitacional hacia abajo ejerce un momento de torsión en la dirección $-z$.
19. a) $-m\ell gt \cos\theta\hat{\mathbf{k}}$ b) El planeta ejerce un momento de torsión gravitacional sobre la bola. c) $-mg\ell \cos\theta\hat{\mathbf{k}}$
23. a) 0.360 kg · m²/s b) 0.540 kg · m²/s
25. a) 0.433 kg · m²/s b) 1.73 kg · m²/s
27. a) 1.57×10^8 kg · m²/s b) 6.26×10^3 s = 1.74 h
29. a) $\omega_f = \omega_i I_1/(I_1 + I_2)$ b) $I_1/(I_1 + I_2)$
31. a) 11.1 rad/s en sentido contrario a las manecillas del reloj b) No. 507 J se transforman en energía interna. c) No. Los cojinetes de la tornamesa pronto imparten impulso de 44.9 kg · m/s al norte en el sistema tornamesa-barro y a partir de ahí sigue cambiando la cantidad de movimiento del sistema.
33. 7.14 rev/min
35. a) La energía mecánica no se conserva; algo de energía química se convierte en energía mecánica. La cantidad de movimiento no se conserva. Los cojinetes de la tornamesa ejercen una fuerza externa hacia el norte sobre el eje. La cantidad de movimiento angular se conserva. b) 0.360 rad/s contra las manecillas del reloj c) 99.9 J
37. a) $mv\ell$ abajo b) $M/(M+m)$
39. a) $\omega = 2mv_i d/[M + 2m]R^2$ b) No; algo de energía mecánica cambia a energía interna. c) La cantidad de movimiento no se conserva. El eje ejerce una fuerza hacia atrás sobre el cilindro.
41. $\sim 10^{-13}$ rad/s
43. 5.45×10^{22} N · m
45. a) $1.67\hat{\mathbf{i}}$ m/s b) 0.033 5 = 3.35% c) $1.67\hat{\mathbf{i}}$ m/s d) 15.8 rad/s e) 1.00 = 100%
47. a) $7md^2/3$ b) $mgd\hat{\mathbf{k}}$ c) $3g/7d$ contra las manecillas del reloj
d) $2g/7$ hacia arriba e) mgd f) $\sqrt{6g/7d}$ g) $m\sqrt{14gd^3/3}$
h) $\sqrt{2gd/21}$
49. 0.910 km/s
51. a) $v_i r_i/r$ b) $T = (mv_i^2 r_i^2)r^{-3}$ c) $\frac{1}{2}mv_i^2\,(r_i^2/r^2 - 1)$ d) 4.50 m/s, 10.1 N, 0.450 J
53. a) 3 750 kg · m²/s b) 1.88 kJ c) 3 750 kg · m²/s d) 10.0 m/s e) 7.50 kJ f) 5.62 kJ
55. a) $2mv_0$ b) $2v_0/3$ c) $4m\ell v_0/3$ d) $4v_0/9\ell$ e) mv_0^2 f) $26mv_0^2/27$ g) No actúan fuerzas horizontales sobre las boleadoras desde el exterior después de liberarlas, así que la cantidad de movimiento horizontal permanece constante. Su centro de masa se mueve de manera estacionaria con la velocidad horizontal que tiene en la liberación. Sobre las boleadoras no actúan momentos de torsión sobre su eje de rotación, así que su cantidad de movimiento angular se mantiene constante. Las fuerzas internas no pueden afectar ni la conservación de la cantidad de movimiento ni la conservación de la cantidad de movimiento angular, pero pueden afectar la energía mecánica. La energía $mv_0^2/27$ cambia de energía mecánica a energía interna conforme la boleadora toma su configuración estable.
57. Un aumento de 0.550 s. No es un cambio significativo.

CAPÍTULO 12

1. $[(m_1 + m_b)d + m_1\ell/2]/m_2$
3. (3.85 cm, 6.85 cm)
5. (−1.50 m, −1.50 m)
7. (2.54 m, 4.75 m)
9. 177 kg
11. a) f_s = 268 N, n = 1 300 N b) 0.324
13. 2.94 kN en cada rueda trasera y 4.41 kN en cada rueda delantera.
15. a) 29.9 N b) 22.2 N
17. a) 1.73 rad/s² b) 1.56 rad/s c) $(-4.72\hat{\mathbf{i}} + 6.62\hat{\mathbf{j}})$ kN d) $38.9\hat{\mathbf{j}}$ kN
19. 2.82 m
21. 88.2 N y 58.8 N
23. 4.90 mm
25. 23.8 μm
27. a) 3.14×10^4 N b) 6.28×10^4 N
29. 1.65×10^8 N/m²
31. 0.860 mm
33. $n_A = 5.98 \times 10^5$ N, $n_B = 4.80 \times 10^5$ N
35. 9.00 pies
37. a)



b) T = 343 N, R_x = 171 N hacia la derecha, R_y = 683 N arriba c) 5.13 m
39. a) $T = F_g(L + d)/[\operatorname{sen}\theta\,(2L + d)]$
b) $R_x = F_g(L + d)\cot\theta/(2L + d)$, $R_y = F_g L/(2L + d)$
41. $\vec{\mathbf{F}}_A = (-6.47 \times 10^5\hat{\mathbf{i}} + 1.27 \times 10^5\hat{\mathbf{j}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_B = 6.47 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}$ N
43. 5.08 kN, R_x = 4.77 kN, R_y = 8.26 kN
45. a) 20.1 cm hacia la izquierda del borde frontal; μ_k = 0.571 b) 0.501 m
47. a) $M = (m/2)(2\mu_s \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta)^{-1}$
b) $R = (m + M)g(1 + \mu_s^2)^{1/2}$
$F = g[M^2 + \mu_s^2(m + M)^2]^{1/2}$
49. b) AB compresión 732 N, AC tensión 634 N, BC compresión 897 N
51. a) 133 N b) n_A = 429 N y n_B = 257 N c) R_x = 133 N y R_y = −257 N
55. 1.09 m
57. a) 4 500 N b) 4.50×10^6 N/m² c) La tabla se romperá.
59. a) $P_y = (F_g/L)(d - ah/g)$ b) 0.306 m c) $(-306\hat{\mathbf{i}} + 553\hat{\mathbf{j}})$ N

CAPÍTULO 13

1. $\sim 10^{-7}$ N hacia usted
3. a) 2.50×10^{-5} N hacia el objeto de 500 kg b) entre los objetos y 0.245 m desde el objeto de 500 kg
5. $(-100\hat{\mathbf{i}} + 59.3\hat{\mathbf{j}})$ pN
7. 7.41×10^{-10} N
9. 0.613 m/s² hacia la Tierra
11. $\rho_{\text{Luna}}/\rho_{\text{Tierra}} = \frac{2}{3}$
13. 1.26×10^{32} kg
15. 1.90×10^{27} kg
17. 8.92×10^7 m
19. Después de 3.93 años, Mercurio estaría más lejos del Sol que Plutón.

21. $\vec{\mathbf{g}} = \frac{Gm}{\ell^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$ hacia la esquina opuesta

23. a) $\vec{\mathbf{g}} = 2MGr\,(r^2 + a^2)^{-3/2}$ hacia el centro de masa b) En $r = 0$, los campos de los dos objetos son iguales en magnitud y opuestos en dirección, para sumar cero. d) Cuando r es mucho mayor que a, el hecho de que las dos masas estén separadas no es importante. Crean un campo total como el de un solo objeto de masa $2M$.

25. a) 1.84×10^9 kg/m^3 b) 3.27×10^6 m/s^2 c) -2.08×10^{13} J

27. a) -1.67×10^{-14} J Cada objeto acelerará lentamente hacia el centro del triángulo, donde los tres chocarán simultáneamente.

29. b) 340 s

31. 1.66×10^4 m/s

35. a) 5.30×10^3 s b) 7.79 km/s c) 6.43×10^9 J

37. b) 1.00×10^7 m c) 1.00×10^4 m/s

39. a) 0.980 b) 127 años c) -2.13×10^{17} J

43. b) $2[\,Gm^3(1/2r - 1/R)]^{1/2}$

45. a) -7.04×10^4 J b) -1.57×10^5 J c) 13.2 m/s

47. 7.79×10^{14} kg

49. $\omega = 0.057\,2$ rad/s o 1 rev en 110 s

51. a) $m_2(2G/d)^{1/2}(m_1 + m_2)^{-1/2}$ y $m_1(2G/d)^{1/2}(m_1 + m_2)^{-1/2}$; rapidez relativa $(2G/d)^{1/2}(m_1 + m_2)^{1/2}$ b) 1.07×10^{32} J y 2.67×10^{31} J

53. a) 200 Megaaños b) $\sim 10^{41}$ kg; $\sim 10^{11}$ estrellas

55. $(GM_E/4R_E)^{1/2}$

59. $(800 + 1.73 \times 10^{-4})\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $(800 - 1.73 \times 10^{-4})\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s

61. 18.2 ms

CAPÍTULO 14

1. 0.111 kg

3. 6.24 MPa

5. 1.62 m

7. 7.74×10^{-3} m^2

9. 271 kN horizontalmente hacia atrás

11. 5.88×10^6 N abajo; 196 kN hacia afuera; 588 kN hacia afuera

13. 0.722 mm

15. 10.5 m; no, porque algo de alcohol y agua se evapora

17. 98.6 kPa

19. a) 1.57 Pa, 1.55×10^{-2} atm, 11.8 mm Hg b) El nivel de fluido en la sonda espinal debe elevarse. c) bloqueo de flujo del fluido cerebroespinal.

21. 0.258 N abajo

23. a) $1.017\,9 \times 10^3$ N abajo, $1.029\,7 \times 10^3$ N arriba b) 86.2 N c) Por cualquier método de evaluación, la fuerza de flotación es de 11.8 N arriba.

25. a) 1.20×10^3 N/s b) 0

27. a) 7.00 cm b) 2.80 kg

31. 1 430 m^3

33. 1 250 kg/m^3 y 500 kg/m^3

35. a) 17.7 m/s b) 1.73 mm

37. 31.6 m/s

39. 0.247 cm

41. a) 2.28 N hacia Holanda b) 1.74×10^6 s

43. a) 1 atm + 15.0 MPa b) 2.95 m/s c) 4.34 kPa

45. 2.51×10^{-3} m^3/s

47 a) 4.43 m/s b) El sifón no puede estar más alto que 10.3 m.

49. 12.6 m/s

51. 1.91 m

55. 0.604 m

57. Si el helicóptero pudiese crear el aire que expulsa hacia abajo, la relación de flujo de masa del aire tendría que ser al menos 233 kg/s. En realidad, el rotor toma aire de arriba, que se mueve sobre un área mayor con menor rapidez, y lo sopla hacia abajo a mayor rapidez. La cantidad de este aire tiene que ser al menos unas cuantas veces mayor que 233 kg cada segundo.

61. 17.3 N y 31.7 N

63. 90.04%

65. 758 Pa

67. 4.43 m/s

69. a) 1.25 cm b) 13.8 m/s

71. c) 1.70 m^2

CAPÍTULO 15

1. a) El movimiento se repite precisamente. b) 1.81 s c) No, la fuerza no está en la forma de la ley de Hooke.

3. a) 1.50 Hz, 0.667 s b) 4.00 m c) π rad d) 2.83 m

5. b) 18.8 cm/s, 0.333 s c) 178 cm/s^2, 0.500 s d) 12.0 cm

7. 40.9 N/m

9. 18.8 m/s, 7.11 km/s^2

11. a) 40.0 cm/s, 160 cm/s^2 b) 32.0 cm/s, -96.0 cm/s^2 c) 0.232 s

13. 0.628 m/s

15. 2.23 m/s

17. a) 28.0 mJ b) 1.02 m/s c) 12.2 mJ d) 15.8 mJ

19. 2.60 cm y -2.60 cm

21. a) a 0.218 s y a 1.09 s b) 0.014 6 W

23. b) 0.628 s

25. Las respuestas concuerdan a dos dígitos. Las respuestas calculadas de la conservación de la energía y de la segunda ley de Newton son precisamente más correctas. Con esta amplitud, el movimiento del péndulo es aproximadamente armónico simple.

29. 0.944 kg · m^2

33. a) 5.00×10^{-7} kg · m^2 b) 3.16×10^{-4} N · m/rad

35. 1.00×10^{-3} s^{-1}

37. a) 7.00 Hz b) 2.00% c) 10.6 s

39. a) 1.00 s b) 5.09 cm

41. 318 N

43. 1.74 Hz

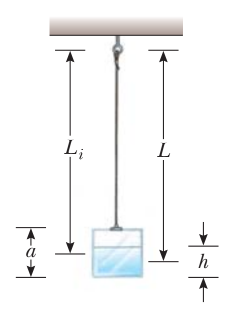
45. a) 2.09 s b) 0.477 Hz c) 36.0 cm/s d) $(0.064\,8\text{ m}^2/\text{s}^2)\,m$ e) $(9.00/\text{s}^2)\,m$ f) Periodo, frecuencia y rapidez máxima son todos independientes de la masa en esta situación. La energía y la constante de fuerza son directamente proporcionales a la masa.

47. a) $2Mg$, $Mg(1 + y/L)$ b) $T = (4\pi/3)(2L/g)^{1/2}$, 2.68 s

49. 6.62 cm

51. 9.19×10^{13} Hz

53. a)



b) $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\pi dM/dt}{2\rho a^2 g^{1/2}[L_i + (dM/dt)t/2\rho a^2]^{1/2}}$

c) $T = 2\pi g^{-1/2}\left[L_i + \left(\dfrac{dM}{dt}\right)\left(\dfrac{t}{2\rho a^2}\right)\right]^{1/2}$

55. $f = (2\pi L)^{-1}\left(gL + \dfrac{kh^2}{M}\right)^{1/2}$
57. b) 1.23 Hz
59. a) 3.00 s b) 14.3 J c) 25.5°
61. Si el ciclista pasa sobre una tabla de lavar con cierta rapidez, puede excitar una vibración de resonancia de la bicicleta, tan grande en amplitud como para hacer al piloto perder el control.
69. b) después de 42.2 minutos

CAPÍTULO 16

1. $y = 6\,[(x - 4.5t)^2 + 3]^{-1}$
3. a) la onda P b) 665 s
5. a) $(3.33\,\hat{\mathbf{i}})$ m/s b) −5.48 cm c) 0.667 m, 5.00 Hz d) 11.0 m/s
7. 0.319 m
9. 2.00 cm, 2.98 m, 0.576 Hz, 1.72 m/s
11. a) 31.4 rad/s b) 1.57 rad/m c) $y = (0.120\text{ m})$ sen $(1.57x - 31.4t)$ donde x está en metros y t en segundos d) 3.77 m/s e) 118 m/s^2
13. a) 0.250 m b) 40.0 rad/s c) 0.300 rad/m d) 20.9 m e) 133 m/s f) $+x$
15. a) $y = (8.00\text{ cm})$ sen $(7.85x + 6\pi t)$ b) $y = (8.00\text{ cm})$ sen $(7.85x + 6\pi t - 0.785)$
17. a) −1.51 m/s, 0 b) 16.0 m, 0.500 s, 32.0 m/s
19. a) 0.500 Hz, 3.14 rad/s b) 3.14 rad/m c) (0.100 m) sen (3.14 x/m − 3.14 t/s) d) (0.100 m) sen (−3.14 t/s) e) (0.100 m) sen (4.71 rad − 3.14 t/s) f) 0.314 m/s
21. 80.0 N
23. 520 m/s
25. 1.64 m/s^2
27. 13.5 N
29. 185 m/s
31. 0.329 s
35. 55.1 Hz
37. a) 62.5 m/s b) 7.85 m c) 7.96 Hz d) 21.1 W
39. $\sqrt{2}\,\mathcal{P}_0$
41. a) $A = 40$ b) $A = 7.00$, $B = 0$, $C = 3.00$. Uno puede tomar el producto punto de la ecuación dada con cada uno de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. c) $A = 0$, $B = 7.00$ mm, $C = 3.00$/m, $D = 4.00$/s, $E = 2.00$. Considere el valor promedio de ambos lados de la ecuación dada para encontrar A. Luego considere el valor máximo de ambos lados para encontrar B. Puede evaluar la derivada parcial de ambos lados de la ecuación dada respecto a x y por separado respecto a t para obtener ecuaciones que produzcan C y D sobre las sustituciones elegidas para x y t. Luego sustituya $x = 0$ y $t = 0$ para obtener E.
45. ~ 1 min
47. 0.456 m/s
49. a) 39.2 N b) 0.892 m c) 83.6 m/s
51. a) La energía que porta una cresta de onda es constante en ausencia de absorción. Por lo tanto, la rapidez la tasa a la que se mueve la energía más allá de una distancia fija desde la fuente, que es la potencia de la onda, es constante. La potencia es proporcional al cuadrado de la amplitud y a la rapidez de la onda. La rapidez disminuye conforme la onda se mueve hacia agua menos profunda cerca de la playa, así que la amplitud debe aumentar. b) 8.31 m c) Conforme la profundidad del agua tiende a cero, el modelo predecirá rapidez cero y amplitud infinita. La amplitud debe ser finita conforme la onda se aproxime a la playa. Conforme la rapidez disminuye, la longitud de onda también disminuye. Cuando se vuelve comparable con la profundidad del agua, o menor, ya no se aplica la expresión $v = \sqrt{gd}$.
53. a) $\mathcal{P} = (0.050\,0\text{ kg/s})v^2_{y,\text{máx}}$ b) La potencia es proporcional al cuadrado de la máxima rapidez de elemento. c) $(7.5 \times 10^{-4}\text{ kg})\,v^2_{y,\text{máx}} = \frac{1}{2}m_3 v^2_{y,\text{máx}}$ d) $(0.300\text{ kg})\ v^2_{y,\text{máx}}$
55. 0.084 3 rad
59. a) $(0.707)2(L/g)^{1/2}$ b) $L/4$
61. 3.86×10^{-4}
63. a) $\dfrac{\mu\omega^3}{2k}A_0{}^2e^{-2bx}$ b) $\dfrac{\mu\omega^3}{2k}A_0{}^2$ c) e^{-2bx}
65. a) $\mu_0 + (\mu_L - \mu_0)x/L$

CAPÍTULO 17

1. 5.56 km. En tanto la rapidez de la luz sea mucho mayor que la rapidez del sonido, su valor real no importa.
3. 0.196 s
5. 7.82 m
7. a) 826 m b) 1.47 s
9. a) 0.625 mm b) 1.50 mm a 75.0 μm
11. a) 2.00 μm, 40.0 cm, 54.6 m/s b) −0.433 μm c) 1.72 mm/s
13. $\Delta P = (0.200\text{ N/m}^2)$ sen $(62.8x/\text{m} - 2.16 \times 10^4 t/\text{s})$
15. 5.81 m
17. 66.0 dB
19. a) 3.75 W/m^2 b) 0.600 W/m^2
21. a) 2.34 m y 0.390 m b) 0.161 N/m^2 para ambas notas c) 4.25×10^{-7} m y 7.09×10^{-8} m d) Las longitudes de onda y amplitudes de desplazamiento serían mayores en un factor de 1.09. La respuesta en el inciso b) no cambiaría.
23. a) 1.32×10^{-4} W/m^2 b) 81.2 dB
25. a) 0.691 m b) 691 km
27. 65.6 dB
29. a) 30.0 m b) 9.49×10^5 m
31. a) 332 J b) 46.4 dB
33. a) 3.04 kHz b) 2.08 kHz c) 2.62 kHz, 2.40 kHz
35. 26.4 m/s
37. 19.3 m
39. a) 56.3 s b) 56.6 km más lejos
41. 2.82×10^8 m/s
43. No es racional e implica un nivel sonoro de 123 dB. Casi toda la energía mecánica perdida se convierte en energía interna en el deslizador.
45. a) f es de unos cuantos cientos de hertz. $\lambda \sim 1$ m, duración ~ 0.1 s. b) Sí. La frecuencia se puede cerrar a 1 000 Hz. Si la persona que palmea sus manos está en la base de la pirámide, el eco puede caer un poco en frecuencia y en sonoridad conforme el sonido regresa, y los últimos ciclos provendrán de los escalones más pequeños y más distantes. El sonido podría imitar a algún ave particular y de hecho podría ser una grabación del llamado.
49. a) 0.515/min b) 0.614/min
51. a) 55.8 m/s b) 2 500 Hz
53. 1 204.2 Hz
55. a) 0.642 W b) 0.004 28 = 0.428%

57. a) El sonido a través del metal llega primero.
b) (365 m/s) Δt c) 46.3 m d) La respuesta se vuelve

$$\ell = \frac{\Delta t}{\dfrac{1}{331\text{ m/s}} - \dfrac{1}{v_r}}$$

donde v_r es la rapidez del sonido en la barra. Conforme v_r tiende a infinito, el tiempo de recorrido en la barra se vuelve despreciable. La respuesta tiende a (331 m/s) Δt, que es la distancia que el sonido recorre en el aire durante el tiempo de retardo.
59. a) 0.948° b) 4.40°
61. 1.34×10^4 N
63. a) 6.45 b) 0

CAPÍTULO 18

1. a) −1.65 cm b) −6.02 cm c) 1.15 cm
3. a) $+x$, $-x$ b) 0.750 s c) 1.00 m
5. a) 9.24 m b) 600 Hz
7. a) 2 b) 9.28 m y 1.99 m
9. a) 156° b) 0.058 4 cm
11. 15.7 m, 31.8 Hz, 500 m/s
13. A 0.089 1 m, 0.303 m, 0.518 m, 0.732 m, 0.947 m, 1.16 m desde una bocina
15. a) 4.24 cm b) 6.00 cm c) 6.00 cm d) 0.500 cm, 1.50 cm, 2.50 cm
17. 0.786 Hz, 1.57 Hz, 2.36 Hz, 3.14 Hz
19. a) 350 Hz b) 400 kg
21. a) 163 N b) 660 Hz
23. $\dfrac{Mg}{4Lf^2 \tan\theta}$
25. a) 3 bucles b) 16.7 Hz (c) un bucle
27. a) 3.66 m/s b) 0.200 Hz
29. a) 0.357 m b) 0.715 m
31. 0.656 m y 1.64 m
33. n(206 Hz) para $n = 1$ a 9 y n(84.5 Hz) para $n = 2$ a 23
35. 50.0 Hz, 1.70 m
37. a) 350 m/s b) 1.14 m
39. (21.5 ± 0.1)m. Los datos sugieren 0.6 Hz de incertidumbre en las mediciones de frecuencia, que sólo es un poco más que 1%.
41. a) 1.59 kH b) armónicos de número impar c) 1.11 kHz
43. 5.64 batimientos/s
45. a) 1.99 batimientos/s b) 3.38 m/s
47. El segundo armónico de Mi está cerca del tercer armónico de La, y el cuarto armónico de Do bemol está cerca del quinto armónico de La.
49. a) La rapidez hacia abajo del yo-yo es $dL/dt = (0.8\text{ m/s}^2)(1.2\text{ s}) = 0.960$ m/s. La longitud de onda instantánea de la onda de cuerda fundamental está dada por $d_{NN} = \lambda/2 = L$, de modo que $\lambda = 2L$ y $d\lambda/dt = 2\,dL/dt = 2(0.96\text{ m/s}) = 1.92$ m/s. b) Para el segundo armónico, la longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda. En tal caso la relación de cambio de la longitud de onda es igual a $dL/dt = 0.960$ m/s, la mitad que para el primer armónico. c) Un yo-yo de diferente masa sostendría la cuerda bajo una tensión diferente para hacer que cada onda de cuerda vibre con una frecuencia distinta, pero el argumento geométrico dado en los incisos a) y b) todavía se aplica a la longitud de onda. Las respuestas no cambian: $d\lambda_1/dt = 1.92$ m/s y $d\lambda_2/dt = 0.960$ m/s.
51. a) 34.8 m/s b) 0.977 m
53. 3.85 m/s alejándose de la estación o 3.77 m/s hacia la estación
55. a) 59.9 Hz b) 20.0 cm
57. a) $\frac{1}{2}$ b) $[n/(n+1)]^2 T$ c) $\frac{9}{16}$
59. $y_1 + y_2 = 11.2$ sen $(2.00x - 10.0t + 63.4°)$
61. a) 78.9 N b) 211 Hz

CAPÍTULO 19

1. a) −274°C b) 1.27 atm c) 1.74 atm
3. a) −320°F b) 77.3 K
5. 3.27 cm
7. a) 0.176 mm b) 8.78 μm c) 0.093 0 cm^3
9. a) −179°C es alcanzable. b) −376°C está bajo 0 K y no es alcanzable.
11. a) 99.8 mL b)aproximadamente 6% del cambio de volumen de la acetona.
13. a) 99.4 cm^3 b) 0.943 cm
15. 5 336 imágenes
17. a) 400 kPa b) 449 kPa
19. 1.50×10^{29} moléculas
21. 472 K
23. a) 41.6 mol b) 1.20 kg, casi en concordancia con la densidad tabulada.
25. a) 1.17 g b) 11.5 mN c) 1.01 kN d) Las moléculas se deben mover más rápido.
27. 4.39 kg
29. a) 7.13 m b) El extremo abierto del tubo debe estar hacia abajo después de que el ave salga a la superficie, de modo que el agua pueda drenarse. No hay otro requisito. El aire no tiende a formar burbujas en un tubo estrecho.
31. a) 94.97 cm b) 95.03 cm
33. 3.55 cm
35. Cae en 0.094 3 Hz.
37. a) La expansión hace caer la densidad. b) $5 \times 10^{-5}(°\text{C})^{-1}$
39. a) $h = nRT/(mg + P_0A)$ b) 0.661 m
41. Suponga que $\alpha\,\Delta T$ es mucho menor que 1.
43. Sí, en tanto los coeficientes de expansión permanezcan constantes. Las longitudes L_C y L_S a 0°C necesitan satisfacer $17L_C = 11L_S$. Por lo tanto, la barra de acero debe ser más larga. Con $L_S - L_C = 5.00$ cm, la única posibilidad es $L_S = 14.2$ cm y $L_C = 9.17$ cm.
45. a) 0.340% b) 0.480%
47. 2.74 m
49. b) 1.33 kg/m^3
53. No. El acero necesitaría ser 2.30 veces más fuerte.
55. a) $L_f = L_i e^{\alpha\Delta T}$ b) 2.00×10^{-4}%; 59.4%
57. a) 6.17×10^{-3} kg/m b) 632 N c) 580 N; 192 Hz
59. 4.54 m

CAPÍTULO 20

1. (10.0 + 0.117)°C
3. 0.234 kJ/kg · °C
5. 1.78×10^4 kg
7. 29.6°C
9. a) 0.435 cal/g · °C b) No es posible hacer una identificación definitiva. El material puede ser una aleación desconocida o un material no mencionado en la tabla. Puede ser berilio.
11. 23.6°C
13. 1.22×10^5 J
15. 0.294 g
17. 0.414 kg
19. a) 0°C b) 114 g
21. −1.18 MJ

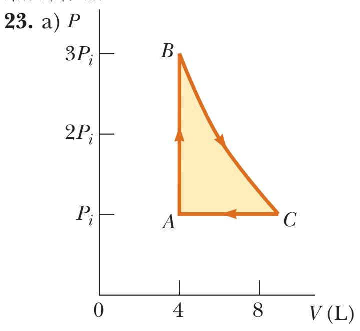
23. −466 J
25. a) $-4P_iV_i$ b) Es proporcional al cuadrado del volumen de acuerdo con $T = (P_i/nRV_i)V^2$.
27. $Q = -720$ J
29.

	Q	W	ΔE_{int}
BC	−	0	−
CA	−	+	−
AB	+	−	+

31. a) 7.50 kJ b) 900 K
33. −3.10 kJ, 37.6 kJ
35. a) 0.041 0 m^3 b) +5.48 kJ c) −5.48 kJ
37. 10.0 kW
39. 51.2°C
41. 74.8 kJ
43. a) 0.964 kg o más b) Las muestras de prueba y la superficie interior del aislador se pueden precalentar a 37.0°C conforme se ensamble la caja. Luego nada cambia en temperatura durante el periodo de prueba y las masas de las muestras de prueba y aislamiento no hacen diferencia.
45. 3.49×10^3 K
47. La intensidad se define como potencia por área perpendicular a la dirección del flujo de energía. La dirección de la luz solar es a lo largo de la línea desde el Sol hasta el objeto. El área perpendicular es el área circular plana proyectada encerrada por el *terminador*, la línea que separa día y noche en el objeto. El objeto radia luz infrarroja hacia afuera en todas direcciones. El área perpendicular a este flujo de energía es su área superficial esférica. La temperatura superficial de estado estable es 279 K = 6°C. Esta temperatura es fría, muy por abajo de temperaturas ambiente confortables.
49. 2.27 km
51. a) 16.8 L b) 0.351 L/s
53. $c = \mathcal{P}/\rho R\,\Delta T$
55. 5.87×10^{4}°C
57. 5.31 h
59. 1.44 kg
61. 38.6 m^3/d
63. 9.32 kW
65. a) La ecuación $dT/dr = \mathcal{P}/4\pi kr^2$ representa la ley de conducción térmica, que incorpora la definición de conductividad térmica, aplicada a una superficie esférica dentro del cascarón. La rapidez de transferencia de energía $\mathcal{P}$ debe ser la misma para todos los radios, de modo que cada trozo de material permanezca a una temperatura que sea constante en el tiempo. b) Separe las variables T y r en la ecuación de conducción térmica e integre la ecuación entre puntos en las superficies interior y exterior. c) 18.5 W d) Con $\mathcal{P}$ ahora conocida, separe de nuevo las variables e integre entre un punto en la superficie interior y cualquier punto dentro del cascarón. e) $T = 5$°C + 184 cm · °C [1/(3 cm) − 1/r] f) 29.5 C

CAPÍTULO 21

1. a) 4.00 u = 6.64×10^{-24}g b) 55.9 u= 9.28×10^{-23}g c) 207 u = 3.44×10^{-22} g
3. 0.943 N, 1.57 Pa
5. 3.21×10^{12} moléculas
7. 3.32 moles
9. a) 3.54×10^{23} átomos b) 6.07×10^{-21} J c) 1.35 km/s
11. a) 8.76×10^{-21} J para ambos b) 1.62 para helio y 514 m/s para argón
13. a) 3.46 kJ b) 2.45 kJ c) −1.01 kJ
15. Entre 10^{-2}°C y 10^{-3}°C
17. 13.5PV
19. a) 1.39 atm b) 366 K, 253 K c) 0, −4.66 kJ, −4.66 kJ
21. 227 K
23. a)



b) 8.77 L c) 900 K d) 300 K e) −336 J
25. a) 28.0 kJ b) 46.0 kJ c) proceso isotérmico: $P_f = 10.0$ atm; proceso adiabático: $P_f = 25.1$ atm
27. a) 9.95 cal/K, 13.9 cal/K b) 13.9 cal/K, 17.9 cal/K
29. El dióxido de azufre es el gas en la tabla 21.2 con la mayor masa molecular. Si las constantes de resorte efectivas para varios enlaces químicos son comparables, después se puede esperar que el SO_2 tenga menores frecuencias de vibración atómica. La vibración puede excitarse a temperatura más baja para el dióxido de azufre que para los otros gases. Alguna vibración se puede hacer a 300 K.
31. a) 6.80 m/s b) 7.41 m/s c) 7.00 m/s
35. a) 2.37×10^4 K b) 1.06×10^3 K
37. b) 0.278
39. a) 100 kPa, 66.5 L, 400 K, 5.82 kJ, 7.48 kJ, −1.66 kJ
b) 133 kPa, 49.9 L, 400 K, 5.82 kJ, 5.82 kJ, 0
c) 120 kPa, 41.6 L, 300 K, 0, −909 J, +909 J
d) 120 kPa, 43.3 L, 312 K, 722 J, 0, +722 J
41. b) 447 J/kg · °C concuerda con el valor tabulado dentro de 0.3%. c) 127 J/kg · °C concuerda con el valor tabulado dentro de 2%.
43. b) Las expresiones son iguales porque $PV = nRT$ y $\gamma = (C_V + R)/C_V = 1 + R/C_V$ da $R = (\gamma - 1)C_V$, de modo que $PV = n(\gamma - 1)C_VT$ y $PV/(\gamma - 1) = nC_VT$
45. 510 K y 290 K
47. 0.623
49. a) La presión aumenta conforme el volumen disminuye. d) 0.500 atm^{-1}, 0.300 atm^{-1}
51. a) 7.27×10^{-20}J b) 2.20 km/s c) 3 510 K. Las moléculas que se evaporan son excepcionales, en el extremo de alta rapidez de la distribución de magnitudes de velocidad moleculares. La rapidez promedio de las moléculas en el líquido y en el vapor es adecuada sólo a temperatura ambiente.
53. a) 0.514 m^3 b) 2.06 m^3 c) 2.38×10^3 K d) −480 kJ e) 2.28 MJ
55. 1.09×10^{-3}, 2.69×10^{-2}, 0.529, 1.00, 0.199, 1.01×10^{-41}, $1.25 \times 10^{-1\,082}$
59. a) 0.203 mol b) $T_B = T_C = 900$ K, $V_C = 15.0$ L

(c, d)	P, atm	V, L	T, K	E_{int}, kJ
A	1.00	5.00	300	0.760
B	3.00	5.00	900	2.28
C	1.00	15.0	900	2.28
A	1.00	5.00	300	0.760

e) Fije el pistón en su lugar y ponga el cilindro en un horno a 900 K. Mantenga el gas en el horno mientras gradualmente deja que el gas se expanda para levantar una carga en el pistón

tanto como pueda. Mueva el cilindro del horno de vuelta a la habitación a 300 K y deje que el gas se enfríe y contraiga.

(f, g)	Q, kJ	W, kJ	ΔE_{int}, kJ
AB	1.52	0	1.52
BC	1.67	−1.67	0
CA	−2.53	+1.01	−1.52
$ABCA$	0.656	−0.656	0

61. b) 1.60×10^4 K

CAPÍTULO 22

1. a) 6.94% b) 335 J
3. a) 10.7 kJ b) 0.533 s
5. 55.4%
7. 77.8 W
9. a) 67.2% b) 58.8 kW
11. La eficiencia real de 0.069 8 es menor que cuatro décimos de la eficiencia de Carnot de 0.177.
13. a) 741 J b) 459 J
15. a) 564 K b) 212 kW c) 47.5%
17. b) $1 - T_c/T_h$, lo mismo para un solo motor reversible c) $(T_c + T_h)/2$ d) $(T_hT_c)^{1/2}$
19. 9.00
23. 72.2 J
25. 23.1 mW
27. a) 244 kPa b) 192 J
29. a) 51.2% b) 36.2%
33. 195 J/K
35. 1.02 kJ/K
37. ~10^0 W/K de metabolismo; mucho más si usa aparatos eléctricos de alta potencia o un automóvil.
39. 5.76 J/K; la temperatura es constante si el gas es ideal.
41. a) 1 b) 6
43. a)

Resultado	Número de formas para extraer
Todas R	1
2 R, 1 V	3
1 R, 2 V	3
Todas V	1

b)

Resultado	Número de formas para extraer
Todas R	1
4 R, 1 V	5
3R, 2V	10
2R, 3V	10
1R, 4V	5
Todas V	1

45. a) 214 J, 64.3 J b) −35.7 J, −35.7 J. El efecto neto sería el transporte de energía por calor desde el depósito frío al caliente sin gasto de trabajo externo. c) 333 J, 233 J d) 83.3 J, 83.3 J, 0. El efecto neto sería conversión de energía, tomada por calor, completamente en salida de energía por trabajo en un proceso cíclico. e) −0.111 J/K. La entropía del Universo disminuiría.
47. a) 5.00 kW b) 763 W
49. a) $2\ nRT_i \ln 2$ b) 0.273
51. 5.97×10^4 kg/s
53. a) 8.48 kW b) 1.52 kW c) 1.09×10^4 J/K d) El COP cae en un 20%.
55. a) 10.5 nRT_i b) 8.50 nRT_i c) 0.190 d) Esta eficiencia es mucho menor que el 0.833 para una máquina de Carnot que funciona entre las temperaturas usadas en este caso.
57. a) nC_p In 3 b) Ambas piden el cambio en entropía entre los mismos dos estados del mismo sistema. La entropía es una variable de estado. El cambio en entropía no depende de la trayectoria, sino sólo de los estados original y final.
61. a) 20.0°C c) $\Delta S = +4.88$ J/K La mezcla es irreversible. Es claro que el agua caliente y el agua fría no se separan, y el cambio en entropía es positivo.

Nota de ubicación: **negrilla** indica una definición; *itálica* indica una figura; t indica una tabla.

Cuadro pedagógico de color

Mecánica

Desplazamiento y vectores de posición

Vectores de velocidad lineal ($\vec{\mathbf{v}}$) y angular ($\vec{\boldsymbol{\omega}}$)

Vectores componentes de velocidad

Vectores fuerza ($\vec{\mathbf{F}}$)

Vectores componentes de fuerza

Vectores aceleración ($\vec{\mathbf{a}}$)

Vectores componentes de aceleración

Vectores de cantidad de movimiento lineal ($\vec{\mathbf{p}}$ y angular ($\vec{\mathbf{L}}$)

Vectores momento de torsión ($\vec{\boldsymbol{\tau}}$)

Direcciones de movimiento lineal o rotacional

Resortes

Poleas

Electricidad y magnetismo

Campos eléctricos

Campos magnéticos

Cargas positivas

Cargas negativas

Resistores

Baterías y otras fuentes de potencia CD

Interruptores

Capacitores

Inductores (bobinas)

Voltímetros

Amperímetros

Fuentes CA

Símbolo de tierra

Corriente

Luz y óptica

Rayos de luz

Lentes y prismas

Espejos

Objetos

Imágenes

Algunas constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor [a]
Unidad de masa atómica	u	$1.660\,538\,86\ (28) \times 10^{-27}$ kg $931.494\,043\ (80)$ MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	$6.022\,141\,5\ (10) \times 10^{23}$ partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\,009\,49\ (80) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5.291\,772\,108\ (18) \times 10^{-11}$ m
Constante de Boltzman	$k_B = \dfrac{R}{N_A}$	$1.380\,650\,5\ (24) \times 10^{-23}$ J/K
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c}$	$2.426\,310\,238\ (16) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788 \ldots \times 10^9$ N·m^2/C^2 (exacto)
Masa de deuterón	m_d	$3.343\,583\,35\ (57) \times 10^{-27}$ kg $2.013\,553\,212\,70\ (35)$ u
Masa de electrón	m_e	$9.109\,382\,6\ (16) \times 10^{-31}$ kg $5.485\,799\,094\,5\ (24) \times 10^{-4}$ u $0.510\,998\,918\ (44)$ MeV/c^2
Electrón volt	eV	$1.602\,176\,53\ (14) \times 10^{-19}$ J
Carga elemental	e	$1.602\,176\,53\ (14) \times 10^{-19}$ C
Constante de gas	R	$8.314\,472\ (15)$ J/mol·K
Constante gravitacional	G	$6.674\,2\ (10) \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2
Relación frecuencia–voltaje de Josephson	$\dfrac{2e}{h}$	$4.835\,978\,79\ (41) \times 10^{14}$ Hz/V
Cuanto de flujo magnético	$\Phi_0 = \dfrac{h}{2e}$	$2.067\,833\,72\ (18) \times 10^{-15}$ T·m^2
Masa de neutrón	m_n	$1.674\,927\,28\ (29) \times 10^{-27}$ kg $1.008\,664\,915\,60\ (55)$ u $939.565\,360\ (81)$ MeV/c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \dfrac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\,783\,43\ (43) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A (exacto)
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\,187\,817 \ldots \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2 (exacto)
Constante de Planck	h	$6.626\,069\,3\ (11) \times 10^{-34}$ J·s
	$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,68\ (18) \times 10^{-34}$ J·s
Masa de protón	m_p	$1.672\,621\,71\ (29) \times 10^{-27}$ kg $1.007\,276\,466\,88\ (13)$ u $938.272\,029\ (80)$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1.097\,373\,156\,852\,5\ (73) \times 10^7$ m^{-1}
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$ m/s (exacto)

Nota: Estas constantes son los valores recomendados en 2002 por CODATA, en términos de un ajuste de mínimos cuadrados de los datos provenientes de diferentes mediciones. Para una lista más completa, consulte P.J. Mohr y B.N. Taylor, "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants; 2002". *Rev. Mod. Phys.* **77**:1, 2005.

[a] Los números entre paréntesis para los valores representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.

Datos del sistema solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}
Plutón[a]	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—

[a] En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Plutón ahora se define como “planeta enano” (como el asteroide Ceres).

Datos físicos usados con frecuencia

Distancia promedio Tierra–Luna	3.84×10^{8} m
Distancia promedio Tierra–Sol	1.496×10^{11} m
Radio promedio de la Tierra	6.37×10^{6} m
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	1.20 kg/m^3
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	1.00×10^{3} kg/m^3
Aceleración en caída libre	9.80 m/s^2
Masa de la Tierra	5.98×10^{24} kg
Masa de la Luna	7.36×10^{22} kg
Masa del Sol	1.99×10^{30} kg
Presión atmosférica estándar	1.013×10^{5} Pa

Nota: Estos valores son los utilizados en el texto.

Algunos prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hecto	h
10^{-18}	atto	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

Abreviaturas estándar y símbolos para unidades

Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
A	ampere	K	kelvin
u	unidad de masa atómica	kg	kilogramo
atm	atmósfera	kmol	kilomol
Btu	unidad térmica británica	L	litro
C	coulomb	lb	libra
°C	grado Celsius	al	año luz
cal	caloría	m	metro
d	día	min	minuto
eV	electrón volt	mol	mol
°F	grado Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
pie	pie	rad	radián
G	gauss	rev	revolución
g	gramo	s	segundo
H	henry	T	tesla
h	hora	V	volt
hp	caballo de potencia	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
pulg	pulgada	año	año
J	joule	Ω	ohm

Símbolos matemáticos usados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
$=$	es igual a
$\equiv$	se define como
$\neq$	no es igual a
$\propto$	es proporcional a
$\sim$	está en el orden de
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$\gg (\ll)$	es mucho mayor (menor) que
$\approx$	es aproximadamente igual a
Δx	el cambio en x
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	la suma de todas las cantidades x_i desde $i = 1$ hasta $i = N$
$\|x\|$	la magnitud de x (siempre una cantidad no negativa)
$\Delta x \to 0$	Δx tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	la derivada de x respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	la derivada parcial de x respecto a t
$\int$	integral

Conversiones

Longitud

1 pulg = 2.54 cm (exacto)
1 m = 39.37 pulg = 3.281 pies
1 pie = 0.304 8 m
12 pulg = 1 pie
3 pies = 1 yd
1 yd = 0.9144 m
1 km = 0.621 mi
1 mi = 1.609 km
1 mi = 5 280 pies
1 μm = 10^{-6} m = 10^{3} nm
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 $pies^2$
1 pie^2 = 0.092 9 m^2 = 144 $pulg^2$
1 $pulg^2$ = 6.452 cm^2

Volumen

1 m^3 = 10^6 cm^3 = 6.102×10^4 $pulg^3$
1 pie^3 = 1 728 $pulg^3$ = 2.83×10^{-2} m^3
1 L = 1 000 cm^3 = 1.057 6 qt = 0.035 3 pie^3
1 pie^3 = 7.481 gal = 28.32 L = 2.832×10^{-2} m^3
1 gal = 3.786 L = 231 $pulg^3$

Masa

1 000 kg = 1 t (tonelada métrica)
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.66×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2

Fuerza

1 N = 0.224 8 lb
1 lb = 4.448 N

Velocidad

1 mi/h = 1.47 pies/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
1 m/s = 100 cm/s = 3.281 pies/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 pies/s

Aceleración

1 m/s^2 = 3.28 pies/s^2 = 100 cm/s^2
1 pie/s^2 = 0.304 8 m/s^2 = 30.48 cm/s^2

Presión

1 bar = 10^5 N/m^2 = 14.50 lb/$pulg^2$
1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
1 atm = 14.7 lb/$pulg^2$ = 1.013×10^5 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.45×10^{-4} lb/$pulg^2$

Tiempo

1 año luz = 365 días = 3.16×10^7 s
1 día = 24 h = 1.44×10^3 min = 8.64×10^4 s

Energía

1 J = 0.738 pie·lb
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 252 cal = 1.054×10^3 J
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.60×10^6 J

Potencia

1 hp = 550 pies·lb/s = 0.746 kW
1 W = 1 J/s = 0.738 pie·lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

Algunas aproximaciones útiles para problemas de estimación

1 m ≈ 1 yd
1 kg ≈ 2 lb
1 N ≈ $\frac{1}{4}$ lb
1 L ≈ $\frac{1}{4}$ gal
1 m/s ≈ 2 mi/h
1 año ≈ $\pi \times 10^7$ s
60 mi/h ≈ 100 pies/s
1 km ≈ $\frac{1}{2}$ mi

Nota: Véase la tabla A.1 del apéndice A para una lista más completa.

El alfabeto griego

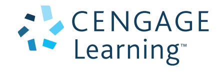
Alfa	Α	α	Iota	Ι	ι	Rho	Ρ	ρ
Beta	Β	β	Kappa	Κ	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	Τ	τ
Delta	Δ	δ	Mu	Μ	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	Ε	ϵ	Nu	Ν	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Ζ	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	Χ	χ
Eta	Η	η	Omicron	Ο	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

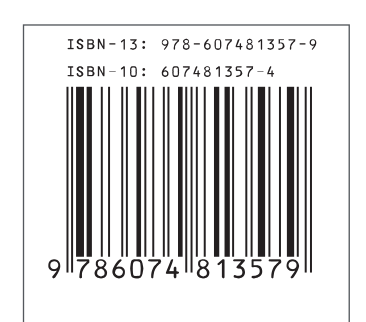
Nueva edición de la ya conocida obra de Raymond A. Serway y John W. Jewett Jr. Esta séptima edición, además de conservar la gran capacidad didáctica que la ha caracterizado, cuenta con el soporte de herramientas tecnológicas que proveen de más apoyo al usuario durante el desarrollo del curso.

Características

- En el capítulo 2 permanece la sección sobre la estrategia para resolver problemas.
- A lo largo de los capítulos 3 a 5 se utiliza explícitamente dicha estrategia, para que el alumno aprenda a emplearla.
- Los capítulos 7 y 8 se reorganizaron completamente para preparar al estudiante para el planteamiento de energía que se hace a través del libro.
- Una nueva sección en el capítulo 9 enseña al estudiante cómo analizar sistemas deformables con la ecuación de la conservación de la energía y el teorema de impulso-momentum.
- Aproximadamente el 23% de los problemas son nuevos.
- Se mantiene la sección *¿Qué pasaría si?* en los ejemplos resueltos, para ofrecer una variación al ejemplo que estimule la capacidad de razonamiento del estudiante.

Estas características, entre muchas otras que descubrirá al interior del texto, aunadas al lenguaje claro y accesible con el que desarrolla los temas, lo harán sin duda alguna, su libro de física favorito; tanto si usted es docente como si es estudiante de alguna licenciatura en el área de ingeniería o ciencias.





http://latinoamerica.cengage.com